



ACADEMIA ROMÂNĂ

**Școala de Studii Avansate a Academiei Române
Institutul de Matematică „Simion Stoilow”**

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

**PROBLEME INVERSE CU APLICAȚII LA DIFUZIA ȘI
TRANSPORTUL ÎN MEDII POROASE**

**CONDUCĂTOR DE DOCTORAT:
Acad. GABRIELA MARINOSCHI**

**DOCTORAND:
TUDOR BOACA**

2025

Cuprins

1	INTRODUCERE	4
1.1	Structura tezei și rezultate principale	4
1.2	Câteva rezultate de analiză funcțională	6
1.2.1	Spații Banach	7
1.2.2	Spații Hölder	7
1.2.3	Spații Lebesgue și Sobolev	7
1.2.4	Funcții cu valori vectoriale	7
1.2.5	Problema Cauchy: abordare variațională	8
1.3	Notatii	8
2	IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE ÎN PRIMUL MODEL NELINIAR DE INVAZIE CU O FAZĂ A FILTRATULUI DE NOROI	9
2.1	Primul model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi	9
2.2	Problema inversă	12
2.3	Teorema de existență a soluției sistemului de stare	15
2.4	Teorema de existență a soluției problemei (P)	17
2.5	Sistemul în variații de ordinul întâi	17
2.6	Sistemul dual și condiția de optimalitate de ordinul întâi . . .	18
2.7	Condiția suficientă de optimalitate de ordinul doi	19
3	IDENTIFICAREA PERMEABILITĂȚII UNUI REZERVOR DE PETROL ÎN PRIMUL MODEL NELINIAR DE IN- VAZIE CU O FAZĂ A FILTRATULUI DE NOROI	20
3.1	Introducere	20
3.2	Teorema de existență a soluției sistemului de stare	22
3.3	Teorema de existență a soluției problemei (P)	22

3.4	Sistemul în variații de ordinul întâi	23
3.5	Sistemul dual și condiția de optimalitate de ordinul întâi . . .	24
3.6	Sistemul în variații de ordinul doi	26
3.7	Al doilea dual și condiția suficientă de optimalitate	26
3.8	Rezultate numerice	27
4	PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE CU O FAZĂ A FILTRATULUI DE NOROI	28
4.1	Al doilea model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroii	28
4.2	Identificarea permeabilității deteriorate	30
4.2.1	Teorema de existență a soluției sistemului de stare . . .	30
4.2.2	Teorema de existență a soluției problemei de mini- mizare (4.16)	31
4.2.3	Sistemul în variații de ordinul întâi	31
4.2.4	Sistemul dual și condiția necesară de optimalitate . . .	33
4.3	Identificarea valorii minime a permeabilității unui rezervor de petrol	34
4.3.1	Teorema de existență a soluției sistemului de stare . . .	35
4.3.2	Teorema de existență a soluției problemei de mini- mizare (4.37)	35
4.3.3	Sistemul în variații de ordinul întâi	36
4.3.4	Sistemul dual și condiția necesară de optimalitate . . .	37
4.3.5	Rezultate numerice	38
	Directii viitoare de cercetare	38

Articole publicate si participari la conferinte in timpul stagiului doctoral	38
Bibliografie	39

1 INTRODUCERE

În această teză ne ocupăm de câteva probleme inverse referitoare la fenomenul de invazie a filtratului de noroi de foraj într-un rezervor de petrol (fenomenul de invazie). Punctul de plecare în elaborarea acestei teze constă în două articole pe care le-am publicat în anul 2017 în *Journal of Petroleum Science and Engineering* (actualmente *Geoenergy Science and Engineering*) [6], [7].

Pentru a studia fenomenul de invazie prezentăm în Capitolul 2 primul model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj. Acest model constă dintr-o problemă mixtă pentru o ecuație parabolică de dimensiune 1 (care modelează difuzia filtratului de noroi în rezervorul de petrol) și o problemă Cauchy pentru o ecuație diferențială de ordinul întâi (care modelează formarea turtei de noroi de foraj). Cele două ecuații ale sistemului de stare sunt cuplate prin așa numita "rată de filtrare" [16], notată în teză prin q . Referitor la acest model prezentăm două probleme de identificare (vezi Capitolele 2 și 3). În Capitolul 4 introducem al doilea model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj [5]. În acest model ținem seama de variația permeabilității rezervorului de petrol datorată fenomenului de invazie. În acest context introducem așa numita permeabilitate deteriorată. În Capitolul 4 al acestei teze prezentăm 2 probleme de identificare referitoare la acest model.

1.1 Structura tezei și rezultate principale

În această subsecțiune prezentăm pe scurt problemele inverse de care ne ocupăm și rezultatele pe care le-am obținut. Subsecțiunea 1.2 conține definiții, notații și teoreme standard de analiză funcțională pe care le-am utilizat în

CAPITOLUL 1. INTRODUCERE

această teză.

Capitolul 2 are la bază articolul [3].

În acest capitol studiem o problemă inversă (o problemă de identificare) referitoare la primul model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj. În problema inversă ne ocupăm de identificarea ratei de invazie u plecând de la valori experimentale ale concentrației filtratului de noroi de foraj la timpul final T al fenomenului de invazie.

Principalele rezultate ale acestui capitol sunt:

- 1) demonstrăm existența și unicitatea soluției sistemului de stare;
- 2) demonstrăm că problema de minimizare are cel puțin o soluție și obținem condiția de optimalitate de ordinul întâi;
- 3) obținem condiția suficientă de optimalitate de ordinul 2.

Capitolul 3 are la bază articolele [6] și [7].

În problema inversă de care ne ocupăm aici studiem identificarea permeabilității unui rezervor de petrol $k \in [k_m, k_M]$, permeabilitate care este soluția următoarei probleme de minimizare:

$$\inf_{k \in [k_m, k_M]} \frac{1}{2} \|y^k(T, \cdot) - y_{ref}(\cdot)\|^2,$$

problemă referitoare la primul model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj (sistemul de stare).

Principalele rezultate ale acestui capitol sunt următoarele:

- 1) demonstrăm existența și unicitatea soluției sistemului de stare;
- 2) demonstrăm că problema de minimizare are cel puțin o soluție și obținem condiția de optimalitate de ordinul întâi;
- 3) obținem condiția suficientă de optimalitate de ordinul 2.

Capitolul 4 are la bază articolele [5] și [4].

În acest capitol ne ocupăm cu două probleme de identificare referitoare la al

CAPITOLUL 1. INTRODUCERE

doilea model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj. În prima problemă dorim să identificăm permeabilitatea deteriorată $\chi \in U$ prin rezolvarea următoarei probleme de minimizare:

$$\inf_{\chi \in U} \frac{1}{2} \|c^\chi(T, \cdot) - c_{ref}(\cdot)\|_{L^2(1,L)}^2$$

referitoare la al doilea model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj. În a doua problemă de identificare impunem următoarea permeabilitate deteriorată

$$\chi(\tau) = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha)(1 - \tau)^2},$$

în care determinăm scalarul $\alpha \in [k_c, 1]$ prin rezolvarea următoarei probleme de minimizare:

$$\inf_{\alpha \in [k_c, 1]} \frac{1}{2} \|c^\alpha(T, \cdot) - c_{ref}(\cdot)\|_{L^2(1,L)}^2.$$

Sistemul de stare este același cu cel din problema precedentă.

Principalele rezultate ale acestui capitol sunt următoarele:

- 1) propunem un model neliniar al fenomenului de invazie (al doilea model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj);
- 2) demonstrăm existența și unicitatea soluției sistemului de stare;
- 3) demonstrăm că fiecare din cele două probleme de minimizare are cel puțin o soluție și obținem condițiile de optimalitate de ordinul întâi.

1.2 Câteva rezultate de analiză funcțională

În această subsecțiune prezentăm definiții, notații și rezultate matematice standard pe care le utilizăm în această teză.

CAPITOLUL 1. INTRODUCERE

1.2.1 Spații Banach

Aici prezentăm teorema de punct fix a lui Schauder, definiția funcțiilor derivabile Gâteaux și definim tripletul variațional (tripletul Gelfand).

