



ACADEMIA ROMÂNĂ
Școala de Studii Avansate a Academiei Române
Institutul de Matematică "Simion Stoilow"

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

MODELARE MATEMATICĂ ȘI NUMERICĂ ÎN PROBLEME DE INTERACȚIUNE FLUID-STRUCTURĂ ELASTICĂ

CONDUCĂTOR DE DOCTORAT:

CS.I. Habil Dr. Ruxandra-Marina STAVRE

DOCTORAND:

Alexandra-Roxana CIOROGAR

2025

Cuprins

1	INTRODUCERE	1
1.1	Probleme de interacțiune fluid-structură elastică (FSI) - analiza literaturii . .	1
1.2	Motivația și punctul de plecare al studiului	3
1.3	Noutatea	4
1.4	Structura tezei și rezultate principale	5
1.5	Interdisciplinaritatea studiului	7
1.6	Limitări ale cercetării și perspective pentru viitoare cercetări	7
1.7	Conferințe	8
1.8	Publicații	8
2	O PROBLEMĂ DE INTERACȚIUNE FLUID-STRUCTURĂ ELASTICĂ: MODELARE, ANALIZĂ VARIAȚIONALĂ ȘI NUMERICĂ	9
2.1	Descrierea modelului matematic	9
2.2	Problema variațională	12
2.3	Aproximarea problemei variaționale cu o familie de probleme vâscoelastice	13
2.3.1	Familia de probleme vâscoelastice	13
2.4	Scheme numerice de aproximare, estimări, stabilitate, convergența pentru cazul $n = 2$	14
2.4.1	Schema numerică independentă de timp	15
2.4.2	Stabilitate	15
2.4.3	Convergența schemei numerice	16
3	ANALIZA PRESIUNII FLUIDULUI	18
3.1	Problema variațională vâscoelastică cu presiune	19
3.2	Schema numerică de aproximare cu presiune	20
3.3	Algoritmul lui Uzawa	22
4	SIMULĂRI NUMERICE	24
4.1	Influența temperaturii pe cuplajul fluid-structură elastică	25
4.2	Influența unui câmp dat de temperatură asupra variației presiunii sângelui .	26
4.3	Influența forțelor de compresie asupra fenomenului de reflux sanguin în insuficiența venoasă	27
	Bibliografie	28

Capitolul 1

INTRODUCERE

1.1 Probleme de interacțiune fluid-structură elastică (FSI) - analiza literaturii

Interacțiunea fluid-structură (FSI) este interacțiunea unei structuri mobile sau deformabile cu un flux de fluid intern sau înconjurător. În cazul curgerii fluidului și al materialului elastic, fiecare dintre subprobleme acționează asupra celeilalte. Cuplajul acționează la interfața care este suprafața dintre problemele din fluid și solid, acestea fiind problemele multifizice cuplate la suprafață. Abordarea computațională pentru interacțiunea fluid-structură în aplicații din viața reală implică proiectarea unor tehnici eficiente de cuplare. O analiză matematică a ecuațiilor FSI cuplate care prezintă întreaga problemă FSI este încă o noutate. Deoarece cele două subprobleme, adică ecuațiile incompresibile Navier-Stokes pentru fluid și o ecuație pentru solidul elastic reprezintă obstacole matematice, nu este de mirare că rezultatele pentru problema cuplată sunt rar răspândite. Interacțiunea dintre un fluid și o structură solidă (elastică sau rigidă) este un fenomen care apare în multe domenii ale vieții reale. Deformarea aripilor aeronavei cauzată de forțele aerodinamice, influența caracteristicilor peretelui unui vas asupra parametrilor fluxului sanguin, fluxurile de lubrifiant în rulmenți cu bile sunt doar câteva exemple importante de probleme (FSI). Datorită aplicațiilor practice și provocărilor matematice, problemele FSI au fost studiate pe larg în ultimii ani.

Pentru ecuațiile Navier-Stokes din dinamica fluidelor și ecuațiile de conservare pentru materiale hiperelastice neliniare, multe întrebări teoretice încă nu au răspuns. Mai mult, mișcarea domeniului fluid poate duce la pierderea netezimii interfeței, unde are loc cuplajul.

Având un model complet cuplat pentru întreaga problemă, putem folosi și scheme de soluții puternic cuplate, cum ar fi liniarizarea Newton, metoda de rețea multiplă sau metodele de spații Krylov pentru problema completă, fără a subitera între domeniile fluid și solid. În ultimii 40 sau 50 de ani, cadrul de coordonate eulerian lagrangian arbitrar a fost introdus pentru a lucra cu probleme de flux pe domenii în mișcare [23], [39], [40] unde sunt utilizate metode numerice. Interacțiunea fluid-structură este numită problemă multifizică cuplată la suprafață, spre deosebire de problemele multifizice cuplate în volum, în care două (sau mai multe) subprobleme trăiesc toate în același domeniu. Un exemplu tipic pentru astfel de probleme de cuplaj de volum ar fi dat de curgerile reactive chimic, unde reacția chimică interacționează cu o problemă de curgere [11], [66]. Ca exemplu de problemă FSI cu domeniile în mișcare, putem cita [57] unde există două corpuri rigide în mișcare. Existența și regularitatea problemei cuplate a fost investigată în [2] (analizează un model parabolic-hiperbolic al unui sistem cuplat care apare atunci când o structură elastică este scufundată în fluid), [3] - [5] studiază un model parabolic-hiperbolic cuplat cu structura elastică scufundată în fluid prin teoria semigrupurilor, în [24] un sistem dependent de timp ce modelează interacțiunea dintre un fluid Stokes și o structură elastică este descris, [25] studiază o problemă liniară de interacțiune fluid-structură elastică. Pentru o introducere aprofundată în optimizare și identificare a parametrilor cu ecuații cu derivate parțiale, ne referim la literatura de specialitate [38], [49], [63], [64]. Rezultatele de optimizare pentru problemele FSI pot fi găsite, de exemplu, în [14], [15], [27], [56], [59], [60]. Alte lucrări care studiază diferite aspecte de interes din punct de vedere matematic și numeric privind problemele FSI sunt prezentate în cele ce urmează. Exemple de studii de insuficiență venoasă sunt în [20], [42], [46] și [50]. În [9] autorii demonstrează existența soluțiilor slabe în problema de interacțiune dintre un fluid Stokes și o structură multistratificată poroelastică, [19] prezintă noi algoritmi pentru predicția hemodinamicii în artere mari, [21] propune investigarea din punct de vedere numeric a unei probleme de interacțiune fluid-structură elastică care e bazată pe teoria de descompunere, în [34] rezultate de existență sunt obținute într-o problemă FSI când în structura elastică motori biologici sunt luați în considerare, [52] reprezintă o analiză variațională într-o problemă FSI când numărul lui Young și densitatea plăcii sunt parametri mari sau mici, [53] prezintă o analiză asimptotică într-o problemă de interacțiune fluid-structură elastică depinzând de doi parametri mici, grosimea solidului și a fluidului, în timp ce [55] dă o introducere matematică în tehnicile de modelare, analiză și simulare pentru problemele FSI.

1.2 Motivația și punctul de plecare al studiului

Această lucrare este asociată cu fenomenul complex din viața reală al fluxului sanguin prin sistemul circulator. Datorită importanței sale practice evidente, în literatura de specialitate au fost elaborate numeroase modele matematice pentru a descrie cât mai bine caracteristicile acestui fenomen. Articole care țin cont de structura complicată a sistemului sanguin ([8] descrie o procedură de reconstrucție a presiunii pentru domeniile subțiri, [41] demonstrează existența și unicitatea soluției slabe pentru ecuațiile staționare Navier-Stokes într-o structură de tub subțire), interacțiunea dintre sânge și peretele elastic al vasului ([10], [53]), sau rolul vâscozității asupra curgerii fluidului (în [7] un fluid micropolar incompresibil care curge printr-un sistem de conducte, [54] studiază un flux vâscos nestaționar într-un canal subțire cu perete elastic, [59] studiază problemele de interacțiune fluid vâscos-structură elastică) sunt doar câteva exemple de lucrări recente dedicate acestor probleme de interacțiune. În toate lucrările citate anterior s-a presupus că temperaturile fluidului și ale mediului elastic sunt constante; deci, ele nu afectează caracteristicile FSI. Această ipoteză este o simplificare, deoarece majoritatea materialelor și fluidelor elastice au o dependență puternică de temperatură. În viața reală există multe situații în care interacțiunea dintre un fluid și un mediu elastic este puternic influențată de variațiile de temperatură. Ca exemplu al rolului important jucat de temperatură menționăm legătura dintre temperatura exterioară și variația tensiunii arteriale (vezi de exemplu, [44], [65]).

Înainte de a începe studiul temei de cercetare prezentate în această teză, în anul 2020, au fost efectuate căutări multiple pentru a vedea dacă există și alte abordări pentru probleme similare. Am găsit un singur articol, [28], unde este prezentat un model simplificat al problemei FSI cuplate atunci când sunt luate în considerare variațiile de temperatură ale celor două medii. Având în vedere cazul staționar, autorii studiază un cuplaj slab între cele două medii, astfel: se rezolvă în primul rând problema din domeniul fluidului; apoi, se rezolvă ecuația temperaturii convecție-difuzie în întregul domeniu, adică reuniunea subdomeniilor fluid și solid; în sfârșit, se rezolvă sistemul de termoelasticitate liniară care descrie deformarea mediului elastic. Această cuplare slabă scade costul de calcul deoarece nu este necesar să se rezolve un sistem monolitic cuplat. În afară de [28], putem menționa încă două articole ([47, 48]) publicate după 2020 care discută despre probleme FSI termice. Caracteristicile modelelor studiate în aceste două articole este că structura elastică are o dimensiune mai mică decât cea a fluidului (asta înseamnă că structura elastică reprezintă o parte din frontiera

fluidului).

1.3 Noutatea

În această teză propunem un model matematic dublu cuplat pentru a descrie o problemă termică (FSI) atunci când domeniul fluid și cel solid au aceeași dimensiune. Prin intermediul acestui model se obțin rezultate calitative precum existența, regularitatea, unicitatea funcțiilor necunoscute; mai mult, efectuăm simulări numerice care evidențiază unele aspecte care caracterizează fenomene din viața reală. Noutatea abordării noastre este că, spre deosebire de problemele studiate în [28, 47, 48], reușim să analizăm, atât din punct de vedere matematic, cât și numeric, un sistem dublu cuplat cu ecuații neliniare și condiții de limită și inițiale neomogene, în cazul în care fluidul și structura elastică ocupă domenii cu aceeași dimensiune. În modelul nostru, mișcarea fluidului este descrisă de sistemul incompresibil Navier–Stokes în aproximarea Boussinesq; comportamentul mediului elastic este modelat prin ecuația termoelasticității liniare și, în plus, variația temperaturii este dată de o ecuație de convecție-difuzie corespunzătoare fiecărui mediu (neliniară în domeniul fluidului). Condițiile de cuplaj pe interfața dintre cele două medii sunt continuitatea vitezelor și temperaturilor, și, de asemenea, continuitatea tensiunilor normale și a fluxurilor de căldură.

