Şcoala Normală Superioară Bucureşti

DIZERTAŢIE

Îndrumător: C.P.1 Dr. Barbu Berceanu
Absolvent: Măcinic Daniela Anca

GRUPURI DE BRAIDURI GENERALIZATE

Cuprins

Introducere

Această lucrare se bazează pe articolul lui Pierre Deligne ”Les immeubles des groups e tresses generalises”-Inventiones math. 17,273-302(1972).

Rezultatele expuse in cele ce urmează vor proba existenţa unei clase de aranjamente de tip $K(\pi, 1)$.Mai exact, se va arăta că un aranjament complexificat pentru care componentele conexe ale complementului sunt conuri simpliciale deschise este $K(\pi, 1)$.În particular este rezolvata conjectura (Brieskorn): aranjamentele definite de grupuri finite de reflexii sunt de tip $K(\pi, 1)$.Brieskorn demonstrase parţial această conjectură reprezentând complementul unui asemenea aranjament ca spatiu total al unui şir de fibrări, nu neaparat liniare,imitând deci modelul aranjamentelor de tip fibrat.

Rezultatul lui Deligne clarifică problema deoarece un aranjament asociat unui grup Coxeter este simplicial(i.e. componentele conexe ale complementului sunt conuri simpliciale deschise).Este însă încă deschisă problema pentru unele aranjamente de reflexii complexe (nu toate grupurile de reflexii complexe sunt grupuri Coxeter).

Asadar rezultatul ”concluzie” al articolului este următoarea:

Teoremă 1.1 Fie V un spaţiu vectorial real finit dimensional,$\mathcal{A}$ aranjament de hiperplane omogene în $V, V_{\mathbb{C}}$ complexificatul lui V şi $Y = V_{\mathbb{C}} - \cup_{M\in\mathcal{A}} M$.Presupunem că componentele conexe ale lui $V - \cup_{M\in\mathcal{A}} M$ sunt conuri simpliciale deschise.Atunci Y este $K(\pi, 1)$.

Fie $W \in Gl(V)$ un grup finit generat de reflexii.Presupunem că W nu fixează nici unul din vectorii nenuli din V, adica

$$V^W = 0$$

Fie Φ o structură euclidiană pe V, invariantă la W şi $\mathcal{A}$ aranjamentul de hiperplane astfel ca reflexia ortogonala în raport cu M să fie în W.Vom spune atunci că $(V, \mathcal{A})$ verifica ipotezele teoremei şi că W aţionează liber asupra spaţiului Y_W corespunzător. Câtul său $X_W = Y_W/W$va fi de asemenea un spaţiu $K(\pi, 1)$.

Se arată că grupul fundamental al lui X_W ests grupul de braiduri generalizat $\tilde{W}$ corespunzător lui W.

În ultima parte a articolului este studiată structura grupului $\tilde{W}$, mai precis se determină centrul acestui grup, sunt clarificate problema cuvântului şi problema conjugării în $\tilde{W}$.

Capitolul 1

Galerii

Vom lucra cu aranjamente $\mathcal{A}$ de hiperplane într-un spaţiu vectorial real V de dimensiune finită.Vom numi suport P al unei faţete F intersecţia pereţilor (hiperplanelor) conţinînd $F.F$ este deschisă în P.

Pentru orice cameră A şi orice perete M vom nota $D_M(A)$ mulţimea camerelor de aceeaşi parte a peretelui M ca şi A.Daca A şi B sunt camere, vom nota cu $D(A,B)$ intersectia mulţimilor $D_M(A)$ pentru M perete care nu separă A de B.
Vom numi două camere *vecine* daca au o faţa comună.

Lema 1.1 *(i)* Fie M un perete al unei camere B.Există o singură cameră B' vecină cu B,având drept perete pe $M.M$ este singurul perete care separă B deB'.
(ii) Fie B_1, B_2, B_3 trei camere şi $\mathcal{M}(B_i, B_j)$ mulţimea pereţilor care separă B_i de B_j.Avem

$$\mathcal{M}(B_1,B_3) = (\mathcal{M}(B_1,B_2) - \mathcal{M}(B_2,B_3)) \cup (\mathcal{M}(B_2,B_3) - \mathcal{M}(B_1,B_2))$$

Vom numi *galerie de lungime n(n*≥ 0*)* de sursă A şi final B un şir de camere $C_0, ..., C_n$ cu $A = C_0, B = C_n$ şi C_i, C_{i+1}camere vecine, pentru orice i.