1.2.2 Spații Hölder

Aici prezentăm definiția funcțiilor continue Hölder cu exponent γ , introducem spațiul Hölder $C^{m,\gamma}(I)$, și spațiile Hölder parabolice $C^{\frac{\gamma}{2},\gamma}(Q)$ și $C^{1+\frac{\gamma}{2},2+\gamma}(Q)$.

1.2.3 Spații Lebesgue și Sobolev

În această subsecțiune introducem spațiile Lebesgue $L^p(\Omega)$, unde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă și mărginită cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de regulată și $1 \leq p \leq \infty$, spațiile Sobolev $W^{k,p}(I)$, $I = (1, L)$, $L > 1$, spațiile Hilbert $H^k(I) = W^{k,2}(I)$ și enunțăm lema lui Stampacchia. ([13], p. 289) și teorema lui Arzelà ([8], p. 111, [17], p. 85).

1.2.4 Funcții cu valori vectoriale

Fie X un spațiu vectorial normat real cu norma $\|\cdot\|_X$. O funcție $f : [0, T] \rightarrow X$ se numește funcție cu valori vectoriale. În această subsecțiune definim spațiul funcțiilor continue cu valori vectoriale $C([0, T]; X)$, spațiul Lebesgue-Bochner $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$ și derivata slabă f' a unei funcții $f \in L^1(0, T; X)$.

Fie V un spațiu Banach reflexiv cu dualul V' , H un spațiu Hilbert și $V \subset H$, cu injecția continuă și densă. Identificăm H cu dualul său H' și considerăm tripletul variațional $V \subset H \subset V'$. La sfârșitul acestei subsecțiuni enunțăm teorema Lions-Aubin's [12] și teorema Ascoli-Arzelà's [11], p. 55.

CAPITOLUL 1. INTRODUCERE

1.2.5 Problema Cauchy: abordare variațională

În această secțiune enunțăm teorema lui Lions, teoremă pe care o utilizăm de mai multe ori în această teză.

1.3 Notății

Vom utiliza următoarele notații: μ_f este viscozitatea filtratului de noroi ($Pa \cdot s$); ρ_c este densitatea turtei de noroi (kg/m^3); Φ este porozitatea rezervorului de petrol (adimensională, $0 < \Phi < 1$); Φ_c este porozitatea turtei de noroi (adimensională, $0 < \Phi_c < 1$); ξ este grosimea turtei de noroi (m); c (sau C) este concentrația filtratului de noroi de foraj (kg/m^3); C_f este concentrația filtratului de noroi de foraj în noroiul de foraj (kg/m^3); c_{ref} (sau C_{ref}) o valoare de referință a concentrației (kg/m^3); c_s este concentrația de particule solide din noroiul de foraj (kg/m^3); c_0 (sau C_0) este concentrația inițială a filtratului de noroi de foraj (kg/m^3); D este coeficientul de difuzie (m^2/s); h este grosimea rezervorului de petrol (m); k este permeabilitatea rezervorului de petrol (m^2); k_0 este permeabilitatea rezervorului de petrol în zona necontaminată (m^2); k_c este permeabilitatea turtei de noroi (m^2); m_c este masa particulelor depozitate pe peretele sondei (kg); p_e este presiunea rezervorului de petrol (Pa); S_{wir} este saturația în apă ireductibilă (adimensională); S_{or} este saturația în apă reziduală (adimensională); q este rata de invazie (m^3/s); x este distanța radială față de axa sondei (m); x_w este raza găurii de sondă (m); x_e este raza de drenaj (m).

2 IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE ÎN PRIMUL MODEL NELINIAR DE IN- VAZIE CU O FAZĂ A FILTRATULUI DE NOROI

În acest capitol studiem o problemă de identificare referitoare la primul model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj. Acest model îl prezentăm pe scurt în Secțiunea 2.1, utilizând lucrările [16], [9].

2.1 Primul model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi

Modelul fenomenului de invazie pe care îl utilizăm în acest capitol este format din două părți: prima parte descrie creșterea turtei de noroi iar a doua parte descrie dispersia (invazia) filtratului de noroi de foraj în rezervorul de petrol (vezi [16], [9]).

a. Creșterea grosimii turtei de noroi

Prin utilizarea unor ipoteze simplificatoare, în [16] se arată că grosimea turtei de noroi ξ satisface următoarea problemă:

$$\frac{d\xi}{dt} = c_q \frac{q(\xi)}{x_w - \xi}, \quad (2.1)$$

$$\xi(0) = 0, \quad (2.2)$$

unde

$$q(\xi) = q_0 \frac{\frac{k_c}{k} \ln \frac{x_e}{x_w}}{\frac{k_c}{k} \ln \frac{x_e}{x_w} - \ln(1 - \frac{\xi}{x_w})}, \quad (2.3)$$

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

$$q_0 = \frac{2\pi kh \Delta p}{\mu_f \ln \frac{x_e}{x_w}}, \quad (2.4)$$

$$c_q = \frac{(1 - \Phi) c_s}{2\pi h (1 - \Phi_c) \rho_c} \quad (2.5)$$

Datorită unui considerent de ordin fizic impunem următoarea condiție:

$$0 \leq \xi \leq \xi_M < x_w - x_d. \quad (2.6)$$

b. Dispersia filtratului de noroi de foraj în rezervorul de petrol

În [16] se arată că dispersia C a filtratului de noroi de foraj în rezervorul de petrol este soluția următoarei probleme mixte:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x D(\xi) \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{q(\xi)}{2\pi x h \Phi (1 - S_{wir} - S_{or})} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (2.7)$$

pentru $(t, x) \in (0, T) \times (x_w, x_e)$, $T > 0$, $x_w < x_e$,

$$C(0, x) = C_0(x), \quad x \in (x_w, x_e), \quad (2.8)$$

$$C(t, x_w) = C_f, \quad C(t, x_e) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2.9)$$

Considerăm că este verificată următoarea condiție de către concentrația inițială a filtratului de noroi de foraj C_0 :

$$0 \leq C_0 \leq C_f, \quad (2.10)$$

și impunem următoarea condiție

$$0 < S_{wir} + S_{or} < 1. \quad (2.11)$$

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

Cea mai utilizată formulă pentru calcularea coeficientului de difuzie este:

$$D(\xi) = \alpha \left(\frac{q(\xi)}{2\pi x h} \right)^\beta, \quad (2.12)$$

unde $\alpha > 0$ și $\beta > 1$ sunt parametri empirici. În formă adimensională, modelul (2.1)-(2.2), (2.7)-(2.9) devine

$$\frac{d\xi}{dt} = c_1 \frac{q(\xi)}{1-\xi}, \quad (2.13)$$

$$\xi(0) = 0, \quad (2.14)$$

$$q(\xi) = \frac{\frac{k_c}{k} \ln \frac{x_e}{x_w}}{\frac{k_c}{k} \ln \frac{x_e}{x_w} - \ln(1-\xi)}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Pe^{-1} x^{-\beta} q^\beta(\xi) \frac{\partial C}{\partial x} \right) + (Pe^{-1} x^{-\beta-1} q^\beta(\xi) - x^{-1} q(\xi)) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (2.16)$$

$$C(0, x) = C_0, \quad x \in (1, L), \quad (2.17)$$

$$C(t, 1) = 1, \quad C(t, L) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2.18)$$

unde

$$c_1 = \frac{\Phi(1-\Phi)(1-S_{wir}-S_{or})c_s}{(1-\Phi_c)\rho_c}, \quad (2.19)$$

$$Pe = \frac{x_w^2}{\alpha t_0 \left(\frac{q_0}{2\pi x_w h} \right)^\beta} \quad (2.20)$$

este numărul Péclet. În (2.20) avem $\beta > 1$. În formă adimensională condițiile (2.10) și (2.6) devin:

$$0 \leq C_0 \leq 1, \quad (2.21)$$

$$0 \leq \xi \leq \xi_M < 1. \quad (2.22)$$

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

Sistemul (2.13)-(2.18) se numește primul model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj.

