Problema Levi pentru varietăţi complexe

August 22, 2011

Cuprins

Introducere

Principalele două rezultate cu ajutorul cărora se obţine o soultie a problemei Levi pentru varietăţi complexe sunt: existenţa soluţiilor ecuaţiei $\bar{\partial}$ pentru domenii pseudoconvexe si o teoremă de aproximare uniformă pe mulţimile compacte olomorf convexe (in domenii pseudoconvexe) a funcţiilor analitice pe o vecinătate a compactului cu funcţii analitice pe intreg spaţiul.

Rezultatul pe care se bazează teorema de existenţă a soluţiilor ecuaţiei $\bar{\partial}$ în domenii pseudoconvexe este o teoremă de analiză funcţională (a lui Hörmander) care dă o condiţie necesară şi suficientă pentru exactitatea lui $\bar{\partial}$. Astfel, alegând convenabil spaţiile Hilbert (introducând în produsul scalar al lui L^2 o funcţie ce descreşte repede spre frontiera domeniului, pentru a evita problemele privind integrabilitatea ce pot aparea), putem demonstra că este indeplinită condiţia din teoremă, de unde deducem că $\bar{\partial}u = f$ are soluţie pentru orice f ce verifică $\bar{\partial}f = 0$. Mai întâi acest lucru se arată pentru forme cu coeficienţi local integrabili L^2, apoi cu coeficienţi în spaţiile Sobolev W^s şi, in final, folosind lema Sobolev, se obţine existenţa solutiilor pentru forme cu coeficienţi de clasă C^∞.

Pentru obţinerea teoremei de aproximare se demonstrează mai întâi o lema valabilă în domenii pseudoconvexe ce asigură aproximarea în L^2 a funcţiilor analitice pe o vecinătate a unui compact dat de funcţia plurisubarmonica de exhaustiune ce asigură pseudoconvexitatea, dupa care se foloseşte un rezultat privind cresterea funcţiilor analitice pe un compact fixat, în raport cu normele L^2 ale acestor funcţii.

Mai departe, aceste două rezultate, care mai întâi au fost demonstrate pentru $\mathbb{C}^n$, se arată că rămân adevărate şi în cazul varietăţilor (cu o demonstraţie similară, dar cu unele modificări), după care se folosesc în demonstraţia teoremei privind o solutie a problemei Levi.

Odată cu soluţia problemei Levi, mai obţinem şi faptul că una dintre condiţiile din definiţia varietăţii Stein (cea privind separarea punctelor varietăţii cu ajutorul funcţiilor analitice pe varietate) se poate demonstra pornind de la celelalte doua.

Capitolul 1

Operatori dens definiţi pe spaţii Hilbert

1.1 Definiţii şi proprietăţi

Această secţiune este destinata studiului operatorilor dens definiţi pe spaţii Hilbert. Aceasta este o unealtă indispensabilă pentru rezolvarea ecuaţiei $\overline{\partial}$ în domenii pseudoconvexe.

Definiţia 1.1.1. *Fie E şi F spaţii Hilbert şi $A : D_A \to F$ un operator liniar al cărui domeniu este subspaţiul D_A al lui E. Vom nota cu N_A nucleul lui A, cu R_A range-ul lui A si cu G_A graficul lui A, adică*

$$N_A = \{x \in D_A \mid Ax = 0\}$$

$$R_A = \{Ax \mid x \in D_A\}$$

$$G_A = \{(x, Ax) \mid x \in D_A\}.$$

Operatorul A se numeşte dens definit dacă D_A este dens în E. Operatorul S se numeşte închis dacă G_A este inchis în $E \times F$.

Definiţia 1.1.2. *Fie E şi F spaţii Hilbert şi A un operator dens definit de la E în F. Notăm cu D_{A^*} subspaţiul format din toţi $y \in F$ pentru care există $y^* \in E$ pentru care*

$$(Ax|y) = (x|y^*), \ \forall x \in D_A$$

Deoarece D_A este dens în E, in cazul in care există, vectorul y^* este unic. Operatorul $A^* : D_{A^*} \to E$ definit prin $A^*(y) = y^*$ se numeşte adjunctul lui A. Prin urmare, putem scrie:

$$(Ax|y) = (x|A^*y), \ \forall x \in D_A, \ \forall y \in D_{A^*}$$

Propoziţia 1.1.3. *Fie E şi F spaţii Hilbert şi A un operator dens definit de la E în F. Atunci, operatorul adjunct A^* este închis.*

Demonstraţie. Considerăm $(y_n)_n$ un şir în D_{A^*} astfel încât (y_n) converge la y_0 în F şi (A^*y_n) converge la x_0 în E. Atunci, $(Ax|y_n) = (x|A^*y_n)$ pentru orice $x \in D_A$ şi $n \in \mathbb{N}$. Daca trecem la limită cu $n \to \infty$, obţinem că

$$(Ax|y_0) = (x|x_0),\ \forall x \in D_A^*.$$

Prin urmare, $y_0 \in D_A^*$ şi $A^*y_0 = x_0$. □

Propoziţia 1.1.4. *Fie E şi F spaţii Hilbert şi A un operator dens definit de la E în F. Atunci, $N_{A^*} = (R_A)^\perp$ şi $(N_{A^*})^\perp = \overline{R_A}$.*

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm prima identitate. Cea de-a doua este o consecinţă imediată. Dacă $y \in N_{A^*}$, atunci

$$(Ax|y) = (x|A^*y) = (x|0) = 0,\ \forall x \in D_A$$

şi prin urmare $y \in (R_A)^\perp$. Reciproc, dacă $y \in (R_A)^\perp$, atunci $(Ax|y) = 0 = (x|0)$ pentru orice $x \in D_A$. În consecinţă, $y \in D_{A^*}$ şi $A^*y = 0$, adică $y \in N_{A^*}$. □

Teorema 1.1.5. *Fie E şi F spaţii Hilbert şi A un operator închis, dens definit de la E în F. Atunci, operatorul adjunct A^* este închis, dens definit de la F în E şi $A^{**} = A$.*

Demonstraţie. Ştim deja din propoziţia 1.1.3 că A^* este închis. Pentru a arăta că A^* este dens definit işca $A^{**} = A$, vom proceda în modul următor:

Observăm că $E \times F$ şi $F \times E$ sunt spaţii Hilbert izometrice cu produsele scalare canonice:

$$((x_1, y_1)|(x_2, y_2)) = (x_1|y_1) + (x_2|y_2)$$

şi

$$((y_1, x_1)|(y_2, x_2)) = (y_1|y_2) + (x_1|x_2)$$

pentru $x_1, x_2 \in E$ şi $y_1, y_2 \in F$. Considerăm operatorii izometrici $S : E \times F \to F \times E$ şi $T : F \times E \to E \times F$ definiţi prin:

$$S(x, y) = (-y, x)$$

şi

$$T(y, x) = (-x, y).$$

Observăm că $T \circ S = -id_{E\times F}$ şi $S \circ T = -id_{F\times E}$. Deoarece ecuaţia $(Ax, y) = (x, y^*)$ este echivalentă cu ecuaţia $((-Ax, x)|(y, y^*)) = 0$, observăm că:

$$G_{A^*} = (SG_A)^\perp.$$

Cum G_A este închis şi S este izometrie, deducem că

$$(G_{A^*})^\perp = \overline{SG_A} = SG_A. \tag{1.1}$$

Deoarece şi T este izometrie, rezulă că:

$$(TG_{A^*})^\perp = TSG_A = G_A. \tag{1.2}$$

Fie $y_0 \in (D_{A^*})^\perp$. Atunci, $(0, y_0)$ este ortogonal pe $(-A^*y, y)$ pentru orice $y \in D_{A^*}$. Prin urmare, $(0, y_0) \in (TG_{A^*})^\perp = G_A$, din (1.2), şi atunci $y_0 = A(0) = 0$.

Am demonstrat astfel că D_{A^*} este densă în F şi în consecinţă A^{**} există.

Aplicând (1.1) cu A^* în loc de A şi T în loc de S, obţinem, cu ajutorul relaţiei (1.2), că

$$G_{A^{**}} = (TG_{A^*})^\perp = G_A.$$

Prin urmare, $A^{**} = A$ şi demonstraţia este completă. □

Din *Propoziţia*1.1.4 şi *Teorema* 1.1.5, obţinem:

Corolar 1.1.6. *Fie E şi F spaţii Hilbert şi fie A un operator închis, dens definit de la E în F. Atunci, $N_A = (R_{A^*})^\perp$ şi $(N_A)^\perp = \overline{R_{A^*}}$.*

Teorema 1.1.7. *Fie T un operator liniar, închis, dens definit de la un spaţiu Hilbert H_1 într-un spaţiu Hilbert H_2 şi F un subspaţiu închis al lui H_2 ce conţine range-ul R_T al lui T. Atunci, $F = R_T$ dacă şi numai dacă există o constantă C pentru care:*

$$\|f\|_{H_2} \leq C\|T^*f\|_{H_1} \ , \ \forall f \in F \cap D_{T^*} \tag{1.3}$$

Demonstraţie. Mai întâi presupunem că 1.3 este adevărată şi considerăm un $g \in F$. Deoarece $T^{**} = T$, ecuaţia $Tu = g$ este echivalentă cu identitatea:

$$(u|T^*f)_{H_1} = (g|f)_{H_2} \ , \ f \in D_{T^*} \tag{1.4}$$

Dacă demonstrăm că

$$|(g|f)_{H_2}| \leq C\|g\|_{H_2}\|T^*f\|_{H_1} \ , \ \forall f \in D_{T^*} \ , \tag{1.5}$$

atunci, considerând aplicaţia antiliniară $T^*f \mapsto (g|f)_{H_2}$ de la $R_{T^*} \subset H_1$ în $\mathbb{C}$ si prelungind-o la o functională antiliniară (folosind o consecinţa a teoremei Hahn-Banach) pe intreg spaţiul H_1, cu pastrarea normei, obţinem (cu Teorema lui Riesz de reprezentare a functionalelor liniare si continue) că există $u \in H_1$ astfel încât 1.4 este verificată şi

$$\|u\|_{H_1} \leq C\|g\|_{H_2} \tag{1.6}$$

Pentru a demonstra 1.5, mai întai remarcăm că dacă $f \in F^\perp$, atunci avem $(g|f)_{H_2} = 0$ şi $T^*f = 0$, din moment ce $R_T \subset F$ implică (folosind si Propoziţia 1.4) $F^\perp \subset (R_T)^\perp = N_{T^*}$. În plus, dacă luăm un $f \in D_{T^*}$, atunci $f = f_1 + f_2$, unde $f_1 \in F$ şi $f_2 \in F^\perp$. Deducem că $f_1 = f - f_2 \in D_{T^*}$ şi, cum $F^\perp \subset (R_T)^\perp = N_{T^*}$, avem: $T^*(f) = T^*(f_1)$.

Prin urmare, este suficient să demonstrăm 1.5 pentru $f \in F \cap D_{T^*}$ şi în acest caz rezultă imediat din 1.3.

Reciproc, presupunem că $R_T = F$ şi trebuie să demonstrăm că mulţimea:

$$B = \{f \mid f \in F \cap D_{T^*}\ ,\ \|T^* f\|_{H_1} \leq 1\}$$

este mărginită. Pentru aceasta, folosind din nou teorema lui Riesz de reprezentare a functionalelor liniare si continue si teorema marginirii uniforme, va fi suficient să demonstrăm că B este slab mărginită, adică pentru $g \in F$ fixat, $\{|(f|g)_{H_2}| \mid f \in B\}$ este mărginită. Din ipoteză, rezultă că putem găsi $u \in D_T$ astfel încât $Tu = g$, ceea ce implică

$$|(f|g)_{H_2}| = |(T^* f|u)_{H_1}| \leq \|u\|_{H_1}\ ,\ \forall f \in B$$

Cu aceasta, teorema este demonstrată. □

Teorema 1.1.8. *Fie T un operator liniar, închis, dens definit de la un spaţiu Hilbert H_1 într-un altul H_2 şi fie F un subspaţiu închis al lui H_2 ce conţine range-ul R_T al lui T. Presupunem că 1.3 este adevărată.*

Atunci, pentru orice $v \in H_1$ care este ortogonal pe N_T, există $f \in D_{T^*}$ astfel încât $T^* f = v$ şi

$$\|f\|_{H_2} \leq C\|v\|_{H_1} \tag{1.7}$$

Demonstraţie. Din *Propoziţia* 1.1.3, avem: $N_T = (R_{T^*})^\perp$, deci ipoteza înseamnă că v este în $\overline{R_{T^*}}$. În plus, $F^\perp \subset N_{T^*}$ şi luând un $x \in D_{T^*}$ arbitrar, avem:

$$x = x_1 + x_2,\ x_1 \in F,\ x_2 \in F^\perp$$

şi $x, x_2 \in D_{T^*}$ şi cum D_{T^*} este subspaţiu, deducem că şi $x_1 \in D_{T^*}$ şi $Tx = Tx_1$.

