



ACADEMIA ROMÂNĂ

Școala de studii avansate a Academiei Române

Institutul de Matematică „Simion Stoilow”

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

FENOMENE ASIMPTOTICE ALE ECUAȚIILOR DE DIFUZIE

CONDUCĂTORI DE DOCTORAT:

C.S. I Dr. Ioan-Liviu Ignat

Prof. Dr. Cristian-Mihai Cazacu

DOCTORAND:

Dragoș Manea

2025

Pentru Micu

„Nu știu nimic! Aceasta este cea mai înaltă etică spirituală.”

Sir Anthony Hopkins

MULȚUMIRI

Înainte de toate, îi mulțumesc Mariei pentru că există.

Faptul că sunt încă întreg la minte se datorează și Părintelui Iustin Gârleanu și lui Mihai Bucataru, iar, în plus, îi sunt recunoscător domnului profesor Liviu Marin pentru că mi-a arătat că cercetarea este *doar* o parte din viață, iar nu întreaga viață. Îi mulțumesc mamei mele Adelina pentru toate momentele în care m-a ascultat plângându-mă, despre matematică și nu numai, și le sunt recunoscător tatălui meu Sebastian și bunicii Tica, Papi și Șați pentru tot sprijinul. Colegilor mei din redacția revistei *Syntopic* le datorez faptul că nu am renunțat la a continua doctoratul undeva prin primul an. În plus, aș vrea să le mulțumesc domnilor profesori Sergiu Moroianu, pentru sprijinul matematic și nematematic, și Arghir-Dani Zărnescu, pentru că mi-a arătat fața umană a unui matematician. Sunt recunoscător și celorlalți colaboratori cu care am avut ocazia să lucrez: Conf. Timotheé Crin-Barat, Prof. Eduard-Wilhelm Kirr, Paweł Gora și Mauritz Cartier van Dissel, pentru tot ce am învățat de la ei.

Nu în ultimul rând, îi mulțumesc lui Silviu Gherman pentru că mi-a făcut orele de cercetare suportabile, prin videoclipurile lui.

În timpul cercetării pentru elaborarea acestei teze, am fost sprijinit financiar prin bursa doctorală oferită de Academia Română, împreună cu următoarele granturi: PN-III-P4-ID-PCE-2020-0794 „Metode spectrale în geometria hiperbolică”, și PN-III-P1-1.1-TE-2021-1539 „Analiza fină a operatorilor cu derivate parțiale”, ambele finanțate de CNCS-UEFISCDI România. În afară de acestea, am primit finanțare prin grantul PNRR-III-C9-2023-I8 CF 149/31.07.2023, „Conformal Aspects of Geometry and Dynamics”.

CUPRINS

1	Introducere	15
1.1	Tinzând spre limite pentru a dezvolta Matematica	15
1.1.1	Comportament asimptotic la timp mare	17
1.1.2	Aproximări între operatori	18
1.2	Rate de descreștere la timp mare și profile asimptotice pentru ecuații de difuzie	19
1.2.1	Profilul asimptotic al ecuației căldurii pe $\mathbb{R}^N$	19
1.2.2	Profilul asimptotic al ecuației căldurii cu potențial Hardy pe spații colț	21
1.3	Limite de concentrare de tip nelocal către local pentru ecuații de convecție-difuzie	23
1.3.1	O limită nelocală pentru problema de transport pe axa reală . .	23
1.3.2	Aproximare de tip nelocal către local pentru ecuația neliniară de convecție-difuzie pe spațiul hiperbolic	25
1.4	Aproximare cu diferențe finite pentru ecuația căldurii pe spații nemărginite, Euclidiene și ne-Euclidiene	29
1.4.1	Aproximare cu diferențe finite pentru ecuația căldurii pe $\mathbb{R}^2$. .	31
1.4.2	Aproximare numerică cu diferențe finite pentru ecuația căldurii pe spațiul hiperbolic	34
1.5	Limite de relaxare între ecuații hiperbolice și parabolice	40
1.5.1	Aproximare între probleme hiperbolice și parabolice pe axa reală	40
1.5.2	Păstrarea fenomenelor asimptotice de către aproximările discrete ale sistemelor parțial disipative	42
2	Preliminarii	46
2.1	O prezentare succintă a teoriei semigrupurilor	46
2.2	Scurtă introducere în Geometria Riemanniană, cu accentul pe spațiul hiperbolic	49

2.2.1	Spații de funcții pe varietăți Riemanniene	49
2.2.2	Spațiul hiperbolic. Două modele izometrice	51
2.3	Transformata Fourier semi-discretă unidimensională	53
2.3.1	Definiție și proprietăți elementare	53
2.3.2	Scheme clasice cu diferențe finite	54
2.3.3	Transformata Fourier a schemelor cu diferențe finite și rezultate de stabilitate	55
2.3.4	Proprietăți ale operatorului de diferențe finite centrale	58
3	Asimptotice la timp mare pentru ecuația căldurii cu potențial Hardy pe spații colț	59
3.1	Introducere	59
3.2	Ecuația în variabile de similaritate	66
3.3	O inegalitate de tip Hardy-Poincaré îmbunătățită	68
3.4	Cadru funcțional și spectral	71
3.4.1	O observație privind spațiul H_λ în cazul subcritic	72
3.4.2	Scufundare compactă	73
3.4.3	Prima valoare proprie a operatorului L_λ	75
3.5	Comportamentul asimptotic al ecuației căldurii cu potențial Hardy pe $\mathbb{R}_+^{N,k}$	77
3.5.1	Demonstrația Teoremei 3.1.3	78
4	Asimptotice de la nelocal către local în context ne-Euclidian	83
4.1	Introducere	83
4.2	Spațiul hiperbolic $\mathbb{H}^N$	90
4.2.1	Fluxul geodezic pe $\mathbb{H}^N$	91
4.2.2	Proprietăți ale aplicației exponențiale	92
4.3	Transport local și liniar pe spațiul hiperbolic	94
4.3.1	Existență și unicitate pentru problema locală	94
4.4	Transport nelocal și liniar pe spațiul hiperbolic	97
4.5	Limită de relaxare pentru problema de transport	99
4.6	O clasă largă de funcții G care satisfac ipotezele Teoremei 4.1.5	105
4.7	Un rezultat de compacitate pe varietăți	107

4.8	Convecție-difuzie locală și neliniară pe spațiul hiperbolic	113
4.9	Convecție-difuzie nelocală și neliniară pe spațiul hiperbolic	114
4.9.1	Estimări de normă a priori	115
4.9.2	Existență și unicitate	117
4.10	Limită de relaxare pentru ecuația de convecție-difuzie	119
4.10.1	Limită de relaxare pentru termeni neliniari mai generali	125
5	Aproximări dinspre discret către continuu în context ne-Euclidian	127
5.1	Introducere	127
5.2	Preliminarii pentru acest capitol	131
5.2.1	Spațiul hiperbolic 2-dimensional	131
5.2.2	Metoda diferențelor finite: condiții artificiale la frontieră	132
5.3	Cazul continuu	133
5.3.1	Inegalitatea Poincaré și stabilitatea exponențială	134
5.3.2	Estimări ale nucleului căldurii	135
5.4	Prima variantă de operator Laplace discret	137
5.4.1	Grila de diferențe finite	137
5.4.2	Operatorul Laplace discret	139
5.4.3	Inegalitatea Poincaré	141
5.4.4	Acuratețea	141
5.5	A doua variantă de operator Laplace discret	146
5.5.1	Grila de diferențe finite	146
5.5.2	Operatorul Laplace discret.	149
5.5.3	Inegalitatea Poincaré	150
5.5.4	Acuratețea	150
5.6	Convergența schemelor semi-discrete și discrete cu diferențe finite	154
5.6.1	O schemă numerică abstractă pentru ecuația căldurii pe $\mathbb{H}^2$ cu termen de sursă	155
5.6.2	Convergența schemei semi-discrete și estimări de eroare	156
5.7	Schemă total discretă de tip θ pentru operatorii Laplace discreți pe $\mathbb{H}^2$	157
5.8	Rezultate numerice: Un studiu comparat al celor două variante de operator Laplace discret	164
5.8.1	Cadrul experimental	165

5.8.2	Convergența schemei cu diferențe finite. Ordinul de convergență	165
5.8.3	Eroarea relativă normalizată a aproximării	168
5.9	Concluzii și direcții noi de cercetare	170
5.9.1	Observații de final	170
5.9.2	Direcții viitoare de cercetare	170
6	Combinând tipurile de aproximări: asimptotice la timp lung, limite dinspre discret spre continuu și dinspre ecuații hiperbolice spre pa- rabolice, pentru sisteme parțial disipative	172
6.1	Introducere și formularea informală a rezultatelor	172
6.1.1	Sisteme parțial disipative – propagarea amortizării prin dina- mica hiperbolică	173
6.1.2	Schemă numerică ce păstrează comportamentul asimptotic al sistemelor parțial disipative	175
6.1.3	Schemă numerică ce păstrează limita de relaxare	175
6.2	Rezultate principale	179
6.2.1	Păstrarea proprietăților asimptotice de către schema cu diferențe finite centrale	179
6.2.2	Limită de relaxare în sens tare, în context semi-discret	180
6.3	Prezentarea cadrului discret	184
6.3.1	Norme Besov discrete	184
6.4	Demonstrația Teoremei 6.2.1: Hipocoercivitate pentru sisteme hiperbo- lice semi-discretizate	188
6.4.1	Descresțerea termenului $\mathcal{D}_h U$	189
6.4.2	Estimări de descresștere în timp pentru U_2	191
6.5	Demonstrația Teoremei 6.2.6: Limită de relaxare în context numeric . .	191
6.5.1	Estimări uniforme față de ε pentru (6.7)	191
6.5.2	Analiza erorii	193
6.6	Demonstrația Teoremei 6.2.3: Estimări Besov uniforme față de lățimea grilei	194
6.7	Simulări numerice	195
6.7.1	Proprietatea de hipocoercivitate în context numeric	195
6.7.2	Limita de relaxare – estimări de eroare	196

6.8	Concluzie și extensii	198
7	Rezultate asimptotice suplimentare și proiecte în derulare	200
7.1	Comportamentul asimptotic al unui sistem liniar cuplat de convecție-difuzie pe axa reală	200
7.1.1	Prezentarea problemei	200
7.1.2	Rezultate preliminare	203
7.1.3	Estimări de Gaussiene	205
7.1.4	Demonstrația Teoremei 7.1.2	209
7.1.5	Demonstrația Teoremei 7.1.3	215
7.2	Convecție-difuzie nelocală și neliniară pe grafuri metrice	217
7.2.1	Introducere	217
7.2.2	Preliminarii	221
7.2.3	O problemă de transport pe arbori metrice	224
7.2.4	Limită de relaxare pentru problema de transport	231
7.2.5	O problemă neliniară de convecție-difuzie pe arbori metrice . . .	236
7.2.6	Limită de relaxare pentru problema neliniară de convecție-difuzie	242
7.3	Estimări de descreștere L^p pentru ecuația căldurii cu potențial Hardy .	247
7.3.1	Ecuația și formularea ei în variabile de similaritate	247
7.3.2	Estimări de descreștere pentru ecuația în variabile de similaritate	248
7.4	Bifurcarea constantei optimale a inegalității Caffarelli-Kohn-Nirenberg în context L^p	253
7.4.1	Prezentarea problemei	253
7.4.2	Demonstrația primului rezultat principal	257
7.4.3	Demonstrația celui de-al doilea rezultat principal – Teorema 7.4.8	265
7.5	Ecuația de convecție-difuzie pe grafuri metrice: direcții suplimentare de studiu teoretic și numeric	269
7.6	Limită de relaxare dinspre hiperbolic către parabolic pentru sisteme neliniare	269
7.7	Calculul valorilor proprii pe domenii arbitrare folosind o bază de funcții proprii	270
	Concluzie	272