2.2 Problema inversă

Așa cum am arătat în Secțiunea 2.1 fenomenul de invazie este descris de dubletul (ξ, C) (creșterea grosimii turtei de noroi ξ și concentrația filtratului de noroi de foraj C). Reamintim că problema Cauchy (2.13)-(2.14) descrie creșterea grosimii turtei de noroi. Dacă toate mărimile fizice care apar în (2.15) și (2.19) se cunosc, putem rezolva problema Cauchy (2.13)-(2.14) și astfel putem determina funcția $\xi = \xi(t)$. Fie funcția

$$u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad u(t) := q(\xi(t)). \quad (2.23)$$

Dacă utilizăm această funcție în (2.16), atunci problema mixtă (2.16)-(2.18) devine:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Pe^{-1} x^{-\beta} u^\beta(t) \frac{\partial C}{\partial x} \right) + (Pe^{-1} x^{-\beta-1} u^\beta(t) - x^{-1} u(t)) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (2.24)$$

$$C(0, x) = C_0, \quad x \in (1, L), \quad (2.25)$$

$$C(t, 1) = 1, \quad C(t, L) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2.26)$$

Concentrația $C(t, x)$ a filtratului de noroi de foraj se obține prin rezolvarea problemei mixte (2.24)-(2.26).

În acest capitol presupnem că nu cunoaștem valorile tuturor marimilor fizice care apar în (2.15) și (2.19) (de exemplu nu cunoaștem valoarea permeabilității turtei de noroi k_c), deci nu putem determina rata de invazie q prin utilizarea formulei (2.15). În consecință nu putem determina soluția ξ a problemei Cauchy (2.13)-(2.14) și funcția u dată de (2.23). Astfel, în prob-

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

lema inversă pe care o studiem în acest capitol ne ocupăm cu determinarea funcției u (rata de invazie) dată de (2.23) plecând de la valori observate experimental (valori de referință) ale concentrației filtratului de noroi $C(T, x)$ la timpul final T . Fie C_{ref} valorile observate experimental (valori de referință) ale concentrației filtratului de noroi $C(T, x)$ la timpul final T . În cele ce urmează identificăm rata de invazie u prin rezolvarea următoarei probleme de minimizare:

$$\inf \frac{1}{2} \|C(T, \cdot) - C_{ref}(\cdot)\|_{L^2(1, L)}^2,$$

unde $C(T, \cdot)$ este soluția problemei mixte (2.24)-(2.26), pentru orice u din mulțimea

$$U = \{u \in W^{1, \infty}(0, T); 0 < u_m \leq u(t) \leq 1, \text{ a.e. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = 1, u(T) = u_m, |u'(t)| \leq u_\infty\}, \quad (2.27)$$

unde $0 < u_m < 1$ și $u_\infty > 0$ sunt constante date. Reducem această problemă la o problemă de control optimal, în care controlul apare în toți coeficienții ecuației parabolice. Pentru $u \in U$, fie $C(t, x)$ soluția sistemului (2.24)-(2.26). Acest sistem se numește sistemul de stare. Fie $C_{ref} \in L^2(0, 1)$ o funcție cunoscută. Definim functională cost

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \|C(T, \cdot) - C_{ref}(\cdot)\|_{L^2(1, L)}^2, \quad (2.28)$$

și introducem următoarea problemă de minimizare:

$$\inf_{u \in U} J_1(u). \quad (2.29)$$

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

Dacă efectuăm transformarea

$$C = y + \frac{L - x}{L - 1}. \quad (2.30)$$

atunci sistemul de stare (2.24)-(2.26) devine:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(u) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + b(u) \frac{\partial y}{\partial x} + f(u), \quad (t, x) \in Q, \quad (2.31)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad x \in (1, L), \quad (2.32)$$

$$y(t, 1) = y(t, L) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2.33)$$

Coeficienții sistemului de stare a , b și f din (2.31) depind de x și u . În cele ce urmează este foarte important pentru noi cum depind acești coeficienți de controlul u . De aceea, pentru a simplifica scrierea notăm:

$$a(u) = Pe^{-1}x^{-\beta}u^\beta, \quad (2.34)$$

$$b(u) = Pe^{-1}x^{-\beta-1}u^\beta - x^{-1}u, \quad (2.35)$$

$$f(u) = Pe^{-1}(\beta - 1)(L - 1)^{-1}x^{-\beta-1}u^\beta - (L - 1)^{-1}x^{-1}u, \quad (2.36)$$

$$y_0(x) = C_0(x) + (L - 1)^{-1}(x - L). \quad (2.37)$$

Cu transformarea (2.30) functională cost (2.28) devine:

$$J(u) = \frac{1}{2} \|y^u(T, \cdot) - y_{ref}(\cdot)\|_{L^2(1, L)}^2, \quad (2.38)$$

unde

$$y_{ref}(x) = C_{ref}(x) - \frac{L - x}{L - 1}. \quad (2.39)$$

În (2.38) y^u reprezintă soluția sistemului de stare (2.31)-(2.33) care core-

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

spunde lui $u \in U$. În aceste condiții problema de minimizare (2.29) devine:

$$\inf_{u \in U} J(u). \quad (\text{P})$$

Vom folosi notația $'$ pentru a semnifica derivarea în raport cu controlul u . Astfese utilizăm notațiile:

$$a'(u) := \beta \cdot Pe^{-1} \cdot x^{-\beta} \cdot u^{\beta-1}, \quad (2.40)$$

$$b'(u) := \beta \cdot Pe^{-1} \cdot x^{-\beta-1} \cdot u^{\beta-1} - x^{-1}, \quad (2.41)$$

$$f'(u) := \frac{\beta(\beta-1)}{Pe \cdot (L-1)} \cdot \frac{u^{\beta-1}}{x^{\beta+1}} - \frac{1}{(L-1) \cdot x}. \quad (2.42)$$

2.3 Teorema de existență a soluției sistemului de stare

Fie $V = H_0^1(1, L)$, $H = L^2(1, L)$ și $V' = H^{-1}(1, L)$ dualul lui V . Identificăm H cu dualul său și $V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$, cu injecții continue și dense. Fie $y_0 \in H$ (see (2.37)) și $u \in U$.

Teorema 2.1 *Fie $y_0 \in H$ și $u \in U$. Sistemul de stare (2.31)-(2.33) are o soluție unică y^u ,*

$$y^u \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V'). \quad (2.43)$$

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

Au loc estimările

$$\sup_{t \in [0, T]} \|y^u(t)\|_H^2 + \int_0^T \|y^u(t)\|_V^2 dt \leq C, \quad (2.44)$$

$$\int_0^T \left\| \frac{dy^u}{dt}(t) \right\|_{V'}^2 dt \leq C_1, \quad (2.45)$$

unde constantele C și C_1 nu depind de u . Dacă $u_i \in U$, $i = 1, 2$ și y^{u_i} , $i = 1, 2$ sunt soluțiile corespunzătoare ale sistemului de stare atunci are loc estimarea

$$\|y^{u_1} - y^{u_2}\|_{L^\infty(0, T; H)}^2 + \|y^{u_1} - y^{u_2}\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq C_2 \|u_1 - u_2\|_\infty^2, \quad (2.46)$$

unde C_2 nu depinde de u_1 și u_2 .

Teorema 2.2 Fie $y \in L^2(0, T; V)$ cu $y' \in L^2(0, T; V')$ soluția slabă a problemei (2.31)-(2.33).

i) Dacă $y_0 \in V$ atunci

$$y \in L^2(0, T; H^2(1, L)) \cap L^\infty(0, T; V), y' \in L^2(0, T; H) \quad (2.47)$$

și

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq t \leq T} \|y(t)\|_V^2 + \|y\|_{L^2(0, T; H^2(1, L))}^2 + \|y'\|_{L^2(0, T; H)}^2 \\ & \leq C(\|f(u(\cdot))\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \|y_0\|_V^2). \end{aligned} \quad (2.48)$$

ii) Dacă $y_0 \in V \cap H^2(1, L)$ atunci

$$y \in L^\infty(0, T; H^2(1, L)), \quad y' \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad y'' \in L^2(0, T; V') \quad (2.49)$$

și

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq t \leq T} (\|y(t)\|_{H^2(1,L)}^2 + \|y'\|_H^2) + \|y'\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|y''\|_{L^2(0,T;V')}^2 \\ & \leq C(\|f(u(\cdot))\|_{H^1(0,T;H)}^2 + \|y_0\|_{H^2(1,L)}^2). \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.4 Teorema de existență a soluției problemei (P)

Arătăm că problema de minimizare (P) are cel puțin o soluție.