Dacă $G = (C_0, ..., C_n)$ şi $G' = (C'_0, ..., C'_m)$ sunt două galerii astfel încât $C_n = C'_0$, atunci definim *compunerea* acestor galerii

$$GG' = (C_0, ..., C_n, C'_0, ..., C'_m)$$

Galeria G^* *opusă* unei galerii $G = (C_0, ..., C_n)$ este galeria $(C_n, ..., C_0)$.Avem $(GG') = G'^*G^*$.Galeria *antipodică*$-G$ a unei galerii $G = (C_0, ..., C_n)$ este şirul de camere antipodice $-G = (-C_0, ..., -C_n)$.
Numim *distanţă* între două camere A şi B, notată $d(A,B)$ cea mai mică lungime a unei galerii de la A la B.O astfel de galerie se va numi *minimală*.

Propoziţie Distanţa de la A la B este numărul de pereţi care separă A de B.Pentru ca o galerie G să fie minimală este necesar şi suficient ca ea să traverseze o dată pereţii care separă A de B ş niciodată pe ceilalţi.

In orice caz, orice galerie de la A la B traversează pereţii care separă A de B.Deci e suficient să găsim o galerie G de la A la B care are lungimea k=numărul de pereţi care separă A de B.Dacă $A = B$, luăm $G = A$.
Altfel, există un perete M care separă A de B, şi fie A' cameră vecină cu A, de cealaltă parte a lui M decât A.M este singurul perete care separă pe A de A',şi dacă N este un perete al lui A' care separă A' de B, atunci $M \neq N$ şi N separă A de B.
Prin inducţie după k, există o galerie G' de lungime $k-1$ de la A' la B si luăm $G = (AA')G$.

Corolar 1.2 Fie A, B, C trei camere.Sunt echivalente:
(i) $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$, adică există o galerie minimală de la A la C trecând prin B.
(ii) Pentru ca un perete să separe pe A de C este necesar şi suficient să separe pe A de B sau pe B de C.Cu alte cuvinte $\mathcal{M}(A, B) \subset \mathcal{M}(A, C)$
(iii) $B \in D(A, C)$.$\square$

Propoziţie 1.3 Fie P o intersecţie de pereţi, $V_P = V/P, pr_P : V \longrightarrow V_P$ proiecţia canonică şi $\mathcal{A}_P$ aranjament de hiperplane în V_P astfel ca $pr_P^{-1}(V)$ să fie un perete.Notăm π'_P unica aplicaţie care duce faţetele lui $(V, \mathcal{A})$ în cele din $(V_P, \mathcal{A}_\mathcal{P})$ astfel că $pr_P(F) \subset \pi'_P(F)$.
(i)π'_P respectă relaţia de incidenţa $F_1 \subset F_2^-$:dacă $F_1 \subset F_2^-$ atunci

$$codim(F_1 in F_2^-) \geq codim(\pi'_P(F_1 in \pi'_P(F_2))$$

π_P duce cameră în cameră; dacă A şi B sunt vecine, atunci fie $\pi'_P(A) = \pi'_P(B)$, fie $\pi'_P(A)$ şi $\pi'_P(B)$ sunt vecine.
(ii) Fie F o faţetă de suport P.Restricţia lui π'_P la mulţimea de faţete E ale lui $(V, \mathcal{A})$ astfel încât $F \subset E^-$ este bijectivă.Ca şi inversa sa π_F ea respectă codimensiunea,inciden cta $E_1 \subset E_2-$ şi deci vecinătatea camerelor.Vom nota de asemenea π_F bijecţia $pr^{-1}(P)$ între intersecţii de pereţi în V_P şi intersecţii de pereţi în V, care conţin P.
(iii) Dacă $C = \pi_F(C')$ avem ,pentru camerele X din $(V, \mathcal{A})$
$\pi_F^{-1} D(C, X) = D(C', \pi'_P(X))$ şi $\pi_F^{-1} \mathcal{M}(C, X) = \mathcal{M}_P(C', \pi'_P(X))$.
Pentru $X = \pi_F(X)$ avem
$\pi_F D(C', X') = D(C, X)$ şi $\pi_F \mathcal{M}(C', X') = \mathcal{M}(C, X)$.