Bibliografie	274
Anexe	290
A Detalii despre modelele exemplificative din Introducere	291
A.1 Demonstrația Propoziției 1.5.1	291
A.2 Demonstrația Propoziției 1.3.1	292
A.3 Demonstrația Propoziției 1.4.1	296
B Anexă pentru Capitolul 5	300
B.1 Leme tehnice	300
B.1.1 Estimări Taylor	300
B.1.2 Demonstrația Lemei 5.4.4	301
B.1.3 Inegalitatea Sobolev pe dreptunghiuri Euclidiene	302
B.2 Regularitatea și integrabilitatea soluțiilor ecuației căldurii pe $\mathbb{H}^2$	302
B.2.1 Demonstrația Lemei 5.3.7	305
B.3 Demonstrațiile inegalităților Poincaré discrete	308
B.3.1 Demonstrația inegalității Poincaré pentru primul operator Laplace discret (Propoziția 5.4.3)	308
B.3.2 Demonstrația inegalității Poincaré pentru cel de-al doilea operator Laplace discret	311
C Anexă pentru Capitolul 6	314
C.1 Leme diverse	314
C.1.1 Demonstrația Lemei 6.4.1.	314
C.1.2 Leme tehnice	316
D Anexă pentru Capitolul 7	317
D.1 Anexă pentru Secțiunea 7.1 – Demonstrația riguroasă a Lemei 7.1.6 . .	317
D.1.1 Soluția ecuației (7.13) se situează sub o Gaussiană	317
D.1.2 Soluție distribuțională și unicitate	318
D.2 Anexă pentru Secțiunea 7.4	321

PREZENTAREA REZULTATELOR PRINCIPALE

Capitolul 1: INTRODUCERE

Această lucrare explorează o varietate de scenarii în care metodele asimptotice au un rol crucial în analiza ecuațiilor cu derivate parțiale. Motivațiile pentru utilizarea aproximărilor matematice sunt diverse: pe de o parte, ele permit înlocuirea unor modele dificil de studiat cu altele mai simple, aproximative, ale căror proprietăți pot fi ulterior transferate obiectelor inițiale, mai complexe. Un exemplu relevant în acest sens îl constituie schemele numerice utilizate pentru calculul efectiv al soluțiilor ecuațiilor diferențiale. Pe de altă parte, aproximările ne permit să prezicem comportamentul anumitor modele, atunci când parametrii acestora se apropie de valori extreme. De exemplu, profilurile asimptotice pentru ecuațiile de evoluție oferă o perspectivă asupra soluțiilor atunci când variabila temporală devine mare. Prezenta lucrare furnizează multiple rezultate asimptotice pentru ecuații de evoluție locale și nelocale, definite atât pe spații Euclidiene, cât și în contextul ne-Euclidian al spațiilor hiperbolice.

Capitolele principale ale acestei teze (3-6) se bazează pe patru dintre lucrările mele scrise în colaborare, care explorează fenomene asimptotice ale ecuațiilor parabolice. Două dintre aceste articole au fost publicate [13, 24], în timp ce celelalte se află în revizuire la reviste de prestigiu [9, 19].

În prima parte a lucrării, studiem comportamentul asimptotic la timp mare pentru ecuația căldurii cu potențial invers-pătratic de tip Hardy pe spații de forma $\mathbb{R}^{N-k} \times (0, \infty)^k$, $k \geq 0$. Mai întâi, demonstrăm o inegalitate originală de tip Hardy-Poincaré pentru oscilatorul armonic cu potențial Hardy. Acest rezultat ne va permite să construim spațiile funcționale potrivite pentru formularea problemei Cauchy și pentru studiul atât al ratei de descreștere polinomială, cât și al primului termen din dezvoltarea asimptotică a soluției în $L^2(\mathbb{R}^{N-k} \times (0, \infty)^k)$. În particular, extindem rezultatele obținute de Vázquez și Zuazua (J. Funct. Anal. 2000) în cazul $k = 0$ la cazul unui

$k \geq 0$ arbitrar. De asemenea, evidențiem faptul că rata de descreștere a soluției la timp mare este cu atât mai abruptă cu cât parametrul k se apropie de N . Abordarea noastră este una inovativă și simplificată în comparație cu cea întreprinsă de Vázquez și Zuazua, inclusiv prin renunțarea la descompunerea în serie de armonice sferice.

Cea de-a doua parte a lucrării este dedicată studiului unei ecuații nelocale de evoluție pe spațiul hiperbolic $\mathbb{H}^N$. În prima parte, considerăm un model de transport de particule descris de un nucleu nelocal care este definit pe fibratul tangent și este invariant la fluxul geodezic. Studiem apoi relaxarea acestui model către o problemă locală de transport, pe măsură ce nucleul se concentrează în jurul originii din fiecare spațiu tangent. Mai exact, presupunând anumite condiții de regularitate și integrabilitate ale nucleului, demonstrăm faptul că soluția problemei nelocale converge la cea a problemei locale. În continuare, construim o clasă largă de nuclee ce satisfac condițiile necesare pentru convergență.

În cadrul aceluiași capitol, ne concentrăm atenția pe o ecuație nelocală și neliniară de convecție-difuzie pe $\mathbb{H}^N$ descrisă de două nuclee, câte unul pentru partea de difuzie și, respectiv, convecție. Demonstrăm că soluția acestei probleme converge, pe măsură ce nucleele se concentrează, la soluția unei probleme locale de convecție-difuzie. Pentru a demonstra această convergență, introducem o teoremă de compacitate pe varietăți în spiritul rezultatelor obținute de Bourgain-Brezis-Mironescu.

Principală motivație din spatele celei de-a treia părți a lucrării provine dintr-o lacună semnificativă în literatura existentă: absența unui echivalent discret pentru operatorul Laplace-Beltrami pe varietăți Riemanniene, care să poată fi utilizat eficient pentru rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale. Considerăm că abordarea naturală pentru a deschide acest domeniu este de a explora mai întâi unul dintre cele mai simple scenarii non-triviale (adică non-euclidiene), concentrându-ne în mod specific pe spațiul hiperbolic bidimensional $\mathbb{H}^2$. În acest scop, prezentăm două variante de operator diferențial discret, adaptate acestui spațiu cu curbura negativă constantă, ambele servind ca aproximări ale operatorului (continuu) Laplace-Beltrami, în context L^2 . În plus, demonstrăm că ecuația discretă a căldurii asociată ambilor operatori menționați prezintă stabilitate și converge către soluția ecuației căldurii-Beltrami continue pe $\mathbb{H}^2$. În final, ilustrăm faptul că un operator Laplacian discret proiectat special pentru geometria spațiului hiperbolic oferă o aproximare mai precisă și avantaje atât din perspective

teoretice, cât și computaționale.

În ultima parte, analizăm conservarea proprietăților asimptotice ale sistemelor hiperbolice parțial disipative atunci când se trece la un cadru discret. Demonstrăm că una dintre cele mai simple metode numerice consistente și necondiționat stabile – schema diferențelor finite centrale – păstrează atât comportamentul asimptotic, cât și limita de relaxare parabolică a sistemelor hiperbolice unidimensionale parțial disipative care satisfac condiția de rang Kalman.

Proprietatea de conservare a comportamentului asimptotic la timp mare este realizată prin conceperea unor funcționale de energie perturbate, ponderate în timp, în spiritul teoriei hipocoercivității. Pentru proprietatea de păstrare a limitei de relaxare, inspirându-ne din observația că soluțiile în cazul continuu prezintă comportamente distincte la frecvențe joase și înalte, introducem o nouă teorie discretă Littlewood-Paley adaptată schemei diferențelor finite centrale. Acest lucru ne permite să demonstrăm inegalități de tip Bernstein pentru operatorii diferențiali discreți și conduce la un nou rezultat de relaxare: convergența tare a sistemului Euler compresibil liniarizat discret cu amortizare către ecuația discretă a căldurii, uniform față de parametrul de discretizare.

Lucrarea se încheie prin prezentarea unei colecții de rezultate asimptotice mai puțin dezvoltate, destinate aprofundării și publicării ulterioare, precum și prin identificarea și propunerea unor noi direcții de cercetare inspirate de concluziile acestei teze. Se are în vedere extinderea acestor rezultate asimptotice la alte tipuri de ecuații diferențiale și explorarea potențialului metodelor utilizate în diverse contexte matematice. Împreună, aceste proiecte încă nefinalizate și noile direcții de cercetare au potențialul de a deschide noi orizonturi în analiza matematică și de a aduce contribuții semnificative atât în dezvoltarea teoretică, cât și în cea aplicată a domeniului.

Capitolul 2: PRELIMINARII

Acest capitol al tezei este dedicat prezentării succinte a unor rezultate relativ clasice, utile pe parcursul lucrării.

În primul rând, introducem câteva noțiuni elementare din teoria semi-grupurilor, un domeniu al analizei care stă la baza studiului riguros al ecuațiilor de evoluție. Pentru

o introducere detaliată în această teorie, precum și pentru construcția riguroasă a spațiilor Lebesgue și Sobolev pe intervale reale cu valori într-un spațiu Banach, cititorul interesat poate consulta [14].

În al doilea rând, oferim o introducere succintă în geometria Riemanniană, operatorii diferențiali și spațiile de funcții pe varietăți Riemanniene (a se vedea [25]), după care reamintim câteva aspecte clasice despre spațiul hiperbolic $\mathbb{H}^N$ și fluxul său geodezic Riemannian. Începem prin prezentarea a două modele ale lui $\mathbb{H}^N$, fiecare dintre ele putând fi utilizat pentru a facilita anumite calcule specifice. Pentru mai multe detalii despre geometria hiperbolică și modelele acesteia, recomandăm [32].

În cele din urmă, introducem transformata Fourier semi-discretă unidimensională și amintim câteva proprietăți fundamentale, precum inversabilitatea și egalitatea lui Parseval. Ulterior, utilizăm aceste proprietăți pentru a studia soluțiile sistemelor hiperbolice discrete. Pentru mai multe detalii despre acest subiect, cititorul poate consulta [38, Secțiunea 2.2] și [36, Capitolul 2].