Chiar dacă literatura de specialitate din ultimii ani conține un număr mare de lucrări care surprind diferite aspecte ale interacțiunii dintre un fluid vâscos și o structură elastică (de exemplu, [13] studiază o problemă de interacțiune fluid-structură tridimensională între un fluid vâscos și o placă elastică subțire în care se obțin rezultate de convergență tare și estimări cantitative de eroare, în [29] o schemă semi-implicită stabilă și o proiecție Chorin-Temam sunt studiate într-un cuplaj incompresibil fluid-structură elastică, în [37] este studiată o problemă neliniară nestaționară de interacțiune fluid-structură fără decuplarea fluidului de la structură, [51] descrie o problemă neliniară cu frontiere în mișcare între un fluid incompresibil, vâscos, Newtonian cu o ecuație bidimensională Navier-Stokes și o structură elastică cu condiții de alunecare la frontieră Navier unde metoda folosită este discretizarea în timp prin divizarea operatorilor, [52] studiază un model bidimensional dependent de timp între o placă elastică subțire și un fluid vâscos Newtonian cu dilatare asimptotică, în [54] un flux vâscos nestaționar cu vâscozitatea constantă aproape peste tot și o expansiune asimptotică a soluției este construită, [59] determină o funcție de vâscozitate ce realizează o configurație

optimă a presiunii sângelui), cuplajul termic dintre cele două medii este încă o noutate.

1.4 Structura tezei și rezultate principale

Teza este împărțită în șase capitole și o bibliografie ce conține 67 titluri. În *Capitolul 2* prezentăm rezultate cunoscute de analiză funcțională din literatură pe care le folosim în teză. În *Capitolul 3* introducem și studiem sistemul neliniar complet cuplat care modelează problema FSI termică cu condiții la limită, de cuplaj și inițiale. Definim problema FSI corespunzătoare unui fluid incompresibil Navier-Stokes și un solid elastic, cuplate cu ecuații pentru temperatură, cele două medii fiind cuplate pe interfață prin continuitatea vitezelor, tensiunilor normale, temperaturilor și fluxurilor de căldură, prezentate în *Problema Principală*. Liniarizând sistemul și introducând expresii adimensionale, obținem un sistem cuplat cu ecuații cu derivate parțiale pe care îl vom analiza în continuare. Atunci, introducem două noi funcții necunoscute pentru a reduce numărul de necunoscute. Astfel, transformăm sistemul diferențial într-unul integro-diferențial. Pentru a obține analiza variațională a problemei, prezentăm spațiile funcționale, regularitatea datelor și definim două noi necunoscute ce satisfac condiții la limită și inițiale omogene. Introducem noțiunea de soluția slabă pentru sistemul integro-diferențial și obținem primul rezultat important al acestui capitol: existența și unicitatea soluției slabe. Rezultatul de existență este demonstrat prin metoda lui Galerkin aplicată pentru problema variațională asociată noilor funcții necunoscute. Obținem două seturi de estimări pentru necunoscute și derivatele necunoscutelor. Pentru că problema variațională nu furnizează suficientă regularitate în domeniul elastic, o aproximăm cu o familie de probleme variaționale vâscoelastice, depinzând de un parametru mic ε . Diferența dintre problema variațională inițială și problema vâscoelastică din această familie este reprezentată de un termen suplimentar mic apărut în ultima problemă. Acest termen corespunde regularității în domeniul elastic "neacoperit" de problema variațională inițială și este necesar în ceea ce urmează pentru a obține convergența schemei numerice. Demonstrăm rezultate de existență, unicitate și regularitate pentru problemele vâscoelastice și estimări. Această aproximare este justificată de o teoremă de estimare a erorii care dă o eroare de ordinul $O(\varepsilon^{1/4})$ între soluția exactă și cea vâscoelastică în raport cu norme convenabile. Prin urmare, obținem, cu $\varepsilon \rightarrow 0$, convergența tare a familiei de soluții vâscoelastice la soluția problemei variaționale inițiale în raport cu norme convenabile. Ultima parte a acestui capitol este dedicată analizei numerice

a problemei pentru cazul $n = 2$. Pentru orice valoare fixată a lui ε , asociem problemei vâscoelastice corespunzătoare o schemă numerică, folosind o metodă prin diferențe finite pentru timp și o metodă de element finit pentru aproximarea în spațiu. Termenul suplimentar vâscoelastic ne permite să obținem estimări convenabile pentru soluția unică a schemei numerice în domeniul elastic, urmate de o teoremă de stabilitate. Al doilea rezultat principal al acestui capitol este teorema de convergență. Arătăm în primul rând că șirul de soluții al schemei numerice este slab convergent (în raport cu spații convenabile) la un triplet ce satisface aceleași egalități variaționale ca soluția vâscoelastică, dar cu mai puțină regularitate decât această soluție. Atunci, îmbunătățim pas cu pas regularitatea acestui triplet până obținem o regularitate (încă inferioară a celei a soluției vâscoelastice), dar care ne permite să obținem un rezultat de unicitate care are ca consecință faptul că limita slabă obținută anterior a șirului de soluții numerice este unică și reprezintă soluția unică a problemei vâscoelastice.

Capitolul 4 prezintă rezultate teoretice legate de presiunea fluidului. Studiile teoretice ale acestui capitol includ echivalența dintre problema variațională fără presiune (VP) și problema variațională cu presiune, existența și unicitatea presiunii folosind formula lui Stokes. Demonstrăm aproximarea presiunii printr-un șir de funcții presiune vâscoelastice și apoi, convergența slabă al acestui șir la presiune. Menționăm că unicitatea presiunii nu este un rezultat trivial, pentru că problemele Navier-Stokes nu dau unicitatea presiunii fluidului. Prezintă o schemă numerică de aproximare cu rezultate de stabilitate și convergență. Ultima parte a acestui capitol este dedicată algoritmului lui Uzawa al cărui rol este de a aproxima o funcție supusă la restricții printr-un șir de funcții fără restricții. Algoritmul lui Uzawa pentru ecuațiile Stokes și Navier-Stokes este folosit, de exemplu, în [62]. Rolul acestui algoritm este să aproximăm o funcție care trebuie să verifice condiția $\int_S \operatorname{div} \vec{\alpha}_h dx = 0, \forall S \in \mathcal{S}_h^f$ cu un șir de funcții care nu mai este supus acestor restricții. Acest lucru este necesar pentru că este dificil să construim o bază precisă a spațiului $\mathcal{W}_h = \left\{ \vec{\alpha}_h \in W_h \mid \int_S \operatorname{div} \vec{\alpha}_h dx = 0, \forall S \in \mathcal{S}_h^f \right\}$ din cauza restricției acestui spațiu. Generalizăm acest algoritm pentru problema dublu cuplată studiată și, în plus față de ceea ce se studiază în [62], demonstrăm și că șirul de funcții care aproximează presiunea are un punct slab aderent.

Capitolul 5 se ocupă de simulări numerice alese pentru a pune în evidență fenomenele fizice legate de problema considerată. Aceste simulări se bazează pe schemele numerice prezentate mai devreme și evidențiază următoarele aspecte:

1. felul în care variația de temperatură influențează variația vitezei longitudinale în fluid;

2. felul în care schimbările de temperatură exterioară influențează variația presiunii sanguine;

3. influența forțelor ce acționează în domeniul elastic asupra vitezei longitudinale în fluid;

Capitolul 6 prezintă concluziile abordării teoretice și numerice.

1.5 Interdisciplinaritatea studiului

Această caracteristică este evidențiată de faptul că, pornind de la o problemă fizică (influența temperaturii asupra fluxului sanguin printr-un vas de sânge elastic), se construiește un model matematic pentru a descrie acest fenomen și apoi, prin intermediul acestui model, se realizează simulări numerice, care validează modelul propus deoarece aceste simulări conduc la rezultatele fizice așteptate.

1.6 Limitări ale cercetării și perspective pentru viitoare cercetări

Datorită complexității modelului matematic (sistem dublu cuplat, neliniar, neomogen) introdus pentru a descrie cât mai fidel influența temperaturii asupra unei interacțiuni fluid vâscos-structură elastică atunci când domeniul solid are aceeași dimensiune cu cel fluid, a fost necesar ca studiul să aibă o mică simplificare constând în liniarizarea ecuațiilor sistemului.

Întrucât munca noastră reprezintă un studiu matematic și numeric asociat cu un model simplificat al fluxului sanguin prin sistemul circulator, unele direcții viitoare de cercetare ar putea fi luarea în considerare a unei geometrii mai realiste a problemei sau un model mai apropiat de realitate pentru modelarea fluxului sanguin. O etapă următoare ar fi domeniile în $\mathbb{R}^3$ și apoi o structură de tub. Domeniul numit structură tubulară este un model matematic menit să descrie structurile care conțin mai multe tuburi conectate în punctele lor numite noduri. Mai exact, este o structură specială de domenii subțiri. Din punct de vedere fizic, aceste structuri pot fi folosite ca modele geometrice ale sistemelor vaselor de sânge, instalațiilor hidraulice etc.

1.7 Conferințe

Rezultatele acestei teze au fost prezentate la următoarele conferințe:

1. Alexandra-Roxana Ciorogar, Ruxandra Stavre, *Variational and numerical analysis of a thermal fluid-structure interaction problem*, Ediția 39 a Conferinței Caius Iacob, Mecanica Fluidelor și Aplicațiile ei Tehnice, București, România, 28-29 Octombrie, 2021
2. Alexandra-Roxana Ciorogar, Ruxandra Stavre, *Mathematical and numerical modeling of a given field of temperature influence on the pressure variation in a fluid-structure interaction problem*, International Symposium on Applied Mathematics and Engineering, Istanbul, Turcia, 21-23 Ianuarie, 2022
3. Alexandra-Roxana Ciorogar, Ruxandra Stavre, *A thermal fluid-structure interaction model; approximation methods and numerical algorithms*, International Applied Mathematics, Modelling and Simulation Conference, Paris, Franța, 17-19 Iunie, 2022
4. Alexandra-Roxana Ciorogar, Ruxandra Stavre, *Variational and numerical analysis for a thermal fluid-structure interaction problem*, International Workshop "Multiscale Modeling & Methods", Vilnius, Lituania, 24-26 Octombrie, 2022

1.8 Publicații

Rezultatele acestei teze au fost publicate în:

1. Ciorogar, A., Stavre, R., 2023. *A Thermal Fluid–Structure Interaction Problem: Modeling, Variational and Numerical Analysis*, J. Math. Fluid Mech. 25, 37, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00021-023-00783-x>
2. Stavre, R., Ciorogar, A., 2025. *Influence of a Given Field of Temperature on the Blood Pressure Variation: Variational Analysis, Numerical Algorithms and Simulations*, Axioms, 14, 88, DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms14020088>.

Capitolul 2

O PROBLEMĂ DE INTERACȚIUNE FLUID-STRUCTURĂ ELASTICĂ: MODELARE, ANALIZĂ VARIATIONALĂ ȘI NUMERICĂ

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în *Ciorogar, A., Stavre, R., 2023. A Thermal Fluid–Structure Interaction Problem: Modeling, Variational and Numerical Analysis, J. Math. Fluid Mech. 25, 37.*

2.1 Descrierea modelului matematic

Considerăm interacțiunea nestaționară dintre un fluid vâscos, incompresibil și un solid elastic. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ o mulțime Lipschitz, deschisă, mărginită, cu frontieră de clasă C^1 și $\Omega_f \subset \Omega$ cu aceleași proprietăți. Notăm $\Omega_s = \Omega \setminus \overline{\Omega_f}$. Ω_f reprezintă domeniul ocupat de fluidul vâscos și Ω_s este domeniul elastic. Fluxul fluidului este descris de ecuațiile Navier-Stokes în aproximare Boussinesq, unde luăm în considerare variația temperaturii. Se consideră și influența forțelor masice, corespunzătoare greutatei, $\rho \vec{g}$ unde ρ este densitatea și $\vec{g}$ este accelerația gravitațională. Necunoscutele sunt viteza $\vec{v}$, temperatura fluidului T_f și presiunea p . În această aproximare, variația densității este neglijată în termenii inerțiali, dar gravitația este suficient de importantă pentru a evidenția variația densității. Densitatea depinde liniar de temperatură cu expresia $\rho = \rho_0 - \rho_0 \alpha_f (T - T_0)$, ρ_0 fiind o constantă pozitivă

reprezentând densitatea fluidului la temperatura T_0 și α_f coeficientul de expansiune termică.

