Scoala Normala Superioara Bucuresti
Sectia de Matematica

Lucrare de dizertatie

Limbajul 2-categoriilor si aplicatii in geometria algebrica

Structuri de schimb si cele patru operatii ale lui Grothendieck

Indrumator stiintific:
Conf.Dr. Razvan Litcanu

Absolventa:
Oana Agrigoroaiei

2007

Cuprins

Introducere **1**

1 Preliminarii 2-categoriale **3**

2 Adjunctii in 2-categorii **8**
2.1 Aplicatii relativ la 2-functori 18
2.2 Autoechivalente ale unui 2-functor 20

3 Structuri de schimb. Cross functori **23**
3.1 Cross functori 28

4 Prezentarea rezultatului principal al lucrarii **31**
4.1 Elemente de geometrie algebrica 31
4.2 Categorii triangulate 32
4.3 Enuntarea rezultatului principal 34

Introducere

Teoria categoriilor ofera o modalitate de a organiza structurile matematice si relatiile dintre ele. Majoritatea conceptelor prezente in teoria categoriilor: dualitate,functor, echivalenta, adjunctie, pot fi prezentate in contextul categoriilor inalt-dimensionale. Intre acestea 2-categoriile ocupa un loc important, acest fapt fiind evidentiat si de exemplul clasic de 2-categorie, anume **Cat**, categoria tuturor categoriilor.

Anume, o 2-categorie (in sens strict) poate fi descrisa informal ca o categorie cu "morfisme intre morfisme", ce pot fi compuse atat orizontal cat si vertical, cu o regula de schimb intre aceste doua tipuri de compunere. Se pot defini si 2-categorii in sens slab, conoscute si sub numele de bicategorii. In exemplul anterior, morfismele sunt functorii iar morfismele intre morfisme sunt transformarile naturale. Un alt exemplu clasic este cel al unei 2-categorii cu un singur obiect - in acest mod se regaseste notiunea de categorie monoidala.

Scopul acestei lucrari este familiarizarea cu limbajul 2-categoriilor, cu accentul pus pe adjunctii in 2-categorii. O alta notiune studiata este cea de structura de schimb intre 2-functori. Folosind acest limbaj se poate enunta rezultatul principal al lucrarii [1]: "Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique". Acest rezultat ofera o modalitate de constructie pentru analoagele celor 4 operatii ale lui Grothendieck din coomologia étale, anume $Rf^*, Rf_*, Rf^!$ si $Rf_!$. Demonstratia acestui rezultat nu este prezentata, dar si aceasta foloseste in mod esential rezultate din teoria 2-categoriilor.

1 Preliminarii 2-categoriale

Definitia 1.1. Numim 2-categorie o categorie $\mathcal{D}$ in care fiecare clasa $\mathcal{D}(X,Y)$ este la randul sau o categorie si pentru care compunerea

$$\circ : \mathcal{D}(Y,Z) \times \mathcal{D}(X,Y) \to \mathcal{D}(X,Z)$$

este un functor asociativ. In plus, id_{id_X} sunt identitati pentru acest functor, i.e. $\circ(id_{id_X}, \alpha) = \alpha, \circ(\beta, id_{id_X}) = \beta$.

Morfismele $f : X \to Y$ ale categoriei $\mathcal{D}$ (i.e. obiectele categoriilor $\mathcal{D}(X,Y)$) sunt numite 1-morfisme, iar morfismele $\alpha : f \to g$ ale categoriei $\mathcal{D}(X,Y)$ sunt numite 2-morfisme.

Observatii si notatii:

- In aceasta lucrare prin functor intelegem functor covariant, functorii contravarianti de la o categorie $\mathcal{C}$ intr-o (2-)categorie $\mathcal{D}$ fiind considerati ca functori de la $\mathcal{C}^{op}$ in $\mathcal{D}$.

- Cand scriem $X \in Ob(\mathcal{D})$ sau $f \in \mathcal{D}(X,Y)$, intelegem prin aceasta ca X este obiect al $\mathcal{D}$, respectiv f este un 1-morfism de la X la Y.

- un 2-morfism $\alpha : f \to g$, unde $f, g \in \mathcal{D}(X,Y)$ va fi reprezentat si printr-o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

- daca $\alpha : f \to f'$ si $\beta : g \to g'$ notam cu $\beta * \alpha : g \circ f \to g' \circ f'$ imaginea prin functorul $\circ$ a perechii $(\beta, \alpha) : (g,f) \to (g',f')$. De asemenea, notam $\beta * id_f$ cu $b * f$ si $id_g * \alpha$ cu $g * \alpha$. Faptul ca id_{id_X} sunt identitati pentru acest functor se traduce in aceasta notatie prin $\alpha * id_X = id_Y * \alpha = \alpha$.

- deoarece compunerea este functor rezulta ca pentru

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "f'" description] \arrow[r, bend right=60, "f''"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow\alpha'"] & Y \arrow[r, bend left=60, "g"] \arrow[r, "g'" description] \arrow[r, bend right=60, "g''"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow\beta'"] & Z \end{tikzcd}$$

avem $(\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) = (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha)$ (in aceasta relatie $\circ$ este compunerea de 2-morfisme), i.e. diagrama de mai sus reprezinta acelasi

2-morfism ca oricare din urmatoarele doua diagrame:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left=40, "g\circ f"] \arrow[rr, "g'f'" description] \arrow[rr, bend right=40, "g''\circ f''"'] \arrow[rr, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow\beta*\alpha"] \arrow[rr, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow\beta'*\alpha'"] & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'\circ\alpha"] & Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta'\circ\beta"] & Z
\end{tikzcd}$$

Exemplul clasic de 2-categorie este **Cat**, categoria tuturor categoriilor mici, ce are ca 1-morfisme functorii iar ca 2-morfisme transformarile naturale.

Definitia 1.2 (Dualitate)**.** Avem trei tipuri de dualitate pentru o 2-categorie $\mathcal{D}$:

1. Notam cu $\mathcal{D}^{1-op}$ 2-categoria obtinuta din $\mathcal{D}$prin schimbarea sensului 1-morfismelor;
2. Notam cu $\mathcal{D}^{2-op}$ 2-categoria obtinuta din $\mathcal{D}$ prin schimbarea sensului 2-morfismelor;
3. Notam cu $\mathcal{D}^{12-op}$ 2-categoria obtinuta din $\mathcal{D}$ prin schimbarea sensului atat 1-morfismelor cat si 2-morfismelor.

Observatia 1.3. O diagrama 2-categoriala scrisa sub forma

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r, "h"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & T \\
X \arrow[ur, "l"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\alpha"] & Y \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

reprezinta compunerea celor doua 2-morfisme din diagrama: $\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left=40, "h\circ l"] \arrow[rr, "hgf" description] \arrow[rr, bend right=40, "k\circ f"'] \arrow[rr, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow h*\alpha"] \arrow[rr, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow\beta*f"] & & T
\end{tikzcd}$

Definitia 1.4. Un 2-functor (in sens slab) de la o categorie $\mathcal{C}$ la o 2-categorie $\mathcal{D}$ consta in urmatorul set de date:

1. o aplicatie F de la $Ob(\mathcal{C})$ la $Ob(\mathcal{D})$;
2. pentru orice $X, Y \in \mathcal{C}$, o aplicatie F de la $\mathcal{C}(X, Y)$ la $\mathcal{D}(FX, FY)$;

3. pentru orice $f : X \to Y, g : Y \to Z$ in $\mathcal{C}$, un 2-izomorfism $c(g,f) : F(gf) \to F(g)F(f)$ (numit *izomorfismul de compunere*) astfel incat

   (a) diagrama:

$$\begin{tikzcd} F(hgf) \arrow[r, "c(hg,f)"] \arrow[d, "c(h,gf)"'] & F(gh)F(f) \arrow[d, "c(h,g)*F(f)"] \\ F(h)F(gf) \arrow[r, "F(h)*c(g,f)"'] & F(h)F(g)F(f) \end{tikzcd}$$

   sa fie comutativa;

   (b) pentru orice $X \in \mathcal{C}$ $F(id_X)$ este o *echivalenta*, adica exista $u : FX \to FX$ incat $u \circ F(id_X)$ si $F(id_X) \circ u$ sunt izomorfe cu id_{FX}.

Observatia 1.5. $F(id_X)$ este o echivalenta daca si numai daca pentru orice obiect Y al $\mathcal{D}$ functorii

$$F(id_X) \circ \_ : \mathcal{D}(Y, FX) \to \mathcal{D}(Y, FX) \text{ si } \_ \circ F(id_X) : \mathcal{D}(FX, Y) \to \mathcal{D}(FX, Y)$$

sunt echivalente de categorii.

Demonstratie. Fie $\alpha : F(id_X) \circ u \to id_{FX}$ 2-izomorfism. Demonstram mai intai ca $F(id_X) \circ \_$ este deplin fidel. Pentru orice $g, g' : Y \to FX$ si orice $a : g \to g'$ avem diagrama comutativa;

$$\begin{tikzcd} F(id_X)u \circ g \arrow[r, "F(id_X)u*a"] \arrow[d, "\alpha*g"'] & F(id_X)u \circ g' \arrow[d, "\alpha*g'"] \\ g \arrow[r, "a"'] & g' \end{tikzcd}$$

deoarece $(\alpha * g') \circ (F(id_X)u * a) = (\alpha \circ id_{F(id_X)u}) * (id_{g'} \circ a) = \alpha * a$ iar $a \circ (\alpha * g) = (id_{id_{FX}} * a) \circ (\alpha * g) = \alpha * a$. In plus $\alpha * g$ este 2-izomorfism cu inversa $\alpha^{-1} * g, \forall g$. De aici rezulta ca pentru orice 2-morfism $b : F(id_X)g \to F(id_X)g'$ exista si este unic 2-morfismul $a = u * b$ incat $b = F(id_X) * a$.

Functorul $F(id_X) \circ \_$ este esential surjectiv pentru ca oricare ar fi $g : Y \to FX$ avem g izomorf cu $F(id_X)ug$ prin intermediul 2-izomorfismului $\alpha^{-1} * g$. Similar se demonstreaza pentru functorul $\_ \circ F(id_X)$.

Reciproc, pentru $Y = FX$ obtinem ca exista $u, v : FX \to FX$ incat $F(id_X) \circ u \simeq id_F X$ si $v \circ F(id_X) \simeq id_{FX}$ si $u \simeq v$.