Capitolul 3: ASIMPTOTICE LA TIMP MARE PENTRU ECUAȚIA CĂLDURII CU POTENȚIAL HARDY PE SPAȚII COLȚ

Primul rezultat original al acestei teze se concentrează asupra studiului ecuației căldurii cu un potențial singular pe spațiile colț $\mathbb{R}_+^{N,k} := \mathbb{R}^{N-k} \times (0, \infty)^k$. Problema este inspirată de lucrarea lui Vázquez și Zuazua [39], care tratează cazul întregului spațiului $\mathbb{R}^N$. Mai precis, ne propunem să determinăm profilul asimptotic al unei ecuații care descrie un proces de difuzie a particulelor, combinat cu o acumulare în apropierea colțului spațiului (adică originea $0_{\mathbb{R}^N}$). Difuzia este caracterizată prin operatorul Laplace, în timp ce acumularea este descrisă printr-un potențial de tip invers-pătrat $\frac{\lambda}{|x|^2}$, unde parametrul λ cuantifică intensitatea acumulării de substanță în apropierea originii. Stabilitatea modelului impune ca această rată de acumulare să fie mai mică decât o anumită valoare critică $\lambda_{N,k} := \left(\frac{N-2}{2} + k\right)^2$, care reprezintă, la rândul ei, constanta optimă a inegalității Hardy în spațiile colț – vezi [37].

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N,k}} |\nabla u|^2 dx \geq \lambda_{N,k} \int_{\mathbb{R}_+^{N,k}} \frac{u^2}{|x|^2} dx, \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{N,k}). \quad (3.1)$$

Această inegalitate conduce la buna formulare a problemei Cauchy care cuantifică fenomenul descris în paragraful precedent – vezi [5]:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) + \frac{\lambda}{|x|^2} u(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}_+^{N,k}, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial \mathbb{R}_+^{N,k}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+^{N,k}, \end{cases} \quad (3.2)$$

unde $u_0 \in L^2(\mathbb{R}_+^{N,k})$ și $\lambda \in (-\infty, \lambda_{N,k}]$. Deși problema este bine formulată pentru orice date inițiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}_+^{N,k})$ și, în plus, norma $L^2(\mathbb{R}_+^{N,k})$ a soluției nu crește în timp, aceasta este singura concluzie certă pe care o putem trage despre comportamentul pe termen lung al lui $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{N,k})}$.

Prin urmare, estimări de descreștere pot fi obținute doar dacă restrângem datele inițiale la un subspațiu al lui $L^2(\mathbb{R}_+^{N,k})$. Astfel, inspirați de [22, 39], considerăm spațiul L^2 ponderat:

$$L^2(\mathbb{R}_+^{N,k}; K) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}_+^{N,k}) \mid \int_{\mathbb{R}_+^{N,k}} |u(x)|^2 K(x) dx < \infty \right\}, \quad K(x) := e^{\frac{|x|^2}{4}},$$

pentru care obținem o rată optimă de descreștere polinomială a soluțiilor ecuației (3.2), împreună cu profilul asimptotic care, în particular, descrie modul în care informația se acumulează în apropierea originii, pentru timp foarte mare. Aceste rezultate sunt rezumate în:

Teorema 3.1. *Pentru orice dată inițială $u_0 \in L^2(\mathbb{R}_+^{N,k}; K)$, soluția u a problemei (3.2) satisface:*

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{N,k})} \leq (1+t)^{-\frac{1+m_\lambda}{2}} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{N,k}; K)}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.3)$$

unde $m_\lambda := \sqrt{\lambda_{N,k} - \lambda}$.

În plus, această rată de descreștere polinomială este optimă, iar profilul asimptotic este descris de următoarea convergență:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1+m_\lambda}{2}} \left\| u(t) - \beta t^{-(1+m_\lambda)} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} e^{\frac{|x|^2}{8}} \alpha_{k,\lambda} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{N,k})} = 0, \quad (3.4)$$

unde funcția $\alpha_{k,\lambda} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{N,k})$ definită prin

$$\alpha_{k,\lambda}(x) := e^{-\frac{|x|^2}{8}} |x|^{m_\lambda - \frac{N-2}{2}} \frac{x_{N-k+1} x_{N-k+2} \cdots x_N}{|x|^k}, \quad (3.5)$$

este prima funcție proprie a următoarei probleme eliptice de valori proprii:

$$\Delta \phi(x) + \left(\frac{\lambda}{|x|^2} - \frac{|x|^2}{16} \right) \phi(x) = \mu \phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^{N,k}, \quad (3.6)$$

având valoarea proprie corespunzătoare $\mu_1 = \frac{1+m_\lambda}{2}$.

În acest context, β este o constantă de normalizare ce depinde de data inițială u_0 :

$$\beta := \left(\|\alpha_{k,\lambda}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{N,k})} \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^{N,k}} u_0(x) e^{\frac{|x|^2}{s}} \alpha_{k,\lambda}(x) dx.$$

Construcția unui cadru funcțional adecvat pentru studiul problemei (3.2) cu date inițiale în $L^2(\mathbb{R}_+^{N,K}; K)$, demonstrația Teoremei 3.1 și alte rezultate conexe sunt abordate în Capitolul 3 al acestei teze, care, la rândul său, se bazează pe articolul meu în colaborare, publicat în [13].

Capitolul 4: ASIMPTOTICE DE LA NELOCAL CĂTRE LOCAL ÎN CONTEXT NE-EUCLIDIAN

În acest capitol studiem un tip de comportament asimptotic între operatori care descriu procese diferite: mișcarea locală versus mișcarea nelocală a particulelor. În timp ce EDP-urile locale, precum ecuația căldurii, descriu particule care se deplasează instantaneu doar în vecinătatea poziției lor inițiale, modelul nelocal pe care îl descriem cuantifică salturi instantanee ale particulelor între orice două puncte din spațiu; vezi [2]. Această mișcare nelocală este caracterizată de mai multe nuclee (posibil asimetrice) $G_i(x, y)$, care cuantifică probabilitatea unui salt între pozițiile x și y din spațiu.

Al doilea rezultat original al acestei teze este o versiune neeuclidiană a rezultatelor de convergență din [30, 29]. Diferența majoră constă în faptul că spațiul în care lucrăm este spațiul hiperbolic, care nu mai este plat, având curbura secțională constantă -1 . Deși spațiul hiperbolic N -dimensional $\mathbb{H}^N$ este unul dintre cele mai simple exemple de geometrii neeuclidiene, acesta ridică deja provocări importante, chiar în însăși formularea problemei nelocale. De exemplu, o sarcină aparent simplă, precum definirea unui nucleu $G(x, y)$ care depinde doar de diferența $y - x$ în context euclidian, devine netrivială atunci când curbura nu este nulă. Pentru a depăși această dificultate, utilizăm noțiunea de *flux geodezic* pe o varietate Riemanniană și, ulterior, transferăm obiectele de pe varietate pe spațiile tangente prin intermediul aplicației exponențiale.

Pentru a enunța rezultatul principal al acestui capitol, vom descrie pe scurt spațiul hiperbolic $\mathbb{H}^N$ și fluxul său geodezic. Pentru simplitate, vom considera doar un model al acestui spațiu (și anume modelul semi-spațiului), făcând referire la [32] pentru o

prezentare mai detaliată a conceptelor implicate. Mulțimea-suport pentru acest model este

$$\mathbb{H}^N \simeq \mathbb{R}_+^N := \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)\},$$

cu metrica Riemanniană definită prin:

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{x_N^2} \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

În acest context, gradientul Riemannian, divergența și operatorul Laplace-Beltrami au următoarele expresii:

$$\nabla_g f = x_N^2 \nabla_e f, \quad \operatorname{div}_g(Y) = x_N^N \operatorname{div}_e\left(\frac{1}{x_N^N} Y\right), \quad \Delta_g f = x_N^N \operatorname{div}_e\left(\frac{1}{x_N^{N-2}} \nabla_e f\right),$$

unde ∇_e și div_e sunt operatorii gradient și divergență uzuali din spațiul Euclidian.

Forma volum pe $\mathbb{H}^N$ și pe spațiul său tangent într-un punct x devin $d\mu(x) = x_N^{-N} dx$, respectiv $d\mu(V) = x_N^{-N} dV$, ceea ce înseamnă că integrarea funcțiilor pe $\mathbb{H}^N$ și pe $T_x \mathbb{H}^N$ se face conform următoarelor formule:

$$\int_{\mathbb{H}^N} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+^N} f(x) \frac{1}{x_N^N} dx \quad \text{și} \quad \int_{T_x \mathbb{H}^N} f(V) d\mu(V) = \frac{1}{x_N^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(V) dV.$$

Geodezicele (adică curbele de lungime minimă) din acest model sunt fie semidreptele verticale euclidiene (adică pentru care x' este constant), fie semicercurile centrate pe baza $\{x_N = 0\}$, perpendiculare pe aceasta. Pentru orice două puncte distincte $x, y \in \mathbb{H}^N$, există o unică geodezică (neparametrizată) care le unește – vezi Figura 3.1. Mai mult, pentru orice vector V din spațiul tangent $T_x \mathbb{H}^N$, există o singură geodezică parametrizată $\gamma_{x,V} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^N$ astfel încât $\gamma_{x,V}(0) = x$ și $\gamma'_{x,V}(0) = V$. Dacă $\gamma_{x,V}(1) = y$, atunci notăm $V_{x,y} := V$, ceea ce înseamnă că vectorul V transportă prin geodezice punctul x în punctul y . Acest vector $V_{x,y} \in T_x \mathbb{H}^N$ este echivalentul natural al vectorului euclidian $y - x$. Facem din nou referire la Figura 3.1.

În continuare, definim fluxul geodezic al lui $\mathbb{H}^N$, $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, care acționează pe fibratul tangent $T\mathbb{H}^N$ astfel:

$$\Phi_t(x, V) = (\gamma_{x,V}(t), \gamma'_{x,V}(t)) \in T\mathbb{H}^N, \quad \forall (x, V) \in T\mathbb{H}^N.$$

Acum, enunțăm prima teoremă principală din această secțiune, referitoare la problema nelocală de transport pe $\mathbb{H}^N$.

Teorema 3.2. *Fie $\varepsilon_0 > 0$, $u_0 \in L^2(\mathbb{H}^N)$ și familia de nuclee scalate $G_\varepsilon : \mathbb{H}^N \times \mathbb{H}^N \rightarrow [0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ care satisfac:*

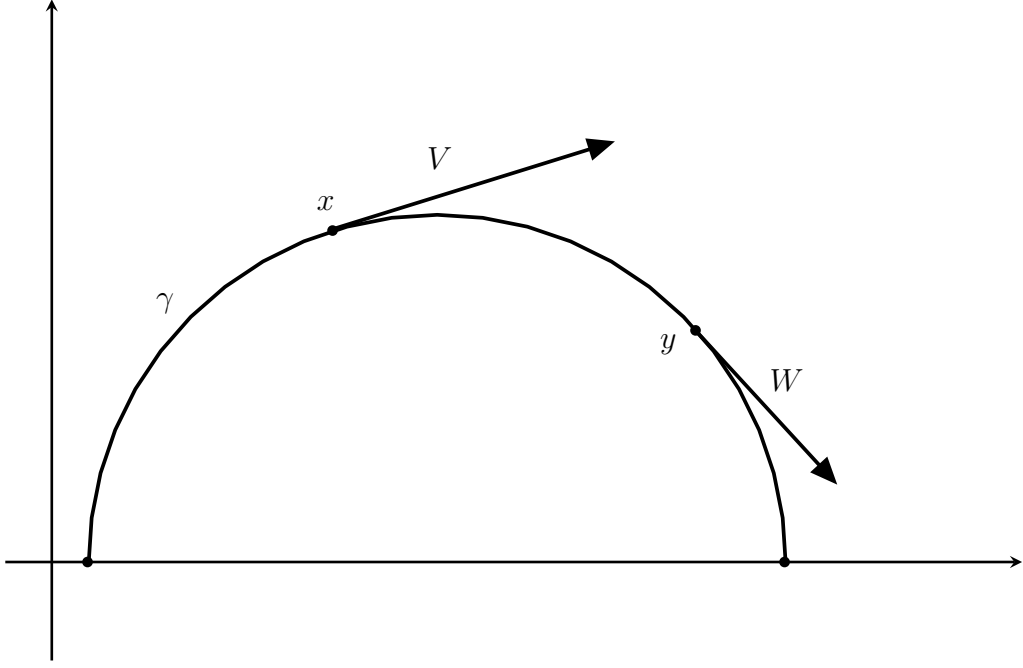


Figura 3.1: Geodezica γ prin punctele x and y în modelul semi-spațiului, tangentă la vectorii V și W .

