# Examen SNSB Matematică ciclul pregatitor

29 septembrie 2005

1. (a) Fie $F, G$ două spaţii vectoriale reale cu $\dim F < \infty$ şi fie $E \subseteq F$, subspaţiu. Dacă $T : F \to G$ este liniară, arătaţi că

$$\dim TF - \dim TE \leq \dim F - \dim E.$$

   (b) Fie $A, B, C$ matrici reale multiplicabile în această ordine. Arătaţi că

$$\operatorname{rang}(AB) + \operatorname{rang}(BC) \leq \operatorname{rang}(ABC) + \operatorname{rang}(B).$$

2. Fie $\lambda$ măsura Lebesgue în plan şi fie $u, v \in \mathbb{R}^2$. Pentru $A \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda(A) > 0$, definim

$$f(t) := \int_A \chi_{A+tu} \cdot \chi_{A+tv} \mathrm{d}\,\lambda.$$

   (a) Arătaţi că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă.

   (b) Arătaţi că orice mulţime măsurabilă din plan cu măsura nenulă, conţine vârfurile unui triunghi echilateral.

3. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pentru care există $a > 0, b > 0$ şi $R > 0$, astfel încât

$$|f(z)| \geq a|z|^b, \text{ oricare ar fi } z \in \mathbb{C},\ |z| \geq R.$$

   Arătaţi că $f$ este o funcţie polinomială şi $\operatorname{grad} f \geq b$.