$\square$

Observatia 1.6. Daca pentru orice morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$ avem un 1-morfism $F'(f) : FX \to FY$ si un 2-izomorfism $\beta_f : F(f) \to F'(f)$ atunci avem o structura de 2-functor pentru $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, transportand prin β izomorfismul de compunere al lui F pe F'. Mai precis, 2-izomorfismul de compunere $c_{F'}$ al lui F' va fi dat de diagrama comutativa

$$\begin{tikzcd} F(g)F(f) \arrow[r, "\beta_g * \beta_f"] \arrow[d, "c_F(g,f)"'] & F'(g)F'(f) \arrow[d, "c_{F'}(g,f)"] \\ F(gf) \arrow[r, "\beta_{gf}"'] & F'(gf) \end{tikzcd} \tag{1}$$

pentru orice morfisme $f : X \to Y, g : Y \to Z$ din $\mathcal{C}$.

Lema 1.7. *Pentru un 2-functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ si un obiect$X$ al $\mathcal{C}$ exista si este unic un 2-izomorfism $\alpha_X : id_{FX} \to F(id_X)$ incat diagrama*

$$\begin{tikzcd} id_{FX} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha_X"'] & id_{FX} id_{FX} \arrow[d, "\alpha_X * \alpha_X"] \\ F(id_X) = F(id_X id_X) \arrow[r, "c(id_X, id_X)"'] & F(id_X)F(id_X) \end{tikzcd} \tag{2}$$

comuta.

In plus, daca utilizam 2-izomorfismele $\alpha_X^{-1} : F(id_X) \to id_{FX}$ ca in Observatia 1.6 pentru a obtine un functor F' cu $F'X = FX$ si

$$F'f = \begin{cases} id_{FX}, \ \textit{daca } f = id_X \\ Ff, \ \textit{in rest} \end{cases}$$

atunci 2-izomorfismele sale de compunere $c_{F'}$ au proprietatea

$$c_{F'}(id_Y, f) = id_{F'(f)} = c_{F'}(f, id_X), \forall f : X \to Y$$

Demonstratie. Pentru orice 2-morfism $\alpha_X : id_{FX} \to F(id_X)$ avem

$$\alpha_X * \alpha_X = (\alpha_X \circ id_{id_{FX}}) * (id_{F(id_X)} \circ \alpha_X) = (\alpha_X * F(id_X)) \circ \alpha_X$$

Deci un 2-izomorfism α face diagrama 2 sa comute daca si numai daca $c(id_X, id_X) = F(id_X) * \alpha_X = \iota d_{F(id_X)} \circ \_(\alpha_X)$. Deoarece functorul $\iota d_{F(id_X)} \circ \_$ este o echivalenta rezulta ca exista si este unic un astfel de α_X.

Demostram acum ca $c_{F'}(f, id_X) = id_{F'(f)}$. Daca $f = id_X$ atunci diagrama (1) se rescrie:

$$\begin{tikzcd} F(id_X)F(id_X) \arrow[r, "\alpha_X^{-1} * \alpha_X^{-1}"] \arrow[d, "c_F(id_X, id_X)"'] & F'(id_X)F'(id_X) = id_{FX} \arrow[d, "c_{F'}(id_X, id_X)"] \\ F(id_X) \arrow[r, "\alpha_X^{-1}"'] & F'(id_X) = id_{FX} \end{tikzcd}$$

si, tinand cont de diagrama comutativa (2) si de faptul ca c_F, α sunt izomorfisme, rezulta ca $c_{F'}(id_X, id_X) = id_{id_{FX}} = id_{F'(id_X)}$.

Daca $f \neq id_X$ atunci utilizam faptul ca $c_{F'}$ verifica 1.4.3, deci urmatoarea diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(f) = F'(f id_X id_X) \arrow[r, "c_{F'}(f,id_X)"] \arrow[d, "c_{F'}(f,id_X)"'] & F'(f)F'(id_X) = F(f) \arrow[d, "c_{F'}(f,id_X)*F'(id_X)"] \\
F(f) = F'(f)F'(id_X) \arrow[r, "F(f)*c_{F'}(id_X,id_X)"'] & F'(f)F'(id_X)F'(id_X) = F(f)
\end{tikzcd}$$

comuta. Folosind faptul ca $c_{F'}(id_X, id_X) = id_{FX}$ si $F'(id_X) = id_{FX}$ obtinem ca $c'_F(f, id_X) \circ c'_F(f, id_X) = c'_F(f, id_X)$. Deoarece $c'_F(f, id_X)$ este izomorfism rezulta ca $c'_F(f, id_X) = id_{F(f)} = id_{F'(f)}$.

Similar se demonstreaza ca $c_{F'}(id_Y, f) = id_{F'(f)}$. $\square$

Observatia 1.8. Aceasta lema arata ca in loc de 2-functori in general se pot folosi 2-functori *strict unitari*, adica 2-functori F pentru care $F(id_X) = id_{FX}$ si $c_F(f, id_X) = id_{F(f)} = c_F(id_Y, f)$.

2 Adjunctii in 2-categorii

Urmatoarea definitie este inspirata din modul in care este definita adjunctia pentru functori in general:

Definitia 2.1. Fie $\mathcal{C}$ o 2-categorie. Spunem ca un 1-morfism $f : X \to Y$ admite adjunctie la dreapta daca exista un 1-morfism $g : Y \to X$ si doua 2-morfisme

$$\eta : id_X \to gf, \delta : fg \to id_Y$$

incat diagramele:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\delta", shift left=3ex] & Y \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, equal] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\eta", shift right=2ex] & Y \arrow[u, "g"'] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd} \quad \text{si} \quad \begin{tikzcd} & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta", shift left=3ex] & X \\ Y \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, equal] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\delta", shift right=2ex] & X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

sa fie egale cu identitatea. Cu alte cuvinte, trebuie ca diagramele:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "f*\eta"] \arrow[dr, equal, "id_f"'] & f \circ g \circ f \arrow[d, "\delta*f"] \\ & f \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, "\eta*g"] \arrow[dr, equal, "id_g"'] & g \circ f \circ g \arrow[d, "g*\delta"] \\ & g \end{tikzcd}$$

sa comute.

Cele doua 2-morfisme η si δ se numesc unitatea respectiv counitatea adjunctiei. Spunem ca perechea (f, g) este o adjunctie, sau ca "g este adjunctie la dreapta pentru f", sau ca "f este adjunctie la stanga pentru g".

Observatia 2.2. Dualitatea schimba intre ele notiunile de "adjunctie la dreapta" si "adjunctie la stanga". Mai precis, urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

- g este adjunctie la dreapta pentru f in $\mathcal{D}$;
- g este adjunctie la stanga pentru f in $\mathcal{D}^{1-op}$;
- g este adjunctie la stanga pentru f in $\mathcal{D}^{2-op}$;
- g este adjunctie la dreapta pentru f in $\mathcal{D}^{12-op}$.

Urmatoarea propozitie subliniaza modul in care definitia pentru adjunctii intre 1-morfisme este corelata cu definitia pentru adjunctii intre functori.

Propozitia 2.3. *Fie 1-morfismul $f : X \to Y$ intr-o 2-categorie $\mathcal{D}$ si g o adjunctie la dreapta pentru f, cu unitatea η si counitatea δ. Fie Z un obiect al $\mathcal{D}$. Atunci:*

1. *Functorii*

$$f \circ \_ : \mathcal{D}(Z, X) \to \mathcal{D}(Z, Y) \text{ si } g \circ \_ : \mathcal{D}(Z, Y) \to \mathcal{D}(Z, X)$$

   formeaza o adjunctie $(f \circ \_, g \circ \_)$

2. *Functorii*

$$\_ \circ g : \mathcal{D}(X, Z) \to \mathcal{D}(Y, Z) \text{ si } \_ \circ g : \mathcal{D}(Y, Z) \to \mathcal{D}(X, Z)$$

   formeaza o adjunctie $(\_ \circ f, \_ \circ g)$

Demonstratie. Notam $F := f \circ \_$ si $G := g \circ \_$. Consideram transformarile naturale:

$$\bar{\eta} : id_{\mathcal{D}(Z,X)} \to GF, \bar{\eta}_h = \eta * h : h \to g \circ f \circ h$$
$$\bar{\delta} : FG \to id_{\mathcal{D}(Z,Y)}, \bar{\delta}_h = \delta * h : f \circ g \circ h \to h$$

Trebuie sa demonstram ca diagramele

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\bar{\eta}_G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, "G\bar{\delta}"] \\ & G \end{tikzcd} \quad \text{si} \quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\bar{\eta}"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, "\bar{\delta}_F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

comuta. Pentru prima diagrama avem, pentru orice 1-morfism $h : Z \to Y$, $(G\bar{\delta} \circ \bar{\eta}_G)_h = G(\delta * h) \circ (\eta * Gh) = (g * \delta * h) \circ (\eta * gh) = ((g * \delta) \circ (\eta * g)) * h = h$. Similar se demonstreaza si comutativitatea celei de-a doua diagrame. $\square$

Lema 2.4. *Fie 1-morfismele $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f'} Z$ intr-o 2-categorie $\mathcal{D}$. Daca (f, g) si (f', g') sunt adjunctii cu unitatea si counitatea (η, δ), respectiv (η', δ') atunci $(f' \circ f, g' \circ g)$ adjunctie cu unitatea si counitatea date de:*

$$\begin{tikzcd} & & X \\ & \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & Y \arrow[u, "g"'] \\ X \arrow[rruu, equal] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[ru, equal] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta'"] \arrow[r, "f'"'] & Z \arrow[u, "g'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & Z \\ & \arrow[r, phantom, "\delta'\Uparrow"] & Y \arrow[u, "f'"'] \\ Z \arrow[rruu, equal] \arrow[r, "g'"'] & Y \arrow[ru, equal] \arrow[r, phantom, "\delta\Uparrow"] \arrow[r, "g"'] & X \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Demonstratie. Avem unitatea $\eta'' = (g * \eta' * f) \circ \eta : id_X \to gg'f'f$ si co-unitatea $\delta'' = \delta' \circ (f' * \delta * g') : f'fgg' \to id_Z$. Diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f'f"] & Z \\
X \arrow[ur, equal] \arrow[r, "f'f"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\eta''"] & Z \arrow[u, "g'g"'] \arrow[ur, equal] \arrow[u, phantom, shift right=3, "\Downarrow\delta''"]
\end{tikzcd}
\quad \text{se rescrie:} \quad
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "f'"] & Z \\
 & & Y \arrow[u, "g"] \arrow[ur, equal] \arrow[u, phantom, shift right=3, "\Downarrow\delta"] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\delta'"] & \\
X \arrow[uurr, equal] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\eta"] & Y \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, equal] & Z \arrow[u, "g'"] \arrow[uurr, equal] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\Downarrow\eta'"]
\end{tikzcd}$$

iar aceasta din urma este identitatea, deoarece η, η' sunt unitati iar δ, δ' sunt co-unitati. Cealalta egalitate se trateaza similar. □

Propozitia 2.5. *Fie $\mathcal{D}$ o 2-categorie si $X, Y \in \mathcal{D}$. Fie $f, f' : X \to Y$ si $\alpha : f \to f'$. Daca (f, g) si (f', g') sunt adjunctii cu unitatea si counitatea (η, δ), respectiv (η', δ') atunci exista si este unic 2-morfismul $\beta : g' \to g$ incat diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
id_X \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta'"'] & g \circ f \arrow[d, "g*\alpha"] \\
g' \circ f' \arrow[r, "\beta * f'"'] & g \circ f'
\end{tikzcd} \tag{3}$$

sa fie comutativa.