Am arătat astfel că restricţia lui T^* la $F \cap D_{T^*}$ are acelaşi range ca şi T^*. Dar 1.3 arată că această restricţie are range-ul închis: cosiderând un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_{T^*}$ astfel încât $T^* f_n \to g$ în H_1, avem:

$$\|f_m - f_n\|_{H_2} \leq C\|T^* f_m - T^* f_n\|_{H_1},\ \forall m, n \in \mathbb{N},$$

deci $(f_n)_n$ este şir Cauchy şi prin urmare convergent la un $f \in H_2$. Având în vedere că T^* este închis, rezultă că $g = T^* f$ şi din egalitatea range-urilor rezultă că putem lua $f \in F \cap D_{T^*}$.

Aşadar, restricţia lui T^* la $F \cap D_{T^*}$ are range-ul închis.

Prin urmare, putem găsi $f \in F \cap D_{T^*}$ astfel încât $T^* f = v$ şi 1.7 rezultă din 1.3. □

Capitolul 2

Ecuaţia $\overline{\partial}$ în domenii pseudoconvexe din $\mathbb{C}^n$

2.1 Preliminarii

Fie Ω un deschis din $\mathbb{C}^n$. Dacă φ este o funcţie continuă în Ω, vom nota cu $L^2(\Omega,\varphi)$ spaţiul funcţiilor care au pătratul integrabil în raport cu măsura $e^{-\varphi}d\mu$, unde $d\mu$ este măsura Lebesgue. Acesta este un subspaţiu al spaţiului $L^2(\Omega, loc)$ al funcţiilor din Ω care sunt de pătrat local integrabil în raport cu măsura Lebesgue şi, de asemenea, orice funcţie din $L^2(\Omega, loc)$ se găseşte în $L^2(\Omega,\varphi)$ pentru un anumit φ.

Prin $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ notăm spaţiul formelor de tipul (p,q) cu coeficienţi în $L^2(\Omega,\varphi)$,

$$f = {\sum_{|I|=p}}' {\sum_{|J|=q}}' f_{I,J} dz^I \wedge d\overline{z}^J,$$

unde $\sum'$ înseamnă că suma se face numai după multi-indici strict crescători. Vom mai face următoarele notaţii:

$$|f|^2 = {\sum_{I,J}}' |f_{I,J}|^2$$

şi

$$\|f\|^2_\varphi = \int |f|^2 e^{-\varphi} d\mu.$$

Este clar că $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ este spaţiu Hilbert cu produsul scalar

$$(f,g) = \int {\sum_{I,J}}' f_{I,J}\overline{g_{I,J}} e^{-\varphi} d\mu$$

care induce această normă.

În mod similar se definesc şi $L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$ şi $D_{(p,q)}(\Omega)$, unde $D(\Omega)$ este o notaţie pentru $C_0^\infty(\Omega)$, pe care o vom folosi pentru a simplifica notaţiile. Spaţiul $D_{(p,q)}(\Omega)$ este dens în $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ pentru orice φ.

Dacă φ_1 şi φ_2 sunt două funcţii continue pe Ω, atunci $\overline{\partial}$ defineşte un operator liniar, închis, dens definit

$$T : L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1) \to L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2);$$

un element $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$ este în D_T dacă $\overline{\partial}u$, definit în sensul distribuţiilor, aparţine lui $L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$ şi în această situaţie punem $Tu = \overline{\partial}u$. T este un operator dens definit (pentru că $D_{(p,q)}(\Omega) \subset D_T$ este o mulţime densă în $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$) şi este şi operator închis: considerând $(f_n, Tf_n) \to (f, g)$ în $H_1 \times H_2$, avem:

$$(T^*h, f)_{H_1} = \lim_{n\to\infty} (T^*h, f_n)_{H_1} = \lim_{n\to\infty} (h, Tf_n)_{H_2} = (h, g)_{H_2}, \ \forall h \in D_{T^*}$$

Având în vedere că domeniul operatorului adjunct T^* este dens (deoarece conţine $D_{(p,q+1)}(\Omega)$, care este dens în $L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_1)$), obţinem că $f \in D_{T^{**}}$ şi $T^{**}f = g$. În plus, din modul în care am definit D_T, deducem că $D_{T^{**}} = D_T$ şi deci T este operator închis.

Pentru densităţi bine alese, vrem să demonstrăm că R_T este format din toate formele $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$ pentru care $\overline{\partial}f = 0$ (care, bineînţeles, este o condiţie necesară pentru a avea $f \in R_T$). După cum am vazut în Capitolul 1, Teorema 1.1.7 reduce această problemă la studiul unei estimări.

Pentru modul în care vom aplica Teorema 1.1.7, spaţiile H_1 şi H_2 vor fi luate astfel:

$$H_1 = L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$$

şi

$$H_2 = L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2),$$

operatorul T dintre aceste spaţii va fi, asa cum l-am definit anterior, $\overline{\partial}$ şi F mulţimea formelor $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$ pentru care $\overline{\partial}f = 0$ (în sensul distribuţiilor).

Fie φ_3 o altă funcţie continuă pe Ω şi S operatorul de la $L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$ la $L^2_{(p,q+2)}(\Omega, \varphi_3)$ definit de $\overline{\partial}$. Atunci, $F = N_S$ şi pentru a demonstra 1.3 va fi suficient să arătăm că

$$\|f\|^2_{\varphi_2} \le C^2(\|T^*f\|_{\varphi_1} + \|Sf\|_{\varphi_3}), \ \forall f \in D_{T^*} \cap D_S \tag{2.1}$$

deoarece ultimul termen se anulează pentru $f \in N_S$.

Următoarea lemă ne asigură că dacă densităţile sunt convenabil alese, atunci este suficient să demonstrăm (2.1) pentru $f \in D_{(p,q+1)}(\Omega)$.

Lema 2.1.1. *Fie η_ν, $\nu = 1, 2, \dots$ un şir de funcţii din $C_0^\infty(\Omega)$ astfel încât $0 \le \eta_\nu \le 1$ şi $\eta_\nu = 1$ pe orice submulţime compactă fixată a lui Ω, atunci când ν este suficient de mare. Presupunem că $\varphi_2 \in C^1(\Omega)$ şi că:*

$$e^{-\varphi_{j+1}} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \overline{z_k}} \right|^2 \le e^{-\varphi j}, \ j = 1, 2; \ \nu = 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

Atunci, $D_{(p,q+1)}(\Omega)$ este dens în $D_{T^*} \cap D_S$ pentru norma grafic

$$f \mapsto \|f\|_{\varphi_2} + \|T^*f\|_{\varphi_1} + \|Sf\|_{\varphi_3}$$

Demonstraţie. Observăm mai înaâi că (2.2) înseamnă doar un numar finit de inegalităţi pe care trebuie să le îndeplinească $\varphi_j - \varphi_{j+1}$ pe orice compact din Ω, deci putem întotdeauna să găsim funcţii $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ce verifică (2.2).

Deoarece

$$S(\eta_\nu f) - \eta_\nu Sf = \overline{\partial}\eta_\nu \wedge f, \ f \in D_S$$

rezultă din (2.2) că

$$|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu Sf|^2 e^{-\varphi_3} \le |f|^2 e^{-\varphi_2}.$$

Aplicând teorema de convergenţa dominată, obţinem:

$$\forall f \in D_S, \ \|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu Sf\| \xrightarrow{\nu\to\infty} 0 \tag{2.3}$$

Dacă $f \in D_{T^*}$ şi $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, atunci

$$(\eta f, Tu)_{\varphi_2} = (f, \overline{\eta}Tu)_{\varphi_2} = (f, T(\overline{\eta}u)) + (f, \overline{\eta}Tu - T(\overline{\eta}u))_{\varphi_2} =$$

$$= (\eta T^* f, u)_{\varphi_1} + (f, \overline{\eta}Tu - T(\overline{\eta}u))_{\varphi_2}, \ u \in D_T$$

Din moment ce nicio derivată a lui u nu apare în ultimul termen, înseamnă că $u \mapsto (\eta f, Tu)_{\varphi_2}$ este o funcţie continuă în $\|u\|_{\varphi_1}$, deci (cu teorema Riesz de reprezentare) există un element $v \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$ pentru care

$$(v, u)_{\varphi_1} = (\eta f, Tu)_{\varphi_2}, \ u \in D_T$$

Aceasta înseamnă că $\eta f \in D_{T^*}$ şi $T^*(\eta f) = v$. Dacă $\eta = \eta_\nu$, atunci, estimând $\overline{\eta}Tu - T(\overline{\eta}u)$ ca în demonstraţia pentru (2.3), obţinem

$$|(T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f, u)_{\varphi_1}| \le \int |f| e^{-\varphi_2/2} |u| e^{-\varphi_1/2} d\mu,$$

ceea ce implică inegalitatea:

$$|(T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f|^2 e^{-\varphi_1} \le |f|^2 e^{-\varphi_2}.$$

Aşa ca mai sus, folosind teorema de convergenţa dominată, deducem că

$$\forall f \in D_{T^*}, \|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f\|_{\varphi_1} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0 \tag{2.4}$$

În consecinţă, $\eta_\nu f \to f$ în norma grafic dacă $f \in D_{T^*} \cap D_S$

Pentru a completa demonstraţia, nu mai trebuie decât să arătăm că putem aproxima elementele $f \in D_{T^*} \cap D_S$ cu suport compact în Ω cu elemente din $D_{(p,q+1)}(\Omega)$. Pentru aceasta, avem nevoie de următoarea lemă elementară:

Lema 2.1.2. *Considerăm o funcţie χ în $C_0^\infty(\Omega)$ cu $\int \chi d\mu = 1$ şi punem*

$$\chi_\epsilon = \epsilon^{-N} \chi(x/\epsilon), \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Dacă $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, *rezultă că*

$$g * \chi_\epsilon(x) = \int g(y)\chi_\epsilon(x-y)dy = \int g(x-\epsilon y)\chi(y)dy$$

este o funcţie din C^∞ *pentru care* $\|g * \chi_\epsilon\|_{L^2} \to 0$ *când* $\epsilon \to 0$. *Suportul funcţiei* $g * \chi_\epsilon$ *nu are puncte la distanţa* $> \epsilon$ *de supp*(g) *dacă suportul funcţiei* χ *se afla în bila unitate.*

Presupunând pentru moment lema adevărată si completăm demonstraţia lemei (2.1.1). Dacă $f \in D_{T^*} \cap D_S$ are suportul compact, atunci definim $f * \chi_\epsilon$ alegând χ ca în *Lema 2.1.2* (cu N=2n) şi lăsând convoluţia să acţioneze pe fiecare dintre coeficienţii lui f. Suportul lui $f * \chi_\epsilon$ este aşadar conţinut într-o submulţime compactă din Ω când $\epsilon \to 0$ şi lema ne asigură că $\|f - f * \chi_\epsilon\|_{\varphi_2} \to 0$.

Deoarece $S(f*\chi_\epsilon) = (Sf)*\chi_\epsilon$, avem de asemenea că $\|Sf - S(f*\chi_\epsilon)\|_{\varphi_3} \to 0$. Operatorul T^* nu are coeficienţi constanţi, dar putem scrie

$$e^{\varphi_2-\varphi_1}T^* = \vartheta + a,$$

unde ϑ este un operator diferenţial cu coeficienţi constanţi şi a este de gradul 0 (conform formulei 2.5 de mai jos). Deoarece

$$(\vartheta + a)(f * \chi_\epsilon) = ((\vartheta + a)f) * \chi_\epsilon + a(f * \chi_\epsilon) - (af) * \chi_\epsilon$$

şi membrul drept este convergent în L^2 cu limita $(\vartheta + a)f + af - af$, conform *lemei* 2.1.2, rezultă că

$$\|T^*(f * \chi_\epsilon) - T^*f\|_{\varphi_1} \to 0,$$

ceea ce completează demonstraţia *lemei* 2.1.1.

□

Demonstraţia lemei 2.1.2. În prima integrală ce defineşte $g * \chi_\epsilon$ putem deriva sub integrală de oricâte ori, deci $g * \chi_\epsilon \in C^\infty$. Din a doua expresie a lui $g * \chi_\epsilon$, folosind inegalitatea Minkowski[1], deducem că:

$$\|g * \chi_\epsilon\|_{L^2} \leq C\|g\|_{L^2},\ C = \int |\chi|dx.$$

Este evident că $g * \chi_\epsilon - g \to 0$ uniform pentru $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, care este un subspaţiu dens în L^2, iar ultima afirmaţie din enunţ este de asemenea clară.

