SINTEZA LUCRARII

Cristian Bereanu

1 Introducere

In ceea ce va urma vom face o sinteza a rezultatelor obtinute in anul 2010.

Dorim sa mentionam faptul ca articolele trimise spre publicare in 2009 au fost publicate astfel:

1. C. Bereanu, P. Jebelean and J. Mawhin, *Radial solutions for Neumann problems involving mean curvature operators in Euclidean and Minkowsi spaces*, **Math. Nachr.**, 283 (2010), 379-391. (ISI galben)
2. C. Bereanu, P. Jebelean and J. Mawhin, *Periodic Solutions of Pendulum-Like Perturbations of Singular and Bounded ϕ-Laplacians* , **J. Dynamics Differential Equations**, 22 (2010), 463-471. (ISI rosu)

Articolul 2. de mai sus este citat in lucrarile:
• H. Brezis and J. Mawhin, *Periodic solutions of the forced relativistic pendulum*, **Differential Integral Equations**, 23 (2010), 801-810.
• F. Obersnel, and P. Omari, *Multiple bounded variation solutions of a periodically perturbed sine-curvature equation*, preprint.

Articolul 1. joaca un rol esential in articolele 3., 5., 6. si 7.

In 2010 am publicat sau am trimis spre publicare urmatoarele lucrari:

3. C. Bereanu, P. Jebelean and J. Mawhin, *Radial solutions for Neumann problems with ϕ-Laplacians and pendulum-like nonlinearities*, **Discrete Contin. Dynam. Systems A**, 28 (2010), 637-648. (ISI rosu)
4. C. Bereanu, and D. Gheorghe, *Topological methods for boundary value problems involving discrete vector ϕ-Laplacians*, **Topological Methods Nonlinear Analysis**, to appear. (ISI rosu)
5. C. Bereanu, P. Jebelean, and J. Mawhin, *Radial solutions for Neumann problems involving mean extrinsic curvature and periodic nonlinearities*, **Calculus of Variations P.D.E.**, submitted. (ISI rosu)
6. C. Bereanu, P. Jebelean, and J. Mawhin, *Variational methods for nonlinear perturbations of singular ϕ-Laplacians*, **Rendiconti Lincei Mat. Appl.**, submitted. (ISI)
7. C. Bereanu, and P.J. Torres, *Existence of at least two periodic solutions of the forced relativistic pendulum*, **Proc. Amer. Math. Soc.**, submitted. (ISI galben)

2 Descrierea rezultatelor din [3. Introducere]

Rezultatele obtinute in acest articol se incadreaza in temele “Perturbatii neliniare ale operatorului curburii in spatii Minkowski si euclidiene” si “Imaginea pendulului fortat relativist” din proiectul initial.

In [2] am initiat studiul problemei Neumann

$$[r^{N-1}\phi(u')]' = r^{N-1}g(r,u), \quad u'(R_1) = 0 = u'(R_2), \tag{1}$$

unde $N \geq 1$ este un intreg, $0 \leq R_1 < R_2$, $g : [R_1, R_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie continua si $\phi : (-a, a) \to \mathbb{R}$ $(0 < a < \infty)$ este un homeomorfism cu $\phi(0) = 0$. In particular, luand $\phi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$, solutiile pentru (1) genereaza solutii radiale clasice pentru

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 - |\nabla v|^2}}\right) = g(|x|, v) \quad \text{in} \quad \mathcal{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\mathcal{A},$$

unde $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : R_1 \leq |x| \leq R_2\}$.

Fie $\mu \neq 0$ si $l : [R_1, R_2] \to \mathbb{R}$ o functie continua. In [[4], Corolarul 1] aratam, utilizand gradul Leray-Schauder, ca problema

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 - |\nabla v|^2}}\right) + \mu \sin v = l(|x|), \quad \text{in} \quad \mathcal{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{A}, \tag{2}$$

admite cel putin doua solutii radiale clasice ce nu difera printr-un multiplu de 2π daca

$$2(R_2 - R_1) < \pi$$

si

$$\left|\frac{N}{R_2^N - R_1^N}\int_{R_1}^{R_2} r^{N-1} l(r)dr\right| < \mu \cos(R_2 - R_1).$$

In plus, daca

$$2(R_2 - R_1) = \pi,$$

problema (2) admite cel putin o solutie radiala clasica atunci cand

$$\int_{R_1}^{R_2} r^{N-1} l(r)dr = 0. \tag{3}$$

Remarcam faptul ca in [[2], Teorema 5.1] am aratat ca (2) admite cel putin o solutie radiala clasica daca $2(R_2 - R_1) \leq 1$ si are loc (3).