In plus, β este dat de

$$\beta : \qquad g' \xrightarrow{\eta * g'} g \circ f \circ g' \xrightarrow{g*\alpha*g'} g \circ f' \circ g' \xrightarrow{g*\delta'} g \tag{4}$$

si face ca diagrama

$$\begin{tikzcd}
id_Y & f \circ g \arrow[l, "\delta"'] \\
f' \circ g' \arrow[u, "\delta'"] & f \circ g' \arrow[l, "\alpha * g'"] \arrow[u, "f*\beta"']
\end{tikzcd}$$

sa fie comutativa.

Demonstratie. Demonstram mai intai unicitatea. Compunand elementele diagramei (3) la stanga cu g' obtinem urmatoarea diagrama comutativa:

$$\begin{tikzcd}
g' \arrow[r, "\eta * g'"] \arrow[d, "\eta' * g'"'] & g \circ f \circ g' \arrow[d, "g*\alpha*g'"] \\
g' \circ f' \circ g' \arrow[r, "\beta * f'g'"'] & g \circ f' \circ g'
\end{tikzcd}$$

Deoarece $\beta * \delta'$ se poate scrie in 2 moduri: $\beta * \delta' = (id_g \circ \beta) * (\delta' \circ id_{f'g'}) = (g * \delta') \circ (\beta * f'g')$ si $\beta * \delta' = (\beta \circ id_{g'}) * (id_{id_Y} \circ \delta') = \beta \circ (g' * \delta')$ obtinem diagrama comutativa

$$\begin{tikzcd}
g' \circ f' \circ g' \arrow[r, "\beta * f'g'"] \arrow[d, "g' * \delta'"] & g \circ f' \circ g' \arrow[d, "g * \delta'"] \\
g' \arrow[r, "\beta"'] & g
\end{tikzcd}$$

Deoarece $(g' * \delta') \circ (\eta' * g') = id_{g'}$, combinand ultimele doua diagrame il obtinem pe β ca in (4). Ramane de demonstrat ca β astfel obtinut face diagrama (3) sa comute. Intr-adevar, avem:

$$\beta * f' \circ \eta' : \qquad id_X \xrightarrow{\eta'} g'f' \xrightarrow{\eta * g'f'} gfg'f' \xrightarrow{g * \alpha * g'f'} gf'g'f' \xrightarrow{g * \delta' * f'} gf'$$

Dar $(\eta * g'f') \circ \eta' = \eta * \eta' = (gf * \eta') \circ \eta$ si $(g * \alpha * g'f') \circ (gf * \eta') = (g * \alpha) * \eta' = (gf' * \eta') \circ (g * \alpha * f')$ de unde rezulta ca

$$\beta * f' \circ \eta' : \qquad id_X \xrightarrow{\eta} gf \xrightarrow{g * \alpha} gf' \xrightarrow{gf' * \eta} gf'g'f' \xrightarrow{g * \delta' * f'} gf'$$

Deoarece $(\delta * f') \circ (f' * \eta) = id_{f'}$ rezulta ca

$$\beta * f' \circ \eta' = (g * \alpha) \circ \eta$$

Similar se demonstreaza si comutativitatea celei de-a doua diagrame din enuntul propozitiei. $\square$

Observatia 2.6. Morfismul β este reprezentat de diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g'"] \arrow[dr, equal] & \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "f'"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\delta'"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha"] & \bullet \arrow[d, "f"] \arrow[dr, equal] & \\
& \bullet \arrow[r, equal] & \bullet \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\swarrow\eta"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

In continuare 2-morfismul β astfel obtinut va fi notat cu ${}^a\alpha$. Avem urmatorul rezultat:

Lema 2.7. *Fie $f, f', f'' \in \mathcal{D}(X, Y)$ si $g, g', g'' \in \mathcal{D}(Y, X)$ adjunctii la dreapta pentru f, f' si f''. Daca $\alpha : f \to f'$ si $\alpha' : f' \to f''$ atunci ${}^a(\alpha' \circ \alpha) = ({}^a\alpha) \circ ({}^a\alpha')$.*

Demonstratie. Notam $\beta := {}^a\alpha$ si $\beta' := {}^a\alpha'$. Din unicitatea lui ${}^a(\alpha' \circ \alpha)$ este suficient sa demonstram ca diagrama (corespunzatoare diagramei (3)):

$$\begin{tikzcd}
id_X \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta''"'] & g \circ f \arrow[d, "g*(\alpha' \circ \alpha)"] \\
g'' \circ f'' \arrow[r, "(\beta \circ \beta')*f'"'] & g \circ f'
\end{tikzcd}$$

este comutativa. Aceasta diagrama se poate scrie pe larg ca:

$$\begin{tikzcd}
id_X \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"] \arrow[dd, "\eta''"'] \arrow[dddr, phantom, "2"] & & gf \arrow[dr, "g*\alpha"] & \\
& g'f' \arrow[ur, phantom, "1"] \arrow[rr, "\beta*f'"] \arrow[dd, "g'*\alpha'"] \arrow[ddrr, phantom, "3"] & & gf' \arrow[dd, "g*\alpha'"] \\
g''f'' \arrow[dr, "\beta'*f''"'] & & & \\
& g'f'' \arrow[rr, "\beta*f''"'] & & gf''
\end{tikzcd}$$

In timp ce 1 si 2 sunt comutative din ipoteza, 3 este comutativa deoarece $(g * \alpha') \circ (\beta * f') = \beta * \alpha' = (\beta * f'') \circ (g' * \alpha')$. □

Aceasta lema are o consecinta importanta:

Corolarul 2.8 (Unicitatea adjunctiei)**.** *Fie $f \in \mathcal{D}(X, Y)$ un 1-morfism si $(g, \eta, \delta), (g', \eta', \delta')$ doua adjunctii la dreapta ale f. Atunci exista si este unic un 2-izomorfism $u : g \to g'$ ce comuta η cu η'. In acelasi timp, u este unicul 2-izomorfism de la g in g' ce comuta δ cu δ'.*

Demonstratie. In Propozitia 2.5 consideram $f = f'$ si $\alpha = id_f$. Obtinem $\beta : g' \to g$ si $\beta_1 : g \to g'$ unde $\beta = {}^a\alpha$ si $\beta_1 = {}^a\alpha^{-1}$. Din Lema 2.7 obtinem $\beta \circ \beta_1 = {}^a(\alpha \circ \alpha^{-1}) : g \to g$. Folosind (4) obtinem ca $\beta \circ \beta_1 = id_g$. Comutarea lui η cu η', respectiv a lui δ cu δ' reiese din proprietatile lui ${}^a\alpha$. □

Urmatoarea propozitie o generalizeaza pe 2.5:

Propozitia 2.9. *Intr-o 2-categorie $\mathcal{D}$ fie 2-morfismul*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"'] & Y \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow_\alpha"] \\
T \arrow[r, "g_1"'] & Z
\end{tikzcd}$$

si adjunctiile la dreapta (f_i', η_i, δ_i) pentru $f_i, i = \overline{1,2}$. Atunci exista si este unic 2-morfismul:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_2"] & Y \\ T \arrow[u, "f_2'"] \arrow[r, "g_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\beta"] & Z \arrow[u, "f_1'"'] \end{tikzcd}$$

pentru care una din diagramele de mai jos este comutativa:

$$\begin{tikzcd} g_2 \arrow[r, "\eta_1 * g_2"] \arrow[d, "g_2 * \eta_2"'] & f_1' f_1 g_2 \arrow[d, "f_1' * \alpha"] \\ g_2 f_2' f_2 \arrow[r, "\beta * f_2"'] & f_1' g_1 f_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g_1 & f_1 f_1' g_1 \arrow[l, "\delta_1 * g_1"'] \\ g_1 f_2 f_2' \arrow[u, "g_1 * \delta_2"] & f_1 g_2 f_2' \arrow[l, "\alpha * f_2'"] \arrow[u, "f_1 * \beta"'] \end{tikzcd} \tag{5}$$

In plus, β este reprezentat de diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f_2'"] \arrow[dr, equal] & X \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\delta_2"] & Y \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\alpha"] & \\ & T \arrow[r, "g_1"'] & Z \arrow[r, "f_1'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\eta_1"] & Y \end{tikzcd} \tag{6}$$

si face ca ambele diagrame din (5) sa fie comutative.

Demonstratie. Deoarece prin dualitate unitatea devine co-unitate si invers este suficient sa demonstram ca exista si este unic β un 2-morfism care face ca prima diagrama din (5) sa comute.

Mai intai demonstram unicitatea lui β. Similar cu rationamentul din demonstratia Propozitiei 2.5 avem diagrama comutativa

$$\begin{tikzcd} & f_1' f_1 g_2 f_2' \arrow[dr, "f_1' * \alpha * f_2'"] & & \\ g_2 f_2' \arrow[ur, "\eta_1 * g_2 f_2'"] \arrow[dr, "g_2 * \eta_2 * f_2'"'] & & f_1' g_1 f_2 f_2' \arrow[r, "f_1' g_1 * \delta_2"] & f_1' g_1 \\ & g_2 f_2' f_2 f_2' \arrow[ur, "\beta * f_2 f_2'"] \arrow[rr, "g_2 f_2' * \delta_2"'] & & g_2 f_2' \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Cum $(f_2' * \delta_2) \circ (\eta_2 * f_2') = id_{f_2'}$ rezulta ca β este dat de:

$$\beta : \qquad g_2 f_2' \xrightarrow{\eta_1 * g_2 f_2'} f_1' f_1 g_2 f_2' \xrightarrow{f_1' * \alpha * f_2'} f_1' g_1 f_2 f_2' \xrightarrow{f_1' g_1 * \delta_1} f_1' g_1$$

i.e., β este reprezentat de diagrama (6).

Pentru orice β ce verifica aceasta relatie avem $(\beta * f_2) \circ (g_2 * \eta_2) = (f_1 * \alpha) \circ (\eta_1 * g_2)$, deoarece $(\eta_1 * g_2 f_2' f_2) \circ (g_2 * \eta_2) = (f_1' f_1 g_2 * \eta_2) \circ (\eta_1 * g_2)$ si $(f_1' * \alpha * f_2') \circ (f_1' f_1 g_2 * \eta_2) = (f_1' g_1 f_2 * \eta_2) \circ (f_1 * \alpha)$. $\square$

Spunem ca β este obtinut din α prin adjunctiile (f_1, f_1') si (f_2, f_2').