Prin urmare, avem:

$$\|g * \chi_\epsilon - g\|_{L^2} \to 0$$

pentru orice g într-un subspaţiu dens din L^2 şi din convergenţa uniformă demonstrată rezultă că aceasta este adevărată pentru orice $g \in L^2$. Acum, demonstraţia este completă. □

[1]Dacă (S_1, μ_1) şi (S_2, μ_2) sunt două spaţii cu măsură şi $F : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ este măsurabilă, atunci

$$\left[\int_{S_2}\left(\int_{S_1}|F(x,y)|d\mu_1(x)\right)^p d\mu_2(y)\right]^{1/p} \leq \int_{S_1}\left(\int_{S_2}|F(x,y)|^p d\mu_2(y)\right)^{1/p} d\mu_1(x)$$

Vom încheia această secţiune calculând explicit T^*, care va da şi o altă demonstraţie pentru 2.4. Pentru aceasta, alegem:

$$u = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' u_{I,K} dz^I \wedge d\bar{z}^K \in D_{(p,q)}(\Omega),$$

$$f = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q+1}{}' f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2).$$

Cum $f_{I,J}$ este definit pentru toţi J ca o funcţie antisimetrică în indicii din J şi

$$\bar{\partial} u = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' \sum_{j=1}^{n} \partial u_{I,K}/\partial \bar{z}^j d\bar{z}^j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^K$$

obţinem, pentru $f \in D_{T^*}$,

$$\int \sum_{I,K}{}' (T^* f)_{I,K} \overline{u_{I,K}} e^{-\varphi_1} d\mu = (T^* f, u)_\varphi = (f, Tu)_{\varphi_2} =$$

$$= (-1)^p \int \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} f_{I,jK} \overline{\partial u_{I,K}/\partial \bar{z}_j} dz^I \wedge d\bar{z}^K$$

ceea ce înseamnă că

$$T^* f = (-1)^{p-1} \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} e^{\varphi_1} \partial (e^{-\varphi_2} f_{I,jK})/\partial z_j dz^I \wedge d\bar{z}^K. \tag{2.5}$$

Acum, ştiind cum acţionează operatorul T^*, putem demonstra că operatorul T este închis. Fie $(u_n, Tu_n) \to (u, v)$. Vrem să demonstrăm că $u \in D_{T^{**}}$ şi $w = Tu$. Avem:

$$(Tu_n, f)_{\varphi_2} = (u_n, T^* f)_{\varphi_1}, \ \forall f \in D^{T^*}$$

În plus, $(Tu_n, f)_{\varphi_2} \to (w, f)_{\varphi_2}$ şi $(u_n, T^* f)_{\varphi_1} \to (u, T^* f)_{\varphi_1}$. De aici, rezultă că $u \in D_{T^{**}}$ şi $T^{**} u = w$. Este uşor de observat că $D_T \subset D_{T^{**}}$ Pentru a avea $T = T^{**}$, mai avem de demonstrat numai că $D_{T^{**}} \subset D_T$.

Dacă vom considera

$$f = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q+1}{}' f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J \in D_{(p,q+1)}(\Omega),$$

$$u = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' f_{I,K} dz^I \wedge d\bar{z}^K \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$$

astfel încât $u \in D_{T^{**}}$, atunci au loc egalităţile:

$$\int f_{I,J} \overline{(T^{**} u)_{I,J}} e^{-\varphi_2} d\mu = (u, T^* f)_{\varphi_1} = (T^{**} u, f)_{\varphi_2} =$$

$$= (-1)^{p-1} \int \sum_{I,K}{}' \sum_j \partial(e^{-\varphi_2} f_{I,jK})/\partial z_j \bar{u}_{I,K} d\mu = (-1)^p \int \sum_{I,K}{}' \sum_j f_{I,jK} \overline{\partial u_{I,K}/\partial \bar{z}_j} e^{-\varphi_2} d\mu$$

pentru orice $f \in D_{p,q+1}(\Omega)$, unde ultima egalitate este scrisă în sensul distribuţiilor. Dacă rescriem sumele in altă formă, egalitatea scrisă ne asigură că:

$$(T^{**}u)_{I,J} = (-1)^p \sum_{I,K}{}' \sum_j sgn\begin{pmatrix} J \\ jK \end{pmatrix} \frac{\partial u_{I,K}}{\partial \bar{z}_j}$$

(unde J este multiindicele jK, ordonat crescător) de unde deducem că membrul drept al egalităţii este distribuţie regulată, care este exact condiţia ca un element $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$ să fie în D_T. Am obţinut astfel $u \in D_T$ şi $w = T^{**}u = Tu$. În concluzie, T este operator închis.

2.2 Existenţa soluţiilor ecuaţiei $\bar{\partial}$ în domenii pseudoconvexe

Alegem o funcţie $\psi \in C^\infty(\Omega)$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^n |\partial \eta_\nu / \partial \bar{z}_k|^2 \le e^\psi, \ \nu = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

Dacă punem

$$\varphi_1 = \varphi - 2\psi, \varphi_2 = \varphi - \psi, \varphi_3 = \varphi, \tag{2.7}$$

atunci condiţia 2.2 este îndeplinită pentru orice alegere a lui φ. Vom studia acum $\|T^*f\|_{\varphi_1}$ şi $\|Sf\|_{\varphi_3}$ pentru $f \in D_{(p,q+1)}(\Omega)$, păstrând ψ fixat pentru toate estimările, dar făcând toate estimările uniform în φ astfel încât să putem alege φ convenabil la sfârşitul discuţiei. Putem presupune că $\varphi \in C^2(\Omega)$.

Mai întâi observăm că, deoarece

$$\bar{\partial} f = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q+1}{}' \sum_{j=1}^n \partial f_{I,J}/\partial d\bar{z}_k d\bar{z}^j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

obţinem

$$|\bar{\partial} f|^2 = \sum_{I,J,L}{}' \sum_{j,l=1}^n \partial f_{I,J}/\partial \bar{z}_j \overline{\partial f_{I,L}/\partial \bar{z}_l} \epsilon^{jJ}_{lL}$$

unde $\epsilon^{jJ}_{lL} = 0$ în afară de cazul când $j \notin J$, $l \notin L$, şi $\{j\} \cup J = \{l\} \cup L$, caz în care ϵ^{jJ}_{lL} este semnul permutării $\binom{jJ}{lL}$. Vom rearanja termenii în această sumă. Mai întâi considerăm termenii cu $j = l$. Atunci, trebuie să avem $J = L$ şi $j \notin J$ pentru $\epsilon^{jJ}_{lL} \neq 0$, deci suma acestor termeni este

$$\sum_{I,J}{}' \sum_{j \notin J} |\partial f_{I,J}/\partial \bar{z}_j|^2.$$

În continuare, considerăm termenii cu $j \neq l$. Dacă $\epsilon^{jJ}_{lL} \neq 0$, atunci trebuie să avem $l \in J$ şi $j \in L$, iar ştergerea lui l din J sau a lui J din L duce la obţinerea aceluiasi multiindice K. Deoarece

$$\epsilon^{jJ}_{lL} = \epsilon^{jJ}_{jlK}\epsilon^{jlK}_{ljK}\epsilon^{ljK}_{lL} = -\epsilon^{J}_{lK}\epsilon^{jK}_{L},$$

şi suma acestor termeni este

$$-\sum_{I,K}{}' \sum_{j\neq l} \partial f_{I,lK}/\partial \bar z_j \overline{\partial f_{I,jK}/\partial \bar z_l}.$$

Prin urmare, obţinem

$$|\bar\partial f|^2 = \sum_{I,J}{}' \sum_{j} |\partial f_{I,J}/\partial \bar z_j|^2 - \sum_{I,K}{}' \sum_{j,k} \partial f_{I,jK}/\partial \bar z_j \overline{\partial f_{I,kK}/\partial \bar z_j}. \tag{2.8}$$

(Când $p = 0$ şi $q = 1$, aceasta rezultă din faptul că

$$|\bar\partial f|^2 = \sum |\partial f_j/\partial \bar z_k - \partial f_k/\partial \bar z_j|^2/2.)$$

În continuare, vom considera T^*f. Cu notaţia

$$\delta_j w = e^{\varphi}\partial(we^{-\varphi})/\partial z_j = \partial w/\partial z_j - w\partial\varphi/\partial z_j, \tag{2.9}$$

obţinem din 2.5

$$e^{\psi}T^*f = (-1)^{p-1}\sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} \delta_j f_{I,jK} dz^I \wedge d\bar z^K + (-1)^{p-1}\sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} f_{I,jK}\partial\psi/\partial z_j dz^I \wedge d\bar z^K.$$

Rezultă că

$$\int \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} \delta_j f_{I,jK}\overline{\delta_k f_{I,kK}} e^{-\varphi} d\mu \le \|T^*f\|^2_{\varphi_1} + 2\int |f|^2|\partial\psi|^2 e^{-\varphi} d\mu.$$

Combinând această estimare cu 2.8, obţinem

$$\int \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} (\delta_j f_{I,jK}\overline{\delta_k f_{I,kK}} - \partial f_{I,jK}/\partial \bar z_k \overline{\partial f_{I,kK}/\partial \bar z_j}) e^{-\varphi} d\mu + \tag{2.10}$$

$$+\int \sum_{I,J}{}' \sum_{j=1}^{n} |\partial f_{I,J}/\partial \bar z_j|^2 e^{-\varphi} d\mu \le 2\|T^*f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3} + 2\int |f|^2|\partial\psi|^2 e^{-\varphi} d\mu$$

Acum, operatorii $\partial/\partial \bar z_k$ şi $-\delta_k$ sunt autoadjuncţi în sensul că

$$\int w_1 \overline{\partial w_2/\partial \bar z_k} e^{-\varphi} d\mu = -\int \delta_k w_1 \bar w_2 e^{-\varphi} d\mu,\ \ w_1, w_2 \in C_0^\infty(\Omega);$$

şi avem relaţiile de comutare

$$\delta_j \partial/\partial \bar{z}_k - \partial/\partial \bar{z}_k \delta_j = \partial^2 \varphi/\partial \bar{z}_k \partial z_j. \tag{2.11}$$

Comutând diferenţierea la stânga în prima sumă în 2.10, conduce la

$$\sum_{I,K}{}' \int \sum_{j,k=1}^{n} f_{I,jK} \overline{f_{I,kK}} \partial^2 \varphi/\partial z_j \partial \bar{z}_k e^{-\varphi} d\mu + \sum_{I,J}{}' \sum_{j=1}^{n} \int |\partial f/\partial \bar{z}_j|^2 e^{-\varphi} d\mu \leq \tag{2.12}$$
$$\leq 2\|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3} + 2\int |f|^2 |\partial \psi|^2 e^{-\varphi} d\mu,\ f \in D_{(p,q+1)}(\Omega)$$

Acum, presupunem că funcţia φ este strict plurisubarmonică,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \partial^2 \varphi/\partial z_j \partial \bar{z}_k w_j \bar{w}_k \geq c \sum_{1}^{n} |w_j|^2,\ \forall w \in \mathbb{C}^n, \tag{2.13}$$

unde c este este o funcţie pozitivă pe Ω. Atunci, rezultă din 2.12 că

$$\int (c - 2|\partial \psi|^2)|f|^2 e^{-\varphi} d\mu \leq 2\|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3},\ f \in D_{(p,q+1)}(\Omega). \tag{2.14}$$

Reamintindu-ne acum lema 2.1.1, am reusit să demonstrăm

Lema 2.2.1. *Cu $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ definite prin 2.7, unde $\varphi, \psi \in C^2(\Omega)$, avem:*

$$\|f\|^2_{\varphi_2} \leq \|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3},\ f \in D_{T^* f} \cap D_S \tag{2.15}$$

ştiind că

$$\sum_{j,k=1}^{n} \partial^2 \varphi/\partial z_j \partial \bar{z}_k w_j \bar{z}_k \geq 2(|\bar{\partial} \psi|^2 + e^{\psi}) \sum_{1}^{n} |w_j|^2,\ \forall w \in \mathbb{C}^n. \tag{2.16}$$

Putem acum să demonstrăm următoarea teoremă de existenţă:

Teorema 2.2.2. *Fie Ω un domeniu deschis pseudoconvex din $\mathbb{C}^n$. Atunci, ecuaţia $\bar{\partial} u = f$ are (în sensul teoriei distribuţiilor) o soluţie $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$ pentru orice $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$ pentru care $\bar{\partial} f = 0$.*

Demonstraţie. Putem alege o funcţie strict plurisubarmonică $p \in C^\infty(\Omega)$ astfel încât

$$K_c = \{z \in \Omega \mid p(z) \leq c\} \subset\subset \Omega,\ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Fie

$$\sum_{j,k=1}^{n} \partial^2 p/\partial z_j \partial \bar{z}_k w_j \bar{w}_k \geq m \sum_{1}^{n} |w_j|^2,$$

unde $0 < m \in C^0(\Omega)$. Dacă χ este o funcţie C^∞ convexă, crescătoare şi $\varphi = \chi(p)$, obţinem:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \partial^2\varphi/\partial z_j\partial\bar z_k w_j\bar w_k \geq \chi'(p)m\sum_1^n |w_j|^2.$$

Rezultă că φ satisface 2.16 dacă

$$\chi'(p)m \geq 2(|\bar\partial\psi|^2 + e^\psi),$$

adică dacă

$$\chi'(t) \geq \sup_{K_t} 2(|\bar\partial\psi|^2 + e^\psi)/m. \tag{2.17}$$

Membrul drept al lui 2.17 este o funcţie finită crescătoare in t, care este definită pentru $t > \min p$. Prin urmare, există o funcţie crescătoare de clasă C^∞, χ', ce satisface 2.17. Este clar că putem alege χ astfel încât, în plus, o funcţie dată $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$ să se găsească în $L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi - \psi)$. Dar atunci, rezultă din teorema 1.1.7 că ecuaţia $\bar\partial u = f$ are o soluţie $u \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi - 2\psi)$. Astfel, am încheiat demonstraţia teoremei □

Vom examina acum proprietăţile de regularitate ale soluţiei u a ecuaţiei $\bar\partial u = f$ pe care am obţinut-o. Pentru aceasta, este importatn să observăm că soluţia ecuaţiei $Tu = f$ dată de teorema 1.1.7 poate fi aleasă ortogonal pe nucleul lui T, adică în închiderea range-ului lui T^*. Această informaţie suplimentară este esenţială în demonstrarea regularităţii soluţiei u.

