



TEZĂ ABILITARE

**Metrici speciale pe varietăți non-Kähler complexe
compacte**

Ionuț Chiose

Domeniul fundamental: Matematică și științele naturii

Domeniul de abilitare: Matematică

REZUMAT

Rezumat

Existența unei metrci Kähler, deși centrală în geometria complexă, impune constrângeri profunde și extrem de restrictive asupra unei varietăți complexe compacte. Un peisaj vast de varietăți complexe semnificative și care apar în mod natural se află în afara domeniului Kähler. Înțelegerea structurii, clasificării și proprietatilor intrinseci ale acestor varietăți non-Kähler rămâne o provocare fundamentală.

În geometria complexă, pe o varietate complexă, o metrică Kähler este o formă $(1, 1)$ pozitiv definită, nedegenerată, ω , astfel încât ea este d -inchisa. Așadar, o metrica Kähler satisface două condiții:

$$\omega > 0 \tag{0.0.1}$$

și

$$d\omega = 0 \tag{0.0.2}$$

O abordare posibilă a lumii non-Kähler este relaxarea uneia dintre cele două condiții 0.0.1 sau 0.0.2 de mai sus.

În primul caz, dacă dorim să slăbim ecuația $d\omega = 0$, dar păstrăm condiția $\omega > 0$, am putea înlocui aceasta cu condiții precum $\partial\bar{\partial}\omega = 0$ sau $\partial\bar{\partial}\omega^{n-2} = 0$ sau $d\omega^{n-1} = 0$, unde n este dimensiunea varietății. Această abordare conduce la diverse noțiuni, incluzând metrice *SKT* (Strongly Kähler with Torsion), metrice astheno-Kähler, metrice balansate etc.

În al doilea caz, când relaxăm condiția $\omega > 0$, dar păstrăm condiția $d\omega = 0$, am putea înlocui aceasta cu $\omega \geq 0$, adică forma $(1, 1)$ ω poate fi degenerată, putând avea anumite valori proprii nule. Aceasta conduce la noțiunea de *rang Kähler* al unei varietăți complexe compacte. Această noțiune a fost introdusă inițial de Harvey și Lawson ca o cantitate destinată să măsoare cât de departe se află o suprafață compactă (non-Kähler) de a fi Kähler.

Având în vedere punctele menționate mai sus, teza noastră este împărțită în două:

În prima parte a acestei teze, obținem mai multe rezultate legate de metrice care

nu sunt neapărat d -inchise.

În primul capitol, arătăm că o varietate care se află în clasa Fujiki \mathcal{C} și care admite o metrică SKT este de fapt Kähler. Acest rezultat implică faptul că, pe o varietate complexă compactă din clasa Fujiki \mathcal{C} care nu este Kähler, există un curent $i\partial\bar{\partial}$ -exact nenul de bidimensiune $(1, 1)$. Acest rezultat are două implicații. Mai întâi, confirmă, în cazul varietăților din clasa Fujiki \mathcal{C} , următoarea conjectură: o varietate balansată și care admite o metrică SKT este de fapt Kähler. În al doilea rând, implică faptul că, pe o varietate complexă compactă de dimensiune 3 din clasa Fujiki \mathcal{C} și care nu e Kähler, există o curbă care face parte din curentul $i\partial\bar{\partial}$ -exact. Ingredientul principal în demonstrație este o aplicare a teoremei lui Stokes pentru anumite forme diferențiale particulare, combinată cu rezultatul principal din J.-P. Demailly, M. Păun, *Annals of Math.*, 2004.

În al doilea capitol, arătăm că o varietate proiectivă de dimensiune n este unirulată dacă și numai dacă admite o metrică balansată ω^{n-1} astfel încât $\omega^{n-1} \cdot K_X < 0$. Arătăm că un rezultat similar este valabil pentru varietățile Kähler de dimensiune 3. Ingredientele principale ale acestor demonstrații sunt teoremele de dualitate dintre conurile *nef* și conurile *pseudoeffective* pe varietățile complexe compacte balansate, precum și rezultatul principal din S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun, T. Peternell, *J. Algebraic Geom.*, 2013. Această lucrare a fost motivată de următoarea conjectură: o varietate complexă compactă proiectivă X este unirulată dacă și numai dacă există un fibrat în drepte ample H pe X astfel încât $H^{n-1} \cdot K_X < 0$.

În al treilea capitol, studiem condiția $\mathcal{B} = \mathcal{G}$, unde $\mathcal{B} \subset H_{BC}^{n-1, n-1}(X, \mathbb{R})$ este conul balansat, iar $\mathcal{G} \subset H_A^{n-1, n-1}(X, \mathbb{R})$ este conul Gauduchon al unei varietăți complexe compacte de dimensiune n . Arătăm că egalitatea $\mathcal{B} = \mathcal{G}$ nu este valabilă pe multe spații twistor, arătând astfel că o conjectură a lui Fu și Xiao, *Adv. Math.*, 2014 (care afirmă că pe o varietate complexă compactă balansată avem $\mathcal{B} = \mathcal{G}$) nu este adevărată. Aratăm că egalitatea $\mathcal{B} = \mathcal{G}$ este valabilă pe varietățile Moishezon. Mai mult, aratăm că o varietate complexă compactă de dimensiune 3 pe care conul balansat este egal cu conul Gauduchon și care admite o metrică SKT este de fapt Kähler. Pentru acest rezultat, arătăm că o anumită clasă Bott-Chern este atât *nef*, cât și de auto-intersecție pozitivă, și apoi folosim rezultatele principale din I. Chiose, *J. Geom. Anal.*, 2016 și M. Păun, *Math. Ann.*, 1998.