Teorema 2.3 *Fie $y_{ref} \in H$ (vezi 2.39). Problema (P) are cel puțin o soluție u^* cu soluția sistemului de stare*

$$y^* \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V'). \quad (2.51)$$

2.5 Sistemul în variații de ordinul întâi

Teorema 2.1 afirmă că pentru fiecare $u \in U$ există o unică soluție y^u a sistemului de stare (2.31)-(2.33). Acest fapt ne permite să definim aplicația control-stare S . Fie:

$$X := L^\infty(0, T), \quad Y := C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V). \quad (2.52)$$

Definim aplicația control-stare astfel:

$$S : U \subset X \rightarrow Y, \quad S(u) := y^u. \quad (2.53)$$

În cele ce urmează arătăm că aplicația S este derivabilă Gâteaux în u^* și îi obținem derivata Gâteaux. În acest context considerăm sistemul în variații

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

de ordinul întâi:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(u^*) \frac{\partial z}{\partial x} \right) - b(u^*) \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a'(u^*) \frac{\partial y^*}{\partial x} \right) w + b'(u^*) \frac{\partial y^*}{\partial x} w + f'(u^*) w, \quad (t, x) \in Q, \\ & z(0, x) = 0, \quad x \in (1, L), \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$z(t, 1) = z(t, L) = 0, \quad \text{a.e. } t \in (0, T),$$

unde $w \in W^{1,\infty}(0, T)$.

Teorema 2.4 Fie $w \in W^{1,\infty}(0, T)$. Sistemul (2.54) are o soluție unică

$$z \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V'). \quad (2.55)$$

Soluția z satisface estimarea

$$\sup_{t \in [0, T]} \|z(t)\|_H^2 + \int_0^T \|z(t)\|_V^2 dt \leq C \|w\|_X^2, \quad (2.56)$$

unde constanta C nu depinde de w și z (2.54). În plus

$$z \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2) \quad (2.57)$$

2.6 Sistemul dual și condiția de optimalitate de ordinul întâi

Fie sistemul dual:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(u^*) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (b(u^*) p) \quad \text{in } Q, \quad (2.58)$$

$$p(T, x) = y^*(T, x) - y_{ref}(x) \quad \text{in } (1, L), \quad (2.59)$$

CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA RATEI DE INVAZIE

$$p(t, 1) = 0, p(t, L) = 0, \text{ a.e. } t \in (0, T). \quad (2.60)$$

Teorema 2.5 *Sistemul dual (2.58)-(2.60) are o soluție unică*

$$p \in C([0, T], H) \cap L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V'). \quad (2.61)$$

Dacă $y_0 \in H^2(1, L) \cap V$, $y_{ref} \in V$, atunci

$$p \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2). \quad (2.62)$$

Teorema 2.6 *Dacă u^* este o soluție a problemei (P), y^* este soluția sistemului de stare corespunzătoare lui u^* și p este soluția sistemului dual (2.58)-(2.60), atunci u^* satisface condiția necesară*

$$\int_0^T (u^*(t) - u(t)) \Phi(t) dt \geq 0, \quad (\forall) u \in U, \quad (2.63)$$

unde

$$\Phi(t) := \int_1^L \left(a'(u^*) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial y^*}{\partial x} - b'(u^*) p \frac{\partial y^*}{\partial x} - f'(u^*) p \right) dx, \quad \text{a.p.t. } t \in (0, T). \quad (2.64)$$

2.7 Condiția suficientă de optimalitate de ordinul doi

În această secțiune obținem condiția suficientă de optimalitate de ordinul doi. În acest scop demonstrăm că funcționala cost J este de două ori derivabilă pe $\mathring{U}$. În acest scop demonstrăm că aplicația control-stare (2.53) este de două ori derivabilă Fréchet.

3 IDENTIFICAREA PERMEABILITĂȚII UNUI REZERVOR DE PETROL ÎN PRIMUL MODEL NELINIAR DE INVAZIE CU O FAZĂ A FILTRATULUI DE NOROI

În acest capitol studiem o problemă de identificare referitoare la primul model neliniar de invazie a filtratului de noroi de foraj prezentat în Capitolul 2, Secțiunea 2.1. Urmărim să identificăm permeabilitatea k a unui rezervor de petrol pornind de la observații experimentale ale concentrației C a filtratului de noroi de foraj.

3.1 Introducere

Consideră primul model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj în următoarea formă adimensională:

$$\frac{d\xi}{dt} = g(\xi, k), \quad (3.1)$$

$$\xi(0) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, \xi, k) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + b(x, \xi, k) \frac{\partial y}{\partial x} + f(x, \xi, k), \quad (t, x) \in Q, \quad (3.3)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad x \in (1, L), \quad (3.4)$$

$$y(t, 1) = 0, \quad y(t, L) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (3.5)$$

unde $Q = (0, T) \times (1, L)$ și

CAPITOLUL 3. IDENTIFICAREA PERMEABILITATII UNUI REZERVOR DE PETROL

$$a(\xi, k) = \frac{1}{Pe} \left(\frac{q(\xi, k)}{x} \right)^\beta, \quad (3.6)$$

$$b(\xi, k) = \frac{1}{x} a(x, \xi, k) - \frac{q(\xi, k)}{xS(k)}, \quad (3.7)$$

$$f(\xi, k) = \frac{\beta}{(L-1)x} a(x, \xi, k) - \frac{1}{L-1} b(x, \xi, k), \quad (3.8)$$

$$g(\xi, k) = a_1 \frac{k}{(1-\xi)(a_2 - k \ln(1-\xi))}, \quad (3.9)$$

$$q(\xi, k) = \frac{k}{a_2 - k \ln(1-\xi)}, \quad (3.10)$$

$$y_0(x) = C_0(x) - \frac{L-x}{L-1}. \quad (3.11)$$

Impunem condiția (vezi (2.22)):

$$0 \leq \xi \leq \xi_M < 1.$$

Dorim să determinăm permeabilitatea rezervorului de petrol $k \in [k_m, k_M]$ pornind de la observații experimentale (valori de referință) ale soluției ecuației (3.3) la timpul final T . Fie $y_{ref}(x)$, $x \in [1, L]$ aceste valori de referință. În scopul determinării lui k studiem problema

$$\inf \frac{1}{2} \int_1^L (y^k(T, x) - y_{ref}(x))^2 dx \quad (3.12)$$

referitor la (3.1)-(3.5) pentru $k \in U$, unde mulțimea de control este $U = [k_m, k_M]$. În (3.12) notația y^k reprezintă soluția sistemului (3.3)-(3.5) care corespunde lui k .

3.2 Teorema de existență a soluției sistemului de stare

Denumim (3.1)-(3.5) *sistemul de stare*.