Pe de alta parte, pentru p-Laplacian, aratam in [[4], Corolarul 2] ca problema

$$\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + \mu \sin v = l(|x|), \quad \text{in} \quad \mathcal{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{A}, \tag{4}$$

admite cel putin doua solutii radiale clasice ce nu difera printr-un multiplu de 2π daca are loc (3) si R_2 este suficient de mic (sau N este suficient de mare). In plus, acelasi tip de rezultat este valabil si pentru problema Neumann ce contine operatorul curburii in spatiul euclidian

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}\right) + \mu \sin v = l(|x|), \quad \text{in} \quad \mathcal{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{A}. \tag{5}$$

In cazul in care

$$R_1 > 0$$

(adica $\mathcal{A}$ este o coroana circulara), utilizand gradul Leray-Schauder si metoda sub si supra solutiilor din [2], aratam ca problemele (2) si (4) admit cel putin doua solutii radiale clasice ce nu difera printr-un multiplu de 2π daca $||l||_\infty < \mu$ si cel putin o solutie daca $||l||_\infty = \mu$. Daca, in plus, $2\pi R_2 < N$, atunci aratam ca acelasi tip de rezultat este valabil pentru problema (5).

Rezultatele corespunzatoare pentru cazul periodic si $N = 1$ au fost demonstrate in [3].

3 Descrierea rezultatelor din [5. Introducere]

Rezultatele obtinute in acest articol se incadreaza in temele "Perturbatii neliniare ale operatorului curburii in spatii Minkowski si euclidiene" si "Imaginea pendulului fortat relativist" din proiectul initial.

Motivati de rezultatele noastre din [3], Brezis si Mawhin demonstreaza in [10] ca ecuatia pendului fortat relativist

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}\right)' + \mu \sin u = h(t), \quad u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T), \tag{6}$$

admite cel putin o solutie pentru orice $\mu \neq 0$ si orice functie continua $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ cu $\int_0^T h(t)dt = 0$. Astfel, rezultatul clasic al lui Hamel [14] (a se vedea si [11, 20]) privind problema periodica

$$u'' + \mu \sin u = h(t), \quad u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T),$$

este demonstrat si in cazul relativist. Subliniem ca, in demonstratia rezultatului de mai sus se foloseste esential unul din rezultatele noastre din [7].

In [6], urmand tehnica initiata de Brezis si Mawhin, am aratat ca problema (2) admite cel putin o solutie daca are loc (3). Am utilizat in mod esential unele rezultate din [2].

4 Descrierea rezultatelor din [6. Introducere]

Rezultatele din acest articol se incadreaza in temele "Perturbatii neliniare ale operatorului curburii in spatii Minkowski si euclidiene" si "Imaginea pendulului fortat relativist" din proiectul initial.

Inspirati de rezultatele din [10], in articolul [5] am continuat studiul problemei Neumann (1) initiat in [2], dar utilizand de aceasta data in locul gradului Leray-Schauder, teoria punctului critic in sensul lui Szulkin [19].

Deoarece suntem intr-un context variational, ca in [10], consideram $\phi := \Phi' : (-a, a) \to \mathbb{R}$ ca fiind homeomorfism crescator cu $\phi(0) = 0$ si functia continua $\Phi : [-a, a] \to \mathbb{R}$ este de clasa C^1 pe $(-a, a)$, $\Phi(0) = 0$. Observatia "cheie" din lucrare este urmatoarea: daca u este punct critic in sensul Szulkin al functionalei $I : C[R_1, R_2] \to (-\infty, +\infty]$ definite prin

$$I(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} r^{N-1}\Phi(u')\,dr + \int_{R_1}^{R_2} r^{N-1}G(r,u)\,dr, \text{ daca } u \in K, \\ +\infty, \text{ altfel,} \end{cases}$$

unde $G : [R_1, R_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este primitiva lui g in raport cu a doua variabila si $K = \{u \in W^{1,\infty}[R_1, R_2] : |u'| \leq a \ \text{ a.p.t. pe } [R_1, R_2]\}$, atunci u este solutie pentru (1). Functionala I are structura ceruta de teoria dezvoltata in [19], adica, este suma dintre o functionala proprie, convexa, inferior semicontinua si una de clasa C^1. In acest context, un punct critic pentru I inseamna o functie $u \in K$ astfel incat

$$\int_{R_1}^{R_2} r^{N-1}[\Phi(v') - \Phi(u')]\, dr + \int_{R_1}^{R_2} r^{N-1} g(r, u)(v - u)\, dr \geq 0 \qquad \text{pentru orice } v \in K.$$