Comportamentul mediului elastic este modelat de ecuația termoelasticității liniare, cu componentele tensorilor mici de deformare date în termeni de vectorul deplasare $\vec{u}$, considerat a fi descompus de $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^M + \varepsilon_{ij}^T$, ε_{ij}^M reprezentând componentele tensiunii mecanice și ε_{ij}^T componentele tensorului termic (vezi e.g., [45]), variabilele necunoscute fiind *vectorul de deplasare* $\vec{u}$ și *temperatura în solid* T_s . Folosind teoria din [58], avem

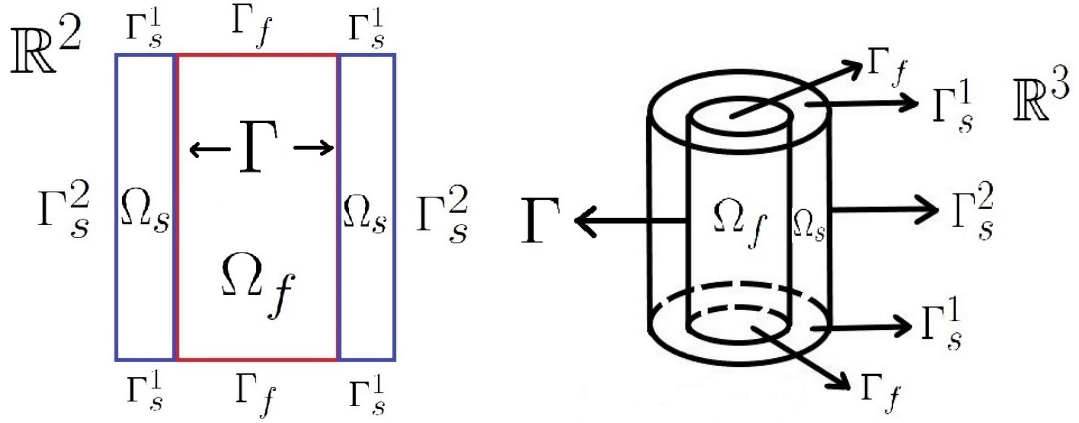
$$\sigma_{ij} = \underbrace{\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}}_{\varepsilon_{ij}^M} - \underbrace{k \alpha_s (T - T_0) \delta_{ij}}_{\varepsilon_{ij}^T}.$$

Pe lângă ecuațiile anterioare, considerăm două ecuații de convecție-difuzie nestaționare corespunzătoare transferului de căldură în fluid și în solidul elastic.

Presupunem că deformația elastică a mediului este mică, astfel încât ecuațiile pentru cele două medii pot fi scrise cu o bună aproximare în domeniile corespunzătoare inițiale. Frontierele celor două faze au următoarele proprietăți: $\partial\Omega_f = \Gamma_f \cup \Gamma$, $\partial\Omega_s = \Gamma_s \cup \Gamma$, cu $\text{meas}(\Gamma_f \cap \Gamma) = 0$, $\text{meas}(\Gamma_s \cap \Gamma) = 0$, $\Gamma_f \cup \Gamma_s = \partial\Omega$, $\text{meas}(\Gamma_f \cap \Gamma_s) = 0$ și $\Gamma = \partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s$ reprezintă interfața celor două faze. În plus, corespunzătoare diferitelor tipuri de condiții la limită, luăm în considerare $\Gamma_s = \Gamma_s^1 \cup \Gamma_s^2$, cu $\text{meas}(\Gamma_s^1 \cap \Gamma_s^2) = 0$. Condițiile de cuplaj (reprezentate prin continuitatea vitezelor, vectorului de tensiuni, temperaturii și a fluxului de căldură) sunt impuse pe interfața fixă care separă aceste domenii (pentru detalii privind condițiile de cuplaj în FSI, vezi, de exemplu, [55]).

Așa cum s-a spus mai devreme, sistemul sanguin are o structură geometrică complicată. Totuși, în scopul abordării noastre, această structură nu este unul dintre aspectele principale, așa că considerăm o geometrie simplificată a problemei.

Pentru o mai bună identificare a frontierelor prezentăm mai jos anumite domenii în $\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{R}^3$.


 Figura 2.1: Domenii particulare în $\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{R}^3$

Formulăm acum **Problema Principală**, problema nestaționară termică FSI modelată de sistemul neliniar de ecuații.

Să se găsească $\vec{v}$, $\vec{u}$, p , T_f , T_s soluțiile sistemului neliniar de ecuații cu derivate parțiale:

$$\begin{cases} \rho_0 \vec{v}' + \rho_0 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - 2\nu \operatorname{div}(D(\vec{v})) + \rho_0 \alpha_f (T_f - T_{f0}) \vec{g} + \nabla p = \rho_0 \vec{g} & \text{în } \Omega_f \times (0, \tau), \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 & \text{în } \Omega_f \times (0, \tau), \\ \rho_s \vec{u}'' - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right) + k \alpha_s \nabla (T_s - T_{s0}) = \vec{f}_s & \text{în } \Omega_s \times (0, \tau), \\ \rho_0 c_f T_f' + \rho_0 c_f \vec{v} \cdot \nabla T_f - k_f \Delta T_f = Q_f & \text{în } \Omega_f \times (0, \tau), \\ \rho_s c_s T_s' + k \alpha_s T_{s0} (\operatorname{div} \vec{u}') - k_s \Delta T_s = Q_s & \text{în } \Omega_s \times (0, \tau), \end{cases} \quad (2.1)$$

cu condiții la limită

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{0} & \text{pe } \Gamma_f \times (0, \tau), \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{pe } \Gamma_s \times (0, \tau), \\ \frac{\partial T_f}{\partial n} = 0 & \text{pe } \Gamma_f \times (0, \tau), \\ \frac{\partial T_s}{\partial n} = 0 & \text{pe } \Gamma_s^1 \times (0, \tau), \\ T_s = T_g & \text{pe } \Gamma_s^2 \times (0, \tau), \end{cases} \quad (2.2)$$

condiții de cuplaj

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{u}' \\ -p\vec{n} + 2\nu D(\vec{v})\vec{n} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} n_i - k\alpha_s(T_s - T_{s_0})\vec{n} \\ T_f = T_s \\ k_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = k_s \frac{\partial T_s}{\partial n} \end{array} \right. \quad \text{pe } \Gamma \times (0, \tau), \quad (2.3)$$

și condiții inițiale

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{v}(0) = \vec{v}_0 & \text{în } \Omega_f, \\ \vec{u}(0) = \vec{u}'(0) = \vec{0} & \text{în } \Omega_s, \\ T(0) = T_0 & \text{în } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

2.2 Problema variațională

Problema Variațională

Să se găsească $(\vec{\omega}, S) \in H_{\mathcal{W}} \times H_{\mathcal{T}}$ soluție pentru:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}'(t) \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}(t) \cdot \nabla) \vec{w}_0 \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla) \vec{\omega}(t) \cdot \vec{\varphi} \\ & + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_f} D(\vec{\omega}(t)) : D(\vec{\varphi}) + \alpha_f \int_{\Omega_f} S(t) \vec{g} \cdot \vec{\varphi} + k\alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla S(t) \cdot \vec{\varphi} \\ & + \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^t \vec{\omega}(s) ds \right) \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \vec{K}(t) \cdot \vec{\varphi}, \\ & \forall \vec{\varphi} \in \mathcal{W} \text{ a.p.t. în } (0, \tau), \end{aligned} \quad (\text{VP})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \chi_2 S'(t) \eta + \int_{\Omega_f} \eta \vec{\omega}(t) \cdot \nabla T_0 + \int_{\Omega_f} \eta \vec{w}_0 \cdot \nabla S(t) + \int_{\Omega} \chi_3 \nabla S(t) \cdot \nabla \eta \\ & - \frac{c_s}{c_f} \frac{\rho_s}{\rho_0} \text{Eck} \alpha_s \int_{\Omega} \nabla(T_0 \eta) \cdot \vec{\omega}(t) = \int_{\Omega} G(t) \eta - \int_{\Omega} \vec{F}(t) \cdot \nabla \eta, \\ & \forall \eta \in \mathcal{T} \text{ a.p.t. în } (0, \tau), \end{aligned}$$

$$\vec{\omega}(0) = \vec{0} \text{ în } \mathcal{H}; S(0) = 0 \text{ în } L^2(\Omega).$$

2.3 Aproximarea problemei variaționale cu o familie de probleme vâscoelastice

Propoziția 2.1. *Perechea $(\vec{\omega}, S)$ este soluție pentru (VP) dacă și numai dacă tripletul $(\vec{\omega}, \vec{u}, S)$ e soluție pentru problema:*

Să se găsească $(\vec{\omega}, \vec{u}, S) \in H_{\mathcal{W}} \times H_{\mathcal{W}^s} \times H_{\mathcal{T}}$ astfel încât:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}'(t) \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}(t) \cdot \nabla) \vec{w}_0 \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla) \vec{\omega}(t) \cdot \vec{\varphi} \\
 & + \frac{2}{Re} \int_{\Omega_f} D(\vec{\omega}(t)) : D(\vec{\varphi}) + \alpha_f \int_{\Omega_f} S(t) \vec{g} \cdot \vec{\varphi} + \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i} \\
 & + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla S(t) \cdot \vec{\varphi} = \int_{\Omega} \vec{K}(t) \cdot \vec{\varphi}, \quad \forall \vec{\varphi} \in \mathcal{W} \text{ a.p.t. în } (0, \tau), \\
 & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}'(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i}, \quad \forall \vec{\psi} \in \mathcal{W}^s \text{ a.p.t. în } (0, \tau), \quad (2.5) \\
 & \int_{\Omega} \chi_2 S'(t) \eta + \int_{\Omega_f} \eta \vec{\omega}(t) \cdot \nabla T_0 + \int_{\Omega_f} \eta \vec{w}_0 \cdot \nabla S(t) \\
 & + \int_{\Omega} \chi_3 \nabla S(t) \cdot \nabla \eta - \frac{c_s}{c_f} \frac{\rho_s}{\rho_0} E c k \alpha_s \int_{\Omega} \nabla (T_0 \eta) \cdot \vec{\omega}(t) \\
 & = \int_{\Omega} G(t) \eta - \int_{\Omega} \vec{F}(t) \cdot \nabla \eta, \quad \forall \eta \in \mathcal{T} \text{ a.p.t. în } (0, \tau), \\
 & \vec{\omega}(0) = \vec{0} \text{ în } \mathcal{H}; \vec{u}(0) = \vec{0} \text{ în } \mathcal{W}^s; S(0) = 0 \text{ în } L^2(\Omega).
 \end{aligned}$$

2.3.1 Familia de probleme vâscoelastice

Pentru a demonstra convergența schemei numerice la problema variațională inițială, regularitatea H^1 pentru $\vec{\omega}$ în Ω_s ar trebui furnizată de un termen corespunzător, deoarece aici nu e mai posibilă utilizarea regularității datelor în timp, schema numerică fiind independentă de t .