Teorema 3.1 Fie $k \in [k_m, k_M]$ și $y_0 \in V \cap H^2(1, L)$. i) Sistemul (3.1), (3.2), (3.3)-(3.5) are o soluție unică (ξ^k, y^k) , cu următoarele proprietăți:

$$y^k \in L^\infty(0, T; H^2(1, L)), \quad \frac{dy^k}{dt} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad (3.13)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|y^k(t)\|_{H^2(1, L)}^2 + \|\frac{dy^k}{dt}(t)\|_{L^2(1, L)}^2) + \|\frac{dy^k}{dt}(t)\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq C_1 \quad (3.14)$$

ii) Dacă $k_1, k_2 \in [k_m, k_M]$ și $(\xi^{k_1}, y^{k_1}), (\xi^{k_2}, y^{k_2})$ sunt soluțiile unice ale sistemului (3.1)-(3.5) corespunzătoare lui k_1 și k_2 , respectiv, atunci avem:

$$\|\xi^{k_1} - \xi^{k_2}\|_{C([0, T])} \leq L |k_1 - k_2|, \quad (3.15)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|y^{k_1} - y^{k_2}\|_H^2 + \|y^{k_1} - y^{k_2}\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq C_2 |k_1 - k_2|^2. \quad (3.16)$$

3.3 Teorema de existență a soluției problemei (P)

În această secțiune arătăm că problema de minimizare (3.12) are ce puțin o soluție. Fie $y_{ref} \in V$ o funcție dată și funcționala cost

$$J(k) = \frac{1}{2} \|y^k(T, x) - y_{ref}(x)\|_H^2. \quad (3.17)$$

Considerăm următoarea problemă de minimizare:

$$\inf_{k \in [k_m, k_M]} J(k), \quad (P)$$

CAPITOLUL 3. IDENTIFICAREA PERMEABILITATII UNUI REZERVOR DE PETROL

referitoare la (3.1)-(3.5).

Teorema 3.2 *Problema (P) are cel puțin o soluție $k^* \in [k_m, k_M]$ și soluția sistemului de stare (ξ^*, y^*) are următoarele regularități*

$$\begin{aligned} y^* &\in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(1, L) \cap V), \quad \frac{dy^*}{dt} \in L^2(0, T; H), \\ \xi^* &\in C^1([0, T]). \end{aligned}$$

3.4 Sistemul în variații de ordinul întâi

În această secțiune arătăm că aplicația control-stare S este derivabilă Gâteaux și obținem expresia derivatei sale.

Fie k^* un control optimal (o soluție a problemei (P)), $h_1 \in \mathbb{R}$ și *sistemul în variații de ordinul întâi*:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi^*, k^*)z_1 + \frac{\partial g}{\partial k}(\xi^*, k^*)h_1, \quad t \in (0, T), \quad (3.18)$$

$$z_1(0) = 0, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}(a(\xi^*, k^*)\frac{\partial z_2}{\partial x}) + b(\xi^*, k^*)\frac{\partial z_2}{\partial x} \\ &+ [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial a}{\partial \xi}(\xi^*, k^*)\frac{\partial y^*}{\partial x}) + \frac{\partial b}{\partial \xi}(\xi^*, k^*)\frac{\partial y^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi^*, k^*)]z_1 \\ &+ [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial a}{\partial k}(\xi^*, k^*)\frac{\partial y^*}{\partial x}) + \frac{\partial b}{\partial k}(\xi^*, k^*)\frac{\partial y^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial k}(\xi^*, k^*)]h_1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

pentru $(t, x) \in Q$,

$$z_2(0, x) = 0, \quad x \in (1, L), \quad (3.21)$$

$$z_2(t, 1) = 0, \quad z_2(t, L) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (3.22)$$

Teorema 3.3 *i) Sistemul (3.18)-(3.22) are o soluție unică (z_1, z_2) astfel*

*CAPITOLUL 3. IDENTIFICAREA PERMEABILITATII UNUI
REZERVOR DE PETROL*

încât

$$z_2 \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(1, L) \cap V), \quad \frac{dz_2}{dt} \in L^2(0, T; H), \quad (3.23)$$

ii) Soluția (z_1, z_2) satisface estimarea

$$\|z_2\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|z_2\|_{L^2(0, T; V)}^2 dt \leq C_6 |h_1|^2, \quad (3.24)$$

$$\|z_1\|_{C([0, T])} \leq C_7 |h_1|. \quad (3.25)$$

3.5 Sistemul dual și condiția de optimalitate de ordinul întâi

În această secțiune obținem condiția necesară de optimalitate de ordinul întâi (vezi Teorema 3.5). Fie $k^* \in [k_m, k_M]$ o soluție a problemei (P) și (ξ^*, y^*) soluția sistemului de stare (3.1)-(3.5) corespunzătoare lui k^* . Funcționala cost J dată de (3.17) este derivabilă Gâteaux în k^* și derivata sa Gâteaux $J'(k^*) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este

$$J'(k^*)(h_1) = \int_1^L (y^*(T, x) - y_{ref}(x)) z_2(T, x) dx, \quad (3.26)$$

unde z_2 este soluția problemei (3.20)-(3.22) corespunzătoare lui h_1 . Deoarece J este derivabilă Gâteaux în k^* și mulțimea $[k_m, k_M]$ este convexă și închisă condiția necesară de optimalitate este ([14], Teorema 1-2.1, p. 1180):

$$J'(k^*)(k - k^*) \geq 0, \text{ for all } k \in [k_m, k_M]. \quad (3.27)$$

CAPITOLUL 3. IDENTIFICAREA PERMEABILITATII UNUI REZERVOR DE PETROL

Din (3.26) și (3.27) obținem că inegalitatea

$$(k - k^*) \int_1^L (y^*(T, x) - y_{ref}(x)) \psi_2(T, x) dx \geq 0, \quad (3.28)$$

are loc pentru orice $k \in [k_m, k_M]$. Introducem *sistemul dual*:

$$\begin{aligned} -\frac{dp_1}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi^*, k^*) p_1 - \int_1^L \frac{\partial a}{\partial \xi}(\xi^*, k^*) \frac{\partial y^*}{\partial x} \frac{\partial p_2}{\partial x} dx \\ &\quad + \int_1^L \frac{\partial b}{\partial \xi}(\xi^*, k^*) \frac{\partial y^*}{\partial x} p_2 dx + \int_1^L \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi^*, k^*) p_2 dx, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$p_1(T) = 0, \quad (3.30)$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(a(\xi^*, k^*) \frac{\partial p_2}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x}(b(\xi^*, k^*) p_2), \quad (t, x) \in Q \quad (3.31)$$

$$p_2(T, x) = y^*(T, x) - y_{ref}(x), \quad x \in (1, L) \quad (3.32)$$

$$p_2(t, 1) = 0, \quad p_2(t, L) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (3.33)$$

Teorema 3.4 *Sistemul (3.29)-(3.33) are o soluție unică (p_1, p_2) cu proprietățile:*

$$p_2 \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(1, L) \cap V), \quad \frac{dp_2}{dt} \in L^2(0, T; H), \quad (3.34)$$

$$\text{ess sup}_{t \in [0, T]} \|p_2(t)\|_V^2 + \|p_2\|_{L^2(0, T; H^2(1, L))}^2 + \left\| \frac{dp_2}{dt}(t) \right\|_{L^2(0, T; H)}^2 \leq C_{11}. \quad (3.35)$$

Teorema 3.5 *Fie $k^* \in [k_m, k_M]$ o soluție a problemei (P), (ξ^*, y^*) soluția sistemului de stare (3.1)-(3.5) și (p_1, p_2) soluția sistemului dual (3.29)-(3.33).*

Atunci k^ satisface condiția necesară de optimalitate:*

$$(k - k^*) \Phi_1(k^*) \geq 0 \text{ pentru orice } k \in [k_m, k_M], \quad (3.36)$$

CAPITOLUL 3. IDENTIFICAREA PERMEABILITATII UNUI REZERVOR DE PETROL

unde

$$\begin{aligned}\Phi_1(k^*) = & \int_0^T \int_1^L \{ [-\frac{\partial a}{\partial \xi}(\xi^*, k^*)\psi_1 - \frac{\partial a}{\partial k}(\xi^*, k^*)] \frac{\partial y^*}{\partial x} \frac{\partial p_2}{\partial x} \\ & + [\frac{\partial b}{\partial \xi}(\xi^*, k^*)\psi_1 + \frac{\partial b}{\partial k}(\xi^*, k^*)] \frac{\partial y^*}{\partial x} p_2 \\ & + [\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi^*, k^*)\psi_1 + \frac{\partial f}{\partial k}(\xi^*, k^*)] p_2 \} dx dt, \end{aligned} \quad (3.37)$$