In Sectiunea 3 a articolului consideram probleme de minimizare in care utilizam urmatorul rezultat: daca exista $\rho > 0$ astfel incat

$$\inf \left\{ I(u) : u \in K, \left| \int_{R_1}^{R_2} r^{N-1} u\, dr \right| \leq \rho \right\} = \inf_K I,$$

atunci I este marginita inferior si isi atinge minimul intr-un u care este solutie pentru (1). Teorema principala din [6] este o consecinta imediata a acestui rezultat. Pe de alta parte, daca g satisface

$$\liminf_{|x| \to \infty} G(r, x) > 0, \qquad \text{uniform in } r \in [R_1, R_2],$$

atunci (1) are cel putin o solutie u ce minimizeaza I pe C. Aceeasi concluzie ramane valabila daca

$$\exists m \geq 1 : \quad \liminf_{|x| \to \infty} \frac{mG(r, x)}{|x|^m} > 0, \quad \text{uniform in } r \in [R_1, R_2],$$

sau

$$g \quad \text{marginita si} \quad \lim_{|x| \to \infty} \int_{R_1}^{R_2} r^{N-1} G(r, x)\, dr = +\infty.$$

Pe de alta parte, daca $G(r, \cdot)$ este convexa pentru orice $r \in [R_1, R_2]$, atunci (1) are cel putin o solutie daca si numai daca functia

$$x \mapsto \int_{R_1}^{R_2} r^{N-1} g(r, x)\, dr$$

se anuleaza cel putin o data.

In Sectiunea 4 a articolului aratam, utilizand "Saddle Point Theorem", ca (1) are cel putin o solutie daca

$$g \quad \text{marginita si} \quad \lim_{|x| \to \infty} \int_{R_1}^{R_2} r^{N-1} G(r, x)\, dr = -\infty.$$

Concluzia ramane valabila si pentru g nemarginita, dar in acest caz g trebuie sa satisfaca ipoteza

$$\lim_{|x| \to \infty} G(r, x) = -\infty, \qquad \text{uniform in } r \in [R_1, R_2].$$

In Sectiunea 5 consideram problema

$$[r^{N-1}\phi(u')]' = r^{N-1}[\lambda |u|^{m-2} u - f(r, u)], \quad u'(R_1) = 0 = u'(R_2), \tag{7}$$

unde $\lambda > 0$ si $m \geq 2$ sunt numere reale fixate si $f : [R_1, R_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie continua ce satisface conditia clasica Ambrosetti –Rabinowitz: exista $\theta > m$ si $x_0 > 0$ astfel incat

$$0 < \theta F(r, x) \leq x f(r, x) \quad \text{pentru orice } r \in [R_1, R_2] \text{ si } \quad |x| \geq x_0.$$

Presupunem deasemeni ca

$$\limsup_{|x| \to 0} \frac{mF(r, x)}{|x|^m} < \lambda \quad \text{uniform in } r \in [R_1, R_2].$$

Daca ipotezele de mai sus sunt satisfacute, atunci utilizand "Mountain Pass Theorem" aratam ca problema (7) are cel putin o solutie u.

In ultima sectiune a lucrarii aratam ca rezultatele de mai sus functioneaza si pentru problema periodica

$$[\phi(u')]' = g(r, u), \quad u(R_1) - u(R_2) = 0 = u'(R_1) - u'(R_2).$$

5 Descrierea rezultatelor din [7. Introducere]

Rezultatele din acest articol se incadreaza in temele "Perturbatii neliniare ale operatorului curburii in spatii Minkowski si euclidiene" si "Imaginea pendulului fortat relativist" din proiectul initial.

In acest articol aratam ca problema (6) admite cel putin doua solutii ce nu difera printr-un multiplu de 2π pentru orice $\mu \neq 0$ si orice functie continua $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ cu $\int_0^T h(t)dt = 0$. Astfel, generalizam in mod substantial rezultatul Brezis-Mawhin [10] si aratam ca rezultatul Mawhin-Willem [16] ramane valabil si in cadrul relativist.

Am folosit in mod esential rezultatele noastre impreuna cu Jebelean si Mawhin [5]. Mentionam faptul ca tehnica initiata de Mawhin si Williem [16] a fost formultata intr-un context general in [18, 13], iar varianta neneteda a rezultatului din [13] a fost obtinuta in [15] in prezenta reflexivitatii spatiului functional. Deoarece spatiul functional folosit de noi pentru tratarea acestei probleme nu este reflexiv, am folosit o strategie diferita de cea adoptata in [16].

6 Descrierea rezultatelor din [4. Introducere]

Rezultatele din acest articol se incadreaza in tema "Ecuatii cu diferente asociate unor probleme neliniare" din proiectul initial.