În al patrulea capitol, arătăm că o varietate astheno-Kähler trebuie să satisfacă o anumită restricție cohomologică, și anume: fie $H_{BC}^{0,1}(X)$ grupul de cohomologie Bott-Chern de bigrad $(0, 1)$ al unei varietăți astheno-Kähler, și $H_A^{0,1}(X)$ grupul de

cohomologia Aeppli de bigrad $(0, 1)$. Atunci

$$\dim H_{BC}^{0,1}(X) \leq \dim H_A^{0,1}(X) \leq \dim H_{BC}^{0,1}(X) + 1$$

Rezultatul-cheie in demonstrație este teorema lui Gauduchon care afirmă că, dată o metrică Hermitiană g pe o varietate complexă compactă, există $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție C^∞ astfel încât $i\partial\bar{\partial}e^f g^{n-1} = 0$. Studiem apoi câteva exemple relevante. Pentru a face aceasta, trebuie să demonstrăm o formulă Kuneth slabă pentru grupurile de cohomologie Aeppli. Notăm că Jost și Yau (autorii care au introdus metricile astheno-Kähler în J. Jost, S.-T. Yau, *Acta Math.*, 1993) au demonstrat, de asemenea, o condiție cohomologică satisfăcută de varietățile astheno-Kähler, și anume că morfismul natural $H_{BC}^{1,0}(X) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{1,0}(X)$ este surjectiv. Condiția noastră cohomologică este independentă de condiția Jost-Yau, adică construim varietăți care satisfac condiția Jost-Yau, dar nu o satisfac pe a noastră.

În al cincilea capitol, caracterizăm metricile Hermitiene care lasă neschimbat volumul total Monge-Ampère, adică metricile g care satisfac

$$\int_X (g + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = \int_X g^n$$

pentru orice $\varphi \in PSH(X, g)$. Arătăm că aceste metrici satisfac $i\partial\bar{\partial}g^k = 0, \forall k = \overline{1, n}$. Acest rezultat a fost conjecturat în S. Dinew, V. Guedj, A. Zeriahi, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2016.

Această primă parte se bazează pe I. Chiose, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2014, I. Chiose, R. Răşdeaonu, I. Şuvaina, *Comm. Anal. Geom.*, 2019, I. Chiose, R. Răşdeaonu, I. Şuvaina, *Ann. Mt. Pura. Appl.*, 2022, I. Chiose, R. Răşdeaonu, *Ann. Global Anal. Geom.*, 2023 și I. Chiose, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 2024.

În a doua parte, discutăm noțiunea de rang Kähler al unei varietăți complexe compacte. Generalizăm definiția lui Harvey-Lawson, adică definim rangul Kähler al unei varietăți complexe compacte X ca

$$Kr(X) = \max\{k \mid \exists \omega \in C_{1,1}^\infty(X, \mathbb{R}), \omega \geq 0, \omega^k \neq 0, d\omega = 0\}$$

adică este rangul maxim pe care îl poate atinge o formă $(1, 1)$ pozitivă d -inchisă pe X .

În capitolul șase, enunțăm câteva proprietăți ale rangului Kähler și arătăm că, pentru suprafețele complexe compacte, există o corespondență între formele pozitive închise pe o suprafața non-Kähler și cele de pe blow-up-ul într-un punct. Apoi

arătăm că, în anumite condiții suplimentare, o varietate cu rang Kähler egal cu n este de fapt Kähler. Pentru a face aceasta, demonstrăm un caz particular al unei conjecturi a lui Grauert-Riemenschneider, care afirma ca o clasa *nef* cu auto-intersecție strict pozitivă este *big*.

În capitolul șapte, obținem o clasificare a suprafețelor complexe compacte de rang Kahler egal cu 1. Acestea sunt fie suprafețe eliptice, fie unele suprafețe Hopf, fie suprafețe Inoue. De asemenea, obținem o demonstrație a invarianței bimeromorfe a rangului Kähler pentru suprafețele complexe compacte. Rezultatele-cheie pe care le folosim sunt o teoremă a lui Marinescu și Dinh din *Invent. Math.*, 2006 (conform căreia un capăt hyper 1-concav poate fi compactificat), și rezultatul important al lui Brunella din *Comment. Math. Helv.*, 2013.

A doua parte se bazează pe I. Chiose, M. Toma, *Amer. J. Math.*, 2013 și I. Chiose, *J. Geom. Anal.*, 2016.