și ψ_1 este soluția următoarei probleme:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi^*, k^*)\psi_1 + \frac{\partial g}{\partial k}(\xi^*, k^*), \quad (3.38)$$

$$\psi_1(0) = 0. \quad (3.39)$$

3.6 Sistemul în variații de ordinul doi

În această secțiune arătăm că aplicația control-stare S este de două ori derivabilă Gâteaux în k^* . În acest context introducem *sistemul în variații de ordinul doi* și arătăm că acest sistem are o soluție unică (w_1, w_2) astfel încât

$$w_2 \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(1, L) \cap V), \quad \frac{dw_2}{dt} \in L^2(0, T; H). \quad (3.40)$$

3.7 Al doilea dual și condiția suficientă de optimalitate

În această secțiune obținem condiția suficientă de optim local. Fie $k^* \in [k_m, k_M]$ o soluție a problemei (P). Arătăm că funcționala cost J dată de (3.17) este de două ori derivabilă Gâteaux în k^* . Introducem al doilea sistem dual and și arătăm că acest sistem are o soluție unică (q_1, q_2) astfel încât

$$q_2 \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(1, L) \cap V), \quad \frac{dq_2}{dt} \in L^2(0, T; H).$$

3.8 Rezultate numerice

În această secțiune prezentăm o implementare numerică a metodei inverse prezentată în acest capitol. Urmărim să determinăm valoarea permeabilității rezervorului de petrol k^* pornind de la valorile de referință $C_{ref}(x)$ ale concentrației filtratului de noroi $C(T, x)$.

4 PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE CU O FAZĂ A FILTRATULUI DE NOROI

În acest capitol studiem două probleme de identificare referitoare la al doilea model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj propus în [5].

4.1 Al doilea model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi

În cele ce urmează utilizăm ipotezele simplificatoare din [16], dar în ceea ce privește permeabilitatea rezervorului de petrol utilizăm următoarea ipoteză (vezi [5]): permeabilitatea rezervorului are o valoare constantă k_0 în zona necontaminată, dar în zona invadată permeabilitatea rezervorului de petrol k_s este afectată de fenomenul de invazie așa cum rezultă din formula

$$k_s = k_0 f_d(c/c_f), \quad (4.1)$$

În (4.1) c_f este concentrația de filtrat de noroi în noroiul de foraj (care este egală cu concentrația filtratului de noroi de foraj la peretele sondei) iar $f_d : [0, 1] \rightarrow \left[\frac{k_c}{k_0}, 1\right]$ este o funcție pozitivă și descrescătoare cunoscută, astfel încât $\frac{1}{x f_d(C/C_f)}$ este integrabilă pe $[x_w, x_e]$ și $f_d(0) = 1$. Permeabilitatea turtei de noroi este mai mică decât permeabilitatea rezervorului astfel încât avem $\frac{k_c}{k_0} \leq f_d(c/c_f) \leq 1$. Numim funcția dată de (4.1) *permeabilitate deteriorată* [16].

*CAPITOLUL 4. PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA
AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE A FILTRATULUI DE
NOROI*

Impunem următoarele condiții adimensionale așa cum am făcut în Capitolele 2 și 3 (vezi (2.6)):

$$0 \leq \xi \leq \xi_M < 1. \quad (4.2)$$

Utilizăm următoarele notații:

$$\chi(c) = \frac{1}{f_d(c)}. \quad (4.3)$$

$$I(c) = \int_1^L \frac{1}{x} \chi(c) dx, \quad (4.4)$$

$$q(c, \xi) = \frac{k_c \ln L}{k_c I(c) - \ln(1 - \xi)}, \quad (4.5)$$

$$a(c, \xi) = Pe^{-1} x^{-\beta} q^\beta(c, \xi), \quad (4.6)$$

$$b(c, \xi) = Pe^{-1} x^{-\beta-1} q^\beta(c, \xi) - x^{-1} q(c, \xi), \quad (4.7)$$

$$f(c, \xi) = \frac{\alpha_1}{(1 - \xi) [k_c I(c) - \ln(1 - \xi)]}. \quad (4.8)$$

Astfel, al doilea model neliniar de invazie cu o fază a filtratului de noroi de foraj se scrie sub forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(c, \xi) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + b(c, \xi) \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (4.9)$$

$$c(0, x) = c_0(x), \quad x \in (1, L), \quad (4.10)$$

$$c(t, 1) = 1, \quad c(t, L) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4.11)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(c, \xi), \quad (4.12)$$

$$\xi(0) = 0. \quad (4.13)$$

În cele ce urmează considerăm că valoarea inițială c_0 a concentrației ver-

*CAPITOLUL 4. PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA
AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE A FILTRATULUI DE
NOROI*

ifică următoarele condiții:

$$c_0(1) = 1, \quad c_0(L) = 0, \quad 0 \leq c_0 \leq 1. \quad (4.14)$$

4.2 Identificarea permeabilității deteriorate

În această secțiune ne propunem să identificăm (plecând de la anumite observații experimentale) permeabilitatea deteriorată în sistemul (4.9)-(4.13). Considerăm următoarea mulțime de control

$$U = \{\chi \in W^{2,\infty}(0,1); \quad 1 \leq \chi(\tau) \leq \frac{1}{k_c}, \|\chi\|_{W^{2,\infty}(0,1)} \leq \chi_\infty\}, \quad (4.15)$$

unde $\chi_\infty > 0$ este dată. În (4.15) k_c este permeabilitatea adimensională a turtei de noroi. Considerăm următoarea problemă de minimizare:

$$\inf \frac{1}{2} \|c^\chi(T, \cdot) - c_{ref}(\cdot)\|_{L^2(1,L)}^2, \quad (4.16)$$

pentru orice $\chi \in U$ unde c_{ref} este o valoare de referință (observată) a concentrației filtratului de noroi, iar (c^χ, ξ^χ) este soluția sistemului (4.9)-(4.13) corespunzătoare lui χ .

4.2.1 Teorema de existență a soluției sistemului de stare

Utilizăm următoarele notații: $H = L^2(1, L)$, $V = H_0^1(1, L)$, $Q = (0, T) \times (1, L)$.

*CAPITOLUL 4. PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA
AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE A FILTRATULUI DE
NOROI*

Teorema 4.1 *Fie*

$$c_0 \in W^{1,\infty}(1, L), c_0(1) = 1, c_0(L) = 0, 0 \leq c_0 \leq 1. \quad (4.17)$$

Sistemul de stare (4.9)-(4.13) are o soluție unică (c^x, ξ^x) , cu următoarele proprietăți:

i) $c^x \in C^{\frac{\gamma}{2}, \gamma}(\overline{Q})$, $\frac{\partial c^x}{\partial t} \in C^{\frac{\gamma}{2}, \gamma}(Q)$, $\frac{\partial^2 c^x}{\partial x^2} \in C^{\frac{\gamma}{2}, \gamma}(Q)$; ii) $0 \leq c^x \leq 1$; iii) $\frac{\partial c^x}{\partial x}$ este mărginită pe $\overline{Q}$: există $M > 0$, care nu depinde de χ , z și c^z , astfel încât

$$\sup_{\overline{Q}} \left| \frac{\partial c^x}{\partial x} \right| \leq M; \quad (4.18)$$

iv)

$$\xi^x \in C^1([0, T]), \quad 0 \leq \xi^x(t) \leq \xi_M, \quad (\forall) \quad t \in [0, T].$$

**4.2.2 Teorema de existență a soluției problemei de minimizare
(4.16)**

Scopul acestei secțiuni este acela de a arăta că problema de minimizare (4.16) are cel puțin o soluție.