Fie $\varepsilon > 0$ un parametru mic. Considerăm problema:

Problema Variațională Vâscoelastică

Să se găsească $(\vec{\omega}_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon, S_\varepsilon) \in H_{\mathcal{W}} \times H_{\mathcal{W}^s} \times H_{\mathcal{T}}$ astfel încât:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}'_\varepsilon(t) \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}_\varepsilon(t) \cdot \nabla) \vec{w}_0 \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla) \vec{\omega}_\varepsilon(t) \cdot \vec{\varphi} \\ & + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_f} D(\vec{\omega}_\varepsilon(t)) : D(\vec{\varphi}) + \alpha_f \int_{\Omega_f} S_\varepsilon(t) \vec{g} \cdot \vec{\varphi} + \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i} \\ & + \varepsilon \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} B_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i} + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla S_\varepsilon(t) \cdot \vec{\varphi} = \int_{\Omega} \vec{K}(t) \cdot \vec{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\forall \vec{\varphi} \in \mathcal{W} \text{ a.p.t. în } (0, \tau),$$

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}'_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i}, \quad \forall \vec{\psi} \in \mathcal{W}^s \text{ a.p.t. în } (0, \tau), \quad (\text{VVP})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \chi_2 S'_\varepsilon(t) \eta + \int_{\Omega_f} \eta \vec{\omega}_\varepsilon(t) \cdot \nabla T_0 + \int_{\Omega_f} \eta \vec{w}_0 \cdot \nabla S_\varepsilon(t) \\ & + \int_{\Omega} \chi_3 \nabla S_\varepsilon(t) \cdot \nabla \eta - \frac{c_s}{c_f} \frac{\rho_s}{\rho_0} \text{Eck} \alpha_s \int_{\Omega} \nabla (T_0 \eta) \cdot \vec{\omega}_\varepsilon(t) \\ & = \int_{\Omega} G(t) \eta - \int_{\Omega} \vec{F}(t) \cdot \nabla \eta, \quad \forall \eta \in \mathcal{T} \text{ a.p.t. în } (0, \tau), \end{aligned}$$

$$\vec{\omega}_\varepsilon(0) = \vec{0} \text{ în } \mathcal{H}; \quad \vec{u}_\varepsilon(0) = \vec{0} \text{ în } \mathcal{W}^s; \quad S_\varepsilon(0) = 0 \text{ în } L^2(\Omega).$$

Corolarul 2.1. Fie $(\vec{\omega}, \vec{u}, S)$ soluția unică a problemei (2.5) și $\{(\vec{\omega}_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon, S_\varepsilon)\}_\varepsilon$ familia de soluții vâscoelastice. Atunci, au loc următoarele convergențe, când $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_\varepsilon \rightarrow \vec{\omega} \text{ tare în } L^\infty(0, \tau; (L^2(\Omega))^n), \\ S_\varepsilon \rightarrow S \text{ tare în } L^\infty(0, \tau; L^2(\Omega)), \\ \vec{\omega}_\varepsilon \rightarrow \vec{\omega} \text{ tare în } L^2(0, \tau; (H^1(\Omega_f))^n), \\ S_\varepsilon \rightarrow S \text{ tare în } L^2(0, \tau; H^1(\Omega)), \\ \vec{u}_\varepsilon \rightarrow \vec{u} \text{ tare în } L^\infty(0, \tau; (H^1(\Omega_s))^n). \end{array} \right.$$

2.4 Scheme numerice de aproximare, estimări, stabilitate, convergența pentru cazul $n = 2$

Considerăm o problemă vâscoelastică corespunzătoare unui ε fixat și îi asociem o schemă numerică folosind o aproximare prin element finit în spațiu și o aproximare prin diferențe finite în timp. Toate necunoscutele care apar în continuare depind de ε , dar, pentru simplificarea scrierii, îl vom omite.

2.4.1 Schema numerică independentă de timp

Pentru o valoare fixată a lui ε , asociem problemei vâscoelastice (VVP) următoarea schemă numerică

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pentru } \vec{\omega}_{h,N}^0, \dots, \vec{\omega}_{h,N}^{m-1} \in \mathcal{W}_h; \vec{u}_{h,N}^0, \dots, \vec{u}_{h,N}^{m-1} \in W_h^s; S_{h,N}^0, \dots, S_{h,N}^{m-1} \in \mathcal{T}_h \text{ dați,} \\ (\vec{\omega}_{h,N}^0, \vec{u}_{h,N}^0, S_{h,N}^0) = (\vec{0}, \vec{0}, 0), \text{ să se găsească } (\vec{\omega}_{h,N}^m, \vec{u}_{h,N}^m, S_{h,N}^m) \in \mathcal{W}_h \times W_h^s \times \mathcal{T}_h \text{ a.î.} \\ \\ \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}_{h,N}^m \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}_{h,N}^m \cdot \nabla) \vec{w}_0 \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla) \vec{\omega}_{h,N}^m \cdot \vec{\varphi}_h \\ + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_f} D(\vec{\omega}_{h,N}^m) : D(\vec{\varphi}_h) + \alpha_f \int_{\Omega_f} S_{h,N}^m \vec{g} \cdot \vec{\varphi}_h \\ + \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}^m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} B_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}^m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} \\ + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla S_{h,N}^m \cdot \vec{\varphi}_h = \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}_{h,N}^{m-1} \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega} \vec{K}_N^m \cdot \vec{\varphi}_h, \quad \forall \vec{\varphi}_h \in \mathcal{W}_h, \\ \\ \frac{1}{\tau/N} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}^m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}^m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i} \\ = \frac{1}{\tau/N} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}^{m-1}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i}, \quad \forall \vec{\psi}_h \in W_h^s, \\ \\ \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_2 S_{h,N}^m \eta_h + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}_{h,N}^m \cdot \nabla T_0) \eta_h + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla S_{h,N}^m) \eta_h \\ + \int_{\Omega} \chi_3 \nabla S_{h,N}^m \cdot \nabla \eta_h - \frac{c_s}{c_f} \frac{\rho_s}{\rho_0} \text{Eck} \alpha_s \int_{\Omega} \nabla (T_0 \eta_h) \cdot \vec{\omega}_{h,N}^m \\ = \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_2 S_{h,N}^{m-1} \eta_h + \int_{\Omega} G_N^m \eta_h - \int_{\Omega} \vec{F}_N^m \cdot \nabla \eta_h, \quad \forall \eta_h \in \mathcal{T}_h. \end{array} \right. \quad (\text{NS})$$

Teorema 2.1. *Există $N_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $N \geq N_0$, $m \in \{1, \dots, N\}$ și $h > 0$ problema (NS) are o soluție unică.*

2.4.2 Stabilitate

Fie $(\vec{\omega}_{h,N}^m, \vec{u}_{h,N}^m, S_{h,N}^m)$ soluția unică a sistemului (NS); definim următoarele funcții depinzând de x și t :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_{h,N} \in L^2(0, \tau; \mathcal{W}_h) \\ \vec{\omega}_{h,N}(t) = \vec{\omega}_{h,N}^m \text{ dacă } t \in \left[(m-1) \frac{\tau}{N}, m \frac{\tau}{N} \right), \quad m = \overline{1, N}, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_{h,N} \in L^2(0, \tau; W_h^s) \\ \vec{u}_{h,N}(t) = \vec{u}_{h,N}^m \text{ dacă } t \in \left[(m-1) \frac{\tau}{N}, m \frac{\tau}{N} \right), \quad m = \overline{1, N}, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} S_{h,N} \in L^2(0, \tau; \mathcal{T}_h) \\ S_{h,N}(t) = S_{h,N}^m \text{ dacă } t \in \left[(m-1)\frac{\tau}{N}, m\frac{\tau}{N} \right), m = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.8)$$

și

$$\begin{cases} \vec{w}_{h,N} \in C^0([0, \tau]; \mathcal{W}_h) \\ \vec{w}_{h,N}(t) = (\vec{\omega}_{h,N}^m - \vec{\omega}_{h,N}^{m-1}) \left(\frac{t}{\tau/N} - m \right) + \vec{\omega}_{h,N}^m, t \in \left[(m-1)\frac{\tau}{N}, m\frac{\tau}{N} \right), m = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \vec{\xi}_{h,N} \in C^0([0, \tau]; W_h^s) \\ \vec{\xi}_{h,N}(t) = (\vec{u}_{h,N}^m - \vec{u}_{h,N}^{m-1}) \left(\frac{t}{\tau/N} - m \right) + \vec{u}_{h,N}^m, t \in \left[(m-1)\frac{\tau}{N}, m\frac{\tau}{N} \right), m = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \sigma_{h,N} \in C^0([0, \tau]; \mathcal{T}_h) \\ \sigma_{h,N}(t) = (S_{h,N}^m - S_{h,N}^{m-1}) \left(\frac{t}{\tau/N} - m \right) + S_{h,N}^m, t \in \left[(m-1)\frac{\tau}{N}, m\frac{\tau}{N} \right), m = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Să definim mulțimile:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\omega = \{ \vec{\omega}_{h,N}, h > 0, N \in \mathbb{N}^*, N \geq \hat{N} \}, \\ \mathcal{E}_u = \{ \vec{u}_{h,N}, h > 0, N \in \mathbb{N}^*, N \geq \hat{N} \}, \\ \mathcal{E}_S = \{ S_{h,N}, h > 0, N \in \mathbb{N}^*, N \geq \hat{N} \}. \end{cases}$$

Teorema 2.2. Fie $h > 0$ și $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq \hat{N}$ doi parametri ce caracterizează discretizarea în spațiu, respectiv timp. Atunci:

- (i) mulțimea $\mathcal{E}_\omega$ este $L^\infty(0, \tau; (L^2(\Omega))^2) \cap L^2(0, \tau; (H_0^1(\Omega))^2)$ stabilă;
 - (ii) mulțimea $\mathcal{E}_u$ este $L^\infty(0, \tau; \mathcal{W}^s)$ stabilă;
 - (iii) mulțimea $\mathcal{E}_S$ este $L^\infty(0, \tau; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \tau; \mathcal{T})$ stabilă.
- (2.12)