Fie W^s, unde s este un număr natural, spaţiul funcţiilor pe $\mathbb{C}^n$ care au derivatele de ordin $\leq s$ în L^2. Prin $W^s(\Omega, loc)$ notăm mulţimea funcţiilor pe Ω care satisfac aceeaşi condiţie pe compacţii din Ω. Spaţiul formelor de tip (p,q) cu coeficienţi în acest spaţiu va fi notat $W^s_{(p,q)}(\Omega, loc)$. Dacă f este de tip $(p, q+1)$, $(p, q \geq 0)$, punem

$$\vartheta f = {\sum_{I,K}}' \sum_{j=1}^{n} \partial f_{I,jK}/\partial z_j dz^I \wedge d\bar z^K.$$

Aceasta este, în mare, partea principală a operatorului diferenţial din 2.5.

Lema 2.2.3. *Dacă $f \in L^2_{(p,q+1)}(\mathbb{C}^n)$ are suport compact, $\bar\partial f \in L^2_{(p,q+2)}(\mathbb{C}^n)$ şi $\vartheta f \in L^2_{(p,q)}(\mathbb{C}^n)$, atunci $f \in W^1_{(p,q+1)}(\mathbb{C}^n)$.*

Demonstraţie. Mai întâi, observăm că dacă $f \in D_{(p,q+1)}$, atunci din 2.12 cu $\varphi = \psi = 0$, obţinem:

$${\sum_{I,J}}' \sum_{j=1}^{n} \int |\partial f_{I,J}/\partial\bar z_j| d\mu \leq 2\|\vartheta f\|_0^2 + \|\bar\partial f\|_0^2. \tag{2.18}$$

Dacă f ar satisface ipoteza din lemă, putem construi o regularizare $f * \chi_\epsilon$ a lui f ca în lema 2.1.2. Dacă aplicăm 2.18 pentru $f * \chi_\epsilon - f * \chi_\delta$, observând că $\vartheta(f * \chi_\epsilon) = (\vartheta f) * \chi_\epsilon \to \vartheta f$ în $L^2_{(p,q)}(\mathbb{C}^n)$ şi rezultatul corespunzător pentru $\bar\partial(f * \chi_\epsilon)$, deducem că $\chi_\epsilon * \partial f_{I,J}/\bar z_j$ converge în L^2 pentru toţi I, J, j când $\epsilon \to 0$. Rezultă că $\partial f_{I,J}/\bar z_j \in L^2$. Demonstraţia se reduce aşadar la următoarea lemă: □

Lema 2.2.4. *Dacă $w \in L^2(\mathbb{C}^n)$ are suport compact şi $\partial w/\partial \bar{z}_j \in L^2$ pentru $j = 1, \dots, n$, atunci $w \in W^1$.*

Demonstraţie. Nu avem de demonstrat decât că $\partial w/\partial z_j \in L^2$. Dacă $w \in C_0^\infty$, după două integrări prin părţi, obţinem:

$$\int |\partial w/\partial z_j|^2 d\mu = \int \partial w/\partial z_j \overline{\partial w/\partial z_j} d\mu = -\int \partial^2 w/\partial \bar{z}_j \partial z_j \bar{w} d\mu = \int |\partial w/\partial \bar{z}_j|^2 d\mu.$$

Folosind acest rezultat în acelaşi mod în care am folosit 2.18 în demonstraţia lemei precedente, obţinem că $\partial w/\partial z_j \in L^2$. □

Putem da acum o îmbunătăţire a teoremei 2.2.2

Teorema 2.2.5. *Fie Ω un deschis pseudoconvex în $\mathbb{C}^n$ şi fie $0 \leq s \leq \infty$. Atunci, ecuaţia $\bar{\partial} u = f$ are o soluţie $u \in W^{s+1}_{(p,q)}(\Omega, loc)$ pentru orice $f \in W^s_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$ pentru care $\bar{\partial} f = 0$. Orice soluţie a ecuaţiei $\bar{\partial} u = f$ are această proprietate dacă $q = 0$.*

Demonstraţie. (a) Mai întâi demonstrăm pentru $q = 0$. Ştim din teorema 2.2.2 că ecuaţia $\bar{\partial} u = f$ are o soluţie $u = \sum' u_I dz^I \in L^2_{(p,0)}(\Omega, loc)$. Ecuaţia $\bar{\partial} u = f$ ne arată că:

$$\partial u_I/\partial \bar{z}_j = f_{I,j} \in W^s(\Omega, loc)$$

pentru toţi I şi j. Presupunem că $u \in W^\sigma(\Omega, loc)$ pentru un σ finit, fixat, cu $0 \leq \sigma \leq s$; ştim că aceasta este adevărată dacă $\sigma = 0$. Dacă $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, atunci vom avea:

$$\partial(\chi u_I)/\partial \bar{z}_j = \chi f_{I,j} + \partial \chi/\partial \bar{z}_j u_I \in W^\sigma.$$

Dacă v este o derivată de ordin σ a lui χu_I, rezultă că $\partial v/\partial \bar{z}_j \in L^2$ pentru orice j. Cu lema 2.2.4, rezultă că $v \in W^1$, adică toate derivatele lui χu_I de ordin $\sigma + 1$ sunt în L^2. Acesta înseamnă că $u_I \in W^{\sigma+1}(\Omega, loc)$. Repetând argumentul, conchidem că $u_I \in W^{s+1}(\Omega, loc)$.

(b) În continuare, vom considera cazul $q > 0$. Aşa cum am remarcat la sfarşitul demonstraţiei teoremei 2.2.2, soluţia ecuaţiei $\bar{\partial} u = f$ asigurată de acea teoremă se poate alege în închiderea range-ului lui T^*. Având în vedere 2.5 şi faptul că $\vartheta^2 = 0$, avem:

$$\vartheta(e^{-\varphi_1} u) = 0, \ \bar{\partial} u = f.$$

Acestea pot fi scrise şi sub forma

$$\bar{\partial} u = f, \ \vartheta u = au,$$

unde a este operator diferenţial de ordin 0 cu coeficienţi de clasă C^∞ ce acţionează pe u.

Vom justifica în continuare această egalitate. Considerăm mai întâi cazul $u \in R_{T^*}$, adică există un f astfel încât $u = T^* f = e^{\varphi_1 - \varphi_2} \vartheta f + e^{\varphi_1 - \varphi_2} af$, de unde deducem că

$$e^{-\varphi_1} u = e^{-\varphi_2} \vartheta f + e^{-\varphi_2} af.$$

Atunci,

$$\vartheta(e^{-\varphi_1}u) = \vartheta(e^{-\varphi_2}\vartheta f + e^{-\varphi_2}af) = \vartheta(e^{-\varphi_2}\vartheta f) + \vartheta(e^{-\varphi_2}af) =$$
$$= \vartheta(\vartheta(e^{-\varphi_2}f) - e^{-\varphi_2}af) + \vartheta(e^{-\varphi_2}af) = \vartheta(\vartheta(e^{-\varphi_2}f)) - \vartheta(e^{-\varphi_2}af) + \vartheta(e^{-\varphi_2}af) = 0$$

Aşadar,

$$0 = \vartheta(e^{-\varphi_1}u) = \sum_{I,L}{}' \sum_j \frac{\partial(e^{-\varphi}u_{I,jL})}{\partial z_j} dz^I \wedge d\bar{z}^L = e^{-\varphi_1}\vartheta u - e^{-\varphi_1}au$$

de unde rezultă că $\vartheta u = au$.

Acum, vom demonstra egalitatea pentru cazul mai general $u \in \bar{R}_{T^*}$. Fie $u_n = T^* f_n \to u$. Avem egalitatea:

$$e^{-\varphi_1+\varphi_2}T^* = \vartheta + a$$

Ştiind că T^* este operator închis şi a este operator continuu, rezultă că ϑ este operator închis. După cum am văzut mai sus, $\vartheta u_n = au_n$ pentru orice n şi $au_n \to au$. Deci avem:

$$(u_n, \vartheta u_n) \to (u, au)$$

Folosind acum faptul că ϑ este închis, deducem că $\vartheta u = au$. Astfel, am incheiat justificarea egalităţii.

Presupunem că deja am demonstrat că $u \in W^{\sigma}_{(p,q)}(\Omega, loc)$ pentru un σ finit, fixat, cu $0 \leq \sigma \leq s$. Dacă $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, obţinem:

$$\bar{\partial}(\chi u) \in W^{\sigma}_{(p,q+1)},\ \vartheta(\chi u) \in W^{\sigma}_{(p,q-1)}.$$

Dacă D este un operator diferenţial de ordin σ, atunci forma $D(\chi u)$ satisface ipotezele lemei 2.2.3, care arată că $D(\chi u) \in W^1$. În consecinţă, $\chi u \in W^{\sigma+1}_{(p,q)}$, adică $u \in W^{\sigma+1}_{(p,q)}(\Omega, loc)$. Acum, demonstraţia este încheiată. □

Corolar 2.2.6. *Dacă Ω este pseudoconvex, atunci ecuaţia $\bar{\partial}u = f$ are o soluţie $u \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ pentru orice $f \in C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)$ pentru care $\bar{\partial}f = 0$.*

Demonstraţie. Cu binecunoscuta lemă Sobolev, avem:

$$W^{s+2n}_{(p,q)}(\Omega, loc) \subset C^s_{(p,q)}(\Omega), \tag{2.19}$$

deci corolarul rezultă direct din teorema 2.2.5. □

Putem demonstra acum o reciprocă unei teoreme cunoscute ce afirmă că orice domeniu de olomorfie din $\mathbb{C}^n$ este domeniu pseudoconvex.

Teorema 2.2.7. *O mulţime deschisă din $\mathbb{C}^n$ este domeniu de olomorfie dacă (şi, cu teorema amintită, numai dacă) este pseudoconvex.*

Demonstraţie. Această teoremă este o consecinţă imediată a corolarului 2.2.6 şi a următoarei teoreme □

Teorema 2.2.8. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}^n$ astfel încât ecuaţia $\bar{\partial}u = f$ are o soluţie $u \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ pentru orice $f \in C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega)$ pentru care $\bar{\partial}f = 0$, $(q = 0, \dots, n-2)$.*

Atunci, Ω este domeniu de olomorfie.

Demonstraţie. Teorema este adevărată când $n = 1$, deoarece ştim că orice mulţime deschisă din $\mathbb{C}^n$ este domeniu de olomorfie. Vom face demonstraţia teoremei prin inducţie după dimensiunea n, aşa că vom presupune că deja a fost demonstrată pentru dimensiunea $n-1$.

Este suficient să arătăm că pentru orice mulţime deschisă şi convexă $D \subset \Omega$, astfel încât un punct de frontieră z^0 al lui D este pe frontiera $\partial\Omega$ a lui Ω, există o funcţie analitică pe Ω care nu poate fi prelungită analitic pe o vecinătate a lui z^0. Putem presupune că am ales coordonatele astfel încât $z^0 = 0$ şi planul $z_n = 0$ are intersecţie nevidă cu D, notată D_0. Apoi, convexitatea lui D arată că 0 se află pe frontiera lui

$$\omega = \{z \in \Omega \mid z_n = 0\}.$$

(Putem privi ω ca o mulţime deschisă în $\mathbb{C}^{n-1}$.) Fie j injecţia naturală a lui ω în Ω şi π proiecţia lui $\mathbb{C}^n$ pe $\mathbb{C}^{n-1}$, obţinută prin ştergerea ultimei coordonate. Partea principală a demonstraţiei este acum să arătăm că pentru orice $f \in C^\infty_{(0,q)}(\omega)$, $(q \geq 0)$ cu $\bar{\partial}f = 0$, putem găsi $F \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ astfel încât $\bar{\partial}F = 0$ şi $f = j^*F$ (unde am facut notaţia j^*F pentru funcţia $z \mapsto F(j(z))$). Pentru a construi F, observăm că mulţimile ω şi $M = \{z \in \Omega \mid \pi z \notin \omega\}$ sunt disjuncte şi relativ închise în Ω, deci există $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ astfel încât $\varphi = 1$ pe o vecinătate a lui ω şi $\varphi = 0$ pe o vecinătate a lui M. Forma $\varphi\pi^*f$, definită ca fiind 0 unde $\varphi = 0$, este atunci în $C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ şi $j^*\varphi\pi^*f = f$. Considerăm acum

$$F = \varphi\pi^*f - z_n v$$

cu $v \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ ales astfel încât $\bar{\partial}F = 0$. Aceasta înseamnă că

$$\bar{\partial}v = z_n^{-1}\bar{\partial}\varphi \wedge \pi^*f$$

şi, cum membrul drept este în $C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega)$ şi este $\bar{\partial}$-închis, existenţa lui v rezultă din enunţul teoremei. Avem $j^*F = j^*\pi^*f = f$, deci F are proprietăţile cerute.

