ACADEMIA ROMÂNĂ

Şcoala de Studii Avansate a Academiei Române

Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Extreme value theory for branching processes

Extreme pentru procese de ramificare

Conducător de doctorat: **Prof. Dr. Lucian Beznea**

Doctorand: **Adela Pană (Popescu)**

2025

CUPRINS

PREZENTARE GENERALĂ

Acest rezumat extins (aproximativ zece pagini, fără cuprins și bibliografie) prezintă ideile, tehnicile și rezultatele centrale ale tezei *Teoria valorilor extreme pentru procese de ramificare*.

Un element central al tezei îl reprezintă un *principiu de transfer* și/sau o abordare de *teorie a potențialului* pe spații de configurații, care identifică legea procesului masei totale al unui model de ramificare spațial nelocal cu legea unui proces Galton–Watson (GW) pur, în timp continuu. Ca urmare, dicotomiile clasice de extincție/supraviețuire și teoremele malthusiene de creștere din teoria GW se transferă imediat la nivelul masei sistemului spațial.

În mod complementar, teza propune și discută unele aspecte ale imaginii EVT (teoria valorilor extreme) pentru maximele populațiilor ramificate, evidențiind modul în care comportamentul de coadă al distribuțiilor de descendenți determină limite de tip Gumbel sau Fréchet în regimuri supercritice, în timp ce maximele rămân p.s. finite în regimurile subcritice/critice.

1 CAPITOLUL 1 — INTRODUCERE

Motivație și scop

Procesele de ramificare modelează populații în care indivizii se reproduc independent conform unei legi comune. Lanțurile GW clasice descriu generații discrete; analogiile în timp continuu permit indivizilor să se reproducă după durate de viață distribuite exponențial. Teza ridică procesul masei $|X_t|$ la rangul de obiect principal: chiar și atunci când particulele se mișcă în spațiu și ramificarea este nelocală (descendenții pot fi creați în locații spațiale diferite), numărul total de particule poate fi adesea descris prin dinamici de joasă dimensiune, tratabile analitic.

Obiective și întrebări directoare

Lucrarea abordează trei întrebări:

- **(Identificare)** Când se comportă masa totală a unui proces de ramificare spațial/nelocal exact ca un proces GW pur?
- **(Metodologie)** Care structuri analitice (semigrupuri, rezolvente, teorie a potențialului) permit trecerea de la dinamica pe spațiul de configurații la dinamica unidimensională a masei?
- **(Extreme)** Cum evoluează maximele mărimii populației și ce domenii de atracție din teoria valorilor extreme apar în contextul ramificării?

Contribuții pe scurt

Teza demonstrează o echivalență în lege între procesul masei pentru o clasă de modele de ramificare spațială nelocală și un proces GW în timp continuu, printr-o întrețesere la nivel de generator (*principiul de transfer*). De asemenea, formulează un program EVT pe regimuri pentru maxime în ramificare, clarificând normalizările și legilelimită bazate pe cozi în regimurile supercritice.

2 CAPITOLUL 2 — NOȚIUNI DE BAZĂ DESPRE PROCESE DE RAMIFICARE

GW în timp discret: regimuri, funcții generatoare, extincție

Fie $(Z_n)_{n\geq 0}$ un proces GW pornit din $Z_0 \in \mathbb{N}$, cu descendenți i.i.d. ξ și funcția generatoare $G(s) = \mathbb{E}[s^{\xi}]$. Recursia de bază

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i}, \qquad n \geq 0,$$

conduce la trihotomia binecunoscută în funcție de $m = \mathbb{E}[\xi]$:

- **Subcritic $m < 1$:** extincția are loc p.s.; $\mathbb{P}(Z_n \to 0) = 1$.
- **Critic** $m = 1$ (cu $\mathrm{Var}(\xi) > 0$): extincție p.s., însă cu cozi grele pentru timpul de extincție.
- **Supercritic $m > 1$:** supraviețuire cu probabilitate pozitivă $1 - q$, unde q este cea mai mică rădăcină a ecuației $G(s) = s$ în $[0, 1]$.

În cazul supercritic, $W_n := Z_n/m^n$ este o martingală nenegativă care converge p.s. la W, o variabilă aleatoare cheie pentru creștere și extreme.

Ramificare în timp continuu și scalare malthusiană

În timp continuu, fiecare individ trăiește un timp exponențial (rata $a > 0$) înainte de reproducere, cu aceeași lege a descendenților. Parametrul malthusian $\alpha = a(m - 1)$ dă normalizarea $W(t) = Z(t)e^{-\alpha t} \to W$ p.s. Multe proprietăți fine (de ex., convergența în L^1, nedegenerarea lui W) depind de ipoteze de moment asupra lui ξ.