Propozitia 2.10 (Compatibilitatea cu compunerile pe verticala)**.** *Intr-o 2-categorie $\mathcal{D}$ fie diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "h_2"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\!\!\!\swarrow_{\alpha'}"] & \bullet \arrow[d, "h_1"] \\
\bullet \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\!\!\!\swarrow_{\alpha}"] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \\
\bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

(2-morfismul reprezentat de aceasta este $(\alpha * h_2) \circ (f_1 * \alpha')$)

Fie adjunctiile la dreapta (f_i', η_i, δ_i) pentru f_i si $(h_i', \eta_i', \delta_i')$ pentru $h_i, i = \overline{1,2}$. Fie β si β' 2-morfismele obtinute din α respectiv α' prin adjunctiile precedente. Atunci 2-morfismul $(h_1' * \beta') \circ (\beta * f_2)$, reprezentat de:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_3"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\!\!\!\searrow^{\beta'}"] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, "h_2'"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\!\!\!\searrow^{\beta}"] & \bullet \arrow[u, "h_1'"'] \\
\bullet \arrow[r, "g_1"'] \arrow[u, "f_2'"] & \bullet \arrow[u, "f_1'"']
\end{tikzcd}$$

este obtinut din $(\alpha * h_2) \circ (f_1 * \alpha')$ prin adjunctiile $(f_1 \circ h_1, h_1' \circ f_1')$ si $(f_2 \circ h_2, h_2' \circ f_2')$.

Demonstratie. Stim ca (Lema 2.4) $h_i' \circ f_i'$ sunt adjunctii la dreapta ale $f_i \circ h_i, i = \overline{1,2}$. Morfismul obtinut din $a := (\alpha * h_2) \circ (f_1 * \alpha')$ prin aceste adjunctii este dat, conform propozitiei anterioare, de diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "h_2' f_2'"] \arrow[dr, equal] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\swarrow\!\!\!\swarrow_{\delta}"] & \bullet \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "f_2 h_2"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\!\!\!\swarrow_{a}"] & \bullet \arrow[d, "f_1 h_1"'] \arrow[dr, equal] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\swarrow\!\!\!\swarrow_{\eta}"] & \\
& \bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet \arrow[r, "h_1' f_1'"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

unde $\delta = \delta_2 \circ (f_2 * \delta_2' * f_2')$ si $\eta = (h_1' * \eta_1 * h_1) \circ \eta_1'$. Aceasta diagrama se rescrie sub forma:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f_2'"] \arrow[ddrr, equal, "\Downarrow\delta_2"'] & \bullet \arrow[r, "h_2'"] \arrow[dr, equal, "\Downarrow\delta_2'"] & \bullet \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "h_2"] & \bullet \arrow[d, "h_1"] \arrow[ddrr, equal, "\Downarrow\eta_1'"] & & \\
& & \bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"'] & \bullet \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, equal, "\Downarrow\eta_1"'] & & \\
& & \bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet \arrow[r, "f_1'"'] & \bullet \arrow[r, "h_1'"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

deci reprezinta 2-morfismul $(h_1' * \beta') \circ (\beta * f_2)$. □

Propozitia 2.11 (Compatibilitatea cu compunerile pe orizontala)**.** *Intr-o 2-categorie $\mathcal{D}$ fie diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "f_3"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha_2"] & \bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha_1"] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \\
\bullet \arrow[r, "h_1"'] & \bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

(2-morfismul reprezentat de aceasta este $(g_1 * \alpha_2) \circ (\alpha_1 * h_2)$).

Fie adjunctiile la dreapta (f_i', η_i, δ_i) pentru $f_i, i = \overline{1,3}$. Fie β_1 si β_2 2-morfismele obtinute din α_1 respectiv α_2 prin adjunctiile precedente. Atunci 2-morfismul $(\beta_1 * h_1) \circ (g_2 * \beta)$, reprezentat de:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "h_2"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\beta_2"] & \bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\beta_1"] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, "h_1"'] \arrow[u, "f_3'"] & \bullet \arrow[r, "g_1"'] \arrow[u, "f_2'"] & \bullet \arrow[u, "f_1'"']
\end{tikzcd}$$

este obtinut din $(g_1 * \alpha_2) \circ (\alpha_1 * h_2)$ prin adjunctiile (f_1, f_1') si (f_3, f_3').

Demonstratie. Morfismul obtinut din $(g_1 * \alpha_2) \circ (\alpha_1 * h_2)$ prin adjunctii este dat de diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f_3'"] \arrow[dr, equal, "\Downarrow\delta_3"] & \bullet \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "f_3"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha_2"] & \bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha_1"] & \bullet \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, equal, "\Downarrow\eta_1"] & \\
& \bullet \arrow[r, "h_1"'] & \bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet \arrow[r, "f_1'"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Folosind una din proprietatile pentru unitatea si co-unitatea adjunctiei (f_2, f_2') putem rescrie aceasta diagrama ca fiind:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f_3'"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\delta_3"] & \bullet \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "f_3"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_2"] & \bullet \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\eta_2"] & & & \\
& \bullet \arrow[r, "h_1"'] & \bullet \arrow[r, "f_2'"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\delta_2"] & \bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_1"] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\eta_1"] & \\
& & & \bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet \arrow[r, "f_1'"'] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

ce reprezinta 2-morfismul $(\beta_1 * h_1) \circ (g_2 * \beta)$. □

Propozitia 2.11 are urmatorul corolar imediat:

Corolarul 2.12. *Fie, intr-o 2-categorie $\mathcal{D}$, diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "g_4"] \arrow[dr, "h_4"] \arrow[dd, "f_4"'] & & \bullet \arrow[dr, "h_2"] \arrow[dd, "f_3"] & \\
& \bullet \arrow[rr, "g_2"] \arrow[dd, "f_2"] & & \bullet \arrow[dd, "f_1"] \\
\bullet \arrow[rr, "g_3"] \arrow[dr, "h_3"'] & & \bullet \arrow[dr, "h_1"] & \\
& \bullet \arrow[rr, "g_1"'] & & \bullet
\end{tikzcd}
$$

ce are ca fete ale cubului 2-morfismele:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_1"] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \\
\bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "h_4"] \arrow[d, "f_4"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_2"] & \bullet \arrow[d, "f_2"] \\
\bullet \arrow[r, "h_3"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_4"] \arrow[d, "h_4"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_3"] & \bullet \arrow[d, "h_2"] \\
\bullet \arrow[r, "g_2"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_4"] \arrow[d, "f_4"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_4"] & \bullet \arrow[d, "f_3"] \\
\bullet \arrow[r, "g_3"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "h_3"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_5"] & \bullet \arrow[d, "h_1"] \\
\bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "f_3"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_6"] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \\
\bullet \arrow[r, "h_1"'] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Sa presupunem ca aceasta diagrama este comutativa, atat la nivelul 1-morfismelor cat si la cel al 2-morfismelor - de exemplu, $g_2h_4 = h_2g_4, g_1h_3 = h_1g_3$ si diagramele urmatoare:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "h_4"] \arrow[d, "f_4"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_2"] & \bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_1"] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \\
\bullet \arrow[r, "h_3"'] & \bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad si \quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_4"] \arrow[d, "f_4"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_4"] & \bullet \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "f_3"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_6"] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \\
\bullet \arrow[r, "g_3"'] & \bullet \arrow[r, "h_1"'] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

reprezinta acelasi morfism. Daca (f_i', η_i, δ_i) adjunctii la dreapta pentru $f_i, i = \overline{1,4}$ atunci si diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "g_4"] \arrow[dr, "h_4"] & & \bullet \arrow[dr, "h_2"] & \\
& \bullet \arrow[rr, "g_2"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[uu, "f_4'"] \arrow[rr, "g_3"] \arrow[dr, "h_3"'] & & \bullet \arrow[uu, "f_3'"] \arrow[dr, "h_1"] & \\
& \bullet \arrow[uu, "f_2'"] \arrow[rr, "g_1"'] & & \bullet \arrow[uu, "f_1'"']
\end{tikzcd}$$

este comutativa, atat la nivelul 1-morfismelor cat si la cel al 2-morfismelor.

Avem si urmatoarea lema, relativ la constructiile anterioare:

Lema 2.13. *Fie, intr-o 2-categorie $\mathcal{D}$, 2-morfismul*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha"] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \\
\bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

si adjunctiile la dreapta (f_i', η_i, δ_i) si $(g_i', \eta_i', \delta_i')$ pentru f_i si $g_i, i = \overline{1,2}$. Putem construi urmatoarele 2-morfisme

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, "g_2'"'] \\
\bullet \arrow[u, "f_2'"] \arrow[ur, phantom, "\beta_1\nearrow"] & \bullet \arrow[l, "g_1'"] \arrow[u, "f_1'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, "g_2'"'] \\
\bullet \arrow[u, "f_2'"] \arrow[ur, phantom, "\beta_2\nearrow"] & \bullet \arrow[l, "g_1'"] \arrow[u, "f_1'"']
\end{tikzcd}$$

astfel:

- $\beta_1 = {}^a\alpha$
- *luam β 2-morfismul obtinut din α prin adjunctiile (f_1, f_1') si (f_2, f_2'):*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f_2'"] \arrow[dr, equal] & \bullet \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\delta_2"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha"] & \bullet \arrow[d, "f_1"] \arrow[dr, equal] & \\
& \bullet \arrow[r, "g_1"'] & \bullet \arrow[r, "f_1'"'] \arrow[ur, phantom, "\swarrow\eta_1"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

si β_2 2-morfismul obtinut din β prin adjunctiile (g_1, g_1') si (g_2, g_2'):

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_1'"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Swarrow\delta_1'"] & \bullet \arrow[r, "f_2'"] \arrow[d, "g_1"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\beta"] & \bullet \arrow[d, "g_2"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\Swarrow\eta_2'"] & \\
& \bullet \arrow[r, "f_1'"'] & \bullet \arrow[r, "g_2'"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Atunci $\beta_1 = \beta_2$.