2.4.3 Convergența schemei numerice

Definim funcțiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{K}_N \in L^2(0, \tau; (L^2(\Omega))^2) \\ \vec{K}_N(t) = \vec{K}_N^m \text{ pentru } t \in \left[(m-1)\frac{\tau}{N}, m\frac{\tau}{N} \right), m = \overline{1, N}, \\ \vec{G}_N \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega)) \\ \vec{G}_N(t) = \vec{G}_N^m \text{ pentru } t \in \left[(m-1)\frac{\tau}{N}, m\frac{\tau}{N} \right), m = \overline{1, N}, \\ \vec{F}_N \in L^2(0, \tau; (L^2(\Omega))^2) \\ \vec{F}_N(t) = \vec{F}_N^m \text{ pentru } t \in \left[(m-1)\frac{\tau}{N}, m\frac{\tau}{N} \right), m = \overline{1, N}. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Propoziția 2.2. Dacă $(\vec{\omega}_{h,N}^m, \vec{u}_{h,N}^m, S_{h,N}^m)$ reprezintă soluția unică a problemei (NS), atunci, $\vec{\omega}_{h,N}, \vec{u}_{h,N}, S_{h,N}, \vec{w}_{h,N}, \vec{\xi}_{h,N}, \sigma_{h,N}$ definite de (2.6) - (2.11) verifică schema numerică dependentă de timp:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \chi_1 \vec{w}'_{h,N}(t) \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}_{h,N}(t) \cdot \nabla) \vec{w}_0 \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla) \vec{\omega}_{h,N}(t) \cdot \vec{\varphi}_h \\ + \frac{2}{Re} \int_{\Omega_f} D(\vec{\omega}_{h,N}(t)) : D(\vec{\varphi}_h) + \alpha_f \int_{\Omega_f} S_{h,N}(t) \vec{g} \cdot \vec{\varphi}_h \\ + \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} B_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} \\ + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla S_{h,N}(t) \cdot \vec{\varphi}_h = \int_{\Omega} \vec{K}_N(t) \cdot \vec{\varphi}_h, \forall \vec{\varphi}_h \in \mathcal{W}_h \text{ a.p.t. în } (0, \tau), \\ \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\xi}'_{h,N}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i}, \\ \forall \vec{\psi}_h \in W_h^s \text{ a.p.t. în } (0, \tau), \\ \int_{\Omega} \chi_2 \sigma'_{h,N}(t) \eta_h + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}_{h,N}(t) \cdot \nabla T_0) \eta_h + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla S_{h,N}(t)) \eta_h \\ + \int_{\Omega} \chi_3 \nabla S_{h,N}(t) \cdot \nabla \eta_h - \frac{c_s \rho_s}{c_f \rho_0} E c k \alpha_s \int_{\Omega} \nabla (T_0 \eta_h) \cdot \vec{\omega}_{h,N}(t) \\ = \int_{\Omega} \vec{G}_N(t) \eta_h - \int_{\Omega} \vec{F}_N(t) \cdot \nabla \eta_h, \forall \eta_h \in \mathcal{T}_h \text{ a.p.t. în } (0, \tau). \end{array} \right. \quad (\text{NST})$$

Teorema 2.3. Pentru orice $h > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq \hat{N}$ și $m = \overline{1, N}$, fie $(\vec{\omega}_{h,N}^m, \vec{u}_{h,N}^m, S_{h,N}^m)$ soluția unică pentru problema (NS) și $\vec{\omega}_{h,N}, \vec{u}_{h,N}, S_{h,N}, \vec{w}_{h,N}, \vec{\xi}_{h,N}, \sigma_{h,N}$ funcțiile definite de (2.6) - (2.11). Fie $(\vec{\omega}_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon, S_\varepsilon)$ soluția unică pentru problema vâscoelastică (VVP). Atunci, $(\vec{\omega}_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon, S_\varepsilon)$ este unicul punct slab aderent al șirului $\{(\vec{\omega}_{h,N}, \vec{u}_{h,N}, S_{h,N})\}_{h,N}$ când $h \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ în sensul convergențelor slabe unde avem stabilitate dată de Teorema 2.2.

Capitolul 3

ANALIZA PRESIUNII FLUIDULUI: STUDIU VARIATİONAL, APROXIMARE, ALGORITMI NUMERICI, ALGORITMUL LUI UZAWA

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în Stavre, R., Ciorogar, A., 2025.
*Influence of a Given Field of Temperature on the Blood Pressure Variation: Variational
Analysis, Numerical Algorithms and Simulations, Axioms, 14, 88.*

3.1 Problema variațională vâscoelastică cu presiune

Problema Variațională Vâscoelastică cu Presiune

$$(\vec{\omega}_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon, p_\varepsilon, S_\varepsilon) \in \tilde{H} \times H_{\mathcal{W}^s} \times L^2(\Omega_f \times (0, \tau)) \times H_{\mathcal{T}}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}'_\varepsilon \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}_\varepsilon \cdot \nabla) \vec{w}_0 \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla) \vec{\omega}_\varepsilon \cdot \vec{\varphi} \\ & + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_f} D(\vec{\omega}_\varepsilon) : D(\vec{\varphi}) - \int_{\Omega_f} p_\varepsilon \text{div } \vec{\varphi} + \alpha_f \int_{\Omega_f} S_\varepsilon \vec{g} \cdot \vec{\varphi} \\ & + \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_\varepsilon}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} B_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_\varepsilon}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i} \\ & + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla S_\varepsilon(t) \cdot \vec{\varphi} + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega_f} S_\varepsilon \text{div } \vec{\varphi} \\ & = \int_{\Omega} \vec{K} \cdot \vec{\varphi} - k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega_f} (\tilde{T}_g - T_0) \text{div } \vec{\varphi}, \quad \forall \vec{\varphi} \in (H_0^1(\Omega))^n \text{ în } L^2(0, \tau), \end{aligned} \tag{VVPP}$$

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}'_\varepsilon}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_\varepsilon}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i}, \quad \forall \vec{\psi} \in \mathcal{W}^s \text{ în } L^2(0, \tau),$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \chi_2 S'_\varepsilon \eta + \int_{\Omega_f} \eta \vec{\omega}_\varepsilon(t) \cdot \nabla T_0 + \int_{\Omega_f} \eta \vec{w}_0 \cdot \nabla S_\varepsilon + \int_{\Omega} \chi_3 \nabla S_\varepsilon \cdot \nabla \eta \\ & - \frac{c_s}{c_f} \frac{\rho_s}{\rho_0} \text{Eck} \alpha_s \int_{\Omega} \nabla(T_0 \eta) \cdot \vec{\omega}_\varepsilon = \int_{\Omega} G \eta - \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \nabla \eta, \quad \forall \eta \in \mathcal{T} \text{ în } L^2(0, \tau), \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_f} q \text{div } \vec{\omega}_\varepsilon = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega_f) \text{ în } L^2(0, \tau),$$

$$\vec{\omega}_\varepsilon(0) = \vec{0} \text{ în } \mathcal{H}, \quad \vec{u}_\varepsilon(0) = \vec{0} \text{ în } \mathcal{W}^s, \quad S_\varepsilon(0) = 0 \text{ în } L^2(\Omega).$$

3.2 Schema numerică de aproximare cu presiune

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}_{h,N}^m \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}_{h,N}^m \cdot \nabla) \vec{w}_0 \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla) \vec{\omega}_{h,N}^m \cdot \vec{\varphi}_h \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_f} D(\vec{\omega}_{h,N}^m) : D(\vec{\varphi}_h) + \alpha_f \int_{\Omega_f} S_{h,N}^m \vec{g} \cdot \vec{\varphi}_h - \int_{\Omega_f} \pi_{h,N}^m D_h \vec{\varphi}_h \\
& + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega_f} S_{h,N}^m \text{div} \vec{\varphi}_h + \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}^m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} \\
& + \varepsilon \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} B_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}^m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla S_{h,N}^m \cdot \vec{\varphi}_h = \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}_{h,N}^{m-1} \cdot \vec{\varphi}_h \\
& + \int_{\Omega} \vec{K}_N^m \cdot \vec{\varphi}_h - k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega_f} ((\tilde{T}_g)_N^m - T_0) \text{div} \vec{\varphi}_h, \quad \forall \vec{\varphi}_h \in W_h,
\end{aligned} \tag{NSP}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau/N} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}^m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}^m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i} \\
& = \frac{1}{\tau/N} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}^{m-1}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i}, \quad \forall \vec{\psi}_h \in W_h^s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_2 S_{h,N}^m \eta_h + \int_{\Omega_f} \eta_h \vec{\omega}_{h,N}^m \cdot \nabla T_0 + \int_{\Omega_f} \eta_h \vec{w}_0 \cdot \nabla S_{h,N}^m \\
& + \int_{\Omega} \chi_3 \nabla S_{h,N}^m \cdot \nabla \eta_h - \frac{c_s}{c_f} \frac{\rho_s}{\rho_0} \text{Eck} \alpha_s \int_{\Omega} \nabla (T_0 \eta_h) \cdot \vec{\omega}_{h,N}^m \\
& = \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_2 S_{h,N}^{m-1} \eta_h + \int_{\Omega} G_N^m \eta_h - \int_{\Omega} \vec{F}_N^m \cdot \nabla \eta_h, \quad \forall \eta_h \in \mathcal{T}_h.
\end{aligned}$$

Schema numerică dependentă de timp

Propoziția 3.1. $(\vec{\omega}_{h,N}^m, \vec{u}_{h,N}^m, \pi_{h,N}^m, S_{h,N}^m)$ e soluție pentru NSP) dacă și numai dacă $\vec{\omega}_{h,N}, \vec{u}_{h,N}, \pi_{h,N}, S_{h,N}; \vec{w}_{h,N}, \vec{\xi}_{h,N}, \sigma_{h,N}$ verifică problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \chi_1 \vec{w}'_{h,N}(t) \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}_{h,N}(t) \cdot \nabla) \vec{w}_0 \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla) \vec{\omega}_{h,N}(t) \cdot \vec{\varphi}_h \\ + \frac{2}{Re} \int_{\Omega_f} D(\vec{\omega}_{h,N}(t)) : D(\vec{\varphi}_h) + \alpha_f \int_{\Omega_f} S_{h,N}(t) \vec{g} \cdot \vec{\varphi}_h - \int_{\Omega_f} \pi_{h,N}(t) D_h \vec{\varphi}_h \\ + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega_f} S_{h,N}(t) \operatorname{div} \vec{\varphi}_h + \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} \\ + \varepsilon \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} B_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla S_{h,N}(t) \cdot \vec{\varphi}_h \\ = \int_{\Omega} \vec{K}_N(t) \cdot \vec{\varphi}_h + k \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega_f} (T_0 - \widetilde{(\vec{T}_g)_N}) \operatorname{div} \vec{\varphi}_h, \forall \vec{\varphi}_h \in W_h \text{ în } L^2(0, \tau), \\ \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\xi}'_{h,N}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i}, \\ \forall \vec{\psi}_h \in W_h^s \text{ în } L^2(0, \tau), \\ \int_{\Omega} \chi_2 \sigma'_{h,N}(t) \eta_h + \int_{\Omega_f} \eta_h \vec{\omega}_{h,N}(t) \cdot \nabla T_0 + \int_{\Omega_f} \eta_h \vec{w}_0 \cdot \nabla S_{h,N}(t) \\ + \int_{\Omega} \chi_3 \nabla S_{h,N}(t) \cdot \nabla \eta_h - \frac{c_s}{c_f} \frac{\rho_s}{\rho_0} Eck \alpha_s \int_{\Omega} \nabla (T_0 \eta_h) \cdot \vec{\omega}_{h,N}(t) \\ = \int_{\Omega} \vec{G}_N(t) \eta_h - \int_{\Omega} \vec{F}_N(t) \cdot \nabla \eta_h, \forall \eta_h \in \mathcal{T}_h \text{ în } L^2(0, \tau). \end{array} \right. \quad (\text{NSPT})$$

Următoarea teoremă dă convergența schemei (NSPT) la problema (VVPP).