Teorema 4.2 *Problema de minimizare (4.16) are cel puțin o soluție χ^* cu soluția corespunzătoare (c^*, ξ^*) a sistemului de stare.*

4.2.3 Sistemul în variații de ordinul întâi

În această secțiune arătăm că aplicația control-stare S este derivabilă Gâteaux și obținem derivata sa Gâteaux. În acest scop introducem sistemul în variații de ordinul întâi (4.22)-(4.26). Pentru $\chi \in U$ notăm cu (c^x, ξ^x) soluția unică

*CAPITOLUL 4. PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA
AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE A FILTRATULUI DE
NOROI*

a sistemului de stare (4.9)-(4.13). Fie aplicația control-stare:

$$S : U \rightarrow \mathcal{Y}, \quad S(\chi) = (c^\chi, \xi^\chi), \quad (4.19)$$

unde $\mathcal{Y}$ este spațiu Banach

$$\mathcal{Y} = C([0, T]; H) \times C([0, T]). \quad (4.20)$$

înzestrat cu norma

$$\|(\theta, \xi)\|_{\mathcal{Y}}^2 = \sup_{t \in [0, T]} (\|\theta(t)\|_H^2 + |\xi(t)|^2). \quad (4.21)$$

Fie χ^* o soluție a problemei (4.16), (c^*, ξ^*) soluția sistemului de stare (4.9)-(4.13) corespunzătoare lui χ^* și $w \in W^{2, \infty}(0, 1)$. Fie *sistemul în variații de ordinul întâi*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(a(c^*, \xi^*) \frac{\partial z}{\partial x} \right) + b(c^*, \xi^*) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\int_1^L \frac{1}{x} \chi^{*'}(c^*) z dx \right) \frac{\partial}{\partial x} (a_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x}) \\ & + \left(\int_1^L \frac{1}{x} \chi^{*'}(c^*) z dx \right) b_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (a_\xi(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \psi) + b_\xi(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \psi \\ & + \left(\int_1^L \frac{1}{x} w(c^*) dx \right) \frac{\partial}{\partial x} (a_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x}) + \left(\int_1^L \frac{1}{x} w(c^*) dx \right) b_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x}, \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$z(0, x) = 0, \quad x \in (1, L), \quad (4.23)$$

$$z(t, 1) = z(t, L) = 0, \quad \text{a.p.t. } t \in (0, T), \quad (4.24)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = f_I(c^*, \xi^*) \int_1^L \frac{1}{x} \chi^{*'}(c^*) z dx + f_\xi(c^*, \xi^*) \psi + f_I(c^*, \xi^*) \int_1^L \frac{1}{x} w(c^*) dx, \quad (4.25)$$

$$\psi(0) = 0. \quad (4.26)$$

**CAPITOLUL 4. PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA
AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE A FILTRATULUI DE
NOROI**

Teorema 4.3 *i) Pentru fiecare $w \in W^{2,\infty}(0,1)$ sistemul (4.22)-(4.26) are o soluție unică (z, ψ) astfel încât*

$$z \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(1, L) \cap V), \quad \frac{dz}{dt} \in L^2(0, T; H). \quad (4.27)$$

ii) Avem

$$\|(z, \psi)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|z\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq \mathcal{K}_5 \|w\|_{W^{1,\infty}(0,1)}^2, \quad (4.28)$$

unde

$$\|(z, \psi)\|_{\mathcal{Y}}^2 = \|z\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|\psi\|_{C([0, T])}^2$$

și $\mathcal{K}_5 > 0$ nu depinde de $\chi^ \in U$, z^* , ξ^* , z și ξ .*

4.2.4 Sistemul dual și condiția necesară de optimalitate

În această secțiune obținem condiția necesară de optimalitate (vezi Teorema 4.5). Fie *sistemul dual*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(c^*, \xi^*) \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (b(c^*, \xi^*) p_1) + \frac{1}{x} \chi^{*'}(c^*) \int_1^L a_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} dx \\ & - \frac{1}{x} \chi^{*'}(c^*) \int_1^L b_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} p_1 dx - \frac{1}{x} f_I(c^*, \xi^*) \chi^{*'}(c^*) p_2, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$p_1(T, x) = c^*(T, x) - c_{ref}(x), \quad \text{in } (1, L),$$

$$p_1(t, 1) = p_1(t, L) = 0, \quad \text{a.e. } t \in (0, T),$$

$$\frac{dp_2}{dt} + f_\xi(c^*, \xi^*) p_2 = \int_1^L a_\xi(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} dx - \int_1^L b_\xi(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} p_1 dx, \quad t \in [0, T], \quad (4.30)$$

$$p_2(T) = 0. \quad (4.31)$$

*CAPITOLUL 4. PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA
AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE A FILTRATULUI DE
NOROI*

Teorema 4.4 *Fie*

$$c_{ref} \in H^1(1, L), \quad c_{ref}(1) = 1, \quad c_{ref}(L) = 0, \quad 0 \leq c_{ref} \leq 1. \quad (4.32)$$

Sistemul dual (4.29)-(4.31) are o soluție unică (ζ, η) cu următoarea regularitate

$$\zeta \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(1, L) \cap V), \quad \frac{d\zeta}{dt} \in L^2(0, T; H). \quad (4.33)$$

Teorema 4.5 conține condiția necesară de optimalitate.

Teorema 4.5 *Fie χ^* o soluție a problemei (4.16), (c^*, ξ^*) soluția sistemului de stare (4.9)-(4.13) corespunzătoare lui χ^* și (p_1, p_2) soluția sistemului dual (4.29)-(4.31). În aceste condiții χ^* verifică (4.34)*

$$\int_0^T \left(\int_1^L \frac{1}{x} \chi(c^*) dx \right) \Phi(\chi^*, t) dt \geq \int_0^T \left(\int_1^L \frac{1}{x} \chi^*(c^*) dx \right) \Phi(\chi^*, t) dt, \quad (\forall) \chi \in U, \quad (4.34)$$

unde

$$\Phi(\chi^*, t) := \int_1^L (-a_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} + b_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} p_1) dx + f_I(c^*, \xi^*) p_2, \quad (4.35)$$

a.p.t. $t \in (0, T)$.

4.3 Identificarea valorii minime a permeabilității unui rezervor de petrol

În această secțiune alegem funcția χ (permeabilitatea deteriorată) de forma:

$$\chi(\tau) = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha)(1 - \tau)^2}, \quad \tau \in [0, 1], \quad (4.36)$$

*CAPITOLUL 4. PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA
AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE A FILTRATULUI DE
NOROI*

unde α este un număr pozitiv astfel încât $0 < k_c \leq \alpha \leq 1$.

Urmărim să identificăm α care este o soluție a următoarei probleme de minimizare:

$$\text{Min } \frac{1}{2} \|c^\alpha(T, \cdot) - c_{ref}(\cdot)\|_{L^2(1,L)}^2, \quad (4.37)$$

pentru $\alpha \in [k_c, 1]$, unde c_{ref} este concentrația de referință (observată) a filtratului de noroi.

4.3.1 Teorema de existență a soluției sistemului de stare

Teorema de mai jos afirmă că sistemul de stare (4.9)-(4.13) are o soluție unică pentru orice control $\alpha \in [k_c, 1]$.

Teorema 4.6 *Fie $\alpha \in [k_c, 1]$. Atunci sistemul de stare (4.9)-(4.13), unde χ este dată de (4.36), are o unică soluție (c^α, ξ^α) cu următoarele proprietăți:*

i) $c^\alpha \in C^{\frac{7}{2},\gamma}(\overline{Q})$, $\frac{\partial c^\alpha}{\partial t} \in C^{\frac{7}{2},\gamma}(Q)$, $\frac{\partial^2 c^\alpha}{\partial x^2} \in C^{\frac{7}{2},\gamma}(Q)$; ii) $0 \leq c^\alpha(t, x) \leq 1$, pentru $(t, x) \in \overline{Q}$; iii) $\frac{\partial c^\alpha}{\partial x}$ este mărginită pe $\overline{Q}$: există $M > 0$, care nu depinde de χ , α și c^α , astfel încât $\sup_{\overline{Q}} \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x} \right| \leq M$; iv) $\xi^\alpha \in C^1([0, T])$, $0 \leq \xi(t) \leq \xi_M$, pentru orice $t \in [0, T]$.