Demonstratie. Demonstratia este imediata observand ca β_1 este reprezentat de diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_1'"] \arrow[ddrr, equal] \arrow[ddrr, phantom, shift left=4, "\Swarrow\delta_1'"] & \bullet \arrow[r, "f_2'"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Swarrow\delta_2"] & \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "f_2"] & \bullet \arrow[d, "g_2"] \arrow[ddrr, equal] \arrow[ddrr, phantom, shift right=4, "\Swarrow\eta_2'"] & & \\
& & \bullet \arrow[d, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Swarrow\alpha"] & \bullet \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\Swarrow\eta_1"] & & \\
& & \bullet \arrow[r, equal] & \bullet \arrow[r, "f_1'"'] & \bullet \arrow[r, "g_2'"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

iar β este reprezentat de

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f_2'"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Swarrow\delta_2"] & \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "f_2"] & \bullet \arrow[d, "g_2"] & \\
& \bullet \arrow[d, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Swarrow\alpha"] & \bullet \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\Swarrow\eta_1"] & \\
& \bullet \arrow[r, equal] & \bullet \arrow[r, "f_1'"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

□

2.1 Aplicatii relativ la 2-functori

In aceasta sectiune constructiile precedente sunt aplicate in cazul 2-functorilor.

Propozitia 2.14. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie si $\mathcal{D}$ o 2-categorie. Fie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un 2-functor astfel incat, pentru orice morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$, 1-morfismul $F(f) : FX \to FY$ din $\mathcal{D}$ admite adjunctie la dreapta. Atunci exista urmatoarele:*

1. *un 2-functor $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$*

2. *o pereche de 2-morfisme (η_f, δ_f) pentru orice morfism f din $\mathcal{C}$*

astfel incat:

- $FX = GX$, *pentru orice* $X \in OB(\mathcal{C})$
- $(G(f), \eta_f, \delta_f)$ *adjunctie la dreapta pentru* $F(f)$, *pentru orice morfism* f *din* $\mathcal{C}$
- *pentru orice doua morfisme* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *din* $\mathcal{C}$, *urmatoarele doua diagrame:*

$$\begin{tikzcd}
 & & FX \\
 & & FY \arrow[u, "G(f)"'] \\
FX \arrow[uurr, equal] \arrow[r, "F(f)"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & FY \arrow[ur, equal] \arrow[r, "F(g)"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\eta_g"] & FZ \arrow[u, "G(g)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[rrrr, bend left, equal, "\Downarrow\eta_{gf}"] \arrow[rr, "F(gf)"] \arrow[dr, "F(f)"'] & & FZ \arrow[rr, "G(gf)"] \arrow[dr, "G(g)"'] & & FX \\
 & FY \arrow[ur, "F(g)"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow c_F"] & & FY \arrow[ur, "G(f)"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow c_G"] &
\end{tikzcd}$$

reprezinta acelasi 2-morfism, adica

$$(G(f) * \eta_g * F(f)) \circ \eta_f = (c_G * c_F) \circ \eta_{gf} : id \to G(f)G(g)F(g)F(f)$$

- *diagramele*

$$\begin{tikzcd}
 & & FZ \\
 & & FY \arrow[u, "F(g)"'] \\
FZ \arrow[uurr, equal] \arrow[r, "G(g)"'] \arrow[urr, phantom, "\delta_g\Uparrow"] & FY \arrow[ur, equal] \arrow[r, "G(f)"'] \arrow[ur, phantom, "\delta_f\Uparrow"] & FX \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FZ \arrow[rrrr, bend left, equal, "\delta_g\Uparrow"] \arrow[rr, "G(gf)"] \arrow[dr, "G(g)"'] & & FX \arrow[rr, "F(gf)"] \arrow[dr, "F(f)"'] & & FZ \\
 & FY \arrow[ur, "G(f)"'] \arrow[u, phantom, "c_G^{-1}\Uparrow"] & & FY \arrow[ur, "F(g)"'] \arrow[u, phantom, "c_F^{-1}\Uparrow"] &
\end{tikzcd}$$

reprezinta acelasi 2-morfism, adica

$$\delta_g \circ (F(g) * \delta_f * G(g)) = (c_F^{-1} * c_G^{-1}) \circ \delta_{gf} : F(g)F(f)G(f)G(g) \to id$$

unde c_F *si* c_G *sunt 2-izomorfismele de compunere pentru 2-functorii* F *si* G

In plus, aceste date sunt unice pana la un unic izomorfism.

Demonstratie. Construim tripletul (G, η, δ) dupa cum urmeaza: alegem $GX = FX$ si pentru fiecare morfism $X \xrightarrow{f} Y$ din $\mathcal{C}$ fixam o adjunctie la dreapta pentru $F(f)$, anume $(G(f), \eta_f, \delta_f)$.

Pentru a avea o structura de 2-functor pentru G trebuie sa construim 2-izomorfismele de compunere c_G. Fie morfismele $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ din $\mathcal{C}$. Avem 2-izomorfismul de compunere pentru F:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, bend left, "F(gf)"] \arrow[r, bend right, "F(g)F(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow c_F(f,g)"] & FZ \end{tikzcd}$$

si adjunctiile $(F(g)F(f), G(f)G(g))$ si $(F(gf), G(gf))$. Conform Propozitiei 2.5 obtinem 2-morfismul $c_G(f,g) = {}^a c_F(f,g)$:

$$\begin{tikzcd} FZ \arrow[r, bend left, "G(gf)"] \arrow[r, bend right, "G(f)G(g)"'] \arrow[r, phantom, "c_G(f,g)\Uparrow"] & FX \end{tikzcd}$$

Acesta este 2-izomorfism din Lema 2.7. Relatia corespunzatoare lui 1.4,3.a) pentru c_G rezulta tot din Lema 2.7 si din relatia similara pentru c_F.

Trebuie sa demonstram ca $G(id_X)$ este echivalenta pentru orice obiect X al $\mathcal{C}$. Deoarece $F(id_X)$ este o echivalenta, rezulta ca functorii $F(id_X) \circ \_$ si $\_ \circ F(id_X)$ sunt echivalente. Din Propozitia 2.3 stim ca $(F(id_X) \circ \_, G(id_X) \circ \_)$ si $(\_ \circ F(id_X), \_ \circ G(id_X))$ sunt adjunctii, deci functorii $G(id_X) \circ \_$ si $\_ \circ G(id_X)$ sunt echivalente. Aceasta implica $G(id_X)$ este echivalenta (ca 1-morfism).

$\square$

Definitia 2.15. In ipotezele propozitiei precedente, 2-functorul G impreuna cu familia de perechi de 2-morfisme $(\eta_f, \delta_f)_f$ se numeste adjunctie **globala** la dreapta pentru 2-functorul F.

2.2 Autoechivalente ale unui 2-functor

Definitia 2.16. Fie un 1-morfism $f : X \to Y$ intr-o 2-categorie $\mathcal{D}$. Spunem ca f admite o quasi-inversa g daca (f, g) este adjunctie si atat unitatea cat si counitatea adjunctiei sunt 2-izomorfisme.

Se observa ca daca f este echivalenta si g adjunctie la dreapta atunci g este quasi-inversa pentru g.

Definitia 2.17. Fie un 2-functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. O *autoechivalenta* a lui F consta intr-o familie de 1-morfisme $E_X : FX \to EX$ ce admit quasi-inverse pentru fiecare obiect X al $\mathcal{C}$ si, pentru fiecare morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$, un 2-izomorfism

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "E_X"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow\alpha_f"] & FY \arrow[d, "E_Y"] \\ FX \arrow[r, "F(f)"'] & FY \end{tikzcd}$$

ce verifica urmatoarea conditie:

pentru orice 2 morfisme $f : X \to Y, g : Y \to Z$ din $\mathcal{C}$ urmatoarele doua diagrame

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "E_X"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow\alpha_f"] & FY \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "E_Y"] \arrow[dr, phantom, "\swArrow\alpha_g"] & FZ \arrow[d, "E_Z"] \\ FX \arrow[r, "F(f)"'] & FY \arrow[r, "F(g)"'] & FZ \end{tikzcd} \quad \text{si} \quad \begin{tikzcd} & FY \arrow[dr, "F(g)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow c(g,f)^{-1}"] & \\ FX \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(gf)"'] \arrow[d, "E_X"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha_{gf}"] & FZ \arrow[d, "E_Z"] \\ FX \arrow[rr, "F(gf)"] \arrow[dr, "F(f)"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow c(g,f)"] & FZ \\ & FY \arrow[ur, "F(g)"'] & \end{tikzcd}$$

reprezinta acelasi morfism.

Definitia 2.18. Fie un 2-functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ si doua autoechivalente $((E_X)_X, (\alpha_f)_f)$ si $((E'_X)_X, (\alpha'_f)_f)$. Numim morfism de autoechivalente de la (E_X) la (E'_X) o familie de 2-morfisme $\gamma_X : E_X \to E'_X$ inccat pentru orice morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$ diagrama

$$\begin{tikzcd} E_Y F(f) \arrow[r, "\alpha_f"] \arrow[d, "\gamma_Y * F(f)"'] & F(f)E_X \arrow[d, "F(f)*\gamma_X"] \\ E'_Y F(f) \arrow[r, "\alpha'_f"] & F(f)E_X \end{tikzcd}$$

sa comute.

Avem urmatorul rezultat, relativ la adjunctii globale:

Propozitia 2.19. *Fie dat un 2-functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ impreuna cu o autoechivalenta (E_X, α_f) si o adjunctie globala la dreapta G. Atunci exista si este unica o autoechivalenta (E_X, β_f) pentru G incat pentru orice morfism*

$f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$ urmatoarele doua diagrame

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend left, equal, ""{name=U}] \arrow[d, "E_X"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_f"] & FY \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "E_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\beta_f"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & FX \arrow[d, "E_Z"] \\
FX \arrow[r, "F(f)"'] & FY \arrow[r, "G(f)"'] & FX
\end{tikzcd}
\qquad \textit{si} \qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, equal] \arrow[d, "E_X"'] \arrow[drr, phantom, "\Swarrow id_{E_X}"] & & FX \arrow[d, "E_Z"] \\
FX \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F(f)"'] \arrow[rr, phantom, bend right, "\Downarrow\eta"] & & FX \\
& FY \arrow[ur, "G(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

reprezinta acelasi morfism.

Demonstratie. 2-morfismele β_f sunt cele reprezentate de diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
FY \arrow[r, "G(f)"] \arrow[dr, equal] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\eta_f\Nearrow"'] & FX \arrow[r, "E_X"] \arrow[d, "F(f)"] \arrow[dr, phantom, "\alpha_f\Nearrow"] & FX \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift right=6, "\delta_f\Nearrow"] & \\
& FY \arrow[r, "E_Y"'] & FY \arrow[r, "G(f)"'] & FX
\end{tikzcd}
$$

deci sunt obtinute din α_f prin adjunctiile $(F(f), G(f))$ si $(F(f), G(f))$. $\square$

3 Structuri de schimb. Cross functori

In aceasta sectiune consideram doua categorii fixate $\mathcal{C}_1$ si $\mathcal{C}_2$ ce au aceleasi obiecte. Numim diagrama mixta o diagrama de tipul:

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

in care X, X', Y si Y' sunt obiecte ale $\mathcal{C}_1$ (deci si ale $\mathcal{C}_2$), g, g' sunt morfisme din $\mathcal{C}_1$ iar f, f' sunt morfisme din $\mathcal{C}_2$.