Putem acum să demonstrăm că ipotezele teoremei sunt îndeplinite dacă Ω este înlocuită de ω. De fapt, pentru $f \in C^\infty_{(0,q+1)}(\omega)$ dat, cu $\bar{\partial}f = 0$, am demonstrat că există o formă $F \in C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega)$ cu $\bar{\partial}F = 0$ şi $j^*F = f$. Din ipoteză, ecuaţia $\bar{\partial}U = F$ are o soluţie $U \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$. Punând $u = j^*U$, obţinem

$$\bar{\partial}u = j^*\bar{\partial}U = j^*F = f.$$

Din ipoteza de inducţie rezultă că ω este domeniu de olomorfie, deci există o funcţie f care este analitică pe ω, dar nu poate fi prelungită pe nicio vecinătate a lui $\bar{D}_0$. Dacă alegem F analitică pe Ω astfel încât $j^*F = f$, adică $F = f$ pe ω, rezultă că F nu poate fi prelungită analitic pe o vecinătate a lui $\bar{D}$. Prin urmare, Ω este domeniu de olomorfie; astfel, demonstraţia este încheiată. $\square$

2.3 Teoreme de aproximare în domenii pseudoconvexe

Vom arăta acum că estimările în L^2 demonstrate în secţiunea 4.2 conduc la teoreme de aproximare. Pasul esenţial este următorul:

Lema 2.3.1. *Fie p o funcţie strict plurisubarmonică de clasă C^∞ pe Ω astfel încât*

$$K_c = \{z \in \Omega \mid p(z) \leq c\} \subset\subset \Omega, \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Atunci, orice funcţie care este analitică pe o vecinătate a lui K_0 poate fi aproximată în norma lui L^2 cu funcţii din $A(\Omega)$.

Demonstraţie. Cu teorema Hahn-Banach, rezultă că este suficient să demonstrăm că dacă $v \in L^2(K_0)$ şi dacă

$$\int_{K_0} u\bar{v}d\mu = 0 \tag{2.20}$$

pentru orice $u \in A(\Omega)$, atunci 2.20 este adevărată pentru orice u care este analitică numai pe o vecinătate a lui K_0. Extindem v punând $v = 0$ în afara lui K_0. Atunci, 2.20 implică faptul că ve^{φ_1} este ortogonal pe nucleul N_T al lui T, despre care am discutat în secţiunea din urmă (cu $p = q = 0$), deoarece N_T este subspaţiu al lui $A(\Omega)$. (Toate elementele din N_T sunt funcţii de clasă C^∞, cu teorema 2.2.5.) Când estimarea 2.15 este valabilă, rezultă din teorema 1.1.8 că există $f = \sum_1^n f_j d\bar{z}_j \in D_{T^*}$ astfel încât

$$\|f\|_{\varphi_2} \leq \|e^{\varphi_1}v\|_{\varphi_1}$$

şi $T^*f = ve^{\varphi_1}$. Cu 2.5, ecuaţia aceasta implică faptul că

$$ve^{\varphi_1} = -e^{\varphi_1}\sum_{j=1}^n \partial(e^{-\varphi_2}f_j)/\partial z_j$$

în sensul teoriei distribuţiilor. Scriind $g = fe^{-\varphi_2}$, avem mai departe $v = -\sum_1^n \partial g_j/\partial z_j$ şi

$$\int_\Omega \sum_1^n |g_j|^2 e^{\varphi_2} d\mu \leq \int_\Omega |v|^2 e^{\varphi_1} d\mu, \tag{2.21}$$

încă cu presupunerea că 2.15 este validă.

În demonstraţia teoremei 2.2.2 am găsit că 2.15 este valabilă dacă $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sunt definite prin 2.7 cu $\varphi = \chi(p)$, unde χ este convexă şi satisface 2.17. Alegem un şir χ_ν de funcţii convexe ce satisfac 2.17, astfel încât $\chi_\nu(t)$ este independent de ν dacă $t \leq 0$, dar $\chi_\nu \nearrow \infty$ când $\nu \to \infty$ dacă $t > 0$. Putem pentru orice ν să alegem $g_j^\nu, \ j = 1, \ldots, n$, astfel încât

$$v = -\sum_1^n \partial g_j^\nu/\partial z_j, \tag{2.22}$$

şi

$$\int \sum_{1}^{n} |g_j^\nu|^2 exp(\chi_\nu(p) - \psi) d\mu \leq C \tag{2.23}$$

pentru o anumită constantă C care nu depinde de ν, deoarece în membrul drept al lui 2.21, integrarea se face numai pe K_0, iar $\chi_\nu(p)$ este independent de ν acolo. Acum, $\chi_1 \leq \chi_\nu$, deci putem alege un subşir g^ν ce converge slab în spaţiul Hilbert $L^2_{(0,1)}(\Omega, \psi - \chi_1(p))$ la o limită g. Din 2.23, obţinem $g = 0$ unde $p > 0$ şi 2.22 conduce la $v = -\sum_1^n \partial g_j/\partial z_j$ în sensul distribuţiilor, adică

$$\int u\bar{v} d\mu = \int \sum_{1}^{n} \partial u/\partial \bar{z}_j \bar{g}_j d\mu \tag{2.24}$$

pentru orice $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Cum v şi g se anulează în afara lui K_0, iar u este analitică pe o vecinătate a lui K_0, rezultă că 2.20 este îndeplinită. Demonstraţia este acum completă. □

Următoarea reformulare a lemei 2.3.1 este mai folositoare:

Teorema 2.3.2. *Fie Ω un deschis pseudoconvex în $\mathbb{C}^n$ şi K o submulţime compactă a lui Ω, astfel încât $\hat{K}_\Omega = K$.*

Atunci, orice funcţie care este analitică pe o vecinătate a lui K poate fi aproximată uniform pe K cu funcţii din $A(\Omega)$.

Demonstraţie. Fie u analitică pe o vecinătate ω a lui K. Atunci, putem alege o funcţie strict plurisubarmonică $p \in C^\infty(\Omega)$ astfel încât p satisface ipotezele lemei 2.3.1 şi K este în interiorul lui K_0, care la rândul său se află în interiorul lui ω. Din lema 2.3.1 rezultă că există un şir $u_j \in A(\Omega)$ astfel încât $u_j - u \to 0$ în $L^2(K_0)$. Folosind teorema care ne asigură că date fiind Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}^n$, $K \subset \Omega$ o mulţime compactă si α un multiindice, există o constantă $C_{\alpha,K}$ pentru care

$$\sup_K |\partial^\alpha u| \leq C_{\alpha,K} \|u\|_{L_1(\omega)}, \forall u \in A(\Omega),$$

deducem că acest lucru implică $u_j - u \to 0$ uniform pe K. Cu aceasta, demonstraţia este completă. □

Capitolul 3

Varietăţi Stein

3.1 Definiţii

Definiţia 3.1.1. *Un spaţiu topologic Hausdorff Ω se numeşte varietate de dimensiune n dacă orice punct din Ω are o vecinătate care este homeomorfă cu o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$.*

Conceptul de varietate complex analitică se defineşte prin alegerea unei familii de homeomorfisme care are niste proprietăţi suplimentare:

Definiţia 3.1.2. *O varietate Ω (de dimensiune $2n$) se numeşte varietate complex analitică de dimensiune n dacă există o familie $\mathcal{F}$ de homeomorfisme κ, numite sistem de coordonate complex analitice de pe mulţimile $\Omega_\kappa \subset \Omega$ pe mulţimile deschise $\tilde{\Omega}_\kappa \subset \mathcal{C}^n$ astfel încât:*

1. *Dacă κ şi $\kappa' \in \mathcal{F}$, atunci aplicaţia*

$$\kappa'\kappa^{-1} : \kappa(\Omega_\kappa \cap \Omega_{\kappa'}) \to \kappa'(\Omega_\kappa \cap \Omega_{\kappa'})$$

   între mulţimile deschise din $\mathcal{C}^n$ este olomorfă. (Interschimbând κ cu κ' găsim că şi aplicaţia inversă este de asemenea olomorfă.

2. $$\bigcup_{\kappa \in \mathcal{F}} \Omega_\kappa = \Omega$$

3. *Dacă κ_0 este un homeomorfism de la $\Omega_0 \subset \Omega$ la o mulţime deschisă din $\mathbb{C}^n$ şi aplicaţia*

$$\kappa\kappa_0^{-1} : \kappa_0(\Omega_0 \cap \Omega_\kappa) \to \kappa(\Omega_0 \cap \Omega_\kappa)$$

   împreuna cu inversa sa sunt olomorfe pentru orice $\kappa \in \mathcal{F}$, rezultă $\kappa_0 \in \mathcal{F}$.

Condiţia (3) din această definiţie este intr-un fel "în plus", pentru că dacă $\mathcal{F}$ satisface (1) şi (2), atunci putem extinde $\mathcal{F}$ într-un singur mod la o familie $\mathcal{F}'$ ce satisface (1), (2) şi (3).

De fapt, singura astfel de familie $\mathcal{F}'$ este mulţimea tuturor aplicaţiilor ce satisfac (3) relativ la $\mathcal{F}$. Prin urmare, o structură complex analitică poate fi definită de o familie arbitrară $\mathcal{F}$ ce verifică (1) şi (2), dar dacă se renunţă la condiţia (3), atunci există multe familii ce definesc aceeaşi structură.

O asemenea familie se numeşte mulţime completă de coordonate olomorfe şi două astfel de mulţimi sunt echivalente dacă definesc aceeaşi structură.

Vom spune că o func tie cu valori în $\mathbb{C}^n$ $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ definită în vecinătatea unui punct w din Ω reprezintă un sistem local de coordonate in w dacă defineşte o aplicaţie a unei vecinătăţi a lui w în $\mathbb{C}^n$ care este sistem de coordonate în sensul de mai sus.

Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt funcţii olomorfe într-o vecninătate a lui

$$z(w) = (z_1(w), z_2(w), \ldots, z_n(w)) \in \mathbb{C}^n,$$

atunci $(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z))$ este un alt sistem de coordonate în w dacă şi numai dacă

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$$

în $z(w)$. Aceasta rezultă din Teorema funcţiilor implicite.

Definiţia 3.1.3. *Fie Ω_1 şi Ω_2 varietăţi complex analitice. O aplicaţie $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ se numeşte analitică dacă $\kappa_2 \circ f \circ {\kappa_1}^{-1}$ este analitică (unde este definită) pentru toate sistemele de coordonate κ_1 în Ω_1 şi κ_2 în Ω_2.*

Bineînteles, este suficient să alegem numai sisteme de coordonate în mulţimile complete de sisteme de coordonate în Ω_1 şi Ω_2. Î n particular, am definit acum conceptul de funcţii analitice pe o varietate complex analitică Ω; mulţimea acestor funcţii cu topologia convergenţei uniforme pe submulţimile compacte din Ω va fi notată cu $A(\Omega)$.

Este evident că $A(\Omega)$ este un spaţiu Fréchet dacă Ω este numărabilă la infinit, adică dacă există un şir de submulţimi compacte $K_1, K_2, \ldots$ astfel încât orice submulţime compactă a lui Ω este conţinută într-un K_j. De fapt, topologia pe $A(\Omega)$ este definită de seminormele

$$A(\Omega) \ni f \mapsto \sup_{K_j} |f|, \; j = 1, 2, \ldots$$

şi completitudinea este evidentă.

Este clar că orice submulţime deschisă a unei varietăţi complexe Ω are o structură de varietate complex analitică, deci conceptul de funcţie analitică definită pe o submulţime deschisă este de asemenea bine definit.

Remarcăm de asemenea că dacă f este analitică pe $\tilde{\Omega}_\kappa \subset \mathbb{C}^n$, atunci $f \circ \kappa$ este analitică pe Ω_κ. Prin urmare, din definiţia varietăţii complex analitice, deducem că funcţiile analitice există local. Vom defini acum o clasă de varietăţi unde există în plus suficiente funcţii analitice global definite. Aşa cum vom vedea, teoria funcţiilor complexe pe astfel de varietăţi se comportă in mare la fel ca cea pentru domenii de olomorfie din $\mathbb{C}^n$.

Definiţia 3.1.4. *O varietate complex analitică Ω de dimensiune n care este numărabilă la infinit se numeşte varietate Stein dacă*

(α) *Ω este olomorf convexă, adică*

$$\hat{K} = \{z \mid z \in \Omega, |f(z)| \leq \sup_K |f|, \ \forall f \in A(\Omega)\}$$

este o submulţime compactă a lui Ω pentru orice submulţime compactă K a lui Ω.

(β) *Dacă z_1 şi z_2 sunt puncte distincte în Ω, atunci există $f \in A(\Omega)$ astfel încât*

$$f(z_1) \neq f(z_2).$$

(γ) *Pentru orice $z \in \Omega$, există n funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_n \in A(\Omega)$ care formează un sistem de coordonate în z.*

Exemplu 3.1.5. *Orice domeniu de olomorfie în $\mathbb{C}^n$ este varietate Stein.*

Pentru a da şi alte exemple, avem nevoie de următoarea definiţie:

Definiţia 3.1.6. *O submulţime V a unei varietăţi complex analitice Ω de dimensiune n se numeşte subvarietate analitică de dimensiune m dacă*

1. *V este închisă*
2. *Într-o vecinătate ω a unui punct arbitrar $v \in V$ există coordonate locale $z_1, \ldots, z_n$ astfel încât*
$$\omega \cap V = \{w \mid w \in \omega, z_{m+1}(w) = \cdots = z_n(w) = 0\}$$

Putem defini o structură naturală pe V prin intermediul sistemelor de coordonate

$$(z_1, \ldots, z_m)$$

când $(z_1, \ldots, z_n)$ este un sistem de coordonate pentru Ω cu proprietatea enunţată. Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ este un sistem arbitrar de coordonate pentru Ω în $v \in V$, atunci întotdeauna se pot găsi m funcţii dintre acestea care să fie sistem de coordonate pentru V in v. De fapt, din moment ce Jacobianul

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$$

în $z(v)$, se pot alege $i_1, i_2, \ldots, i_m$ pentru care

$$\det\left(\frac{\partial f_{i_\mu}}{\partial z_\nu}\right)_{\mu,\nu=\overline{1,m}} \neq 0.$$

şi rezultă că restricţiile funcţiilor $f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_m}$ la V formează un sistem de coordonate local în v.

