Şcoala Normală Superioară

Examen de Admitere, Departamentul de Matematică

25 septembrie 2006, orele 9:00-13:00

1. (a) Există două matrici inversabile 2×2 cu coeficienţi reali A şi B astfel încât $AB = -BA$? Dacă da, găsiţi un exemplu. Dacă nu, justificaţi răspunsul.

   (b) Aceeaşi întrebare pentru matrici 3×3.

2. Pentru o matrice pătrată $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, definim $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

   (a) Arătaţi că $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$.

   (b) Arătaţi că dacă $a_{ii} = 0$ pentru orice i, atunci există două matrici X, Y, astfel ca $A = XY - YX$ (vom spune în acest caz că A e *comutator*). (Indicaţie: alegeţi X diagonală, cu valori proprii distincte.)

   (c) Dacă A' e o matrice de ordine $n-1$ care e comutator, atunci orice matrice A de forma
   $$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A' \end{pmatrix}$$
   e comutator.

   (d) Dacă A nu e un multiplu al identităţii, atunci există o matrice B similară cu A pentru care $b_{11} = 0$.

   (e) Arătaţi că o matrice A este comutator dacă şi numai dacă $\operatorname{Tr} A = 0$.

3. Fie $f : [0,1] \to (0,\infty)$ o funcţie continuă. Pentru $\alpha > 0$, definim

$$F(\alpha) = \int_0^1 f(t)^\alpha \, dt.$$

   (a) Arătaţi că F e derivabilă pe $(0,\infty)$.

   (b) Calculaţi $\lim_{\alpha\to 0} F(\alpha)^{1/\alpha}$.

   (c) Calculaţi $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha)^{1/\alpha}$.

4. (a) Sa se arate ca orice grup finit abelian, al carui ordin nu se divide cu pătratul niciunui număr prim, este ciclic.

   (b) Să se arate ca in orice grup finit abelian exista un element al carui ordin este egal cu c.m.m.m.c. al tuturor ordinelor elementelor sale.

5. Fie S o suprafaţă difeomorfă cu torul, scufundată în $\mathbb{R}^3$. Fie ν câmpul de vectori normal exterior de lungime 1. Forma a doua fundamentală A_x într-un punct $x \in S$ este endomorfismul simetric al lui T_xS dat de $A_x(V) := V(\nu)$, derivata câmpului normal în direcţia vectorului V. Curbura (scalară) $\kappa(x)$ este determinantul lui A_x.

   (a) Arătaţi că există $x \in S$ cu $\kappa(x) > 0$.

   (b) Folosind rezultatul anterior, arătaţi că există $x \in S$ cu $\kappa(x) < 0$.