Spații de configurații și multiplicativitate

Pentru a conecta modelele spațiale cu dinamica scalară a masei, se folosește spațiul de configurații $\mathcal{E}$ al măsurilor de puncte finite pe un spațiu Lusin E (incluzând măsura nulă). Funcționalele multiplicative pe $\mathcal{E}$—cele care satisfac $F(\mu + \nu) = F(\mu)F(\nu)$—caracterizează proprietatea de ramificare și conduc la formule explicite pentru nucleele de tranziție. Aplicația de masă $\mu \mapsto \langle \mu, 1 \rangle$ oferă o proiecție canonică pe $\mathbb{N}$ (sau $\mathbb{R}_+$ în cadre măsurăvaloare).

Semigrupuri de contracții și generatori

Analitic, capitolul trece în revistă semigrupurile C_0 $(T_t)_{t\geq 0}$ pe spații Banach, generatorii lor L și familia rezolventă $R_\lambda = (\lambda - L)^{-1}$. Aceste obiecte apar de două ori: (i) ca instrumente de operatori liniari pentru ecuații de evoluție asociate ramificării; și (ii) ca semigrupuri probabiliste ale proceselor Markov, prin teoremele Hille–Yosida/Phillips.

3 CAPITOLUL 3 — PROCESE DE RAMIFICARE GENERALE

Teorie a potențialului pentru procese drepte

Pe un spațiu măsurabil/Lusin E, fie $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proces Markov drept cu semigrup de tranziție $(T_t f)(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$. Rezolvanta

$$(U_\alpha f)(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f(x)\, dt$$

definește conul funcțiilor U-excesive (limite ale $\alpha U_\alpha f$ când $\alpha \to \infty$) și induce topologia fină, cea mai grosieră care face toate funcțiile excesive continue. Aceste noțiuni permit argumente subtile de măsurabilitate și margine, esențiale pentru nuclee de ramificare și fenomene de absorbție.

Ramificare nelocală pe configurații finite

Pe spațiul de configurații $\mathcal{E}$, un mecanism de ramificare nelocal permite plasarea descendenților în locații spațiale aleatoare conform unui nucleu. Capitolul dezvoltă:

- construcția procesului prin funcționale multiplicative și nuclee de ramificare;
- analiza mulțimilor absorbante (de ex., extincția) și a claselor invariabile;
- exemple, incluzând mișcarea spațială trivială (ramificare pură) și mecanisme spațial constante.

Ramificare cu stare continuă și masa totală

Când limite de scalare duc de la mase cu valori în $\mathbb{N}$ la mase cu valori în $\mathbb{R}_+$, se obțin procese de ramificare cu stare continuă (CB), cu exponenți Laplace ce rezolvă ecuații Riccati generalizate. Pentru mecanisme spațial constante, masa totală $|X_t|$ are legea unui proces de ramificare pur (GW sau CB, după caz). În particular, extincția/supraviețuirea și creșterea lui $|X_t|$ sunt guvernate de media m și mecanismul de ramificare asociat.

4 CAPITOLUL 4 — O A DOUA ABORDARE A PROCESULUI DE MASĂ

Enunțul rezultatului principal (informal)

Considerăm un proces de ramificare spațial, nelocal $(X_t)_{t\geq 0}$ pe E ale cărui operatori de tranziție (P_t) formează un semigrup C_0 pe un spațiu de funcții adecvat și interacționează multiplicativ cu observabilele de configurație. Atunci procesul de masă totală

$$M_t := |X_t| = \langle X_t, 1\rangle \in \mathbb{N}$$

este un proces Galton–Watson pur în timp continuu, cu legea descendenților determinată de mecanismul local de ramificare. În consecință:

- probabilitatea de extincție a lui M_t este rădăcina q a ecuației $G(s) = s$;
- dacă $m > 1$ atunci $e^{-\alpha t} M_t \to W$ p.s., unde α este rata malthusiană și W este aceeași martingală limită ca în GW corespunzător;
- criteriile și bornele de coadă din teoria GW se transferă imediat la M_t.

Principiul de transfer (întrețesere de generatori)

Demonstrația se centrează pe o întrețesere între generatori pe clase de funcții stabile la ridicări multiplicative. Schematic,

$$L(F \circ \Phi) = (KF) \circ \Phi, \qquad \Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{N},\ \Phi(\mu) = \langle \mu, 1\rangle,$$

unde L este generatorul pentru (X_t) iar K este generatorul GW pe $\mathbb{N}$. Când (P_t) este un semigrup C_0 și problema Cauchy $u'(t) = Lu(t)$ este bine pusă pe miezul ales, procesul imagine $M_t = \Phi(X_t)$ este Markov cu semigrup generat de K. Acest principiu de transfer ocolește construcțiile grele pe traiectorii și produce direct legea lui M_t din relații la nivel de operatori.