3.2 Rezultate simple privind varietăţile Stein

Teorema 3.2.1. *Orice subvarietate a unei varietăţi Stein este o varietate Stein.*

Demonstraţie. (α) şi (β) sunt triviale deoarece restricţia la o subvarietate a unei funcţii analitice pe intreaga varietate este in mod necesar analitică. (γ) rezultă din remarca pe care tocmai am facut-o. □

Această teoremă ar fi fost falsă pentru orice clasă de varietăţi mai mică ce conţine toate spaţiile $\mathbb{C}^n$. De fapt, vom vedea în capitolul 3 că orice varietate Stein de dimensiune n se poate scufunda în $\mathbb{C}^{2n+1}$.

Teorema 3.2.2. *Fie Ω o varietate Stein, K o submulţime compactă a lui Ω şi ω o vecinătate a lui $\hat{K}$. Atunci, există o funcţie $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ astfel încât:*

(*a*) *φ este strict plurisubarmonică.*

(*b*) *$\varphi < 0$ pe K şi $\varphi > 0$ pe $\complement\omega$.*

(*c*) $\{z \mid z \in \Omega,\ \varphi(z) < c\} \subset\subset \Omega,\ \forall c \in \mathbb{R}$.

Să observăm că noţiunea de strict plurisubarmonicitate este bine definită pentru funcţii pe varietăţi complex analitice, deoarece ea este invariantă la shimbări analitice de coordonate.

Demonstraţie. Cu condiţia (α) din definiţia varietăţii Stein, putem alege un şir de submulţimi compacte ale lui Ω, $K_1, K_2, \dots$ astfel încât $\hat{K}_j = K_j$, $\cup K_j = \Omega$ şi K_j se află în interiorul lui K_{j+1} pentru orice j. Fie ω_j o submulţime deschisă astfel încât

$$K_j \subset \omega_j \subset K_{j+1},\ \omega_1 \subset \omega.$$

Din moment ce $\hat{K}_j = K_j$, putem pentru orice j să alegem funcţiile $f_{jk} \in A(\Omega),\ k = 1, \dots, k_j$ cu valoarea absolută < 1 pe K_j pentru care $\max_k |f_{jk}(z)| > 1,\ z \in K_{j+2} \setminus \omega_j$. Ridicând f_{jk} la puteri mari, putem aranja să se întâmple:

$$\sum_{k=1}^{k_j} |f_{jk}(z)|^2 < 2^{-j},\ z \in K_j\ , \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{k_j} |f_{jk}(z)|^2 > j,\ z \in K_{j+2} \setminus \omega_j \tag{3.2}$$

În vederea condiţiei (γ), în definiţie varietăţii Stein putem presupune în plus că pentru orice punct din K_j, printre funcţiile $f_{jk},\ k = 1, \dots, k_j$ putem găsi n funcţii care să formeze un sistem de coordonate în punctul fixat. Considerăm acum

$$\varphi(z) = \sum_{j,k} |f_{jk}(z)|^2 - 1.$$

Această sumă converge datorită condiţiei 3.1 şi $\varphi(z) > j-1$ pentru $z \in \complement\omega_j$ datorită condiţiei 3.2. φ este de fapt în $C^\infty(\Omega)$, pentru că seria

$$\sum_{j,k} f_{jk}(z)\overline{f_{jk}(\zeta)}$$

converge uniform pe mulţimile compacte din $\Omega\times\Omega$. deci suma este analitică în z si conjugata sa complexă este analitică în ζ. Este de asemenea uşor de observat că φ este plurisubarmonică. φ este chiar strict plurisubarmonică deoarece, dacă pentru un anume z,

$$\sum_{l=1}^{n} w_l \frac{\partial f_{jk}}{\partial z_l}(z) = 0, \ \forall j, k$$

atunci $w = 0$ pentru că există n funcţii f_{jk} ce formează un sistem local de coordonate în z. Aceasta incheie demonstraţia.

□

Remarcă 3.2.3. *În demonstraţia teoremei am folosit numai condiţiile* (α) *şi* (γ) *din definiţia varietăţii Stein. Vom vedea în următorul capitol că aceasta conduce la concluzia că* (β) *este o consecinţa a celorlalte două condiţii.*

3.3 Existenţa soluţiilor ecuaţiei $\bar{\partial}$ pe varietăţi complexe

Fie Ω o varietate complex analititcă de dimensiune complexă n, care este numărabilă la infinit. Descompunerea formelor diferenţiale în forme de tip (p, q) şi definiţia operatorului $\overline{\partial}$ pot fi imediat extinse la forme si funcţii pe varietatea Ω, pentru că toate aceste concepte sunt invariante la schimbări de coordonate.

Pentru a extinde tehnicile de spaţii Hilbert folosite anterior, trebuie să introducem norme hermitiene pe formele diferenţiale pe Ω. Pentru aceasta, alegem o metrică hermitiană pe Ω, adică o metrică riemanniană care în orice sistem de coordonate analitice $z_1, z_2, \ldots, z_n$ este de forma

$$\sum_{j,k=1}^{n} h_{jk} dz_j d\overline{z}_k$$

unde h_{jk} este o matrice hermitiană pozitiv definită cu coeficienţi din C^∞. Existenţa unei astfel de structuri hermitiene ete trivială local şi se poate demonstra uşor şi global, cu ajutorul partiţiei unităţii. Forma volum invariantă o vom nota cu dV.

Dacă f este o formă de tip $(1, 0)$ şi $f = \sum_1^n f_j dz_j$ într-un sistem de coordonate locale, punem

$$\langle f, f\rangle = \sum h^{jk} f_j \overline{f}_k,$$

unde (h^{jk}) este inversa matricei (h_{jk}). Această formă hermitiană este invariantă, deoarece

$$\langle f, f\rangle = \frac{\sup |\sum f_j dz_j|^2}{\sum h_{jk} dz_j d\overline{z}_k}$$

Prin procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt, orice punct din Ω are o vecinătate U în care există n forme $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ de tip $(1,0)$ cu coeficienţi C^∞ astfel încât în orice punct din U are loc:

$$\langle \omega^j, \omega^k\rangle = \delta_{jk},\ j,k = 1,\ldots,n$$

Dacă punem $f = \sum f_j \omega^j$, atunci rezultă că $\langle f,f\rangle = \sum_1^n |f_j|^2$. Mai general, o formă diferenţială f de tip (p,q) poate fi scrisă în mod unic sub forma

$$f = {\sum_{|I|=p}}' {\sum_{|J|=q}}' f_{I,J}\omega^I \wedge \overline{\omega}^J,$$

unde $f_{I,J}$ sunt antisimetrice atât în I, cât şi în J, iar $\sum'$ înseamnă că sumarea se face numai după multiindici crescă tori. Putem defini $\langle f, f\rangle$ prin

$$\langle f,f\rangle = |f|^2 = {\sum}' |f_{I,J}|^2 = \frac{1}{p!q!}\sum |f_{I,J}|^2,$$

pentru că această definiţie este independentă de baza ortonormală $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ aleasă.

Ca în lema 2.1.1, putem fixa pentru tot ce va urma un şir $\eta_1, \eta_2, \ldots$ de funcţii $C_0^\infty(\Omega)$ astfel încât $0 \le \eta_\nu \le 1$ şi pe orice compact fixat din Ω, $\eta_\nu = 1$ pentru ν suficient de mare.

Ca un substitut pentru 2.2 vom modifica metrica hermitiană astfel încât

$$|\bar\partial \eta_\nu| \le 1 \ pe\ \Omega,\ \nu = 1,2\ldots \tag{3.3}$$

Pentru a vedea ca acest lucru este posibil, trebuie numai să remarcăm că pentru o metrică hermitiană dată putem alege o funcţie M ce clasă C^∞ pe Ω astfel încât

$$|\bar\partial \eta_\nu| \le M,\ \forall \nu = 1,2,\ldots$$

De fapt, aceasta nu însemnă decât un numar finit de margini pentru M pe orice compact din Ω. Dacă înlocuim metrica cu

$$M^2 \sum h_{jk} dz_j d\bar z_k,$$

atunci condiţia 3.3 va fi îndeplinită când norma lui η_ν este definită în raport cu noua metrică. În cele ce urmează, vom păstra structura hermitiană şi şirul η_ν fixate.

Fie φ o funcţie $C^2(\Omega)$ şi notăm cu $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$spaţiul tuturor (claselor de echivalenţă ale) formelor de tip (p,q) astfel încât coeficienţii sunt măsurabili în toate sistemele de coordonate locale şi

$$\|f\|^2_\varphi = \int |f|^2 e^{-\varphi} dV < \infty.$$

Operatorul $\bar{\partial}$ defineşte operatorii liniari, închişi, dens definiţi:

$$T : L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi) \to L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi)$$

şi

$$S : L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi) \to L^2_{(p,q+2)}(\Omega, \varphi).$$

Lema 3.3.1. *$D_{(p,q)}(\Omega)$ este dens în $D_{T^*} \cap D_S$ pentru norma grafic*

$$f \mapsto \|f\|_\varphi + \|T^* f\|_\varphi + \|Sf\|_\varphi.$$

Demonstraţie. Vom repeta, in esenţă, demonstraţia de la lema 2.1.1. Deoarece avem

$$S(\eta_\nu f) - \eta_n u S(f) = \bar{\partial}\eta_\nu \wedge f, \ f \in D_S,$$

rezultă din 3.3 că

$$|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S(f)|^2 \le |f|^2, \ f \in D_S.$$

Mai mult, avem:

$$((T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f), u)_\varphi = -(f, \bar{\partial}\eta_\nu \wedge u)_\varphi, \ f \in D_{T^*}, \ u \in D_{(p,q)},$$

ceea ce dă:

$$|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f|^2 \le |f|^2.$$

Prin urmare, folosind teorema de convergenţă dominată, $\eta_\nu f \to f$ în norma grafic pentru $f \in D_{T^*} \cap D_S$. În consecinţă, este suficient să aproximăm elementele din $D_{T^*} \cap D_S$ cu suport compact şi cu ajutorul partiţiei unităţii, reducem demonstraţia la cazul în care suportul se află într-o hartă de coordonate. În această situaţie, putem folosi o lemă clasică a lui Friedrichs:

Lema 3.3.2. ***[Friedrichs]*** *Fie $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ şi $\int \varphi dx = 1$, fie $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ cu suport compact şi considerăm o funcţie a de clasă C^1 într-o vecinătate a lui* $\mathrm{supp}(v)$. *Punem*

$$(J_\epsilon v)(x) = \int v(x - \epsilon y)\varphi(y) dy.$$

Atunci, $aD_k J_\epsilon v - J_\epsilon(aD_k v) \to 0$ în L^2 când $\epsilon \to 0$.

Aici, $aD_k v$ este definit în sensul teoriei distribuţiilor, $D_k = \partial/\partial x_k$.

Demonstraţia lemei Friedrichs. Enunţul este evident pentru $v \in C^1$. Este deci suficient să demonstrăm inegalitatea

$$\|aD_k J_\epsilon v - J_\epsilon(aD_k v)\|_{L^2} \le C\|v\|_{L^2},$$

pentru ϵ mic, presupunând că a are derivate mărginite pe tot $\mathbb{R}^N$. Un simplu calcul ne arată că:

$$W_\epsilon(x) = aD_k J_\epsilon v(x) - J_\epsilon(aD_k v)(x) =$$

$$= \int v(x - \epsilon y)((a(x) - a(x - \epsilon y)\varphi_k(y)/\epsilon + (D_k a)(x - \epsilon y))\varphi(y)dy.$$

În cele de mai sus, am scris $\varphi_k = D_k\varphi$. Dacă C este o margine pentru $|\operatorname{grad} a|$, atunci rezultă:

$$|W_\epsilon(x)| \leq C \int |v(x - \epsilon y)|(|y||\varphi_k(y)| + |\varphi(y)|)dy,$$

deci cu inegalitatea Minkowski pentru integrale obţinem:

$$\|W_\epsilon\|_{L^2} \leq C \int (|y||\varphi_k(y)| + |\varphi(y)|)dy\|v\|_{L^2}.$$

□

Sfârşitul demonstraţiei lemei 3.3.1. Din lema 3.3.2 rezultă imediat că dacă intr-o vecinătate de coordonate unde f are suport compact aplicăm operatorul J_ϵ (la fiecare componentă a) lui f, atunci

$$\|T^*(J_\epsilon f) - J_\epsilon T^* f\|_\varphi \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0,$$

atunci, cu lema 2.1.2,

$$\|T^*(J_\epsilon f) - T^* f\|_\varphi \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0,\ \forall f \in D_{T^*}.$$

Similar se deomnstrează că $S(J_\epsilon f) \to Sf$ dacă $f \in D_S$. Astfel, am încheiat demonstraţia lemei 3.3.1.