Teorema 3.1. Fie $h > 0, N \in \mathbb{N}^*, N \geq \hat{N}$. Pentru orice $m \in \{1, \dots, N\}$ fie $(\vec{\omega}_{h,N}^m, \vec{u}_{h,N}^m, \pi_{h,N}^m, S_{h,N}^m)$ soluția unică a problemei (NSP) Fie $(\vec{\omega}_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon, p_\varepsilon, S_\varepsilon)$ soluția unică a problemei (VVPP). Atunci, această soluție reprezintă unicul punct slab aderent al șirului $\{(\vec{\omega}_{h,N}, \vec{u}_{h,N}, \pi_{h,N}, S_{h,N})\}_{h,N}$ când $h \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ în raport cu convergența slabă în mulțimile $\mathcal{E}_\omega, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_\pi, \mathcal{E}_S$ pentru care avem stabilitate.

3.3 Algoritmul lui Uzawa

Algoritmul lui Uzawa

Pentru $(\vec{\omega}_{h,N}^0, \vec{u}_{h,N}^0, \pi_{h,N}^{1,0}, S_{h,N}^0) = (\vec{0}, \vec{0}, 0, 0)$, să se găsească, pentru orice $m \in \{1, \dots, N\}$ și pentru orice $r \in \mathbb{N}$, $(\vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1}, \vec{u}_{h,N}^{m,r+1}, \pi_{h,N}^{m,r+1}, S_{h,N}^{m,r+1}) \in W_h \times W_h^s \times X_h \times \mathcal{T}_h$ astfel încât

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1} \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1} \cdot \nabla) \vec{w}_0 \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega_f} (\vec{w}_0 \cdot \nabla) \vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1} \cdot \vec{\varphi}_h \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_f} D(\vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1}) : D(\vec{\varphi}_h) + \alpha_f \int_{\Omega_f} S_{h,N}^{m,r+1} \vec{g} \cdot \vec{\varphi}_h - \int_{\Omega_f} \pi_{h,N}^{m,r} D_h \vec{\varphi}_h \\
& + k\alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega_f} S_{h,N}^{m,r+1} \text{div } \vec{\varphi}_h + \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}^{m,r+1}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} \\
& + \varepsilon \frac{\rho_s}{\rho_0} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} B_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_h}{\partial x_i} + k\alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla S_{h,N}^{m,r+1} \cdot \vec{\varphi}_h \\
& = \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_1 \vec{\omega}_{h,N}^{m-1} \cdot \vec{\varphi}_h + \int_{\Omega} \vec{K}_N^m \cdot \vec{\varphi}_h - k\alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_0} \int_{\Omega_f} ((\vec{T}_g)_N^m - T_0) \text{div } \vec{\varphi}_h, \\
& \qquad \qquad \qquad \forall \vec{\varphi}_h \in W_h,
\end{aligned} \tag{UA}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau/N} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}^{m,r+1}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i} \\
& = \frac{1}{\tau/N} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_s} A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_{h,N}^{m-1}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_h}{\partial x_i}, \quad \forall \vec{\psi}_h \in \mathcal{W}_h^s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_2 S_{h,N}^{m,r+1} \eta_h + \int_{\Omega_f} \eta_h \vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1} \cdot \nabla T_0 + \int_{\Omega_f} \eta_h \vec{w}_0 \cdot \nabla S_{h,N}^{m,r+1} \\
& + \int_{\Omega} \chi_3 \nabla S_{h,N}^{m,r+1} \cdot \nabla \eta_h - \frac{c_s \rho_s}{c_f \rho_0} \text{Eck} \alpha_s \int_{\Omega} \nabla (T_0 \eta_h) \cdot \vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1} \\
& = \frac{1}{\tau/N} \int_{\Omega} \chi_2 S_{h,N}^{m-1} \eta_h + \int_{\Omega} G_N^m \eta_h - \int_{\Omega} \vec{F}_N^m \cdot \nabla \eta_h, \quad \forall \eta_h \in \mathcal{T}_h, \\
& \int_{\Omega_f} \pi_{h,N}^{m,r+1} q_h + \rho \int_{\Omega_f} D_h \vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1} q_h = \int_{\Omega_f} \pi_{h,N}^{m,r} q_h, \quad \forall q_h \in X_h.
\end{aligned}$$

Necunoscuta problemei de mai sus este $(\vec{\omega}_{h,N}^{m,r+1}, \vec{u}_{h,N}^{m,r+1}, \pi_{h,N}^{m,r+1}, S_{h,N}^{m,r+1}) \in W_h \times W_h^s \times X_h \times \mathcal{T}_h$. Observăm că, spre deosebire de $\vec{\omega}_{h,N}^m$, care este supusă restricției spațiului $\mathcal{W}_h$, prima componentă a soluției problemei (UA) aparține spațiului fără restricții W_h .

Am demonstrat convergența algoritmului lui Uzawa.

Teorema 3.2. Fie $h > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ cu $N \geq \hat{N}$, $m \in \{1, \dots, N\}$ și $r \in \mathbb{N}$. Presupunem că ρ satisface:

$$0 < \rho < \frac{1}{2\text{Re}}. \tag{3.1}$$

Atunci, pentru valori fixate ale lui h , N , m , avem următoarele convergențe când $r \rightarrow \infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_{h,N}^{m,r} \rightarrow \vec{\omega}_{h,N}^m \text{ tare în } W_h, \\ \pi_{h,N}^{m,r} \rightarrow \pi_{h,N}^m \text{ tare în } L^2(\Omega_f), \\ \vec{u}_{h,N}^{m,r} \rightarrow \vec{u}_{h,N}^m \text{ tare în } W_h^s, \\ S_{h,N}^{m,r} \rightarrow S_{h,N}^m \text{ tare în } \mathcal{T}_h. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Rezultatele aceste secțiuni corespund cazului $n = 2$.

Capitolul 4

SIMULĂRI NUMERICE

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în Stavre, R., Ciorogar, A., 2025. *Influence of a Given Field of Temperature on the Blood Pressure Variation: Variational Analysis, Numerical Algorithms and Simulations, Axioms, 14, 88.*

Ultima parte a acestei teze este dedicată simulărilor numerice alese pentru a pune în evidență fenomenele fizice asociate problemei considerate. Programul folosit pentru următoarele simulări a fost MATLAB.

În toate exemplele prezentate mai jos, am considerat un domeniu simplificat, adică $\Omega = [0, 4] \times [0, 12]$, reprezentând o secțiune a unui vas de sânge, ca în Figura 2.1, stânga.

Schemele de aproximare folosite pentru simulări sunt asociate problemelor vâscoelastice. Folosim o metodă prin diferențe finite pentru timp și o metodă de element finit pentru spațiu. Apoi, folosim algoritmul lui Uzawa. Parametrul mic ε introdus cu familia de probleme vâscoelastice, care este un parametru fixat în schemele numerice, trebuie să fie mai mare decât $\max \left\{ \frac{\tau}{N}, dx f, dx s, dy \right\}$, unde $\frac{\tau}{N}$ este pasul de timp și $dx f, dx s$ sunt pașii de spațiu pe Ox în fluid, respectiv domeniul solid și dy este pasul de spațiu pe axa Oy . Am ales pași de spațiu și timp diferiți pentru a obține convergența optimă.

Rezultatele secțiunilor următoare sunt obținute pentru cazul bidimensional și au fost efectuate pornind de la sistemul (UA).

4.1 Influența temperaturii pe cuplajul fluid-structură elastică

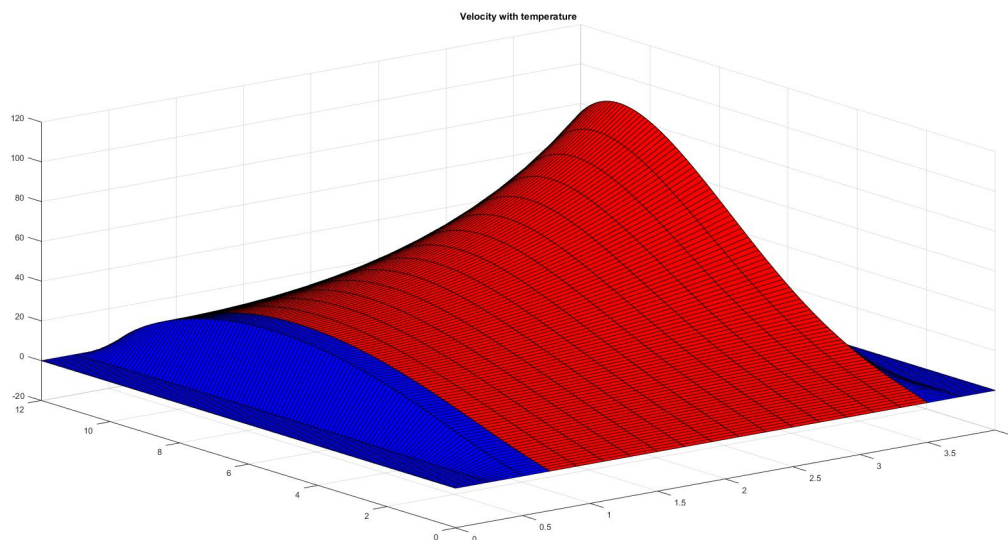


Figura 4.1: Viteza cu temperatură.

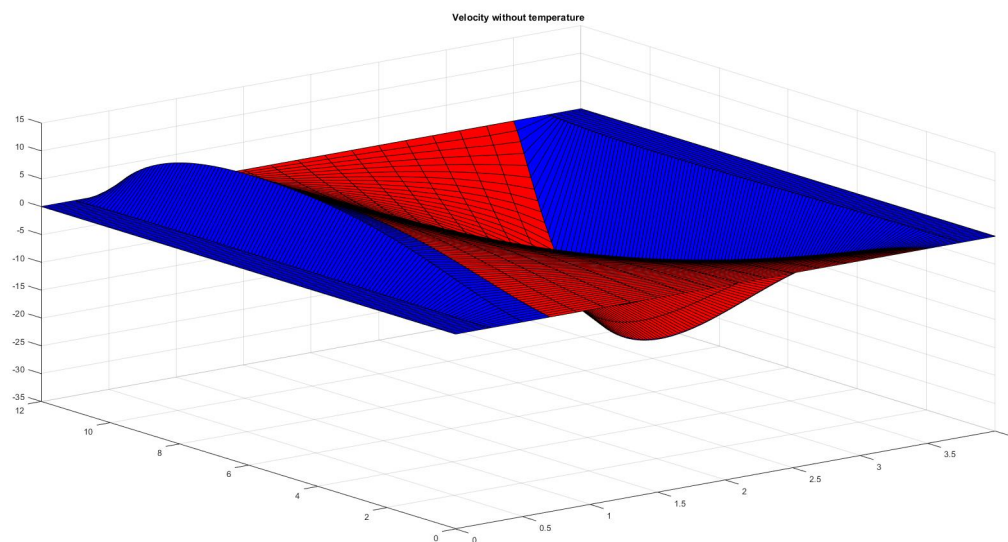


Figura 4.2: Viteza fără temperatură.