Ipoteze, domeniu de aplicare și exemple

Proprietatea C_0 asigură continuitatea puternică necesară pentru calculul cu generatori și unicitate. Exemple tipice includ ramificare cu mișcare spațială trivială (ramificare pură), mecanisme spațial constante și anumite sărituri-difuzii în care mișcarea spațială și nucleul de ramificare satisfac condiții de regularitate ce fac miezurile multiplicative dense. Capitolul discută și cum idei similare se extind, cu atenție, la superprocese măsurăvaloare.

Extensii și o cale prin spațiul Schwartz

Pentru a lărgi aplicabilitatea, teza explorează semigrupuri pe spațiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ și dualul său, ilustrând cum generatori PDE clasici (de ex., Laplacianul) se încadrează în tablou și cum tehnicile de linearizare pot trata anumite semigrupuri neliniare. Aceasta deschide o cale către spații de stare infinite-dimensionale și mișcări mai generale.

5 CAPITOLUL 5 — VALORI EXTREME ÎN PROCESE DE RAMIFICARE

Configurația și cantitățile de interes

Fie (Z_n) un lanț GW în timp discret și $Z(t)$ omologul său în timp continuu. Definim maximele curente

$$M_n = \max_{0 \le k \le n} Z_k, \qquad M(t) = \sup_{0 \le s \le t} Z(s).$$

Capitolul discută aspecte legate de M_n, respectiv $M(t)$ și legilelimită ale acestora în diverse regimuri.

Regimuri subcritice și critice

Când $m \le 1$, extincția are loc p.s.; în consecință, M_n și $M(t)$ sunt p.s. finite. Accentul cade astfel pe borne distribuționale pentru M_n și coada timpului de extincție, mai degrabă decât pe limite EVT clasice (care vizează maxime nelegate superior).

Timp continuu și paralele

Același tablou calitativ se păstrează în timp continuu, cu rata malthusiană α jucând rolul lui $\log m$. Normalizările moștenesc W din convergența $Z(t)e^{-\alpha t} \to W$, iar clasificarea domeniilor de atracție oglindește cazul în timp discret.

Tehnici

Dincolo de funcțiile generatoare și EVT clasică (Fisher–Tippett–Gnedenko), capitolul folosește tehnici de martingală, argumente de tip reînnoire și principii de comparație (de ex., încadrând M_n între transformări monotone ale lui Z_n). Analiza clarifică de asemenea când limitele de tip Weibull sunt irelevante pentru maximele populațiilor.

OBSERVAȚII FINALE

Teza dezvoltă un program operatorteoretic coerent pentru sisteme de ramificare: identifică procesul de masă prin întrețesere de generatori sub ipoteze C_0 și analizează extremele importând EVT, cu atenție la scalarea aleatoare intrinsecă ramificării. Metodologic, lucrarea arată cum teoria potențialului (funcții excesive, topologie fină), semigrupurile/generatorii și structurile multiplicative pe spații de configurații pot fi combinate pentru a deduce legi unidimensionale din modele de particule de înaltă dimensiune. Substanțial, ea arată că o largă clasă de modele de ramificare spațiale/nelocale moștenesc legi GW la nivelul masei totale și sistematizează comportamentul de valori extreme al maximelor acestora pe regimuri și clase de cozi.

BIBLIOGRAFIE

1. Krishna B. Athreya and Nayile Kaplan. Convergence of the age distribution in the one-dimensional supercritical age-dependent branching process. *The Annals of Probability*, pages 38–50, 1976.

2. Krishna B. Athreya and Peter E. Ney. *Branching Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

3. Viorel Barbu and Lucian Beznea. Measure-valued branching processes associated with Neumann nonlinear semiflows. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 441(1):167–182, 2016.

4. Jean Bertoin and Benjamin Böttcher. Potential theory for branching Markov processes. *Electronic Journal of Probability*, 9:1–28, 2004.

5. Lucian Beznea. Lecture notes on Branching processes. Unpublished.

6. Lucian Beznea. Potential theoretical methods in the construction of measure-valued branching processes. *Journal of the European Mathematical Society*, 13:685–707, 2011.

7. Lucian Beznea, Mounir Bezzarga, and Iulian Cimpean. Continuous flows driving Markov processes and multiplicative L^p-semigroups. arXiv:2411.09407, 2024.

8. Lucian Beznea and Nicu Boboc. *Potential Theory and Right Processes*, volume 1729 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 2004.

9. Lucian Beznea, Ana-Maria Boeangiu, and Oana Lupașcu-Stamate. Doob's h-transform and nonlocal branching processes. *Analysis Mathematica*, 10:47, 2020.

10. Lucian Beznea, L. I. Ignat, and J. D. Rossi. From Gaussian estimates for nonlinear evolution equations to the long time behavior of branching processes. *Revista Matemática Iberoamericana*, 35:823–846, 2019.

