



ACADEMIA ROMÂNĂ

SCOSAAR

Anexa nr.6

## **REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE\***

**TITLUL : COMBINATORIAL ALGEBRA AND GEOMETRY**

**Domeniul de abilitare: *MATEMATICĂ***

**Autor: DINU RODICA ANDREEA**

\*în cazul în care teza va fi redactată într-o limbă străină, textul în limba română va fi adaptat

## Rezumat

Această teză se situează la intersecția dintre algebra comutativă, geometria algebrică și combinatorică. Interacțiunea dintre aceste domenii ne permite să studiem probleme geometrice folosind atât instrumente algebrice, cât și combinatoriale. În practică, structurile combinatoriale codifică adesea invarianții discreți ai varietăților algebrice pe care le studiem, în timp ce algebra comutativă oferă fundamentul algebric necesar. Această abordare ajută la transpunerea modelelor geometrice sau statistice complexe în întrebări algebrice concrete, ceea ce în cele din urmă ne permite să demonstrăm conjecturi importante.

Capitolul 1 se bazează pe geometria modelelor grafice Gaussiene. Mai precis, acesta este centrat în jurul a două conjecturi pe care le-am demonstrat împreună cu colaboratorii mei. Prima este o conjectură datorată lui Sturmfels și Uhler, referitoare la gradul varietății provenite din modelul grafic gaussian asociat unui ciclu. Aceasta a fost demonstrată într-un articol, împreună cu Mateusz Michałek și Martin Vodička. O demonstrăm folosind o nouă abordare bazată pe teoria intersecțiilor pentru varietatea cuadricelor complete, inițiată de Michałek, Monin și Wiśniewski. Ideea aceasta este puternic inspirată de lucrările lui June Huh privind relațiile dintre polinomul cromatic și gradele spațiilor liniare reciproce. A doua conjectură este datorată lui Drton, Sturmfels și Sullivan, privind gradul de verosimilitate maximă (ML-degree) pentru modelul menționat mai sus. Aceasta a fost demonstrată în două articole, unul scris cu Carlos Amendola, Mateusz Michałek și Martin Vodička, iar al doilea cu Martin Vodička. Din perspectiva teoriei intersecțiilor, trecerea de la grad la gradul de verosimilitate maximă corespunde trecerii de la intersecții generice la intersecții reziduale. Această distincție este profund înrădăcinată în geometrie și era deja evidentă în secolul al XIX-lea: în problema conicelor a lui Steiner, soluția incorectă a lui Steiner s-a bazat pe intersecții generice și a fost corectată ulterior de Jonquières, Chasles și Berner.

Capitolul 2 se bazează pe aplicații ale teoriei intersecțiilor. În ultimii ani, teoria intersecțiilor algebrice a fost aplicată în mai multe ramuri ale matematicii care anterior erau considerate distincte. În acest capitol, propunem o abordare unificată a rezultatelor din teoria polinoamelor cromatice (ale lui Adiprasito, Huh, Katz), a gradelor de verosimilitate maximă în statistica algebrică (Drton, Manivel, Monin, Sturmfels, Uhler, Wiśniewski), a caracteristicilor Euler ale varietăților determinanțiale (Dimca, Papadima), a numerelor caracteristice (Aluffi, Schubert, Vakil) și a gradului în cazul programării semidefinite (Bothmer, Nie, Ranestad, Sturmfels). Analiza noastră folosește teoria intersecțiilor pe o clasă specifică de varietăți, numite varietăți de forme complete. Aceasta se bazează pe o lucrare scrisă în colaborare cu Mateusz Michałek și Tim Seynnaeve.