4.2 Influența unui câmp dat de temperatură asupra variației presiunii sângelui

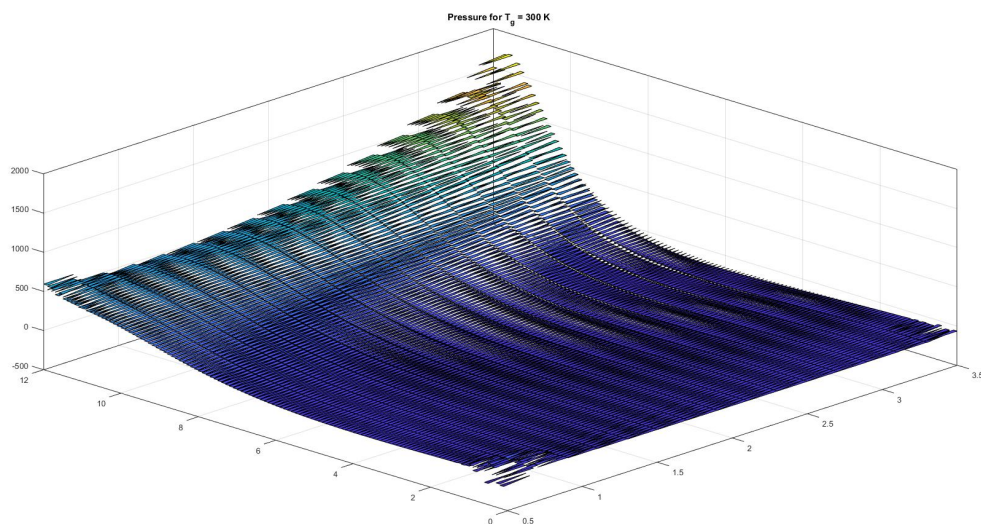


Figura 4.3: Profilul presiunii în fluid pentru $T_g = 300$ K.

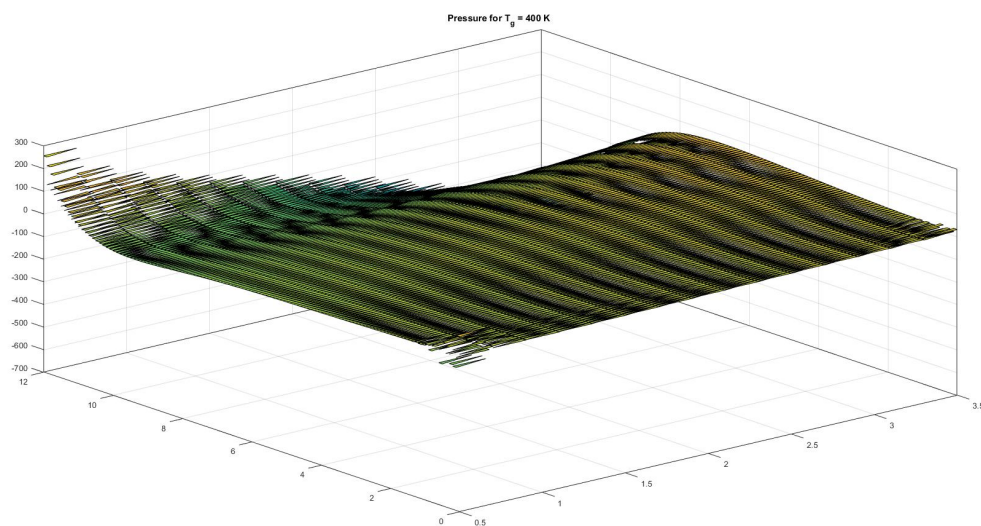


Figura 4.4: Profilul presiunii în fluid pentru $T_g = 400$ K.

4.3 Influența forțelor de compresie asupra fenomenului de reflux sanguin în insuficiența venoasă

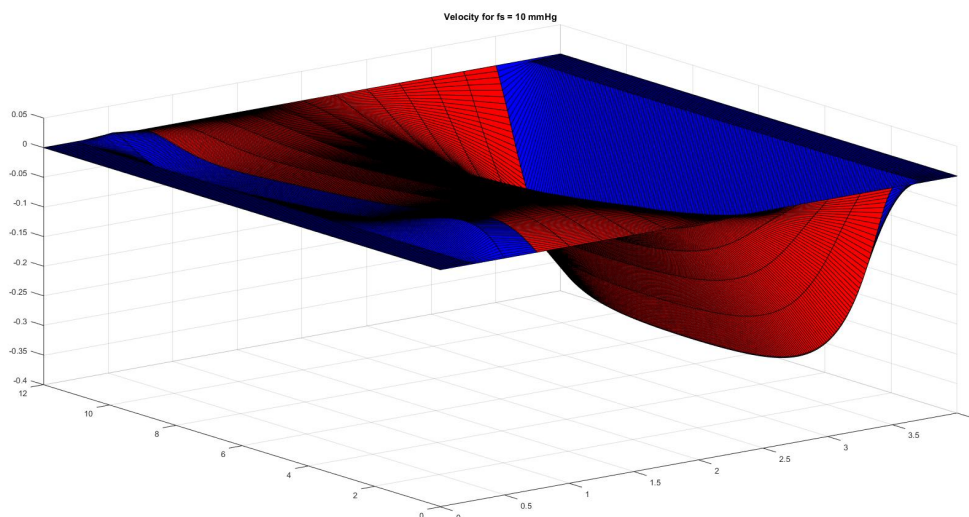


Figura 4.5: Profilul vitezei pentru $f_s = 10$ mm Hg.

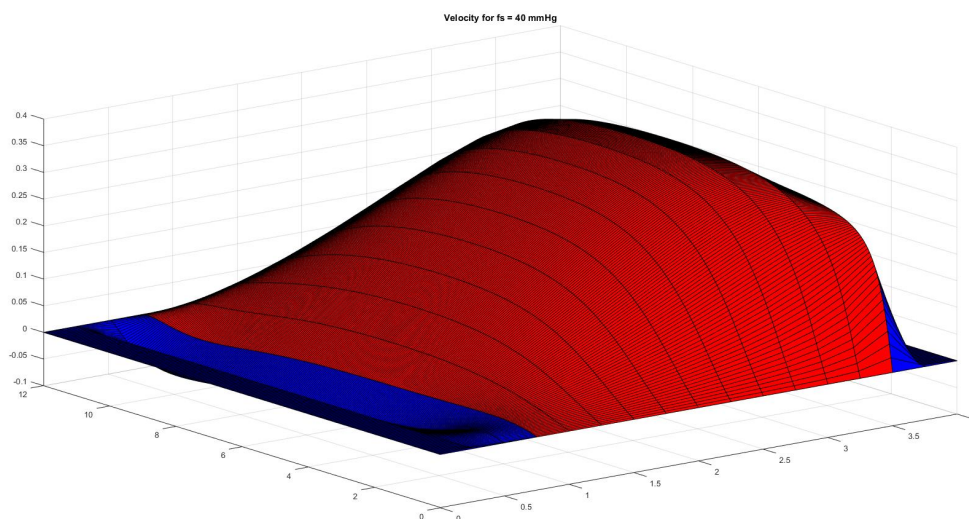


Figura 4.6: Profilul vitezei pentru $f_s = 40$ mm Hg.

Bibliografie

- [1] AlAmiri, A., Khanafer, K., Vafai, K., 2014. *Fluid-Structure Interactions in a Tissue during Hyperthermia*, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 66(1), 1–16, DOI: <https://doi.org/10.1080/10407782.2013.869080>.
- [2] Avalos, G., Lasiecka, I., Triggiani, R., 2010. *Higher Regularity of a Coupled Parabolic-Hyperbolic Fluid-Structure Interactive System*, Georgian Mathematical Journal, vol. 15, no. 3, pp. 403-437, DOI: <https://doi.org/10.1515/GMJ.2008.403>.
- [3] Avalos, G., Triggiani, R., 2007. *The coupled PDE system arising in fluid/structure interaction. I. Explicit semigroup generator and its spectral properties*, Fluids and Waves, Contemporary Mathematics, vol. 440 (American Mathematical Society, Providence, RI), pp. 15–54, DOI: [10.1090/conm/440/08475](https://doi.org/10.1090/conm/440/08475).
- [4] Avalos, G., Triggiani, R., 2009. *Semigroup well-posedness in the energy space of a parabolic-hyperbolic coupled Stokes-Lamé PDE system of fluid-structure interaction*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - S, 2009, 2(3): 417-447, DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2009.2.417>.
- [5] Avalos, G., Triggiani, R., 2013. *Fluid-structure interaction with and without internal dissipation of the structure: A contrast study in stability*, Evolution Equations and Control Theory, 2(4): 563-598, DOI: <https://doi.org/10.3934/eect.2013.2.563>.
- [6] Baksamawi, H. A., Ariane, M., Brill, A., Vigolo, D., Alexiadis, A., 2021. *Modelling Particle Agglomeration on through Elastic Valves under Flow*, ChemEngineering, 5(3), 40, DOI: <https://doi.org/10.3390/chemengineering5030040>.

-
- [7] Beneš, M., Pažanin, I., 2016. *Effective Flow of Incompressible Micropolar Fluid Through a System of Thin Pipes*, Acta Appl Math 143, 29–43, DOI: <https://doi.org/10.1007/s10440-015-0026-1>.
- [8] Bertoglio, C., Nolte, D., Panasenko, G., Pileckas, K., 2021. *Reconstruction of the Pressure in the Method of Asymptotic Partial Decomposition for the Flows in Tube Structures*, SIAM J. Appl. Math. 81(5), 2083–2110, DOI: <https://doi.org/10.1137/20M1388462>.
- [9] Bociu, L., Čanić, S., Muha, B., Webster, J.T., 2021. *Multilayered Poroelasticity Interacting with Stokes flow*, SIAM J. Math. Anal. 53, 6243–6279, DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2011.12602>.
- [10] Bodnár, T., Galdi, G.P., Nečasová, Š., 2014. *Fluid-Structure Interaction and Biomedical Applications*, Birkhäuser Basel, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0822-4>.
- [11] Braack, M., Richter, T., 2006. *Stabilized finite elements for 3D reactive flows*, Int. J. Numer. Math. Fluids 51, 981–999, DOI: <https://doi.org/10.1002/fld.1160>.
- [12] Brezis, H., 2011. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer New York, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7>.
- [13] Bukal, M., Muha, B., 2021. *Rigorous Derivation of a Linear Sixth-Order Thin-Film Equation as a Reduced Model for Thin Fluid-Thin Structure Interaction Problems*, Appl Math Optim 84, 2245–2288, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00245-020-09709-9>.
- [14] Bungartz, H.-J., Schäfer, M. (eds.), 2006. *Fluid-Structure Interaction. Modelling, Simulation, Optimisation*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol. 53, Springer, Berlin, DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-34596-5>.
- [15] Bungartz, H.-J., Mehl, M., Schäfer, M. (eds.), 2010. *Fluid-Structure Interaction II. Modelling, Simulation, Optimisation*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol. 73, Springer, Berlin, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14206-2>.