- $G_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-N-1} \tilde{G}\left(x, \frac{V_{x,y}}{\varepsilon}\right)$, unde $\tilde{G} : T\mathbb{H}^N \rightarrow [0, \infty)$ este invariantă la fluxul geodezic $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Mai precis:

$$\tilde{G}(\Phi_t(x, V)) = \tilde{G}(x, V), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ și } (x, V) \in T\mathbb{H}^N.$$

- Următoarea condiție de integrabilitate are loc:

$$\int_0^\infty \sup_{x \in \mathbb{H}^N, |W|=r} \tilde{G}(x, W)(1+r)(e^r \sinh(r))^{N-1} dr < \infty,$$

unde $|W|$ reprezintă norma hiperbolică a vectorului tangent $W \in T_x\mathbb{H}^N$.

- Câmpul de vector „prim moment” X_G pe $\mathbb{H}^N$:

$$X_G(x) := - \int_{T_x\mathbb{H}^N} \tilde{G}(x, W) W dW, \quad \forall x \in \mathbb{H}^N \quad (3.7)$$

este de clasă C^1 .

Atunci, familia de soluții $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ ale problemei nelocale:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{H}^N} G_\varepsilon(x, y)(u^\varepsilon(t, y) - u^\varepsilon(t, x)) d\mu(y), & x \in \mathbb{H}^N, t \geq 0; \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{H}^N. \end{cases} \quad (3.8)$$

converge slab în $L^2([0, T], L^2(\mathbb{H}^N))$, când $\varepsilon \rightarrow 0$, către unica soluție distribuțională a următoarei probleme locale de transport:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = -\operatorname{div}_g(u(t)X_G)(x), & x \in \mathbb{H}^N, t \geq 0; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{H}^N. \end{cases}$$

În cele ce urmează, vom prezenta un rezultat asimptotic similar pentru o problemă mai generală, nelocală și neliniară, determinată de două nuclee: unul dintre ele este nucleul de transport G_ε , în timp ce celălalt, notat cu $\tilde{J}_\varepsilon$, este responsabil pentru răspândirea uniformă a particulelor în toate direcțiile (difuzie nelocală). Din acest motiv, nucleul $\tilde{J}_\varepsilon$ depinde doar de distanța geodezică $d_g(x, y)$ dintre punctele $x, y \in \mathbb{H}^N$. Facem referire la [4] pentru studiul unei probleme similare care implică exclusiv nucleul de difuzie nelocală $\tilde{J}_\varepsilon$.

Teorema 3.3. *Presupunem că ipotezele Teoremei 3.2 sunt îndeplinite. Considerând funcția $J : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ care satisface $J(0) > 0$ și*

$$\int_0^\infty J(r) (1 + r^2) (e^r \sinh(r))^{N-1} dr < \infty,$$

definim nucleul izotrop scalat $\tilde{J}_\varepsilon : \mathbb{H}^N \times \mathbb{H}^N \rightarrow [0, \infty)$,

$$\tilde{J}_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-N-2} J\left(\frac{d_g(x, y)}{\varepsilon}\right).$$

În plus, pentru $q \geq 1$, considerăm $f(r) := |r|^{q-1}r$ și cu u^ε notăm soluția următoarei probleme nelocale și neliniare:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{H}^N} \tilde{J}_\varepsilon(x, y) (u^\varepsilon(t, y) - u^\varepsilon(t, x)) d\mu(y) \\ \quad + \int_{\mathbb{H}^N} G_\varepsilon(x, y) (f(u^\varepsilon(t, y)) - f(u^\varepsilon(t, x))) d\mu(y), & x \in \mathbb{H}^N, t \geq 0; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{H}^N. \end{cases}$$

Atunci familia $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge slab în $L^2([0, T], L^2(\mathbb{H}^N))$ și tare în $L^2([0, T], L^2_{loc}(\mathbb{H}^N))$ către soluția unică a problemei locale de convecție-difuzie:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = A_J \Delta_g u(t, x) - \operatorname{div}_g(f(u(t))X_G)(x), & x \in \mathbb{H}^N, t \geq 0; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{H}^N, \end{cases}$$

unde constanta de difuzivitate A_J este egală cu:

$$A_J := \frac{1}{2N} \operatorname{Area}(\mathbb{S}^{N-1}) \int_0^\infty J(r) r^{N+1} dr,$$

$\text{Area}(\mathbb{S}^{N-1})$ reprezintă aria Euclidiană a sferei unitate Euclidiene, iar câmpul de vectori „prim moment” X_G este definit în (3.7).

Demonstrația detaliată a teoremelor de mai sus, împreună cu construcția unei clase largi de nuclee G_ε care satisfac proprietățile cerute, constituie subiectul Capitolului 4 al acestei teze, care se bazează pe articolul publicat [24].

Capitolul 5: APROXIMĂRI DINSPRE DISCRET CĂTRE CONTINUU ÎN CONTEXT NE-EUCLIDIAN

Următorul rezultat original din această teză este o aproximare numerică prin diferențe finite în contextul unei varietăți Riemanniene. Deoarece literatura științifică nu oferă referințe despre acest tip de metodă numerică în cadrul Riemannian (singurele scheme numerice existente pentru ecuații pe varietăți sunt aproximările de tip element finit [27], volum finit [1, 23] și Monte Carlo [20]), am considerat unul dintre cele mai simple exemple, și anume spațiul hiperbolic bidimensional $\mathbb{H}^2$. Prezintă două variante discrete de tip diferențe finite ale operatorului de Laplace-Beltrami, apoi realizăm o comparație între ele, din perspectiva acurateții aproximării și a eficienței computaționale. Vom arăta că utilizarea unei grile de diferențe finite mai bine adaptate la geometria spațiului hiperbolic conduce la o aproximare mai precisă, alături de o îmbunătățire a utilizării resurselor computaționale.

Fiecare dintre cei doi operatori Laplace discreți este construit, similar cu cazul planului euclidian, ca o combinație liniară a valorilor funcției în cinci puncte adiacente ale unei grile numerice, ponderile acestora reflectând difuzia uniformă a căldurii pe spațiul curbat. Vom demonstra eficiența acestor operatori discreți în construcția schemelor numerice care pot fi implementate pe un calculator pentru a aproxima soluțiile ecuației căldurii cu termen sursă pe spațiul hiperbolic $\mathbb{H}^2$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, \mathbf{x}) = \Delta_g u(t, \mathbf{x}) + f(t, \mathbf{x}); & t \in (0, T], \mathbf{x} \in \mathbb{H}^2, \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{H}^2, \end{cases} \quad (5.9)$$

unde $T > 0$ este un timp fixat, Δ_g este operatorul Laplace-Beltrami pe $\mathbb{H}^2$, $u_0 \in L^2(\mathbb{H}^2)$ este condiția inițială, iar $f \in C([0, T], L^2(\mathbb{H}^2))$ este termenul sursă.

Pentru a construi o schemă numerică care să aproximeze ecuația căldurii-Beltrami, ne concentrăm pe un model particular al spațiului hiperbolic bidimensional, și anume modelul semiplanului, care este cel mai potrivit pentru construirea unei grile de diferențe finite. Metrica și operatorii diferențiali în acest model, împreună cu formula de integrare a funcțiilor, au fost prezentate în capitolul anterior. Reamintim doar expresia operatorului Laplace-Beltrami:

$$\Delta_g v(\mathbf{x}) = x_2^2 (\partial_{x_1}^2 v + \partial_{x_2}^2 v)(\mathbf{x}), \quad \text{unde } v \in C^2(\mathbb{H}^2) \text{ și } \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2.$$

Eficiența aproximării prin diferențe finite a operatorilor diferențiali – care utilizează doar un set discret de valori ale funcțiilor implicate – necesită o anumită regularitate a acestor funcții. Pentru a asigura convergența schemei numerice către soluția problemei continue (5.9), impunem următoarele restricții asupra condiției inițiale u_0 și a termenului sursă f :

$$u_0 \in \mathcal{M} := \left\{ v \in C^6(\mathbb{H}^2) : \|v\|_{\mathcal{M}} := \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N} \\ \alpha + \beta \leq 6}} \|e^{18d_g(O, \mathbf{x})} \partial_{x_1}^\alpha \partial_{x_2}^\beta v(\mathbf{x})\|_{L^2(\mathbb{H}^2)} < \infty \right\} \quad (5.10)$$

și $f \in C([0, T], \mathcal{M})$, unde O este un punct arbitrar din $\mathbb{H}^2$. Aceste condiții sunt necesare pentru a obține rezultatul de convergență și pot fi formulate astfel încât să fie invariante față de modelul particular al spațiului hiperbolic.

Observăm că, în esență, norma Sobolev ponderată din (5.10) caracterizează faptul că funcțiile de interes descresc suficient de repede pentru valori mari ale variabilei spațiale $\mathbf{x}$. Acest lucru ne permite să utilizăm problema pe un domeniu mărginit ca o aproximare bună a problemei (5.9) pe întreg spațiul hiperbolic, așa cum vom vedea în continuare.

Ca și în cazul euclidian, patru elemente principale sunt implicate în construcția versiunii discrete a lui Δ_g : o grilă de diferențe finite, spațiul funcțional asociat acestei grile, proiecția funcțiilor continue pe grilă și discretizarea propriu-zisă a operatorului Laplace-Beltrami. În cele ce urmează, vom construi două variante ale operatorului Laplace discret și vom descrie elementele menționate anterior, în fiecare caz.