Capitolul 3 se bazează pe trei articole scrise împreună cu Martin Vodička în domeniul geometriei torice. Considerăm varietatea algebrică asociată unui arbore filogenetic, numită

varietate filogenetică. Pentru modelele bazate pe grupuri (caz în care varietatea depinde de un grup abelian și de un arbore filogenetic), această varietate este torică. Normalitatea este o proprietate foarte importantă, deoarece majoritatea rezultatelor din geometria torică sunt valabile doar pentru varietăți normale. Prima parte a acestui capitol este dedicată unei clasificări complete a grupurilor abeliene pentru care varietatea filogenetică asociată unui arbore de tip tripod (arbore cu un singur vârf interior și trei muchii) este normală. Mai mult, datorită unui rezultat al lui Sullivan, rezultatul nostru este valabil, de fapt, pentru orice arbore trivalent. Cea de-a doua parte a acestui capitol este dedicat studiului gradelor algebrice ale varietăților filogenetice provenite din modele bazate pe grupuri. Le numim grade filogenetice. În literatură, gradele filogenetice erau cunoscute doar pentru anumite exemple computaționale. Demonstrăm formule concrete pentru gradele filogenetice ale varietăților pentru câteva grupuri abeliene de cardinal mic, iar arborele este un arbore de tip  $n$ -claw (adică un arbore cu un singur vârf interior și  $n$  muchii). De asemenea, investigăm gradele filogenetice ale varietății proiective asociate modelului binar Jukes-Cantor (adică atunci când grupul este  $\mathbb{Z}_2$ ) și arborele este unul arbitrar. Alături de modelul cu 3 parametri Kimura, acesta este unul dintre cele mai semnificative modele statistice din biologie. Propunem două abordări combinatoriale diferite pentru calcularea gradului filogenetic pentru modelul binar Jukes-Cantor și un arbore arbitrar.

Capitolul 4 se bazează pe două articole, scrise împreună cu Nasrin Altafi, Sara Faridi, Shreedevi K. Masuti, Rosa M. Miró-Roig, Alexandra Seceleanu și Nelly Villamizar. Lucrările noastre investighează în principal proprietățile Lefschetz slabă și tare. Motivate inițial de Teorema Lefschetz tare din geometria algebrică, aceste proprietăți impun existența unor forme liniare care acționează ca aplicații injective sau surjective între diferite componente graduate ale unei algebre. Prima parte a capitolului reprezintă un studiu sistematic al proprietăților cheie ale  $K$ -algebrelor Artinian Gorenstein care au generatori duali Macaulay binomiali. Pentru o codimensiune arbitrară, stabilim condiții suficiente în care proprietatea Lefschetz slabă este îndeplinită și arătăm că aceste condiții sunt optimale. A doua parte a capitolului este dedicată construirii unor noi familii de  $K$ -algebre graduate Artinian Gorenstein de codimensiune arbitrară care au generatori duali Macaulay binomiali și care satisfac proprietatea Lefschetz slabă sau tare.

Capitolul 5 se bazează pe două articole scrise împreună cu Francesco Navarra, în domeniul teoriei idealelor de tip poliomino. Studiul proprietăților algebrice ale acestor ideale a început în anul 2012, când Ayesha Asloob Qureshi a introdus acest ideal binomial numit ideal poliomino. Între timp, studiul idealelor poliomino a devenit un domeniu de cercetare în interiorul algebrei comutative combinatoriale. Prima parte a acestui capitol se bazează pe înțelegerea proprietății de tip König pentru idealele poliomino. Demonstrăm că idealele poliomino asociate unor poliomino de tip closed path au această proprietate și, drept consecință, aplicăm acest rezultat pentru calculul modului canonic, însă pentru o subclasă de poliomino, și anume poliomino de tip circle closed path. A doua parte a acestui capitol este dedicată demonstrării conjecturii lui Rinaldo și Romeo pentru poliomino de tip grid. Anume,

demonstrăm că pentru grid poliomino,  $h$ -polinomul inelului de coordonate asociat coincide cu polinomul rook al poliomino-ului, și deci, regularitatea inelului de coordonate coincide cu numărul rook, i.e., numărul maxim de ture care pot fi așezate în poziție de neatac în poliomino.

Ultimul capitol este dedicat planului meu de dezvoltare a carierei științifice și academice.