- [16] Carvalho, V., Lopes, D., Silva, J., Puga, H., Lima, R. A., Teixeira, J. C., Teixeira S., 2022. *Comparison of CFD and FSI Simulations of Blood Flow in Stenotic Coronary Arteries*, Applications of Computational Fluid Dynamics Simulation and Modeling, IntechOpen, DOI: <http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.102089>.
- [17] Céa, J., 1964. *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*, Annales de l'institut Fourier, tome 14, no. 2, p. 345-444.
- [18] Ciorogar, A., Stavre, R., 2023. *A Thermal Fluid–Structure Interaction Problem: Modeling, Variational and Numerical Analysis*, J. Math. Fluid Mech. 25, 37, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00021-023-00783-x>.
- [19] Crosetto, P., Reymond, P., Deparis, S., Kontaxakis, D., Stergiopulos, N., Quarteroni, A., 2011. *Fluid–structure interaction simulation of aortic blood flow*, Computers & Fluids 43(1), 46–57, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.11.032>.
- [20] Dahm, K. T., Myrhaug, H. T., Strømme, H., Fure, B., Brurberg, K. G., 2019. *Effects of preventive use of compression stockings for elderly with chronic venous insufficiency and swollen legs: a systematic review and meta-analysis*, BMC Geriatrics 19, 76, DOI: <https://doi.org/10.1186/s12877-019-1087-1>.
- [21] Deparis, S., Discacciati, M., Fouresey, G., Quarteroni, A., 2006. *Fluid–structure algorithms based on Steklov–Poincaré operators*, Computer Meth. Appl. Mech. Engng 195 (41-43), 5797-5812, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.09.029>.
- [22] Diwate, M., Tawade, J. V., Janthe, P. G., Garayev, M., El-Meligy, M., Kulkarni, N., Gupta, M., Khan, M. I., 2024. *Numerical solutions for unsteady laminar boundary layer flow and heat transfer over a horizontal sheet with radiation and nonuniform heat Source/Sink*, Journal of Radiation Research and Applied Sciences, 17(4), 101196, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jrras.2024.101196>.
- [23] Donea, J., Giuliani, S., Halleux, J. P., 1982. *An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 33(1-3), 689–723, DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90128-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90128-1).

-
- [24] Du, Q., Gunzburger, M. D., Hou, L. S., Lee, J., 2003. *Analysis of a linear fluid-structure interaction problem*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 9(3): 633-650, DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2003.9.633>.
- [25] Du, Q., Gunzburger, M. D., Hou, L. S., Lee, J., 2004. *Semidiscrete Finite Element Approximations of a Linear Fluid-Structure Interaction Problem*, SIAM J. Numer. Anal. 42(1), 1–29, DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036142903408654>.
- [26] Duvaut, G., Lions, J. L., 1976. *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag.
- [27] Failer, L., Meidner, D., Vexler, B., 2016. *Optimal Control of a Linear Unsteady Fluid–Structure Interaction Problem*, J. Optim. Theory Appl. 170(1), 1–27, DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-016-0930-1>.
- [28] Feppon, F., Allaire, G., Bordeu, F., Cortial, J., Dapegny, C., 2019. *Shape optimization of a coupled thermal fluid-structure problem in a level set mesh evolution framework*, SeMA 76, 413–458, DOI: <https://doi.org/10.1007/s40324-018-00185-4>.
- [29] Fernández, M. A., Gerbeau, J-F., Grandmont, C., 2007. *A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 69(4), 794-821, DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1792>.
- [30] Galdi, G. P., 1994. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, New York, Springer Verlag, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3866-7>.
- [31] Gataulin, Y. A., Yuxhnev, A. D., Rosukhovskiy, D. A., 2018. *Fluid–structure interactions modeling the venous valve*, Journal of Physics Conference Series, 1128(1): 012009, DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1128/1/012009>.
- [32] Girault, V., Raviart, P-A., 1979. *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, In: Dold, A., Eckmann, B. (eds) Lecture Notes in Mathematics, 749, Springer-Verlag.
- [33] Glowinski, R., 2008. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer.

- [34] Grandmont, C., Vergnet, F., 2021. *Existence for a Quasi-Static Interaction Problem Between a Viscous Fluid and an Active Structure*, J. Math. Fluid Mech. 23, 45, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00021-020-00552-0>.
- [35] Hajati, Z., Moghanlou, F. S., Vajdi, M., Razavi, S. E., Matin, S., 2020. *Fluid-structure interaction of blood flow around a vein valve*, Bioimpacts, 10(3): 169–175, DOI: <https://doi.org/10.34172/bi.2020.21>.
- [36] Hayashi, Y., Ikaga, T., Hoshi, T., Ando, S., 2016. *Effects of indoor air temperature on blood pressure among nursing home residents in Japan*, 7th International Conference on Energy and Environment of Residential Buildings, Brisbane, Australia, DOI: <https://doi.org/10.4225/50/581073d92fb10>.
- [37] Hillairet, M., Lequeurre, J., Grandmont, C., 2019. *Existence of local strong solutions to fluid-beam and fluid-rod interaction systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 36, no. 4, pp. 1105–1149, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2018.10.006>.
- [38] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., Ulbrich, S. (eds.), 2009. *Optimization with PDE Constraints*, Mathematical Modelling: Theory and Applications, vol. 23, Springer Dordrecht, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8839-1>.
- [39] Hirt, C. W., Amsden, A. A., Cook, J. L., 1974. *An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds*, J. Comput. Phys. 14(3), 227–253, DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(74\)90051-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(74)90051-5).
- [40] Hughes, T. J. R., Liu, W. K., Zimmermann, T. K., 1981. *Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 29(3), 329–349, DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(81\)90049-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(81)90049-9).
- [41] Juodagalvyte, R., Panasenko, G., Pileckas, K., 2021. *Steady-State Navier–Stokes Equations in Thin Tube Structure with the Bernoulli Pressure Inflow Boundary Conditions: Asymptotic Analysis*. Mathematics 9(19), 2433, DOI: <https://doi.org/10.3390/math9192433>.

- [42] Knight, S.L., Robertson, L., Stewart, M., 2021. *Graduated compression stockings for the initial treatment of varicose veins in people without venous ulceration*, Cochrane Database Syst Rev. 7(7):CD008819, DOI: [10.1002/14651858.CD008819.pub4](https://doi.org/10.1002/14651858.CD008819.pub4).
- [43] Kulkarni, N., Al-Dossari, M., Tawade, J., Alqahtani, A., Khan, M. I., Abdullaeva, B., Waqas, M., Khedher, N. B., 2024. *Thermoelectric energy harvesting from geothermal micro-seepage*, International Journal of Hydrogen Energy, 93, 925-936, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2024.10.400>.
- [44] Kunutsor, S. K., Powles, J. W., 2010. *The effect of ambient temperature on blood pressure in a rural West African adult population: a cross-sectional study*, Cardiovascular Journal of Africa 21(1), 17-20.
- [45] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., 1970. *Theory of Elasticity*, New York Pergamon Press.
- [46] Lim, C. S., Davies, A. H., 2014. *Graduated compression stockings*, CMAJ, 186(10):E391–E398, DOI: <https://doi.org/10.1503/cmaj.131281>.
- [47] Mácha, V., Muha, B., Nečasová, Š., Roy, A., Trifunović, S., 2022. *Existence of a weak solution to a nonlinear fluid-structure interaction problem with heat exchange*, Communications in Partial Differential Equations, 47(8), 1591–1635, DOI: <https://doi.org/10.1080/03605302.2022.2068425>.
- [48] Maity, D., Takahashi, T., 2021. *Existence and uniqueness of strong solutions for the system of interaction between a compressible Navier-Stokes-Fourier fluid and a damped plate equation*, Nonlinear Anal.: Real World Appl. 59, 103267, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103267>.
- [49] Meidner, D., 2008. *Adaptive Space-Time Finite Element Methods for Optimization Problems Governed by Nonlinear Parabolic Systems*, Ph.D. thesis, University of Heidelberg, DOI: <https://doi.org/10.11588/heidok.00008272>.
- [50] Mestre, S., Triboulet, J., Demattei, C., Veye, F., Nou, M., Pérez-Martin, A., Dauzat, M., Quéré, I., 2022. *Acute effects of graduated and progressive compression stockings on leg vein cross-sectional area and viscoelasticity in patients with chronic venous disease*, Journal of Vascular Surgery: Venous and Lymphatic Disorders, 10(1), 186-195.e25, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jvsv.2021.03.021>.

-
- [51] Muha, B., Čanić, S., 2016. *Existence of a weak solution to a fluid-elastic structure interaction problem with the Navier slip boundary condition*, Journal of Differential Equations, 260(12), 8550-8589, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.02.029>.
- [52] Panasenko, G. P., Stavre, R., 2020. *Viscous Fluid–Thin Elastic Plate Interaction: Asymptotic Analysis with Respect to the Rigidity and Density of the Plate*, Appl Math Optim 81, 141–194, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00245-018-9480-2>.
- [53] Panasenko, G. P., Stavre, R., 2020. *Three Dimensional Asymptotic Analysis of an Axisymmetric Flow in a Thin Tube with Thin Stiff Elastic Wall*, J. Math. Fluid Mech. 22, 20, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00021-020-0484-8>.
- [54] Panasenko, G., Stavre, R., 2010. *Asymptotic analysis of the Stokes flow with variable viscosity in a thin elastic channel*, Networks and Heterogeneous Media, 5(4): 783-812, DOI: <https://doi.org/10.3934/nhm.2010.5.783>.
- [55] Richter, T., 2017. *Fluid-structure Interactions, Models, Analysis and Finite Elements*. In: Barth, T. J., Griebel, M., Keyes, D. E., Nieminen, R. M., Roose, D., Schlick, T. (eds.) Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 118, Springer, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63970-3>.
- [56] Richter, T., Wick, T., 2013. *Optimal Control and Parameter Estimation for Stationary Fluid-Structure Interaction Problems*, SIAM J. Sci. Comput. 35(5), B1085–B1104, DOI: <https://doi.org/10.1137/120893239>.
- [57] San Martín, J. A., Starovoitov, V., Tucsnak, M., 2002. *Global Weak Solutions for the Two-Dimensional Motion of Several Rigid Bodies in an Incompressible Viscous Fluid*, Arch. Rational Mech. Anal. 161, 113–147, DOI: <https://doi.org/10.1007/s002050100172>.
- [58] Speziale, C. G., 2001. *On the coupled heat equation of linear thermoelasticity*, Acta Mechanica, 150, 121 - 126, DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01178549>.
- [59] Stavre, R., 2020. *Optimization of the blood pressure with the control in coefficients*, Evolution Equations and Control Theory, 9(1), 131-151, DOI: <https://doi.org/10.3934/eect.2020019>.

-
- [60] Stavre, R., 2016. *A boundary control problem for the blood flow in venous insufficiency. The general case*. Nonlin. Anal. Real World Appl. 29, 98-116, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2015.11.003>.
- [61] Stavre, R., Ciorogar, A., 2025. *Influence of a Given Field of Temperature on the Blood Pressure Variation: Variational Analysis, Numerical Algorithms and Simulations*, Axioms, 14(2), 88, DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms14020088>.
- [62] Temam, R., 1979. *Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis (Revised Edition)*, North-Holland Publishing Company.
- [63] Tröltzsch, F., 2005. *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen - Theorie, Verfahren und Anwendungen*, Vieweg, Wiesbaden, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-322-96844-9>.
- [64] Tröltzsch, F., 2010. *Optimal Control of Partial Differential Equations - Theory, Methods and Applications*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 112, American Mathematical Society, Providence, Translation of the second German edition by J. Sprekels, DOI: <https://doi.org/10.1090/gsm/112>.
- [65] Xu, D., Zhang, Y., Wang, B., Yang, H., Ban, J., Liu, F., Li, T., 2019. *Acute effects of temperature exposure on blood pressure: An hourly level panel study*, Environment International, 124, 493-500, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.envint.2019.01.045>.
- [66] Yang, Y., Jäger, W., Neuss-Radu, M., Richter, T., 2016. *Mathematical modeling and simulation of the evolution of plaques in blood vessels*, J. Math. Biol. 72, 973-996, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00285-015-0934-8>.
- [67] Zhang, Z., Yang, Z., Nie, H., Xu, L., Yue, J., Huang, Y., 2020. *A thermal stress analysis of fluid-structure interaction applied to boiler water wall*, Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering, 15(6), DOI: <https://doi.org/10.1002/apj.2537>.