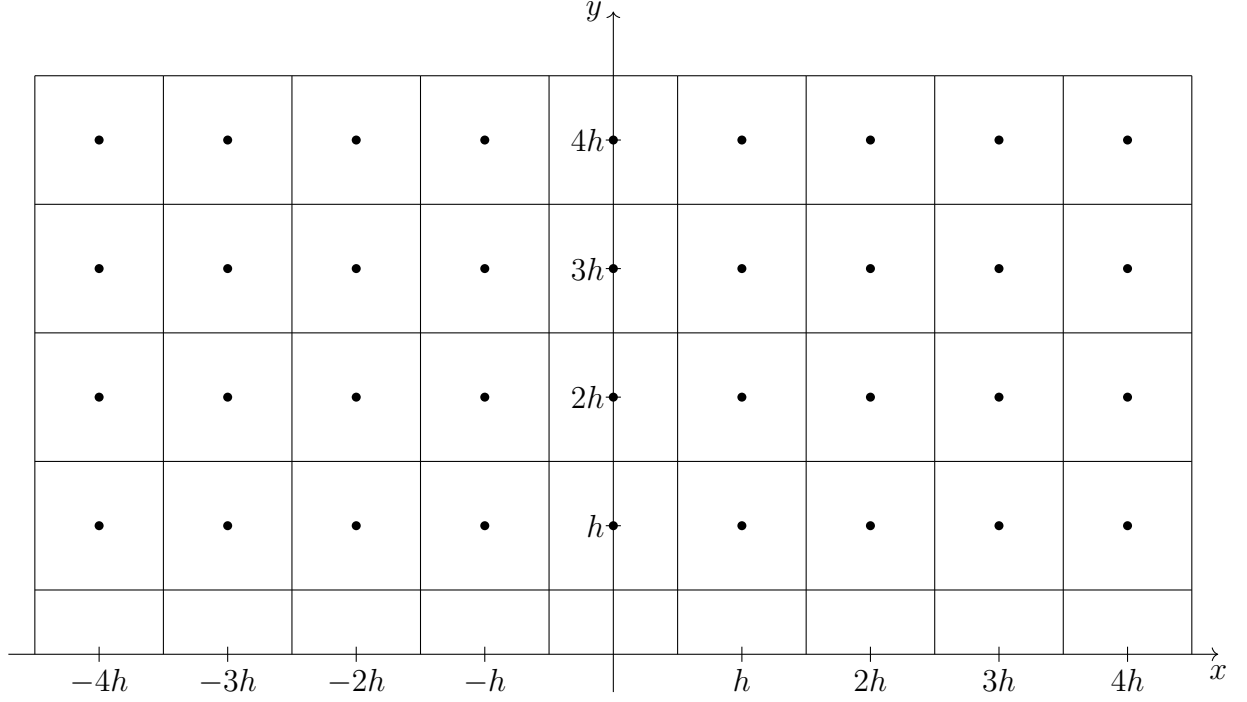


Figura 5.2: Grila corespunzătoare primului operator Laplace discret pe $\mathbb{H}^2$.

Prima variantă de operator Laplace discret

Grila asociată este cea tradițională Euclidiană, ale cărei puncte sunt reprezentate în Figura 5.2 și constau în perechi de multipli întregi ai parametrului de discretizare $h > 0$:

$$(ih, jh), \quad \text{pentru } i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}^*.$$

În jurul fiecărui astfel de punct, construim celula de diferențe finite:

$$\mathcal{C}_h^{i,j} := \left[ih - \frac{h}{2}, ih + \frac{h}{2} \right] \times \left[jh - \frac{h}{2}, jh + \frac{h}{2} \right]$$

care are aria hiperbolică egală cu $\frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}}$. Introducem spațiul funcțiilor definite pe grilă:

$$\ell_h^2 := \left\{ (v_{i,j}^h)_{i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}^*} : \|v^h\|_{\ell_h^2}^2 := \sum_{i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} |v_{i,j}^h|^2 < +\infty \right\}$$

și operatorul de proiecție $\Pi_h : L^2(\mathbb{H}^2) \rightarrow \ell_h^2$,

$$(\Pi_h v)_{i,j} = \left(j^2 - \frac{1}{4} \right) \int_{\mathcal{C}_h^{i,j}} v(\mathbf{x}) \frac{1}{x_2^2} d\mathbf{x}.$$

În final, operatorul Laplace discret corespunzător acestei grile este obținut prin dezvoltări Taylor și are următoarea formă pentru $v^h \in \ell_h^2$:

$$(\Delta_h^{(1)} v^h)_{i,j} := \left(j^2 - \frac{1}{4} \right) (v_{i+1,j}^h + v_{i-1,j}^h + v_{i,j+1}^h + v_{i,j-1}^h - 4v_{i,j}^h) \quad \forall i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}^*, \quad (5.11)$$

cu menținerea că aplicăm convenția $v_{i,0}^h = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$.

A doua variantă de operator Laplace discret

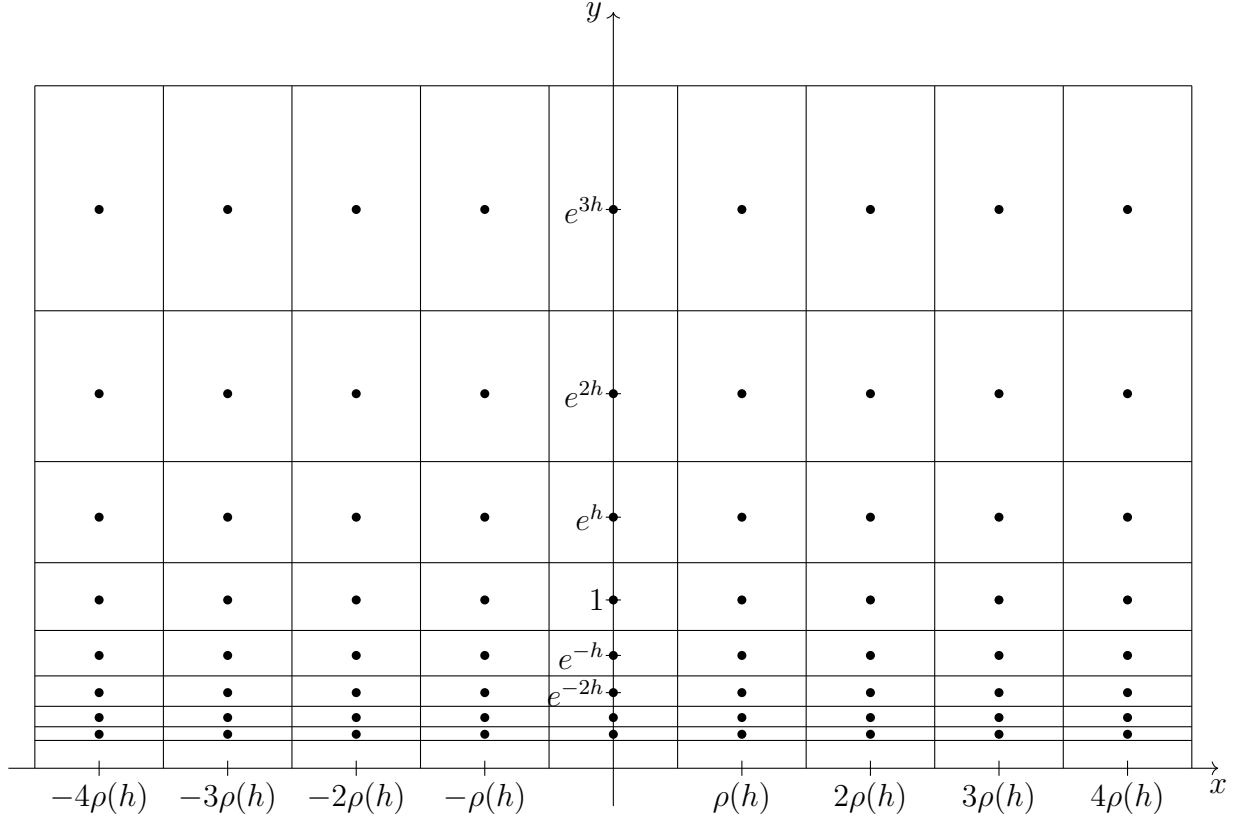


Figura 5.3: Grila corespunzătoare celui de-al doilea operator Laplace discret pe $\mathbb{H}^2$, unde am notat $\rho(h) := 2 \sinh\left(\frac{h}{2}\right)$.

Pentru a doua variantă a operatorului discret Laplace, grila asociată este cea reprezentată în Figura 5.3 și este adaptată geometriei spațiului hiperbolic. Mai precis, distanța hiperbolică dintre nodurile adiacente în direcția verticală este constantă și egală cu parametrul de discretizare h . Totuși, în direcția orizontală, distanțele dintre nodurile consecutive trebuie să crească pe măsură ce ne apropiem de baza $\{x_2 = 0\}$, din cauza geometriei spațiului hiperbolic.

Am ales grila astfel încât distanța hiperbolică dintre nodurile adiacente pe nivelul $\{x_2 = 1\}$ să fie egală cu 1; astfel, nodurile au forma

$$(i\rho(h), e^{jh}) \in \mathbb{H}^2, \quad \forall i, j \in \mathbb{Z},$$

unde $\rho(h) := 2 \sinh\left(\frac{h}{2}\right)$. În jurul fiecărui nod al grilei, definim celula de diferențe finite:

$$C_h^{i,j} := \left[\left(i - \frac{1}{2}\right) \rho(h), \left(i + \frac{1}{2}\right) \rho(h) \right] \times \left[e^{jh - \frac{h}{2}}, e^{jh + \frac{h}{2}} \right].$$

cu aria hiperbolică egală cu $\frac{(\rho(h))^2}{e^{jh}}$. În consecință, spațiul funcțiilor definite pe grilă este:

$$\ell_h^2 := \left\{ (v_{i,j}^h)_{i,j \in \mathbb{Z}} : \|v^h\|_{\ell_h^2}^2 := \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} (\rho(h))^2 e^{-jh} |v_{i,j}^h|^2 < +\infty \right\},$$

iar operatorul de proiecție utilizat pentru a transfera informația din spațiul $L^2(\mathbb{H}^2)$ către grilă are forma:

$$(\Pi_h v)_{i,j} = \frac{e^{jh}}{(\rho(h))^2} \int_{C_h^{i,j}} v(\mathbf{x}) \frac{1}{x_2^2} d\mathbf{x}.$$

În final, cel le-al doilea operator Laplace discret definit pe spațiul ℓ_h^2 și obținut prin dezvoltări Taylor în jurul nodurilor $(i\rho(h), e^{jh})$ are formula:

$$(\Delta_h^{(2)} v^h)_{i,j} := \frac{1}{(\rho(h))^2} \left[e^{2jh} (v_{i+1,j}^h + v_{i-1,j}^h - 2v_{i,j}^h) + \frac{2}{e^h + 1} v_{i,j+1}^h + \frac{2e^h}{e^h + 1} v_{i,j-1}^h - 2v_{i,j}^h \right]. \quad (5.12)$$

Reducerea la un domeniu mărginit

Deoarece dorim să implementăm schema noastră numerică pe un calculator (care, evident, dispune de o cantitate limitată de memorie și putere de procesare), trebuie să reducem grilele infinite asociate operatorilor discreți $\Delta_h^{(1)}$ și $\Delta_h^{(2)}$ la versiuni mărginite. Domeniul mărginit $\mathbb{H}_D^2$ este construit astfel încât să se extindă pe măsură ce parametrul de discretizare h tinde la zero, astfel:

$$\mathbb{H}_D^2 := [-D, D] \times [1/D, D] \subset \mathbb{H}^2,$$

unde dimensiunea domeniului este aleasă ca $D = D_h := \frac{1}{h}$. În acest fel, pe măsură ce h se apropie de zero, grila mărginită rezultată nu doar că devine mai fină, ci și acoperă o regiune mai mare din spațiul hiperbolic $\mathbb{H}^2$.