In acest articol, utilizand gradul Brouwer, demonstram unele rezultate de existenta pentru ecuatii cu diferente de tipul

$$-\nabla[\phi(\Delta x_m)] = g_m(x_m, \Delta x_m) \quad (1 \leq m \leq n-1),$$

cu conditiile la limita Dirichlet, Neumann sau periodica, unde $\phi(x) = |x|^{p-2}x$ $(p > 1)$ sau $\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1-|x|^2}}$, si $g_m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ $(1 \leq m \leq n-1)$ sunt neliniaritati continue satisfacand diferite ipoteze naturale.

In cazul in care $\phi(x) = |x|^{p-2}x$ $(p > 1)$, rezultatele noastre sunt variante discrete ane unor rezultate din [12] iar in cazul $\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1-|x|^2}}$, am obtinut variante discrete ale unor rezultate din [8].

7 Observatii finale

Rezultatele de mai sus au fost prezentate cu ocazia participarii noastre la conferintele din Franta si Cehia, cit si cu ocazia vizitelor de lucru din Spania si Timisoara. O buna parte din aceste rezultate au fost prezentate si de catre profesorii Jebelean si Mawhin cu ocazia participarii ca invitati principali la diferite conferinte internationale.

Academician dr. Jean Mawhin a vizitat IMAR Bucuresti in cadrul colaborarii noastre si a fost sustinut financiar din bugetul grantului nostru RP 3 - 1/2008. Cu aceasta ocazie a sustinut si conferinta “Variational methods for the forced pendulum equation: fron classical to relativistic”.

References

[1] C. Bereanu, and D. Gheorghe, Topological methods for boundary value problems involving discrete vector ϕ-Laplacians, Topological Methods Nonlinear Analysis, to appear.

[2] C. Bereanu, P. Jebelean, and J. Mawhin, Radial solutions for Neumann problems involving mean curvature operators in Euclidean and Minkowsi spaces, Math. Nachr. 283 (2010), 379-391.

[3] C. Bereanu, P. Jebelean and J. Mawhin, Periodic Solutions of Pendulum-Like Perturbations of Singular and Bounded ϕ-Laplacians, J. Dynamics Differential Equations 22 (2010), 463-471.

[4] C. Bereanu, P. Jebelean and J. Mawhin, Radial solutions for Neumann problems with ϕ-Laplacians and pendulum-like nonlinearities, Discrete Contin. Dynam. Systems A 28 (2010), 637-648.

[5] C. Bereanu, P. Jebelean, and J. Mawhin, Variational methods for nonlinear perturbations of singular ϕ-Laplacians, preprint.

[6] C. Bereanu, P. Jebelean, and J. Mawhin, Radial solutions of Neumann problems involving mean extrinsic curvature and periodic nonlinearities, preprint.

[7] C. Bereanu, and J. Mawhin, Existence and multiplicity results for some nonlinear problems with singular ϕ-Laplacian, J. Differential Equations 243 (2007), 536-557.

[8] C. Bereanu, and J. Mawhin, Boundary value problems for some nonlinear systems with singular ϕ-laplacian, J. Fixed Point Theory Appl. 4 (2008), 57-75.

[9] C. Bereanu, and P.J. Torres, Existence of at least two periodic solutions of the forced relativistic pendulum, preprint.

[10] H. Brezis, and J. Mawhin, Periodic solutions of the forced relativistic pendulum, Differential Integral Equations 23 (2010), 801-810.

[11] E.N. Dancer, On the use of asymptotics in nonlinear boundary value problems, Ann. Mat. Pura Appl. 131 (1982), 167-185.

[12] G. Dinca, and P. Jebelean, A priori estimates for the vector p-Laplacian with potential boundary conditions, Arch. Math. 90 (2008), 60-69.

[13] N. Ghoussoub, and D. Preiss, A general mountain pass principle for locating and classifying critical points, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 6 (1989), 321-330.

[14] G. Hamel, Ueber erzwungene Schingungen bei endlischen Amplituden, Math. Ann. 86 (1922), 1-13.

[15] A.S. Marano, and D. Motreanu, A deformation theorem and some critical point results for non-differentiable functions, Topol. Methods Nonlinear Anal. 22 (2003), 139-158.

[16] J. Mawhin, and M. Willem, Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations, J. Differential Equations 52 (1984), 264-287.

[17] F. Obersnel, and P. Omari, Multiple bounded variation solutions of a periodically perturbed sine-curvature equation, preprint.

[18] P. Pucci, and J. Serrin, Extensions of the mountain pass theorem, J. Funct. Anal. 59 (1984), 185-210.

[19] A. Szulkin, Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 3 (1986), 77-109.

[20] M. Willem, Oscillations forcées de l'équation du pendule, Pub. IRMA Lille, 3 (1981), V-1-V-3.