Putem compune aceste diagrame atat pe orizontala cat si pe verticala. Consideram fixata o clasa $\mathcal{E}$ de diagrame mixte stabila la aceste tipuri de compuneri, i.e. compunerea pe orizontala sau pe verticala a doua diagrame din $\mathcal{E}$ este tot in $\mathcal{E}$.

Definitia 3.1. Fie 2-functorii $F_1 : \mathcal{C}_1' \to \mathcal{D}$ si $F_2 : \mathcal{C}_2' \to \mathcal{D}$, unde $\mathcal{C}_i'$ este $\mathcal{C}_i$ sau $\mathcal{C}_i^{op}$ pentru fiecare $i \in \{1, 2\}$, incat $F_1(X) = F_2(X) =: F(X)$.

Numim *structura de schimb* relativ la $\mathcal{E}$ pentru perechea (F_1, F_2) urmatorul set de date: pentru fiecare diagrama mixta (C) din $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

este dat un 2-morfism $e(C)$ in $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} F(Y') \arrow[r, <->, "F_1(g')"] \arrow[d, <->, "F_2(f')"'] \arrow[dr, phantom, "e(C)"] & F(X') \arrow[d, <->, "F_2(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, <->, "F_1(g)"'] & F(X) \end{tikzcd} \tag{7}$$

cu aceeasi directie pentru toate diagramele mixte din $\mathcal{E}$. Directia poate fi de tipul: $\nearrow, \swarrow, \nwarrow$ sau $\searrow$. De exemplu, pentru $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}, F_2 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}$ diagrama 7 devine:

$$\begin{tikzcd} F(Y') \arrow[r, "F_1(g')"] \arrow[d, "F_2(f')"'] \arrow[dr, phantom, "e(C)"] & F(X') \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "F_1(g)"'] & F(X) \end{tikzcd}$$

iar $e(C)$ poate avea directia $\nearrow$ ($e(C) : F_1(g)F_2(f') \to F_2(f)F_1(g')$) sau $\swarrow$ ($e(C) : F_2(f)F_1(g') \to F_1(g)F_2(f')$).

In plus, familia de 2-morfisme $(e(C))_{C\in\mathcal{E}}$ trebuie sa satisfaca urmatoarele conditii de compatibilitate:

compatibilitate cu compunerea pe orizontala: Pentru orice diagrame mixte C_1 si C_2 ce se pot compune pe orizontala pentru a forma diagrama C_3:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f''"'] \arrow[dr, phantom, "C_1"] & \bullet \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "C_2"] & \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet \arrow[r, "g"'] & \bullet \arrow[r, "h"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

urmatoarea diagrama (ce are pe fetele patrulatere 2-morfismele $e(C_1), e(C_2)$ si $e(C_3)$) este comutativa relativ la 2-morfisme:

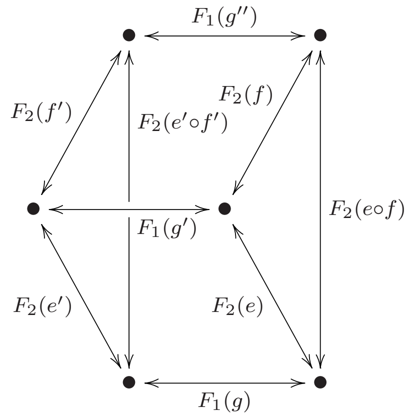
$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, <->, "F_1(h'\circ g')"] \arrow[dr, <->, "F_1(g')"'] \arrow[dd, <->, "F_2(f'')"'] & & \bullet \arrow[dd, <->, "F_2(f)"] \\
& \bullet \arrow[ur, <->, "F_1(h')"'] \arrow[dd, <->, "F_2(f')"] & \\
\bullet \arrow[rr, <->, "F_1(h\circ g)"] \arrow[dr, <->, "F_1(g)"'] & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, <->, "F_1(h)"'] &
\end{tikzcd}$$

Si aici, ca si in diagrama (7), sensul sagetilor este dat de alegerea categoriilor $\mathcal{C}'_i$. O alta solutie de prezentare ar fi fost identificarea functorilor drept covarianti sau contravarianti si analizarea toturor celor 4 cazuri separat.

compatibilitate cu compunerea pe verticala: Pentru orice diagrame mixte C si C' ce se pot compune pe verticala pentru a forma diagrama C'':

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "C"] & \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "e'"'] \arrow[dr, phantom, "C'"] & \bullet \arrow[d, "e"] \\
\bullet \arrow[r, "g"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

diagrama urmatoare (ce are pe fetele patrulatere 2-morfismele $e(C), e(C')$ si $e(C''))$ este comutativa relativ la 2-morfisme:



Structura de schimb pe perechea (F_1, F_2) se noteaza prin $(e(C))_{C \in \mathcal{E}}$ - familia 2-morfismelor de schimb.

Observatia 3.2. Avem 2 cazuri: cel codirectional, cand $\mathcal{C}'_i = \mathcal{C}_i, i \in \{1, 2\}$ sau $\mathcal{C}'_i = \mathcal{C}_i^{op}, i \in \{1, 2\}$, si cel contradirectional, cand $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_2 = \mathcal{C}_2^{op}$ sau $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}_1^{op}, \mathcal{C}'_2 = \mathcal{C}_2$.

Inlocuind, daca este necesar, $\mathcal{D}$ cu $\mathcal{D}^{2-op}$, putem considera ca morfismele de schimb au directia $\swarrow$ (in cazul codirectional) sau directia $\searrow$ (in cazul contradirectional).

Exemplu: Fie $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un 2-functor. Obtinem o structura de schimb de directie $\swarrow$ pentru perechea (F, F) relativ la $\mathcal{E} =$ clasa diagramelor comutative daca alegem pentru o diagrama comutativa C:

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

2-izomorfismul $e(C) = c_F(f', g) \circ c_F(g', f)^{-1}$ unde c_F este familia de izomorfisme de compunere din definitia unui 2-functor. Aceasta structura de schimb va fi denumita in continuare *structura de schimb triviala*.

In continuare descriem un tip de constructie care permite obtinerea unor noi structuri de schimb plecand de la structuri de schimb date.

Propozitia 3.3. *Fie $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}$ si $F_2 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}$ doi 2-functori si o structura de schimb $(e(C))_{C \in \mathcal{E}}$ de directie $\swarrow$ pentru perechea (F_1, F_2). Presupunem ca*

F_1 admite o adjunctie globala la stanga $G^1 : \mathcal{C}_1^{op} \to \mathcal{D}$ cu familiile de 2-morfisme η_f si δ_f atasate.

Atunci perechea (G^1, F_2) admite o structura de schimb de directie $\nwarrow$, cu 2-morfismul de schimb $u(C) : G^1(g)F_2(f) \to F_2(f')G^1(g')$ asociat unei diagrame

$$C : \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & \bullet \arrow[d, "f"] \\ \bullet \arrow[r, "g"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

reprezentat de diagrama

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "G^1(g')"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "\eta_{g'}\Nearrow", bend left=40] & \bullet \arrow[r, "F_2(f')"] \arrow[d, "F_1(g')"] \arrow[dr, phantom, "e(C)\Nearrow"] & \bullet \arrow[d, "F_1(g)"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "\delta_g\Nearrow", bend right=40] & \\ & \bullet \arrow[r, "F_2(f)"'] & \bullet \arrow[r, "G^1(g')"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

In plus, 2-morfismul $u(C)$ este unic cu proprietatea de a face diagrama

$$\begin{tikzcd} G^1(g)F_2(f)F_1(g') \arrow[r, "u(C)*F_1(g')"] \arrow[d, "G^1(g)*e(C)"'] & F_2(f')G^1(g')F_1(g') \arrow[d, "F_2(f')*\delta_{g'}"] \\ G^1(g)F_2(f)F_1(g') \arrow[r, "\delta_g*F_2(f')"'] & F_2(f') \end{tikzcd}$$

sau diagrama

$$\begin{tikzcd} F_2(f) \arrow[r, "\eta_g*F_2(f)"] \arrow[d, "F_2(f)*\eta_g"'] & F_1(g)G^1(g)F_2(f) \arrow[d, "F_1(g)*u(C)"] \\ F^2(f)F_1(g')G^1(g') \arrow[r, "e(C)*G^1(g')"'] & F_1(g)F_2(f')G^1(g') \end{tikzcd}$$

sa comute.

Demonstratie. Observam mai intai ca, trecand la $\mathcal{D}^{1-op}$, 2-morfismul $u(C)$ este obtinut din $e(C)$ prin adjunctiile $(F_1(g'), G^1(g'))$ si $(F_1(g), G^1(g))$. Putem asadar aplica dualele (relativ la 1-morfisme) propozitiilor 2.10 si 2.11.

Compatibilitate cu compunerea pe verticala Fie diagramele C si C' in $\mathcal{E}$ a caror compunere pe verticala este $C'' \in \mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "C"] & \bullet \arrow[d, "h"] \\
\bullet \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "C'"] & \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet \arrow[r, "g"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Trebuie sa demonstram ca diagramele

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "F_2(h')"'] & \bullet \arrow[l, "G^1(g'')"'] \arrow[d, "F_2(h)"] \arrow[dl, phantom, "\Nwarrow u(C)"] \\
\bullet \arrow[d, "F_2(f')"'] & \bullet \arrow[l, "G^1(g')"] \arrow[d, "F_2(f)"] \arrow[dl, phantom, "\Nwarrow u(C')"] \\
\bullet & \bullet \arrow[l, "G^1(g)"]
\end{tikzcd}
\qquad \text{si} \qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_2(f')F_2(h')"'] \arrow[dr, phantom, "\Nwarrow c_{F_2}"] & \bullet \arrow[d, "F_2(f'h')"'] & \bullet \arrow[l, "G^1(g'')"'] \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_2(fh)"'] \arrow[dl, phantom, "\Nwarrow u(C'')"] & \bullet \arrow[d, "F_2(f)F_2(h)"] \arrow[dl, phantom, "\Nwarrow c_{F_2}^{-1}"] \\
\bullet \arrow[r, equal] & \bullet & \bullet \arrow[l, "G^1(g)"] \arrow[r, equal] & \bullet
\end{tikzcd}$$

reprezinta acelasi morfism. Acestea sunt obtinute, prin adjunctiile $(G^1(g'), F_1(g'))$ si $(G^1(g), F_1(g))$ din diagramele:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "F_1 1(g'')"] \arrow[d, "F_2(h')"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow e(C)"] & \bullet \arrow[d, "F_2(h)"] \\
\bullet \arrow[r, "F_1(g')"'] \arrow[d, "F_2(f')"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow e(C')"] & \bullet \arrow[d, "F_2(f)"] \\
\bullet \arrow[r, "F_1(g)"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad \text{si} \qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_2(f')F_2(h')"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow c_{F_2}"] & \bullet \arrow[r, "F_1(g'')"] \arrow[d, "F_2(f'h')"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow e(C'')"] & \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_2(fh)"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow c_{F_2}^{-1}"] & \bullet \arrow[d, "F_2(f)F_2(h)"] \\
\bullet \arrow[r, equal] & \bullet \arrow[r, "F_1(g)"'] & \bullet \arrow[r, equal] & \bullet
\end{tikzcd}$$

ce reprezinta acelasi morfism.