4.3.2 Teorema de existență a soluției problemei de minimizare (4.37)

În această secțiune demonstrăm că problema (4.37) are cel puțin o soluție (vezi Teorema 4.7). Consideră c_{ref} o funcție dată astfel încât

$$c_{ref} \in H^1(1, L), c_{ref}(1) = 1, c_{ref}(L) = 0, 0 \leq c_{ref} \leq 1. \quad (4.38)$$

Teorema 4.7 *Problema (4.37) are cel puțin o soluție $\alpha^* \in [k_c, 1]$ cu soluția sistemului de stare corespunzătoare $z^* = (c^*, \xi^*)$.*

*CAPITOLUL 4. PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA
AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE A FILTRATULUI DE
NOROI*

4.3.3 Sistemul în variații de ordinul întâi

În această secțiune arătăm că aplicația control-stare S este derivabilă Gâteaux. Pentru a determina derivata sa Gâteaux utilizăm sistemul în variații de ordinul întâi (4.39)-(4.40). Fie sistemul în variații de ordinul întâi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x}(a(c^*, \xi^*) \frac{\partial z}{\partial x}) + b(c^*, \xi^*) \frac{\partial z}{\partial x} \\ & + 2(1 - \alpha^*) \left(\int_1^L \frac{1}{x} \chi^{*2} (1 - c^*) z dx \right) \frac{\partial}{\partial x} (a_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x}) \\ & + 2(1 - \alpha^*) \left(\int_1^L \frac{1}{x} \chi^{*2} (1 - c^*) z dx \right) b_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (a_\xi(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \psi) + b_\xi(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \psi \\ & + w \sigma \frac{\partial}{\partial x} (a_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x}) + w \sigma b_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x}, \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$z(0, x) = 0, \quad x \in (1, L),$$

$$z(t, 1) = z(t, L) = 0, \quad \text{a.p.t. } t \in (0, T),$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = & 2(1 - \alpha^*) f_I(c^*, \xi^*) \int_1^L \frac{1}{x} \chi^{*2} (1 - c^*) z dx + f_\xi(c^*, \xi^*) \psi + w f_I(c^*, \xi^*) \sigma, \\ \psi(0) = & 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

unde

$$\sigma(t) = - \int_1^L \frac{1}{x} \chi^{*2} (2c^* - c^{*2}) dx. \quad (4.41)$$

Teorema 4.8 *i) Sistemul (4.39)-(4.40) are o soluție unică (z, ψ) cu proprietățile*

$$z \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(1, L) \cap V), \quad \frac{dz}{dt} \in L^2(0, T; H). \quad (4.42)$$

CAPITOLUL 4. PROBLEME DE IDENTIFICARE REFERITOARE LA AL DOILEA MODEL NELINIAR DE INVAZIE A FILTRATULUI DE NOROI

ii) Avem

$$\|(z, \psi)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|z\|_{L^2(0,T;V)}^2 dt \leq \mathcal{K}_4 |w|^2, \quad (4.43)$$

unde $\mathcal{K}_4$ nu depinde de z, ψ și w .

4.3.4 Sistemul dual și condiția necesară de optimalitate

În această secțiune obținem condiția necesară de optimalitate (4.48) (vezi Teorema 4.10). Fie *sistemul dual*

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(c^*, \xi^*) \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (b(c^*, \xi^*) p_1) \\ & + 2(1 - \alpha^*)(1 - c^*) \frac{1}{x} \chi^{*2} \int_1^L a_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} dx \\ & - 2(1 - \alpha^*)(1 - c^*) \frac{1}{x} \chi^{*2} \int_1^L b_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} p_1 dx - 2(1 - \alpha^*)(1 - c^*) \frac{1}{x} f_I(c^*, \xi^*) \chi^{*2} p_2, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$p_1(T, x) = c^*(T, x) - c_{ref}(x), \text{ în } (1, L),$$

$$p_1(t, 1) = p_1(t, L) = 0, \text{ a.e. } t \in (0, T),$$

$$\frac{dp_2}{dt} + f_\xi(c^*, \xi^*) p_2 = \int_1^L a_\xi(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} dx - \int_1^L b_\xi(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} p_1 dx, \quad t \in [0, T], \quad (4.45)$$

$$p_2(T) = 0. \quad (4.46)$$

Teorema 4.9 *Sistemul (4.44)-(4.46) are o soluție unică (ζ, η) cu următoarele proprietăți*

$$\zeta \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(1, L) \cap V), \quad \zeta' \in L^2(0, T; H). \quad (4.47)$$

Teorema 4.10 *Fie (c^*, ξ^*) soluția sistemului de stare (4.9)-(4.13) care corespunde lui α^* și (p_1, p_2) soluția sistemului dual (4.44)-(4.46). Atunci α^**

satisface condiția necesară

$$(\alpha - \alpha^*) \int_0^T \Phi(\alpha^*, t) dt \geq 0, \quad (\forall) \alpha \in [k_c, 1], \quad (4.48)$$

unde

$$\Phi(\alpha^*, t) := \left(\int_1^L (-a_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} + b_I(c^*, \xi^*) \frac{\partial c^*}{\partial x} p_1) dx + f_I(c^*, \xi^*) p_2 \right) \cdot \sigma(t), \quad (4.49)$$

a.p.t. $t \in (0, T)$, și σ este dată (4.41).

4.3.5 Rezultate numerice

Această subsecțiune este dedicată prezentării unor rezultate numerice.

Directii viitoare de cercetare

Ținând seama de rezultatele obținute în această în teză, în această secțiune prezentăm 5 direcții de cercetare.

Articole publicate si participari la conferinte in timpul stagiului doctoral

A. Articles

Articolele publicate în timpul stagiului doctoral sunt [1], [2], [3], [4] și [5].

B. Conferences

În timpul stagiului doctoral am avut 12 prezentări la conferințe.

Bibliografie

- [1] Boaca, I., Nedelcu, A., Birlan, M., **Boaca, T.**, Anghel, S., Mathematical algorithm for the dark-flight trajectory of a meteoroid, Romanian Astronomical Journal, **31** (2) (2021) 171-183.
- [2] Boaca, I., Gritsevich, M., Birlan, M., Nedelcu, A., **Boaca, T.**, Colas, F., Malgoyre, A., Zanda, B., Vernazza, P., Characterization of the fireballs detected by all-sky cameras in Romania, The Astrophysical Journal, **936** (150) (2022).
- [3] Boaca, T., An identification problem related to mud filtrate invasion phenomenon during drilling operation, Inverse problems in science and engineering, **29** (12) (2021) 2401-2428.
- [4] Boaca, T., Identification of the minimum value of reservoir permeability in nonlinear single phase mud filtrate invasion model, Nonlinear Analysis: Real world applications **59** (June 2021) 103274.
- [5] Boaca, T., Boaca, I., A nonlinear single phase mud filtrate invasion model, J. Petr. Sci. Eng. **168** (2018) 39-47.
- [6] Boaca, T., Malureanu, I., Determination of oil reservoir permeability from resistivity measurement: A parabolic identification problem, J. Petr. Sci. Eng. **153** (2017) 345-354.
- [7] Boaca, T., Malureanu, I., Determination of oil reservoir permeability and porosity from resistivity measurements using an analytical model, J. Petr. Sci. Eng. **157** (2017) 884-893.
- [8] Brezis, H., Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, New York, 2011.

BIBLIOGRAFIE

- [9] Civan, F., Reservoir formation damage. Fundamentals, modelling, assessment, and mitigation. Elsevier, Amsterdam, 2007.
- [10] Colli, P., Signori, A., Sprekels, J., Second-order analysis of an optimal control problem in a phase field tumor growth model with singular potentials and chemotaxis, ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations **27** (73) (2021) 1-46.
- [11] Lang, S., Real analysis, Addyson-Wessley Publishing Company, 1983.
- [12] Lions, J. L., Quelques Méthodes de Resolution des Problèmes aux Limites non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.
- [13] Marinoschi, G., Functional approach to nonlinear models of water flow in soils, Springer, Dordrecht, 2006.
- [14] Oden, J. T., Kikuchy, T., Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media, Int. J. Engng. Sci. **18** (1980) 1173-1284.
- [15] Tröltzsch, F., Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
- [16] Windarto, W., Gunawan, A. Y., Sukarno, P., Soewono, E., Modeling of formation damage due to mud filtrate invasion in a radial flow system, J. Petr. Sci. Eng. **100** (2012) 99-105.
- [17] Yosida, K., Functional analysis, Springer, Berlin, 1980.