Mai departe, deoarece ecuația căldurii pe $\mathbb{H}^2$ prezintă o scădere suficient de rapidă la infinit, putem impune condiții de frontieră Dirichlet nule pentru nodurile aflate pe marginea domeniului $\mathbb{H}_D^2$. Aceasta ne permite să obținem operatorii Laplace discreți $\Delta_{h,D}^{(1)}$ și $\Delta_{h,D}^{(2)}$, cu domenii de definiție finit-dimensionale. De asemenea, observăm că spațiul funcțiilor definite pe grilă, ℓ_h^2 , precum și operatorul de proiecție Π_h , trebuie restricționate corespunzător în fiecare caz.

Schemă numerică semi-discretă cu diferențe finite și rezultate de convergență

Pentru a construi schema numerică semi-discretă, considerăm $((\mathcal{C}_h^{i,j})_{(i,j) \in Z_1 \times Z_2}, \ell_h^2, \Pi_h, \Delta_h)$ ca fiind oricare dintre cei doi operatori Laplace discreți, restricționați la $\mathbb{H}_D^2$, cu condiții la frontieră Dirichlet nule, unde $D = D_h := \frac{1}{h}$, ca mai sus. Observăm că mulțimile finite de numere întregi Z_1 și Z_2 , după care indexăm celulele grilei, cresc pe măsură ce h se apropie de zero.

Apoi, pentru u_0 și f care satisfac Ipoteza (5.10), considerăm aproximarea semi-discretă a ecuației căldurii-Beltrami cu sursă (5.9):

$$\begin{cases} \partial_t u_{i,j}^h(t) = (\Delta_h u^h(t))_{i,j} + (\Pi_h(f(t)))_{i,j}, & t \in (0, T], (i, j) \in Z_1 \times Z_2; \\ u_{i,j}^h(0) = (\Pi_h(u_0))_{i,j}, & (i, j) \in Z_1 \times Z_2. \end{cases} \quad (5.13)$$

Ordinul de convergență al acestei scheme numerice este dat de următoarea teoremă:

Teorema 5.4. *Pentru orice date inițiale u_0 și sursă f care satisfac Ipoteza (5.10), există o constantă $C_T > 0$ astfel încât, pentru orice $h \in (0, 1/2)$ și $t \in [0, T]$,*

$$\|u^h(t) - \Pi_h u(t)\|_{\ell_h^2} \leq h^2 C_T (\|u_0\|_{\mathcal{M}} + \|f\|_{C([0, T], \mathcal{M})}),$$

unde u^h este soluția ecuației (5.13), iar u este soluția ecuației (5.9).

Demonstrația acestei teoreme poate fi găsită în Capitolul 5 al tezei, într-un cadru mai general în care $D = D_{h, \gamma, \gamma} := \zeta h^{-\gamma}$, cu $\zeta > 2$ și $\gamma > 0$. Subliniem faptul că același ordin de convergență $\mathcal{O}(h^2)$ rămâne valabil și atunci când discretizăm și timpul, conducând la o schemă de tip θ cu parametrul $\theta \in [1/2, 1]$. În același capitol, demonstrăm experimental că acest ordin de convergență pătratic este optim.

Mai mult, rata de descreștere exponențială la timp mare în norma L^2 a soluțiilor ecuației omogene a căldurii-Beltrami pe $\mathbb{H}^2$ (adică ecuația (5.9) cu $f \equiv 0$ și $T = \infty$) este păstrată asimptotic de schema noastră cu diferențe finite. Mai precis, constanta optimă a inegalității de tip Poincaré asociată ambilor operatori Laplace discreți, $\Delta_h^{(1)}$ și $\Delta_h^{(2)}$, se apropie, pe măsură ce h tinde la zero, de valoarea $\frac{1}{4}$, care este constanta optimă a inegalității Poincaré în întregul spațiu $\mathbb{H}^2$ [35].

Dezvoltarea completă a ideilor prezentate aici pe scurt este subiectul Capitolului 5 al acestei teze. Rezultatele au fost trimise spre publicare [9].

Capitolul 6: COMBINÂND TIPURILE DE APROXIMĂRI: ASIMPTOTICE LA TIMP LUNG, LIMITE DINSPRE DISCRET SPRE CONTINUU ȘI DINSPRE ECUAȚII HIPERBOLICE SPRE PARABOLICE, PENTRU SISTEME PARȚIAL DISIPATIVE

Ultimul rezultat original principal din această teză reunește toate clasele de asimptotice descrise anterior, demonstrând că, cel puțin în anumite cadre particulare, există o legătură puternică între toate aceste tipuri de rezultate de aproximare. Vom considera sisteme hiperbolice parțial disipative (sisteme de ecuații hiperbolice în care doar anumiți termeni sunt amortizați [15, 26, 8]) care satisfac o proprietate de ne-degenerare numită *condiția de rang Kalman* [7]. Demonstrăm faptul că una dintre cele mai clasice scheme numerice (cea bazată pe operatorul de diferențe finite centrale [36]) nu doar aproximează soluția sistemului continuu, ci, în plus, păstrează atât comportamentul asimptotic la timp mare, cât și limita de relaxare de la modelul hiperbolic la unul parabolic, caracteristice contextului continuu.

Pentru a descrie modelul, ne raportăm la [7] și considerăm un număr natural $N \geq 2$, împreună cu două matrici simetrice A și B , astfel încât B să fie *parțial disipativă*. Aceasta înseamnă că B are forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

unde $\tilde{B}$ este o matrice simetrică definită pozitiv de dimensiune $N_2 \times N_2$, cu $1 \leq N_2 < N$.

De asemenea, pentru $U^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ o funcție din L^2 , considerăm următorul sistem hiperbolic cu necunoscuta vectorială $U : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} \partial_t U(t, x) + A \partial_x U(t, x) = -BU(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}; \\ U(0, x) = U^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.15)$$

Observăm că, deoarece matricea B are forma particulară (6.14), termenul de amortizare acționează doar asupra ultimelor N_2 componente U_2 ale vectorului soluție $U = (U_1, U_2)$.

Totuși, dacă matricile A și B satisfac următoarea condiție de ne-degenerare (condiția de rang Kalman):

$$\text{matricea } \mathcal{K}(A, B) := (B|AB|\dots|A^{N-1}B) \text{ are rang maxim, adică } N, \quad (\text{K})$$

atunci Crin-Barat, Shou și Zuazua [18] au obținut un rezultat de amortizare pentru întreaga soluție U a sistemului (6.15):

Propoziția 6.5 ([18, Teorema 2.1]). *Dacă $U^0 \in (H^1(\mathbb{R}))^N$, atunci soluția U a sistemului (6.15) satisface:*

$$\|U_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x U(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}} \|U^0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad (6.16)$$

unde $C > 0$ este o constantă independentă de timp și de U_0 .

Primul rezultat principal din acest capitol al tezei este un corespondent discret al Propoziției 6.5. Considerăm schema semi-discretă de diferențe finite centrale pentru problema (6.15):

$$\begin{cases} \partial_t(U(t))_n + A(\mathcal{D}_h U(t))_n = -B(U(t))_n, & (t, n) \in (0, \infty) \times \mathbb{Z}; \\ (U(0))_n = (U^0)_n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (6.17)$$

unde acum datele inițiale și soluția sunt definite pe o grilă infinită de lățime $h > 0$. Mai precis, $U^0 = (U_n^0)_{n \in \mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $U = (U_n)_{n \in \mathbb{Z}} : (0, \infty) \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N$, iar operatorul $\mathcal{D}_h$ acționează asupra unui șir bilateral $v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel:

$$(\mathcal{D}_h v)_n = \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h}.$$

Enunțăm primul rezultat principal al acestui capitol, și anume conservarea amortizării pe termen lung (6.16) în acest context discret:

Teorema 6.6. *Există o constantă $C > 0$ care depinde doar de matricile A și B astfel încât, pentru orice $h > 0$, orice $U^0 \in (h_h^1)^N$ și orice $t > 0$, are loc următoarea estimare:*

$$\|U_2(t)\|_{\ell_h^2} + \|\mathcal{D}_h U(t)\|_{\ell_h^2} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}} \|U^0\|_{h_h^1},$$

unde $\|\cdot\|_{\ell_h^2}$ și $\|\cdot\|_{h_h^1}$ sunt norme discrete Lebesgue și Sobolev.

Al doilea tip de comportament asimptotic păstrat de schema diferențelor finite centrale în contextul sistemelor parțial disipative se referă la relaxarea unui astfel de

sistem către o ecuație parabolică. Un exemplu simplu, dar ilustrativ, este următorul sistem cu termen de relaxare $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon(t, x) + \partial_x u^\varepsilon(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}; \\ \varepsilon^2 \partial_t u^\varepsilon(t, x) + \partial_x \rho^\varepsilon(t, x) + u^\varepsilon(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}; \\ (\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)(0, x) = (\rho_0, u_0)(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.18)$$

care poate fi interpretat ca o versiune linearizată a sistemului Euler compresibil cu amortizare (vezi [17, Introducere]). Observăm că funcțiile ρ și u sunt funcții reale și reprezintă densitatea și viteza unui flux pe axa reală. Când parametrul de relaxare ε este egal cu unu, sistemul (6.18) se încadrează în clasa (6.15)-(K).

Urmând argumentația lui Crin-Barat și Danchin [17], se obține ușor convergența tare a soluției sistemului (6.18) către soluția ecuației căldurii:

Propoziția 6.7. *Presupunem că datele inițiale $\rho_0, u_0 \in H^{s'}(\mathbb{R})$ pentru un anumit $s' > 2$. Atunci, pentru orice $s \in (2, s')$, prima componentă ρ^ε a soluției sistemului (6.18) converge tare, când $\varepsilon \rightarrow 0$, în spațiile $L^\infty([0, \infty), \dot{H}^{s-2}(\mathbb{R}))$ și $L^1([0, \infty), \dot{H}^s(\mathbb{R}))$, către soluția ρ a ecuației căldurii pe $\mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, x) - \partial_{xx} \rho(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}; \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mai mult, pentru ε mic, a doua componentă u^ε aproximează derivata primei componente ρ^ε , în sensul că suma $(\partial_x \rho^\varepsilon + u^\varepsilon)$ converge către zero în $L^1([0, T], \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}))$. Amintim că norma Sobolev omogenă [3, Secțiunea 1.3] este definită ca $\|v\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 |\xi|^{2s} d\xi$.