Compatibilitate cu compunerea pe orizontala

Fie diagramele C_1 si C_2 in $\mathcal{E}$ ce se pot compune pe orizontala pentru a forma diagrama $C_3 \in \mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f''"'] \arrow[dr, phantom, "C_1"] & \bullet \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "C_2"] & \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet \arrow[r, "g"'] & \bullet \arrow[r, "h"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Trebuie sa demonstram ca diagramele

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "F_2(f'')"'] \arrow[dr, phantom, "u(C_1)\Nwarrow"] & \bullet \arrow[l, "G^1(g')"'] \arrow[d, "F_2(f')"] \arrow[dr, phantom, "u(C_2)\Nwarrow"] & \bullet \arrow[l, "G^1(h')"'] \arrow[d, "F_2(f)"] \\
\bullet & \bullet \arrow[l, "G^1(g)"] & \bullet \arrow[l, "G^1(h)"]
\end{tikzcd}
\quad \text{si} \quad
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl, "G^1(g')"'] \arrow[d, phantom, "c_{G^1}\Uparrow"] & \\
\bullet \arrow[d, "F_2(f'')"'] \arrow[dr, phantom, "u(C_3)\Nwarrow"] & & \bullet \arrow[ul, "G^1(h')"'] \arrow[ll, "G^1(h'g')"] \arrow[d, "F_2(f)"] \\
\bullet & & \bullet \arrow[ll, "G^1(hg)"] \arrow[dl, "G^1(h)"] \\
 & \bullet \arrow[ul, "G^1(g)"] \arrow[u, phantom, "c^{-1}_{G^1}\Uparrow"] &
\end{tikzcd}
$$

reprezinta acelasi 2-morfism. Se procedeaza exact ca in partea precedenta folosind in plus faptul ca 2-izomorfismele de compunere c_{G^1} sunt obtinute din c_{F_1} prin adjunctie. $\square$

Observatia 3.4. Folosind dualitatea, putem obtine variante ale acestei propozitii, de exemplu pentru o structura de schimb pe (F_1, F_2) de directie $\nearrow$, in cazul codirectional, si dat G^1 un functor ajunct global la dreapta, obtinem o structura de schimb de directie $\searrow$ pe (G^1, F_2).

3.1 Cross functori

Fie $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ doua categorii cu acelelasi obiecte, $\mathcal{D}$ o 2-categorie, $\mathcal{E}$ o clasa de diagrame mixte inchisa la compuneri pe verticala si pe orizontala. Fie 2-functorii $F_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{D}, i \in \{1, 2\}$ astfel incat sunt date:

- G^1 adjunct global la stanga pentru F_1
- G^2 adjunct global la dreapta pentru F_2
- o structura de schimb $e_{1,2}(C)_{C\in\mathcal{E}}$ pe (F_1, F_2) de directie $\swarrow$
- o structura de schimb $e^{1,2}(C)_{C\in\mathcal{E}}$ pe (G^1, G^2) de directie $\swarrow$

Pornind de la acest set de date putem construi urmatoarele 4 structuri de schimb:

1. Doua structuri de schimb pe (G^1, F_2):

   (a) o structura de schimb de tip $\nwarrow$ obtinuta din structura de schimb de pe (F_1, F_2) si adjunctia intre F_1 si G^1. Notam cu a_2^1 morfismele structurii de schimb obtinute.

(b) o structura de schimb de tip $\searrow$ obtinuta din structura de schimb de pe (G^1, G^2) si adjunctia intre G^2 si F_2. Notam cu b_2^1 morfismele structurii de schimb obtinute.

2. Doua structuri de schimb pe (F_1, G^2):

   (a) o structura de schimb de tip $\nwarrow$ obtinuta din structura de schimb de pe (G^1, G^2) si adjunctia intre G^1 si F_1. Notam cu a_1^2 morfismele structurii de schimb obtinute.

   (b) o structura de schimb de tip $\searrow$ obtinuta din structura de schimb de pe (F_1, F_2) si adjunctia intre F_2 si G^2. Notam cu b_1^2 morfismele structurii de schimb obtinute.

Definitia 3.5. Pastrand notatiile anterioare, numim *cross functor* o structura

$$(G^1, F_1, F_2, G^2) : (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \longrightarrow \mathcal{D}$$

care, pentru toate diagramele mixte din $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet \arrow[r, "g"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

verifica una din urmatoarele proprietati echivalente:

1. 2-morfismele

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "F_2(f')"'] & \bullet \arrow[l, "G^1(g')"'] \arrow[d, "F_2(f)"] \\
\bullet \arrow[ur, phantom, "a_2^1 \Nwarrow"] & \bullet \arrow[l, "G^1(g)"]
\end{tikzcd}
\quad \text{si} \quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "F_2(f')"'] & \bullet \arrow[l, "G^1(g')"'] \arrow[d, "F_2(f)"] \\
\bullet \arrow[ur, phantom, "\Searrow b_2^1"] & \bullet \arrow[l, "G^1(g)"]
\end{tikzcd}$$

   sunt izomorfisme inverse unul celuilalt;

2. 2-morfismele

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "F_1(g')"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "G^2(f')"] \arrow[r, "F_1(g)"'] \arrow[ur, phantom, "a_1^2 \Nwarrow"] & \bullet \arrow[u, "G^2(f)"']
\end{tikzcd}
\quad \text{si} \quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "F_1(g')"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "G^2(f')"] \arrow[r, "F_1(g)"'] \arrow[ur, phantom, "\Searrow b_1^2"] & \bullet \arrow[u, "G^2(f)"']
\end{tikzcd}$$

   sunt izomorfisme inverse unul celuilalt.

Observatia 3.6. Aceste proprietati sunt echivalente doarece ${}^{a}(a_2^1) = b_1^2$ si ${}^{a}(b_2^1) = a_1^2$

Definitia 3.7. O structura de schimb $(e(C))_{C\in\mathcal{E}}$ pentru o pereche de 2-functori (F_1, F_2) se numeste *izoschimb* daca 2-morfismele $e(C)$ sunt izomorfisme. In acest caz exista o structura de schimb cu directie opusa, data de morfismele $e(C)^{-1}$, numita *izoschimb invers*.

4 Prezentarea rezultatului principal al lucrarii

4.1 Elemente de geometrie algebrica

In continuare prin inel intelegem inel comutativ. Pentru mai multe detalii relativ la scheme se pot consulta [3] si [5].

Definitia 4.1. Numim *spatiu inelat* un spatiu topologic X impreuna cu un fascicul de inele $\mathcal{O}_X$. Numim em spatiu local inelat un spatiu inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ pentru care fiecare germene $\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}_X(U)$ este inel local, i.e. are un singur ideal maximal.

Un morfism de spatii inelate de la $(X, \mathcal{O}_X)$ la $(Y, \mathcal{O}_Y)$ consta intr-o pereche (f, θ) unde $f : X \to Y$ functie continua si $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ morfism de fascicule. Daca $(X, \mathcal{O}_X)$ si $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sunt spatii local inelate, $(f, f^\#)$ este morfism de spatii local inelate cand pentru fiecare $y = f(x)$ morfismul de inele locale indus $f_y^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ este local, i.e. preimaginea idealului maximal unic m_x al $\mathcal{O}_{X,x}$ este m_y.

Definitia 4.2. Dat un spatiu local inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ numim $\mathcal{O} + X$-modul un fascicul F de grupuri abeliene peste X ce are proprietatea ca $F(U)$ este $\mathcal{O}_X(U)$-modul pentru orice deschis U.

Pentru un inel A notam cu $Spec(A)$ multimea idealelor prime ale lui A, cu $V(a)$ multimea idealelor prime ce contin idealul $a \subset A$ si cu A_p localizarea lui A relativ la idealul prim p. Multimii $Spec(A)$, cu topologia Zariski, i se asociaza un fascicul $\mathcal{O}$ prin $\mathcal{O}(U) = \{s : U \to \coprod_{p \in U} A_p / s(p) \in A_p$ si s este local cat de elemente din $A\}$ i.e. $\forall p \exists V \subset U, V \in \mathcal{V}(p), \exists a, f \in A$ incat pentru orice $q \in V, f \notin q$ si $s(q) = a/f$ in A_q. Acest spatiu este local inelat, cu proprietatea ca germenele $\mathcal{O}_{Spec(A),p}$ este izomorf cu A_p.

Definitia 4.3. Numim *schema afina* un spatiu local inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ izomorf (ca spatiu local inelat) cu $Spec(A)$, pentru oarecare inel A. Numim *schema* un spatiu local inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ cu proprietatea ca pentru orice punct $x \in X$ exista un deschis $U \ni x$ incat spatiul local inelat $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ este schema afina. Morfismele de scheme sunt exact morfismele de spatii local inelate.

Definitia 4.4. O schema se numeste noetheriana daca poate fi acoperita cu un numar finit de subspatii deschise afine $Spec(A_i)$, cu fiecare A_i inel noetherian.

Definitia 4.5. Un morfism de scheme $f : X \to Y$ se numeste

- *finit* daca Y admite o acoperire cu deschisi afini de forma $Spec(B_i)$ incat $f^{-1}(Spec(B_i))$ este de forma $Spec(A_i)$ cu A_i finit generate ca B_i module

- de tip *finit* daca Y admite o acoperire cu deschisi afini de forma $Spec(B_i)$ incat fiecare $f^{-1}(Spec(B_i))$ admite o acoperire finita cu deschisi afini de forma $Spec(A_ij)$ cu A_ij finit generate ca B_i module

- *plat* daca morfismele locale de inele induse $f_y^{\#} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ sunt plate, i.e. prin actiunea indusa de $f_y^{\#}$, $\mathcal{O}_{Y,y}$ este un $\mathcal{O}_{X,x}$-modul plat

- *scufundare inchisa* daca f, ca functie continua, induce un homeomorfism de la X la un subspatiu topologic inchis al lui Y si $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ este surjectie

- *scufundare deschisa* daca local este de forma incluziunii unui subspatiu deschis,i.e. induce un izomorfism al lui X cu o subschema deschisa a lui Y

- *proiectiv* daca exista o scufundare inchisa $i : X \to \mathbb{P}^n_Y := \mathbb{P}^n(\mathbb{Z}) \times_{Spec(Z)} Y$ incat f sa se factorizeze prin i

- *quasi-proiectiv* daca exista o schema X', o scufundare deschisa $j : X \to X'$ si un morfism proiectiv $g : X' \to Y$ incat $f = gj$

Definitia 4.6. Data o schema S fixata numim schema peste S o pereche $(X, X \to S)$ unde X este o schema si $X \to S$ este un morfism de scheme. Date doua scheme peste S, $(X, X \to S)$ si $(Y, Y \to S)$, spunem ca un morfism de scheme $f : X \to Y$ este morfism de scheme peste S daca f este compatibil cu morfismele date $X \to S$ si $Y \to S$.