11. Lucian Beznea and Oana Lupașcu. Measure-valued discrete branching Markov processes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 368:5153–5176, 2016.

12. Lucian Beznea, Oana Lupașcu, and Andrei-George Oprina. Complex analysis and potential theory. *CRM Proceedings and Lecture Notes*, 55:47–59, 2012.

13. Lucian Beznea, Oana Lupașcu-Stamate, and Alexandra Teodor. Nonlinear Dirichlet problem of non-local branching processes. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 129281, 2025.

14. Lucian Beznea, Oana Lupașcu-Stamate, and Cătălin Ioan Vrabie. Stochastic solutions to evolution equations of non-local branching processes. *Nonlinear Analysis*, 200:112021, 2020.

15. Lucian Beznea and A.-G. Oprina. Nonlinear PDEs and measure-valued branching type processes. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 384:16–32, 2011.

16. Lucian Beznea and Cătălin Ioan Vrabie. Continuous flows driving branching processes and their nonlinear evolution equations. *Advances in Nonlinear Analysis*, 11:921–936, 2022.

17. J. D. Biggins. Uniform convergence of martingales in the branching random walk. *The Annals of Probability*, 20(1):137–151, 1992.

18. Ana-Maria Boeangiu and Adela Popescu. Pure branching and total mass process. *Proceedings of the Romanian Academy*, 2025.

19. H. Cohn and A. G. Pakes. On the ratio of the maximum and the final size of a subcritical branching process. *Journal of Applied Probability*, 15(1):43–51, 1978.

20. Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, volume 44 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1992.

21. Daryl J. Daley and David Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume I*. Springer, 2nd edition, 2003.

22. P. L. Davies. The simple branching process: A note on the maximum size. *Journal of Applied Probability*, 15(3):466–480, 1978.

23. Donald A. Dawson. Measure-valued Markov processes. *Lecture Notes in Mathematics* 1541, 1–260, 1993.

24. J.-F. Delmas and B. Jourdain. *Modèles Aléatoires: Applications aux Sciences de l'Ingénieur et du Vivant*, volume 57 of Mathématiques & Applications. Springer, 2006.

25. E. B. Dynkin. *Markov Processes*, Vol. I–II. Springer, Berlin, 1965.

26. Eugene B. Dynkin. *Superdiffusions and Positive Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2004.

27. Evgenii B. Dynkin. *Markov Processes*. Springer, 1965.

28. Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, volume 194 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.

29. Alison Etheridge. *An Introduction to Superprocesses*, volume 20. American Mathematical Society, 2000.

30. S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. John Wiley & Sons, 1986.

31. Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2nd edition, 2010.

32. Patsy Haccou, Peter Jagers, and Vladimir Vatutin. *Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations*. Cambridge University Press, 2005.

33. T. E. Harris. *The Theory of Branching Processes*, volume 119 of Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer, 1963.

34. N. Ikeda, M. Nagasawa, and S. Watanabe. Branching Markov processes I. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 8(2):233–278, 1968.

35. Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, 2nd edition, 2002.

36. Olav Kallenberg. *Random Measures, Theory and Applications*, volume 77 of Probability Theory and Stochastic Modelling. Springer, 2017.

37. Marek Kimmel and David E. Axelrod. *Branching Processes in Biology*, volume 19 of Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 2nd edition, 2015.

38. Y. Kondratiev and Y. Kozitsky. The evolution of states in a spatial population model. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 30:135–173, 2018.

39. Yuri Kozitsky and Agnieszka Tanaś. Evolution of states of an infinite particle system with nonlocal branching. *Journal of Evolution Equations*, 22(1):7, 2022.

40. Jean-François Le Gall. *Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations*. Birkhäuser.

41. Z. Li. *Measure-Valued Branching Markov Processes*. Springer, 2nd edition, 2022.

42. Zenghu Li. *Measure-Valued Branching Processes*. Springer, 2011.

43. A. G. Pakes. Limit theorems for the simple branching process allowing immigration, I: the subcritical case. *Advances in Applied Probability*, 8(1):31–50, 1976.

44. A. G. Pakes. Some limit theorems for the maximum of a critical Galton–Watson process. *Journal of Applied Probability*, 13(1):115–125, 1976.

45. Amnon Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44 of Applied Mathematical Sciences. Springer, 1983.

46. Adela Popescu. The mass process for continuous spatial Galton–Watson non-local branching processes. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, 68 (116), no. 2, 2025.

47. Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw–Hill, 2nd edition, 1991.

48. Michael Sharpe. *General Theory of Markov Processes*, volume 133 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1988.

49. Kōsaku Yosida. *Functional Analysis*, volume 123. Springer Science & Business Media, 2012.