Al doilea rezultat principal al capitolului curent din teză demonstrează că această limită de relaxare rămâne valabilă – uniform față de lățimea h a grilei – când tranziționăm către formularea discretă a sistemului Euler liniarizat și a ecuației căldurii. Pentru a obține această uniformitate, avem nevoie de o metodă care să ne permită să utilizăm aceleași date inițiale indiferent de parametrii ε și h . În acest sens, introducem, așa cum este descris în [36, Capitolul 10], operatorul de trunchiere $\mathcal{T}_h : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell_h^2$,

$$(\mathcal{T}_h v)_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{i\xi n h} \hat{v}(\xi) d\xi.$$

Observăm că operatorul $\mathcal{T}_h$ este definit astfel încât transformata Fourier continuă a lui v și transformata Fourier discretă a lui $\mathcal{T}_h v$ coincid pe domeniul comun $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$,

de unde și denumirea de *operator de trunchiere*. În cardul celui de-al doilea rezultat principal de mai jos, datele inițiale ale ecuațiilor discrete sunt obținute prin trunchierea unor funcții definite pe axa reală.

Teorema 6.8. *Pentru $h > 0$, $s' > 2$ și $\tilde{\rho}_0, \tilde{u}_0 \in H^{s'}(\mathbb{R})$, considerăm trunchierile $\rho_0 = \mathcal{T}_h \tilde{\rho}_0$ și $u_0 = \mathcal{T}_h \tilde{u}_0$ ca date inițiale pentru omologul discret al sistemului Euler liniarizat (6.18):*

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon + \mathcal{D}_h u^\varepsilon = 0, & (t, n) \in (0, \infty) \times \mathbb{Z}, \\ \varepsilon^2 \partial_t u^\varepsilon + \mathcal{D}_h \rho^\varepsilon + u^\varepsilon = 0, & (t, n) \in (0, \infty) \times \mathbb{Z}, \\ (\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)(0) = (\rho_0, u_0), & n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (6.19)$$

unde $\rho^\varepsilon, u^\varepsilon : (0, \infty) \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $s \in (2, s')$, prima componentă ρ^ε a soluției converge în $L^\infty([0, \infty), \dot{h}_h^{s-2})$ și $L^1([0, \infty), \dot{h}_h^s)$, uniform față de $h > 0$, pe măsură ce ε tinde la zero, către soluția ρ a ecuației discrete a căldurii:

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \mathcal{D}_h^2 \rho = 0, & (t, n) \in (0, \infty) \times \mathbb{Z}, \\ \rho(0) = \rho_0, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Notă: Norma Sobolev discretă $\dot{h}_h^s$ este definită ca

$$\|v\|_{\dot{h}_h^s}^2 := \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{v}(\xi)|^2 \left| \frac{\sin(\xi h)}{h} \right|^{2s} d\xi.$$

Mai mult, cantitatea $(\mathcal{D}_h \rho^\varepsilon + u^\varepsilon)$ converge la zero în $L^1([0, \infty), \dot{h}_h^{s-1})$, uniform față de lățimea grilei h .

Pentru o versiune mai avansată a acestei limite de relaxare – valabilă într-un omolog discret al normelor Besov – împreună cu estimări de eroare, simulări numerice și alte extensii, ne referim la Capitolul 6 al tezei și la lucrarea mea în colaborare [19], care a fost trimisă spre publicare.

Capitolul 7: REZULTATE ASIMPTOTICE SUPPLEMENTARE ȘI PROIECTE ÎN DERULARE

În acest capitol, introducem patru studii suplimentare care fie extind temele discutate anterior, fie sunt strâns legate de acestea.

Comportamentul asimptotic al unui sistem liniar cuplat de convecție-difuzie pe axa reală

Această tematică se încadrează în clasa rezultatelor asimptotice la timp mare, similar cu Capitolul 3. Totuși, spre deosebire de modelul analizat acolo, în această secțiune coeficienții care guvernează procesul de evoluție sunt discontinui. Mai exact, examinăm o problemă de convecție-difuzie pe axa reală, unde viteza particulelor ia două valori distincte, câte una pe fiecare semiaxă:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \\ \partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) - a \partial_x u(t, x), & t > 0, x < 0; \\ \partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) - b \partial_x u(t, x), & t > 0, x > 0; \\ u(t, 0-) = u(t, 0+), & t > 0; \\ \partial_x u(t, 0+) - \partial_x u(t, 0-) = (b - a)u(t, 0), & t > 0; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (7.20)$$

Data inițială u_0 este netedă și are suportul compact și, fără a pierde generalitatea, presupunem că parametrii de viteză satisfac relațiile $a < b$ și $b > 0$. Atunci, profilul asimptotic al ecuației (7.20) va fi o Gaussiană traslatată $\exp\left(\frac{-|x-bt|^2}{4t}\right)$ sau o combinație liniară de două funcții Gaussiene traslate, $\exp\left(\frac{-|x-bt|^2}{4t}\right)$ și $\exp\left(\frac{-|x-at|^2}{4t}\right)$, în funcție de semnul lui a .

Convecție-difuzie nelocală și neliniară pe grafuri metrice

Studiul următor explorează o limită de relaxare de la un model ne-local la unul local, similară cu cea din Capitolul 4, însă de această dată spațiul ambient este un graf metric Γ .

Un graf metric este o pereche formată dintr-o mulțime de vârfuri și una de muchii (orientate), având în plus o structură metrică definită prin parametrizări ale muchiilor cu intervale ale dreptei reale. Această parametrizare permite aplicarea operatorilor diferențiali asupra funcțiilor definite pe aceste grafuri, ceea ce, împreună cu condiții de cuplare adecvate la vârfuri, caracterizează procesele dinamice în rețeaua respectivă.

Descrierea următoarei probleme de transport-difuzie este preluată din depozitul meu GitHub [33]: considerăm sistemul de convecție-difuzie pe arborele metric Γ (adică un graf ce nu conține cicluri), având mulțimea vârfurilor V și mulțimea muchiilor E :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_e(t, x) - \delta \partial_{xx} u_e(t, x) + \alpha_e \partial_x u_e(t, x) = 0, & x \in e \in E, t \geq 0; \\ u_{e_1}(t, v) = u_{e_2}(t, v), & v \in V_{\text{int}}, e_1, e_2 \in E_v, t \geq 0; \\ \sum_{e \in E_v^{\text{in}}} \partial_x u_e(t, v) = \sum_{e \in E_v^{\text{out}}} \partial_x u_e(t, x), & v \in V_{\text{int}}, t \geq 0; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Gamma; \\ u(t, v) = u_v(t), & v \in V_{\partial}, t \geq 0. \end{array} \right. \quad (7.21)$$

Aici, V_{int} reprezintă mulțimea vârfurilor interioare, iar mulțimea vârfurilor de frontieră este notată cu V_{∂} . Mulțimea E_v a muchiilor adiacente unui vârf v este împărțită în mulțimea muchiilor incidente E_v^{in} și mulțimea muchiilor emergente E_v^{out} . O funcție u definită pe graf este o familie $(u_e)_{e \in E}$, unde $u_e : e \rightarrow \mathbb{R}$, pentru fiecare muchie $e \in E$. Coeficientul de difuzie δ este o constantă pozitivă, iar vitezele nenegative α_e corespunzătoare fiecărei muchii satisfac, pentru fiecare vârf interior v , relația:

$$\sum_{e \in E_v^{\text{in}}} \alpha_e = \sum_{e \in E_v^{\text{out}}} \alpha_e.$$

În același depozit [33] se găsește o animație a dinamicii descrise de ecuația de mai sus. Pentru studiul bunei formulări a problemei, facem referire la [21], iar pentru analiza controlabilității prin date la frontieră, a se vedea [6].

În această secțiune, considerăm un arbore metric fără vârfuri de frontieră și construim o aproximare nelocală pentru soluțiile ecuației (7.21), similar cu Capitolul 4. Modelul pur difuziv (adică, $\alpha_e = 0$, $\forall e \in E$) a fost analizat în [28], unde autorii au introdus un nucleu de difuzie nelocal dependent de distanța inherentă grafurilor metrice. Principala provocare întâmpinată la introducerea termenilor de transport a fost definirea unei secvențe adecvate de nuclee $(G_\varepsilon(x, y))_{\varepsilon > 0}$ care să descrie asimptotic comportamentul de convecție.

Demonstrăm, de asemenea, convergența soluției ne-local la soluția locală în cazul problemei neliniare de convecție-difuziei, în care termenul $\alpha_e \partial_x u_e(t, x)$ este înlocuit cu $\alpha_e \partial_x (f(u_e(t, x)))$, unde $f(r) = |r|^{q-1}r$, cu $q \geq 1$.

Estimări de descreștere L^p pentru ecuația căldurii cu potențial Hardy

Rezultatul următor completează estimările de descreștere din Capitolul 3, care tratează cazul spațiilor L^2 , extinzând analiza la un cadru mai general L^p , cu $p \geq 2$.

De această dată, considerăm că data inițială u_0 pentru ecuația căldurii cu potențial Hardy (3.2) satisface condiția:

$$\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}_+^{N,k}; K^{\frac{p}{2}})} := \left(\int_{\mathbb{R}_+^{N,k}} |u_0(x)|^p K^{\frac{p}{2}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

unde reamintim notația $K(x) := e^{\frac{|x|^2}{4}}$.

Dacă restrângem valorile parametrului λ din (3.2) la intervalul $\left(-\infty, \frac{4(p-1)}{p^2} \lambda_{N,k}\right]$, unde

$$\lambda_{N,k} = \left(\frac{N-2}{2} + k \right)^2,$$

atunci soluția $u(t, x)$ prezintă următoarea descreștere asimptotică:

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}_+^{N,k})} \leq (t+1)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{p-1}}{p}(m_{N,k}(\lambda, p)+1)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}_+^{N,k}; K^{\frac{p}{2}})}, \quad (7.22)$$

unde

$$m_{N,k}(\lambda, p) = \sqrt{\lambda_{N,k} - \frac{p^2}{4(p-1)} \lambda}.$$

Bifurcarea constantei optimale a inegalității Caffarelli-Kohn-Nirenberg în context L^p

Inegalitatea Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) [10] este o inegalitate integrală generală care include, în calitate de cazuri particulare, mai multe inegalități celebre, cum ar fi cele ale lui Poincaré și Hardy, precum și principiul de incertitudine al lui Heisenberg și principiul de incertitudine al Hidrogenului. Așa cum s-a putut observa pe parcursul acestei teze (Capitolele 3 și 5), studiul constantelor optime pentru inegalitățile integrale reprezintă un instrument indispensabil pentru determinarea precisă a comportamentului asimptotic al ecuațiilor cu derivate parțiale. Prin urmare, un studiu unificat al

constantei optimă pentru inegalitatea Caffarelli-Kohn-Nirenberg reprezintă un pas important în stabilirea proprietăților asimptotice pentru cât mai multe clase de ecuații. Inegalitatea CKN are următoarea formă:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^r}{|x|^{\gamma r}} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^p}{|x|^{\alpha p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\text{supp}(u)} \frac{|u|^{\frac{p(r-1)}{p-1}}}{|x|^{\beta}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}, \quad (7.23)$$

unde parametrii $p > 1, r > 0$ și $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ satisfac anumite condiții de compatibilitate (a se vedea [34, Introducere]).