□

Fie U o vecinătate de coordonate pe Ω astfel încât există o bază ortonormală $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ de forme de tip $(1, 0)$. În această bază vom scrie acum expresiile operatorilor T^* şi S ce acţionează pe formele $f \in D_{(p,q+1)}$ cu suport în U. Aceasta va demonstra că lema 2.2.1 rămâne neschimbată esenţial pentru aceste forme.

Dacă $u \in C^1(U)$, putem scrie

$$du = \sum_1^n \partial u/\partial\omega^i\omega^i + \sum_1^n \partial u/\partial\bar{\omega}^i\bar{\omega}^i$$

ca o definiţie a operatorilor diferenţiali liniari de ordinul întâi $\partial/\partial\omega_i$ şi $\partial/\partial\bar{\omega}_i$. Atunci, avem $\bar{\partial}u = \sum_1^n \partial u/\partial\bar{\omega}^i\bar{\omega}^i$ ¸ si dacă $f = \sum' f_{I,J}\omega^I\bar{\omega}^J$ rezultă că

$$\bar{\partial}f = \sum_{I,J}{}' \sum_i \partial f_{I,J}/\partial\bar{\omega}^i\bar{\omega}^i \wedge \omega^I \wedge \bar{\omega}^J + \ldots,$$

unde punctele indică termenii în care niciun $f_{I,J}$ nu este derivat; aceştia apar deoarece $\bar{\partial}\omega^i$ şi $\bar{\partial}\bar{\omega}^j$ pot sa nu fie 0. Dacă notăm suma cu Af, atunci, evident, vom avea:

$$|\bar{\partial}f - Af| \leq C|f|,$$

unde C este o constantă independentă de f dacă $\operatorname{supp}(f)$ se află într-un compact din U.

Acum, luăm $u \in D_{(p,q)}$ cu $\mathrm{supp}(u) \in U$ şi forma

$$\int \langle T^* f, u\rangle e^{-\varphi} dV = \int \langle f, \bar{\partial} u\rangle e^{-\varphi} dV = (-1)^p \sum_{I,K}{}' \sum_j \int f_{I,jK} \overline{\partial u_{I,K}/\partial \bar{\omega}^j} e^{-\varphi} dV + \dots \quad (3.4)$$

unde punctele indică din nou termenii fără derivate. Aici, vom integra prin părţi. Mai întâi, observăm că dacă facem notaţia

$$\delta_j w = e^{\varphi} \partial(w e^{-\varphi})/\partial \omega^j,$$

cu formula lui Green deducem că

$$\int \partial v/\partial \bar{\omega}^j \bar{w} e^{-\varphi} dV = -\int v \overline{\delta_j w} e^{-\varphi} dV + \int \sigma_j v \bar{w} e^{-\varphi} dV, \ v, w \in C_0^\infty(U),$$

unde $\sigma_j \in C^\infty(U)$. Integrând prin părţi în 3.4, obţinem:

$$T^* f = (-1)^{p-1} \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^n \delta_j f_{I,jK} \omega^I \wedge \bar{\omega}^K + \dots = Bf + \dots \quad (3.5)$$

unde punctele înlocuiesc termenii în care nu apare niciun $f_{I,jK}$ derivat şi care nu conţin φ. Deducem că $|T^* f - Bf| \leq C|f|$ când f are suportul într-un compact fixat din U. Cu o altă constantă independentă de f şi de φ, obţinem:

$$\|Af\|_\varphi^2 + \|Bf\|_\varphi^2 \leq 2(\|Sf\|_\varphi^2 + \|T^* f\|_\varphi^2) + C\|f\|_\varphi^2. \quad (3.6)$$

Argumentele ce conduc la 2.8 încă se aplică, deci vom obţine:

$$\|Af\|_\varphi^2 + \|Bf\|_\varphi^2 = \int \sum_{I,J}{}' \sum_{j=1}^n |\partial f_{I,J}/\partial \bar{\omega}^j|^2 e^{-\varphi} dV + \quad (3.7)$$

$$+ \int \sum_{I,K}{}' \sum_{j,k=1}^n (\delta_j f_{I,jK} \overline{\delta_k f_{I,kK}} - \partial f_{I,jK}/\partial \bar{\omega}^k \overline{\partial f_{I,kK}}/\partial \bar{\omega}^j) e^{-\varphi} dV$$

Înainte de a repeta integrarea prin parţi ce urmează în secţiunea (2.3), trebuie să considerăm comutatorii operatorilor $\partial/\partial \bar{\omega}^j$ şi δ_k pentru a obţine un substitut pentru 2.11. Pentru aceasta, luăm w o funcţie din $D(U)$ şi forma

$$\bar{\partial} \partial w = \bar{\partial} \sum_{k=1}^n \partial w/\partial \omega^k \omega^k = \sum_{j,k=1}^n \partial^2 w/\partial \bar{\omega}^j \partial \omega^k \bar{\omega}^j \wedge \omega^k + \sum_{i=1}^n \partial w/\partial \omega^i \bar{\partial} \omega^i$$

Din moment ce $\bar{\partial} \omega^i$ este o formă de tip $(1,1)$, putem scrie:

$$\bar{\partial} \omega^i = \sum_{j,k=1}^n c^i_{jk} \bar{\omega}^j \wedge \omega^k \quad (3.8)$$

de unde deducem că:

$$\bar{\partial}\partial w = \sum_{j,k}(\partial^2 w/\partial\bar{\omega}^j\partial\omega^k + \sum_i c^i_{jk}\partial w/\partial\omega^i)\bar{\omega}^j \wedge \omega^k.$$

Dacă înlocuim w cu $\bar{w}$ şi luăm conjugaţii complecşi ai tuturor termenilor, obţinem de asemenea şi:

$$\partial\bar{\partial} w = \sum_{j,k}(\partial^2 w/\partial\omega^j\partial\bar{\omega}^k + \sum_i \bar{c}^i_{jk}\partial w/\partial\bar{\omega}^i)\omega^j \wedge \bar{\omega}^k.$$

Identitatea $\bar{\partial}\partial w = -\partial\bar{\partial} w$ va implica:

$$w_{kj} = \partial^2 w/\partial\bar{\omega}^j\partial\omega^k + \sum_i c^i_{jk}\partial w/\partial\omega^i = \partial^2 w/\partial\omega^k\partial\bar{\omega}^j + \sum_i \bar{c}^i_{jk}\partial w/\partial\bar{\omega}^i, \tag{3.9}$$

unde membrul stâng este o definiţie. Remarcăm că avem cu această notaţie egalitatea:

$$\partial\bar{\partial} w = \sum_{jk} w_{jk}\omega^j \wedge \bar{\omega}^k.$$

Rezultă că w este plurisubarmonică exact atunci când forma $\sum w_{jk} f_j \bar{f}_k$ este pozitiv definită.

Din 3.9 rezultă că:

$$(\delta_k\partial w/\partial\bar{\omega}^j - \partial\delta_k w/\partial\bar{\omega}^j) = \partial^2\varphi/\partial\bar{\omega}^j\partial\omega^k w + \sum_i c^i_{jk}\partial w/\partial\omega^i - \sum_i \bar{c}^i_{jk}\partial w/\partial\bar{\omega}^i,$$

sau dacă folosim definiţia lui δ_j şi 3.9 din nou, cu w înlocuit de φ,

$$(\delta_k\partial w/\partial\bar{\omega}^j - \partial\delta_k w/\partial\bar{\omega}^j) = \varphi_{jk} w + \sum_i c^i_{jk}\delta_i w - \sum_i \bar{c}^i_{jk}\partial w/\partial\bar{\omega}^i. \tag{3.10}$$

Folosind *formula lui Green* şi 3.10, putem acum să integrăm prin părţi în 3.7. Obţinem, în vederea folosirii 3.6,

$$\begin{aligned}\sum_{I,K}{}' \int \sum_{j,k=1}^{n} f_{I,jK}\overline{f_{I,kK}}\varphi_{jk} e^{-\varphi} dV + \sum_{I,J}{}' \int \sum_{j=1}^{n} |\partial f_{I,J}/\partial\bar{\omega}^j|^2 e^{-\varphi} dV \leq \\ \leq 2(\|Sf\|^2_\varphi + \|T^* f\|^2_\varphi) + C\|f\|^2_\varphi + t_1 + t_2 + t_3,\end{aligned} \tag{3.11}$$

unde

$$t_1 = \sum_{I,K}{}' \sum_{i,j,k=1}^{n} \int f_{I,jK}\bar{c}^i_{jk}\overline{\delta_i f_{I,kK}} e^{-\varphi} dV,$$

$$t_2 = -\sum_{I,K}{}' \sum_{i,j,k=1}^{n} \int f_{I,jK} c^i_{kj}\overline{\partial f_{I,kK}/\partial\bar{\omega}^i} e^{-\varphi} dV,$$

$$t_3 = \sum_{I,K}{}' \sum_{j,k} \int (f_{I,jK}\bar{\sigma}_j\overline{\delta_k f_{I,kK}} - f_{I,jK}\sigma_k\overline{\partial f_{I,kK}/\partial\bar{\omega}^j}) e^{-\varphi} dV.$$

În t_1 şi în acei termeni din t_3 care conţin operatorul δ_i, o nouă integrare prin părţi conduce la termeni în care apare doar operatorii diferenţiali $\partial/\partial\bar{\omega}^i$. Dacă acestea sunt estimate cu inegalitatea Cauchy-Schwarz, rezultă din 3.11 că

$$\int \sum_{I,J}{}' |f_{I,J}|^2 \lambda e^{-\varphi} dV + \frac{1}{2}\sum_{I,J}{}' \sum_{j=1}^{n} \int |\partial f_{I,J}/\partial\bar{\omega}^j|^2 e^{-\varphi} dV \leq \\ \leq 2(\|T^* f\|_\varphi^2 + \|Sf\|_\varphi^2 + C\|f\|_\varphi^2) \tag{3.12}$$

pentru toţi $f \in D_{(p,q+1)}$ cu suprotul într-o submulţime compactă fixată a lui U. Aici, C este o constantă, iar λ este cea mai mică valoare proprie a formei hermitiene simetrice

$$\sum \varphi_{jk} t_j \bar{t}_k. \tag{3.13}$$

(Să observăm că λ este independentă de alegerea bazei $\omega^1, \ldots, \omega^n$, deoarece o schimbare de bază însemnă o transformare unitară în variabilele $t_1, \ldots, t_n$.) Estimarea 3.12 este, bineînţeles, de interes atunci când φ este plurisubarmonică.

Putem acum să dăm o versiune gobală pentru 3.12.

Teorema 3.3.3. *Există o funcţie continuă C pe Ω astfel încât*

$$\int (\lambda - C)|f|^2 e^{-\varphi} dV \leq 4(\|T^* f\|_\varphi^2 + \|Sf\|_\varphi^2),\ \forall f \in D_{(p,q+1)}(\Omega). \tag{3.14}$$

Aici, φ este o funcţie arbitrară din $C^2(\Omega)$ şi λ este cea mai mică valoare proprie a formei 3.13, care este, de asemenea, continuă pe Ω.

Constanta 4 poate fi înlocuită cu orice număr mai mare decât 1.

Demonstraţia teoremei 3.3.3. Fie $U_j,\ j = 1, 2, \ldots$ vecinătăţi de coordonate în Ω, unde 3.12 este aplicabilă, alese astfel încât să formeze o acoperire local finită a lui Ω (adică $\cup U_j = \Omega$ şi orice compact din Ω întâlneşte numai un număr finit de mulţimi U_j.) Alegem $\psi \in C_0^\infty(U_j)$ astfel încât

$$\sum \psi_j^2 = 1 \text{ pe } \Omega.$$

(Dacă $\psi'_j \in C_0^\infty(U_j)$ şi $\psi^2 = \sum {\psi'_j}^2 > 0$ peste tot pe Ω, putem alege $\psi_j = \psi'_j/\psi$.) Acum, aplicăm 3.12 pentru $\psi_j f$ şi vom avea:

$$\int \psi_j^2 |f|^2 \lambda e^{-\varphi} dV \leq 4(\|T^* f\|_\varphi^2 + \|Sf\|_\varphi^2) + C_j \int_{U_j} |f|^2 e^{-\varphi} dV.$$

Sumând aceste inegalităţi, obţinem imediat 3.14. □

Teorema 3.3.3 dă un substitut perfect pentru lema 2.2.1. Discuţia noastă poate continua de-acum încolo în direcţiile date de secţiunile (2.3) şi (2.4), aşa că o vom face pe scurt.