Notaţii:
Vom nota, pentru o faţetă F de suport P, cu $V_F, \mathcal{A}_F, pr_F, \pi'_F$ obiectele $V_P, \mathcal{A}_P, pr_P, \pi'_P$.
Dacă P este o intersecţie de pereţi şi C cameră, presupunem că există o faţetă a lui C (adică în aderenţa lui C) de suport P.Atunci această faţetă este unică.O

vom nota cu $F(P)$ şi fie

$$C.\Delta(P) = \pi_{F(P)}(-\pi^{-1}_{F(P)}(C))$$

Lema 1.4 *(i)* Pentru ca un perete să separe C de $C.\Delta(P)$ este necesar şi suficient ca el să conţină P.
(ii) Pentru M perete al lui C, $C.\Delta(M)$ este singura cameră vecină cu C avînd pe M drept perete.
(iii) Fie $M \neq N$ pereţi ai lui C a căror intersecţie P conţine o faţetă a lui C deschisă în P.Există exact doă galerii minimale între C şi $C.\Delta(P)$.Una începe prin $(C, C.\Delta(M))$,iar calaltă prin $(C, C.\Delta(N))$.

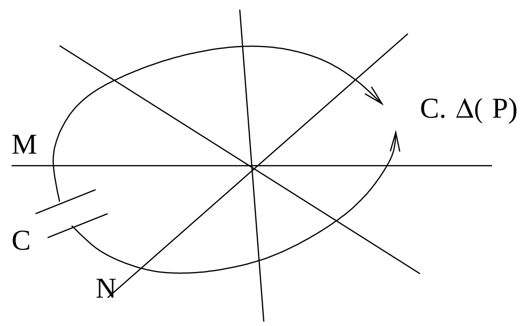

Figura 1.1: Reducere la rang 2

Vom presupune îndeplinită următoarea IPOTEZĂ: camerele complementului aranjamentului sunt conuri simpliciale deschise.Cu alte cuvinte, fiecare cameră este mulţimea punctelor de coordonate > 0 într-o bază convenabil aleasă a lui V.

Obsevaţie 1.5 Dacă P este intersecţie de pereţi, atunci:
(i) $(V_P, \mathcal{A}_\mathcal{P})$ verifică în continuare IPOTEZA.
*(ii)*Aranjamentul $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ format din urmele peste P ale hiperplanelor din $\mathcal{A}$) ce nu conţin P verifică în continuare IPOTEZA.
(iii) IPOTEZA ne asigură că dacă P este o intersecţie de pereţi ai lui C, atunci se poate defini camera $C.\Delta(P)$.

Două galerii de aceleaşi extremităţi G, G' se numesc *echivalente* (notaţie $G \sim G'$dacă există un şir de galerii $G = G_0, G_1, ..., G_n = G'(n \geq 0)$ astfel ca G_{j+1} se poate deduce din G_j în felul următor:
(a) există descompunerile $G_j = E_1 F E_2, G_{j+1} = E_1 F' E_2$
(b) există o cameră C şi doi pereţi M, N ai lui C astfel ca F, F' sunt cele două galerii minimale de la C la $C.\Delta(M \cap N)$.Compunerea a două galerii, operaţiile $G \longrightarrow G^*$ şi $G \longrightarrow -G$, aplicaţiile sursă şi final, funcţia lungime sunt compatibile cu această relaţie de echivalenţă şi deci trec la cât.Vom nota cu litere

mici clasele de galerii.

Propoziţie 1.5 Două galerii echivalente traversează de acelaşi număr de ori un perete.

Propoziţie 1.6 Două galerii minimale de aceleaşi extremităţi sunt echivalente.

Fie $G = (C_0, ..., C_n)$ şi $G' = (C'_0, ..., C'_n)$ galerii de extremităţi A şi B.Vom face demonstraţia prin inducţie după lungimea galeriilor considerate.Cazul $n = 0$ este clar.Presupunem $C_1 \neq C'_1$.Fie M şi M' pereţi care separă $A = C_0 = C'_0$ de C_1 şi C'_1 şi $C = A.\Delta(M \cap N)$. Pereţii M şi M' separă A de B.Reducându-ne la rang 2, deducem că orice perete care separă A de C separă A de B.