Definitia 4.7.

1. O schema de tip finit X peste un corp k se numeste schema *neteda* daca schema obtinuta prin inlocuirea corpului k cu inchiderea sa algebrica $\bar{K}$ este regulata, i.e. admite o acoperire cu deschisi afini de forma $Spec(A_i)$ cu A_i inele regulate.

2. Un morfism $f : X \to Y$ intre 2 scheme de tip finit peste un corp k se numeste *neted* daca este plat si fibrele $f^{-1}(y)$ sunt scheme netede.

4.2 Categorii triangulate

Fie $\mathcal{C}$ o categorie aditiva (i.e. $\mathcal{C}(X, Y)$ sunt grupuri abeliene aditive, compunerea este distributiva fata de adunare, exista obiect nul si biprodus pentru orice numar finit de obiecte). Numim functor de translatare pentru $\mathcal{C}$ un functor aditiv inversabil $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Notam $X[n] := T^n(X)$ si $f[n] := T^n(f)$.

Definitia 4.8. Numim triunghi in $\mathcal{C}$ un tuplu (X, Y, Z, u, v, w) unde X, Y, Z obiecte din $\mathcal{C}$ si $u : X \to Y, v : Y \to Z, w : Z \to X[1]$. In general un triunghi se reprezinta sub forma $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w}$.

Un astfel de triunghi admite doua rotatii:

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} \quad \text{si} \quad Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v}$$

Definitia 4.9. Numim categorie triangulata o categorie aditiva $\mathcal{C}$, impreuna cu un functor de translatare T si o clasa de triunghiuri, numite distinse, cu urmatoarele proprietati:

TR1

- triunghiul $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow$ este distins
- pentru orice morfism $f : X \to Y$ exista un obiect Z (numit con al lui f) incat f sa faca parte dintr-un triunghi distins $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow$
- orice triunghi izomorf cu un triunghi special este distins

TR2 rotatiile unui triunghi distins sunt distinse

TR3 pentru orice diagrama comutativa de forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "j"'] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z \arrow[r, "w'"'] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

in care randurile sunt triunghiuri distinse exista un morfism $f : Z \to Z'$ (nu neaparat unic) incat diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "j"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "f"'] & X[1] \arrow[d, "{i[1]}"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z \arrow[r, "w'"'] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

sa fie comutativa

TR4 (axioma octaedrala)

Consideram diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y' \arrow[rr, dashed, "g"] \arrow[ddll, "{[1]}"'] & & X' \arrow[llll, "{j[1]\circ i}"', "{[1]}"] \arrow[ddll, "i"] \\
 & & & & \\
X \arrow[rrrr, "v\circ u"] \arrow[ddrr, "u"'] & & & & Z \arrow[uu, "{[1]}"'] \arrow[uull, "{[1]}"] \arrow[ddll, "v"] \\
 & & & & \\
 & & Y & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "{[1]}"'] & Y' \\
X & Y \arrow[lu, "j"]
\end{tikzcd}
$$

in care morfismele u si v sunt date, iar X' con pentru v, Z' con pentru u. Sagetile marcate cu [1] sunt cele care inchid un triunghi distins, i.e. $Z \to X$ este de fapt morfism $Z' \to TX$. Atunci exista f si g incat $(f, g, j[1] \circ i)$ este triunghi distins iar celelalte fete care contin f sau g sunt comutative.

Definim acum 2-categoria categoriilor triangulate $\mathfrak{TR}$ dupa cum urmeaza:

obiecte categorii triangulate

1-morfisme un 1-morfism intre categoriile triangulate $\mathcal{C}_1$ si $\mathcal{C}_2$ este o pereche (F, α) unde functorul aditiv $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ intre categorii triangulate transforma triunghiuri distinse in triunghiuri distinse si $\alpha : FT_1 \to T_2F$ izomorfism natural (T_i este functorul de translatare al categoriei $\mathcal{C}_i$)

2-morfisme pentru 1-morfismele $(F, \alpha), (F'\alpha') : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ un 2-morfism este o transformare naturala $\beta : F \to F'$ cu proprietatea ca urmatoarea diagrama comuta:

$$
\begin{tikzcd}
FT_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta_{T_1}"'] & T_2F \arrow[d, "T_2\beta"] \\
F'T_1 \arrow[r, "\alpha'"'] & F'T_2
\end{tikzcd}
$$

4.3 Enuntarea rezultatului principal

Fie S o schema noetheriana si (Sch/S) categoria schemelor quasi-proiective de tip finit peste S. Fie un 2-functor $H^* : (Sch/S)^{op} \to \mathfrak{TR}$. Notam $HX := H^*(X)$ si $f^* := H^*(f)$. Conform Observatiei 1.8 putem presupune fara a restrange generalitatea ca acest 2-functor este strict unitar. Consideram urmatoarele conditii pentru un astfel de functor:

1. $H(\emptyset) = 0$ (categoria triangulata triviala)

2. (adjunctie la dreapta) Pentru orice morfism $f : X \to Y$ din (Sch/S) 1-morfismul $f^* := HY \to HX$ admite o adjunctie la dreapta f_*. In plus, pentru o scufundare inchisa i 2-morfismul counitate $i^* i_* \to id$ al adjunctiei (i^*, i_*) este 2-izomorfism

3. (adjunctie la stanga) Pentru orice morfism neted $f : X \to Y$ din (Sch/S) 1-morfismul $f^* : HY \to HX$ admite o adjunctie la stanga $f_\# : HX \to HY$. In plus, pentru orice diagrama pull-back (C) din (Sch/S)

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "(C)"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

2-morfismul $Ex^*_\#(C) : f'_\# g'^* \to g^* f_\#$ reprezentat de diagrama

$$\begin{tikzcd}
HX \arrow[r, "g'^*"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Downarrow\delta_{g'}"] & HX' \arrow[r, equal] \arrow[d, "g'_\#"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow c(g',f)"] & HX' \arrow[r, equal] \arrow[d, "(fg')_\#"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow id"] & HX' \arrow[r, "f'_\#"] \arrow[d, "(gf')_\#"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow c^*(g',f)^{-1}"] & HY' \arrow[d, "g_\#"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\Downarrow\eta_g"] & \\
 & HX \arrow[r, "f_\#"'] & HY \arrow[r, equal] & HY \arrow[r, equal] & HY \arrow[r, "g^*"'] & HY'
\end{tikzcd}$$

este un 2-izomorfism

4. (localitate) fie $j : U \to X$ o scufundare deschisa si $i : Z \to X$ o scufundare inchisa complementara in (Sch/S). Atunci perechea (j^*, i^*) este conservativa

5. (invarianta la omotopie) Daca $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ este proiectia canonica atunci 2-morfismul unitate $id \to p_* p^*$ este 2-izomorfism

6. (stabilitate) daca s este sectiunea nula a proiectiei canonice $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ atunci endofunctorul $p_\# s^* : HX \to HX$ este echivalenta de categorii.

Definitia 4.10. Un 2-functor $H^* : (Sch/S)^{op} \to \mathfrak{TR}$ se numeste *2-functor omotopic stabil* daca verifica aceste conditii $1 - 6$.

Avem acum suficiente date pentru a enunta rezultatul principal al lucrarii [1].

Teorema 4.11. *Daca $H^* : (Sch/S)^{op} \to \mathfrak{TR}$ este un 2-functor omotopic stabil atunci exista:*

- *un 2-functor* $H^! : (Sch/S)^{op} \to \mathfrak{TR}$
- *un 2-functor* $H_* : (Sch/S) \to \mathfrak{TR}$ *care este adjunct global la dreapta pentru* H^*
- *un 2-functor* $H_! : (Sch/S) \to \mathfrak{TR}$ *care este adjunct global la stanga pentru* $H^!$
- *o structura de cross functor pe* $(H^*, H_*, H_!, H^!)$ *relativ la clasa diagramelor pull-back din* (Sch/S)

In plus, se pot demonstra si urmatoarele:

1. *Pentru orice schema* X *quasi-proiectiva peste* S *si orice* $\mathcal{O}_X$*-modul local liber* $\mathcal{M}$ *exista o autoechivalenta* $Th(\mathcal{M})$ *a restrictiei cross functorului precedent la categoria* $Sch(X)$*. Pentru un sir exact scurt de* $\mathcal{O}_X$*-module local libere* $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{M} \to \mathcal{L} \to 0$ *avem un izomorfism de autoechivalente* $Th(\mathcal{M}) \tilde{\to} TH(\mathcal{L}) \circ Th(\mathcal{N})$.
2. *Daca* $f : X \to Y$ *morfism neted de scheme peste* S *si* Ω_f *este* $\mathcal{O}_X$*-modulul local liber al diferentialelor relative atunci exista 2-izomorfismele* $f_! \tilde{\to} f_\# Th^{-1}(\Omega_f)$ *si* $f^! \tilde{\to} Th(\Omega_f) f^*$
3. *pentru orice morfism* $f : X \to Y$ *din* (Sch/S) *exista un 2-morfism* $f_! \to f_*$ *care este 2-izomorfism cand* f *este proiectiv*
4. *Pentru orice diagrama pull-back din* (Sch/S)

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

   in care f *este proiectiv, 2-morfismele de schimb* $g^* f_* \to f'_* g'^*$ *si* $f'_! g'^! \to g^! f_!$ *sunt 2-izomorfisme.*

Acest rezultat descrie modul in care se obtine formalismul celor 4 functori $(f^*, f_*, f^!, f_!)$ pentru un morfism de scheme $f : X \to Y$. Acestea sunt analoagele celor 4 operatii ale lui Grothendieck din coomologia étale, anume $Rf^*, Rf_*, Rf^!$ si $Rf_!$.

Bibliografie

[1] Ayoub, J.: *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique*, lucrare de doctorat, 2006

[2] Deligne, P.: *Voevodsky's lectures on cross functors*, 2001

[3] Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1997

[4] McLane, S.: *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1971

[5] Ueno,K.: *Algebraic Geometry 1. From Algebraic geometry to schemes*,AMS,1999