Din câte știm, unul dintre cele mai recente studii privind constanta optimă $C > 0$ din inegalitatea Caffarelli-Kohn-Nirenberg este cel al lui Nguyen [34], care prezintă o gamă largă de combinații de parametri pentru care constanta optimă este egală cu $\frac{r}{N-\gamma r}$. Cu toate acestea, Cazacu et. al. [12] au demonstrat că, în anumite situații (mai precis, când $p = r = 2$), constanta optimă bifurcă în funcție de valorile celorlalți parametri implicați.

În această secțiune a tezei, analizăm comportamentul de bifurcație al constantei optime pentru inegalitatea Caffarelli-Kohn-Nirenberg pentru cât mai multe combinații de parametri posibil, încercând astfel să umplem golul din literatură dintre cele două lucrări menționate anterior. Mai precis, obținem că, în cazul $p = 2$, dacă parametrii din (7.23) satisfac condițiile $r > p$ și

$$N - \beta - \left(1 + \alpha - \frac{\beta}{p}\right) \frac{p(r-1)}{r-p} > 0,$$

atunci constanta optimă este

$$\frac{r}{r(N-2-2\alpha) + \left(1 + \alpha + \frac{\beta}{2} - N\right)}.$$

CONCLUZIE

Această lucrare explorează diverse metode asimptotice în cadrul ecuațiilor cu derivate parțiale, subliniind rolul esențial al aproximării atât în EDP, cât și în Analiza Matematică în ansamblu. De la concepte fundamentale, precum continuitatea, până la scheme numerice avansate, procesul de trecere la limită și estimarea erorii de aproximare constituie fundamentul Analizei Matematice.

Mai mult decât atât, din perspectiva noastră, fenomenele asimptotice reprezintă o caracteristică definitorie a Analizei, distingând-o de alte ramuri ale matematicii și conturând-o ca o punte esențială între Matematică și lumea reală. Dar de ce spunem acest lucru?

În primul rând, lumea reală pătrunde în domeniul Matematicii prin construirea unor modele aproximative ale datelor experimentale. Astfel de modele, precum ecuațiile care descriu simplificat dinamica particulelor, sunt structuri matematice abstracte care permit aplicarea unor tehnici pur matematice la fenomene fizice. De exemplu, chiar dacă ecuația căldurii este doar un model idealizat pentru propagarea căldurii [11, 31, 16], aceasta oferă totuși informații valoroase despre distribuția temperaturii în timp.

Adesea, modelele inspirate din fenomene fizice sunt și mai mult simplificate, permițând o analiză mai profundă și mai cuprinzătoare, așa cum se întâmplă în cazul aproximărilor la timp mare ale ecuațiilor diferențiale din Capitolul 3.

În al doilea rând, aproximările permit utilizarea unor instrumente practice, precum computerele, care, în ciuda limitărilor lor inerente, pot rezolva probleme matematice cu o eroare cuantificabil de mică. Acesta este, de fapt, principalul obiectiv al Analizei Numerice: obținerea unor informații despre proprietățile cantitative și calitative ale obiectelor matematice prin construirea unor modele aproximative bazate pe un set finit de parametri. Aceste modele pot fi evaluate folosind metode computaționale, permițând apoi proiectarea proprietăților lor asupra obiectelor abstracte inițiale. Capitolele 5 și 6 ilustrează acest concept. Prin urmare, prin aproximări, Matematica abordează riguros lipsa de rigoare inherentă lumii reale.

Mai mult, descrierea eficientă a fenomenelor asimptotice necesită instrumente din aproape toate ramurile matematicii. Inegalitățile integrale (Capitolele 3 și 5), Topologia (Capitolul 4), Teoria Spectrală (Capitolul 3), Geometria diferențială (Capitolele 4 și 5) și Algebra liniară (Capitolul 6) joacă toate un rol important. Studiul unor fenomene asimptotice profunde necesită, astfel, o înțelegere temeinică a Matematicii și capacitatea de a integra concepte diverse pentru a modela aproximativ și a interpreta riguros procesele din lumea reală.

În concluzie, considerăm că această lucrare stabilește o bază pentru noi direcții de cercetare, cu potențialul de a contribui semnificativ atât la dezvoltarea Matematicii teoretice, cât și a celei aplicate, și de a unifica și mai mult diverse ramuri matematice.

BIBLIOGRAFIE

- [1] P. Amorim, M. Ben-Artzi și P. G. LeFloch, „Hyperbolic conservation laws on manifolds: total variation estimates and the finite volume method”, în *Methods Appl. Anal.* 12.3 (2005), pp. 291–323.
- [2] F. Andreu-Vaillo, J. M. Mazón, J. D. Rossi și J. J. Toledo-Melero, *Nonlocal diffusion problems*, vol. 165, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2010, pp. xvi+256.
- [3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin și R. Danchin, *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, vol. 343, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer, Heidelberg, 2011, pp. xvi+523.
- [4] C. Bandle, M. d. M. González, M. A. Fontelos și N. Wolanski, „A nonlocal diffusion problem on manifolds”, în *Comm. Partial Differential Equations* 43.4 (2018), pp. 652–676.
- [5] P. Baras și J. A. Goldstein, „The heat equation with a singular potential”, în *Trans. Amer. Math. Soc.* 284.1 (1984), pp. 121–139.
- [6] J. A. Bárcena-Petisco, M. Cavalcante, G. M. Coclite, N. D. Nitti și E. Zuazua, „Control of hyperbolic and parabolic equations on networks and singular limits”, în *Mathematical Control and Related Fields* (2024).
- [7] K. Beauchard și E. Zuazua, „Large Time Asymptotics for Partially Dissipative Hyperbolic Systems”, în *Arch. Ration. Mech. Anal* 199 (2011), pp. 177–227.
- [8] S. Bianchini, B. Hanouzet și R. Natalini, „Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy”, în *Comm. Pure Appl. Math.* 60, 1559-1622 (2007).

-
- [9] M. Bucataru și D. Manea, *Discrete Laplacians on the hyperbolic space – a compared study*, arXiv, 2024.
 - [10] L. Caffarelli, R. Kohn și L. Nirenberg, „First order interpolation inequalities with weights”, în *Compositio Math.* 53.3 (1984), pp. 259–275.
 - [11] C. Cattaneo, „Sulla conduzione del calore”, în *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 3 (1949), pp. 83–101.
 - [12] C. Cazacu, J. Flynn și N. Lam, „Short proofs of refined sharp Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities”, în *Journal of Differential Equations* 302 (2021), pp. 533–549.
 - [13] C. Cazacu, L. I. Ignat și D. Manea, „The Hardy inequality and large time behaviour of the heat equation on $\mathbb{R}^{N-k} \times (0, \infty)^k$ ”, în *J. Differential Equations* 375 (2023), pp. 682–705.
 - [14] T. Cazenave și A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Oxford University Press, 1998.
 - [15] G.-Q. Chen, C. Levermore și T.-P. Liu, „Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy”, în *Comm. Pure Appl. Math.* 47.6 (1994), pp. 787–830.
 - [16] V. A. Cimmelli, în *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics* 34.4 (2009), pp. 299–333.
 - [17] T. Crin-Barat și R. Danchin, „Global existence for partially dissipative hyperbolic systems in the L^p framework, and relaxation limit”, în *Math. Ann.* 386, 2159–2206 (2023).
 - [18] T. Crin-Barat, L. Shou și E. Zuazua, „Large time asymptotic for partially dissipative hyperbolic systems without Fourier analysis: application to the nonlinearly damped p-system”, în *Accepted in Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. arXiv:2308.08280* (2024).
 - [19] T. Crin-Barat și D. Manea, *Asymptotic-preserving finite difference method for partially dissipative hyperbolic systems*, arXiv, 2024.

-
- [20] A. B. Cruzeiro și P. Malliavin, „Numerical approximation of diffusions in $\mathbb{R}^d$ using normal charts of a Riemannian manifold”, în *Stochastic Process. Appl.* 116.7 (2006), pp. 1088–1095.
 - [21] H. Egger și N. Philippi, „On the transport limit of singularly perturbed convection-diffusion problems on networks”, English, în *Math. Methods Appl. Sci.* 44.6 (2021), pp. 5005–5020.
 - [22] M. Escobedo și O. Kavian, „Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation”, în *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 11.10 (1987), pp. 1103–1133.
 - [23] J. Giesselmann, „A convergence result for finite volume schemes on Riemannian manifolds”, în *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 43.5 (2009), pp. 929–955.
 - [24] M. d. M. González, L. I. Ignat, D. Manea și S. Moroianu, „Concentration limit for non-local dissipative convection–diffusion kernels on the hyperbolic space”, în *Nonlinear Anal.* 248 (2024), Paper No. 113618.
 - [25] A. Grigoryan, *Heat Kernel and Analysis on Manifolds*, AMS/IP studies in advanced mathematics, American Mathematical Society, 2009.
 - [26] B. Hanouzet și R. Natalini, „Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with convex entropy.”, în *Arch. Ration. Mech. Anal.* 169, 89–117 (2003).
 - [27] M. Holst, „Adaptive numerical treatment of elliptic systems on manifolds”, în vol. 15, 1–4, A posteriori error estimation and adaptive computational methods, 2001, pp. 139–191.
 - [28] L. Ignat, J. Rossi și A. San Antolín, „Asymptotic behaviour for local and nonlocal evolution equations on metric graphs with some edges of infinite length”, în *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)* 200 (2020), pp. 1301–1339.
 - [29] L. I. Ignat, T. I. Ignat și D. Stancu-Dumitru, „A Compactness Tool for the Analysis of Nonlocal Evolution Equations”, în *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 47.2 (2015), pp. 1330–1354.
 - [30] L. I. Ignat și J. D. Rossi, „A nonlocal convection-diffusion equation”, în *J. Funct. Anal.* 251.2 (2007), pp. 399–437.

- [31] D. D. Joseph și L. Preziosi, „Heat waves”, în *Rev. Mod. Phys.* 61 (1 Ian. 1989), pp. 41–73.
- [32] B. Loustau, *Hyperbolic geometry*, arXiv, 2020.
- [33] D. Manea, *Finite difference scheme for convection-diffusion initial-boundary value problem on metric trees*, GitHub repository, 2023.
- [34] V. H. Nguyen, „Sharp Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities on Riemannian manifolds: the influence of curvature”, în *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 152.1 (2022), pp. 102–127.
- [35] V. H. Nguyen, „The sharp Poincaré-Sobolev type inequalities in the hyperbolic spaces $\mathbb{H}^n$ ”, în *J. Math. Anal. Appl.* 462.2 (2018), pp. 1570–1584.
- [36] J. C. Strikwerda, *Finite difference schemes and partial differential equations*, Second, Society for Industrial și Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2004, pp. xii+435.
- [37] D. Su și Q.-H. Yang, „On the best constants of Hardy inequality in $\mathbb{R}^{n-k} \times (\mathbb{R}_+)^k$ and related improvements”, în *J. Math. Anal. Appl.* 389.1 (2012), pp. 48–53.
- [38] L. N. Trefethen, *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, Cornell University, 1994.
- [39] J. L. Vazquez și E. Zuazua, „The Hardy Inequality and the Asymptotic Behaviour of the Heat Equation with an Inverse-Square Potential”, în *Journal of Functional Analysis* 173.1 (2000), pp. 103–153.