Teorema 3.3.4. *Fie Ω o varietate complexă pe care există o funcţie strict plurisubarmonică φ astfel încât $\{z \mid z \in \Omega,\ \varphi(z) < c\} \subset\subset \Omega$ pentru orice $c \in \mathbb{R}$. Atunci, ecuaţia $\bar{\partial}u = f$ are (în sesnul distribuţiilor) o soluţie $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$ pentru orice $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$ pentru care $\bar{\partial}f = 0$.*

Demonstraţie. Vom înlocui funcţia φ din 3.14 cu $\chi(\varphi)$, unde χ este o funcţie crescătoare convexă. Marginea inferioară λ pentru forma 3.13 poate fi înlocuită cu $\chi'(\varphi)\lambda$ (vedem în demonstraţia teoremei 2.2.2), deci obţinem cu teorema 3.3.3

$$\int (\chi'(\varphi)\lambda - C)|f|^2 e^{-\chi(\varphi)} dV \leq 4(\|T^*f\|^2_{\chi(\varphi)} + \|Sf\|^2_{\chi(\varphi)}),\ \forall f \in D_{(p,q+1)}(\Omega).$$

Dacă χ' este rapid crescătoare astfel încât

$$\chi'(\varphi)\lambda - C \geq 4, \tag{3.15}$$

rezultă că

$$\|f\|^2_{\chi(\varphi)} \leq \|T^*f\|^2_{\chi(\varphi)} + \|Sf\|^2_{\chi(\varphi)},\ f \in D_{T^*} \cap D_S, \tag{3.16}$$

dacă aplicăm lema 3.3.1 (Operatorul T^* este, bineînţeles, adjunctul lui T în raport cu norma $\|\cdot\|^2_{\chi(\varphi)}$.) Dacă χ satisface 3.15, teorema 1.1.7, teorema 1.1.8 (şi de asemenea 2.1) ne arată că ecuaţia $\bar{\partial}u = f$ are o soluţie $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \chi(\varphi))$ pentru orice $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \chi(\varphi))$ ce satisface ecuaţia $\bar{\partial}f = 0$, iar u poate fi aleasă astfel încât

$$\|u\|_{\chi(\varphi)} \leq \|f\|_{\chi(\varphi)}, \tag{3.17}$$

Aceasta încheie demonstraţia teoremei. □

Spaţiile $W^s_{(p,q)}$, $0 \leq s \leq \infty$, introduse după Teorema 2.2.2 sunt evident invariante la schimbări analitice de coordonate, deci dacă avem o varietate Ω, spaţiul $W^s_{(p,q)}(\Omega, loc)$ poate fi definit ca mulţimea formelor cu componente ce se gasesc în $W^s_{(p,q)}$ în orice vecinătate de coordonate. Demonstraţia Teoremei 2.2.5 se aplică cu modificările evidente deoarece, pentru formele $f \in D_{T^*} \cap D_S$ cu suport într-o vecinătate de coordonate, obţinem din 3.12 estimări ale derivatelor $\partial f_{I,J}/\partial\bar{\omega}^j$ şi, în consecinţăle derivatelor $\partial f/\partial\bar{z}_j$, dacă z_j sunt coordonate locale. Având în vedere acestea, demonstraţia teoremei următoare se poate face fară dificultate:

Teorema 3.3.5. *Fie Ω o varietate complexă pe care există o funcţie strict plurisubarmonică $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ astfel încât $\{z \mid z \in \Omega, \varphi(z) < c\} \subset\subset \Omega$ pentru orice c. Atunci, ecuaţia $\bar{\partial}u = f$ are o soluţie $u \in W^{s+1}_{(p,q)}(\Omega, loc)$ pentru orice $f \in W^s_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$ pentru care $\bar{\partial}f = 0$. Orice soluţie a ecuaţiei $\bar{\partial}u = f$ are această proprietate pentru $q = 0$.*

Ultimul enunt nu conţine nimic nou în plus pe langa teorema 2.2.5.

Corolar 3.3.6. *În ipotezele teoremei 3.3.5, ecuaţia $\bar{\partial}u = f$ are o soluţie $u \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ pentru orice $f \in C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)$ pentru care $\bar{\partial}f = 0$.*

Teorema 3.3.7. *Fie Ω o varietate complexă şi φ o funcţie strict plurisubarmonică pe Ω astfel încât $K_c = \{z \mid z \in \Omega, \varphi(z) < c\} \subset\subset \Omega$ pentru orice număr real c.*

Atunci, orice funcţie care este analitică pe o vecinătate a lui K_0 poate fi aproximată uniform pe K_0 cu funcţii din $A(\Omega)$.

Demonstraţie. Putem aplica demonstraţia lemei 2.3.1, folosind estimarea 3.16 în loc de 2.15. (Funcţia φ din teorema 3.3.7 este funcţia p din lema 2.3.1.) Nu vom mai repeta detaliile demonstraţiei. □

Corolar 3.3.8. *Dacă Ω este o varietate Stein şi K o submulţime compactă a lui Ω cu $\hat{K} = K$, atunci orice funcţie care este analitică pe o vecinătate a lui K poate fi aproximată uniform pe K cu funcţii din $A(\Omega)$.*

Este posibil acum să demonstrăm o reciprocă a teoremei 3.2.2.

3.4 Problema Levi pentru varietăţi complexe

Teorema 3.4.1. *O varietate complexă Ω este varietate Stein dacă şi numai dacă există o funcţie strict plurisubarmonică $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ astfel încât $\Omega_c = \{z \mid z \in \Omega, \varphi(z) < c\} \subset\subset \Omega$ pentru orice număr real c. Mulţimile $\overline{\Omega_c}$ sunt atunci $A(\Omega)$-convexe*

Demonstraţie. Teorema 3.2.3 ne asigură că funcţii φ cu aceste proprietăţi există în orice varietate Stein. Reciproc, presupunem că o astfel de funcţie există pe varietatea Ω. Trebuie să demonstrăm că sunt îndeplinite cele 3 condiţii, $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ din definiţia 3.1.4. Mai întâi vom demonstra o lemă.

Lema 3.4.2. *Pentru orice $z^0 \in \Omega$, există o vecinătate ω_0 a lui z^0 şi o funcţie analitică $u_0 \in A(\omega_0)$ astfel încât $u_0(z^0) = 0$ şi*

$$\Re(u_0(z)) < \varphi(z) - \varphi(z^0) \ \forall z \in \omega_0, z \neq z^0$$

Demonstraţie. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ coordonate locale în punctul z^0, astfel încaât coordonatele lui z^0 sunt toate 0. Seria Taylor a lui φ se poate scrie sub forma:

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \Re(u_0(z)) + \sum_{j,k=1}^{n} \partial^2\varphi(0)/\partial z_j \partial \bar{z}_k z_j \bar{z}_k + O(|z|^3),$$

unde u_0 este polinom de gradul ≤ 2 cu $u_0(0) = 0$. Cum forma hermitiană este pozitiv definită, rezultă că

$$\varphi(z) > \varphi(0) + \Re(u_0(z)), \ z \neq 0,$$

într-o vecinătate a originii. Astfel, am încheiat demonstraţia. □

Încheierea demonstraţiei Teoremei 3.4.1

Fie z^0 un punct arbitrar în Ω. Vom demonstra că există coordonate locale în z^0 formate din funcţii din $A(\Omega)$ că z^0 nu se află în $A(\Omega)$-acoperirea lui $\overline{\Omega_c}$ pentru orice $c < \varphi(z^0)$ şi că pentru orice alt punct z^1 cu $\varphi(z^1) \leq \varphi(z^0)$, există o funcţie $f \in A(\Omega)$ cu $f(z^0) \neq f(z^1)$. Aceasta va încheia, bineînţeles, demonstraţia teoremei.

Alegem u_0 şi ω_0 în acord cu lema 3.4.2 astfel încât $z^1 \notin \omega_0$ şi ω_0 este acoperită de o singură hartă de coordonate locale. Atunci, considerăm alte vecinătăţi ω_1 şi ω_2 astfel încât

$$\omega_1 \subset\subset \omega_2 \subset\subset \omega_0.$$

Fie ψ o funcţie din $C_0^\infty(\omega_2)$ care este egală cu 1 pe ω_1. Vom folosi ψ ca o funcţie standard de secţiune. Din moment ce suportul formei $\bar{\partial}\psi$ se află în $\bar{\omega}_2 \setminus \omega_1$, putem alege $a > \varphi(z^0)$ şi $\epsilon > 0$ astfel încât

$$\Re(u_0(z)) < -\epsilon,\ \forall z \in \operatorname{supp}(\bar{\partial}\psi)\ cu\ \varphi(z) < a. \tag{3.18}$$

Din demonstraţia teoremei 3.3.4 pentru operatorul $\bar{\partial}$ pe Ω_a, rezultă că există o funcţie $\varphi_a \in C^\infty(\Omega_a)$, mărginită inferior pe Ω_a, astfel încât ecuaţia $\bar{\partial}v = f$, pentru orice $f \in L^2_{(0,1)}(\Omega_a, \varphi_a)$ cu $\bar{\partial}f = 0$ are o soluţie $v \in L^2(\Omega_a, \varphi_a)$ cu

$$\|v\|_{\varphi_a} \leq \|f\|_{\varphi_a}. \tag{3.19}$$

Cu corolarul 3.3.6, v este indefinit derivabilă dacă f este indefinit derivabilă.

Considerăm acum u o funcţie analitică pe ω_0 şi punem pentru un parametru pozitiv t (mare)

$$u_t = \psi u e^{tu_0} - v_t. \tag{3.20}$$

Vrem să alegem v_t astfel încât $u_t \in A(\Omega_a)$ şi v_t este mic. Pentru a putea face aceasta, observăm că u_t este analitică dacă

$$\bar{\partial}v_t = ue^{tu_0}\bar{\partial}\psi = f_t \tag{3.21}$$

unde ultima egalitate este o definiţie. Cu 3.18, obţinem estimarea: $\|f\|_{\varphi_a} = O(e^{-\epsilon t})$, pentru u fixat, deci aplicând 3.19, deducem că 3.21 are o soluţie v_t cu

$$\|v_t\|_{\varphi_a} = O(e^{-\epsilon t}),\ t \to \infty \tag{3.22}$$

Ecuaţia 3.21 ne asigură, in particular, că v_t este analitică pe complementul suportului lui $\bar{\partial}\psi$ în Ω_a. Prin urmare, folosind rezultatul care ne asigură că date fiind Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}^n$, $K \subset \Omega$ o mulţime compactă si α un multiindice, există o constantă $C_{\alpha,K}$ pentru care

$$\sup_K |\partial^\alpha u| \leq C_{\alpha,K}\|u\|_{L_1(\omega)}, \forall u \in A(\Omega), \tag{3.23}$$

obţinem că $u_t(z^1) = v_t(z^1) \to 0$ şi $u_t(z^0) = u(z^0) + v_t(z^0) \to u(z^0)$ când $t \to \infty$. Deoarece $u(z^0)$ poate fi ales egal cu 1, rezultă că $u_t(z^1) \neq u_t(z^0)$ dacă t este suficient de mare. Folosind teorema 3.3.7, putem aproxima u_t pe $\Omega_{\varphi(z^0)}$ suficient de bine cu o funcţie $f \in A(\Omega)$ astfel încât $U(z^0) \neq U(z^1)$. Aceasta demonstrează condiţia (β).

Mai mult, 3.22 implică:

$$\int_{\Omega_c} |u_t|^2 dV \to 0,\ t \to \infty,$$

pentru orice $c < \varphi(z^0)$. Rezultă (folosind din nou 3.23) că $u_t \to 0$ uniform pe submulţimile compacte ale lui Ω_c. Dacă $c' < c$, atunci $|u_t| < \frac{1}{2}$ pe $\Omega_{c'}$ pentru t mare, în timp ce $u_t(z^0) \to 1$. Aproximând u_t cu funcţii din $A(\Omega)$, folosind teorema 3.3.7, deducem că z^0 nu este în $A(\Omega)$-acoperirea lui $\overline{\Omega_{c'}}$, pentru orice $c' \leq \varphi(z^0)$. Prin urmare, $A(\Omega)$-acoperirea lui $\overline{\Omega_{c'}}$ este egală cu $\overline{\Omega_{c'}}$ pentru orice c'. Astfel, am demonstrat că este îndeplinită condiţia (α).

În final, remarcăm că dacă funcţia $u \in A(\omega_0)$ este aleasă astfel încât $u(z^0) = 0$, având în vedere 3.23, deducem că $\partial u_t = \partial u - \partial v_t$ în z^0 şi $\partial v_t \to 0$ în z^0, iar de aici rezultă că ∂u_t converge la ∂u în z^0 pentru $t \to \infty$. Dacă $u^1, u^2, \ldots, u^n$ este un sistem de coordonate în z^0, format din funcţii care se anulează în acest punct, jacobianul corespunzător funcţiilor $u_t^1, u_t^2, \ldots, u_t^n \in A(\Omega_a)$ în raport cu $u^1, u^2, \ldots, u^n$ trebuie să conveargă la $\alpha \neq 0$ pentru $t \to \infty$. Folosind teorema 3.3.7, putem aproxima aceste funcţii suficient de bine cu funcţii $U^1, U^2, \ldots, U^n \in A(\Omega)$ astfel încât jacobianul lui $(U^1, \ldots, U^n)$ în raport cu $u^1, u^2, \ldots, u^n$ este de asemenea $\neq 0$ în z^0. În concluzie, şi condiţia (γ) din definiţia varietăţii Stein este îndeplinită.

□

Corolar 3.4.3. *Condiţia (β) din definiţia varietăţii Stein este o consecinţă a celorlalte ipoteze.*

Demonstraţie. Aceasta este o consecinţă imediată a teoremei 3.12 şi a remarcii de dupa teorema 3.2.3. □

Bibliografie

[1] Lars Hörmander, *An introduction to Complex Analysis in several variables.* North-Holland, Amsterdam, 1990.

[2] Jorge Mujica, *Complex Analysis in Banach spaces.* North-Holland, Amsterdam, 1986.

[3] Takeo Ohsawa, *Analysis of Several Complex Variables.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 2002.