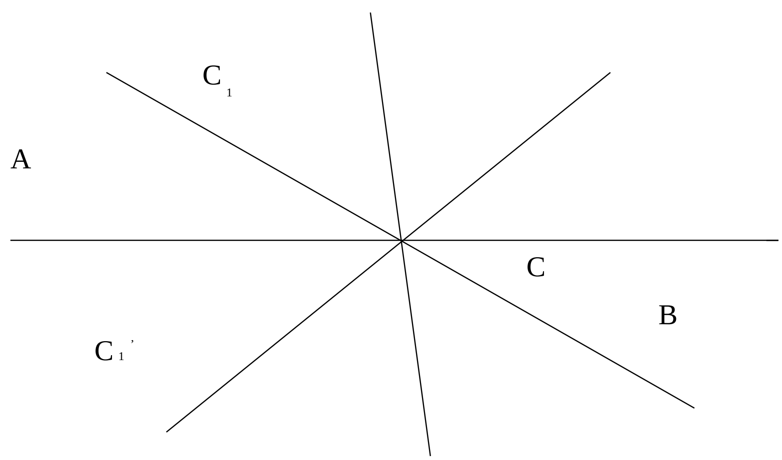

Figura 1.2: Desen în $V_{M \cap M'}$

Fie F (respectiv F') galeria minimală de la A la C care trece prin C_1(respectiv C'_1) şi E galerie minimală de la C la B.Galeriile FE şi $F'E$ sunt minimale şi echivalente.Galeriile minimale G şi FE (respectiv G' şi $F'E$) încep prin (A, C_1) (respectiv (A, C'_1)), iar ipoteza de inducţie implică faptul că sunt echivalente.$\square$

Vom nota cu $u(A, B)$ clasa de echivalenşă de galerii minimale de extremităţi A şi B.

Pentru I mulţime de pereţi ai unei camere C, de intersecţie P vom nota $\Delta(P) = u(C, C.\Delta(P))$.Pentru I mulţimea tuturor pereţilor vom nota $\Delta = u(C, -C)$.

Propoziţie 1.7 Fie A o cameră şi $\mathcal{G}$ o mulţime de clase de galerii de lungime finită, de sursă A.Presupunem că $\mathcal{G}$ verifică ipotezele*(i)*

(i_a) $(A) \in \mathcal{G}$

(i_b) Dacă $gh \in \mathcal{G}$, atunci $g \in \mathcal{G}$

(i_c) Fie g de final B şi M, N pereţi ai lui B.Dacă $g.\Delta(M)$ şi $g.\Delta(N)$ sunt în g, atunci $g.\Delta(M \cap N) \in \mathcal{G}$.
Atunci avem: *(ii)* Există o unică clasă de galerii x de sursă A astfel încât $\mathcal{G} = \{g/x$ incepe prin $g\}$

Unicitatea e clară:dacă x incepe prin y şi $x \neq y$ atunci y este de lungime strict mai mică decât x.Fie x de lungime maximală în $\mathcal{G}$.Pentru a arăta că x verifică *(ii)* va fi suficient de demonstrat afirmaţia:
$(*)$ Fie g şi M astfel încât *(a)*: x începe prin g şi *(b)*: x nu începe prin $g.\Delta(M)$ şi $g.\Delta(M) \in \mathcal{G}$.Există atunci g' şi M' care verifică încă *(a)* şi *(b)* cu g' strict mai lungă decît g.Cum $g.\Delta(M) \in \mathcal{G}$ şi x maximal, rezultă $g \neq x$, deci x începe prin $g.\Delta(N)$ pentru N perete convenabil ales, $N \neq M$.Atunci din (i_c) avem $g.\Delta(M \cap N) \in \mathcal{G}$.Cum $g.\Delta(M \cap N)$ începe prin $g.\Delta M$, x nu începe prin $g.\Delta(M \cap N)$.
Fie $(C_0, ..., C_m)$galeria minimală de la $A.g$ la $A.g\Delta(M \cap N)$ care începe prin $(A.g, A.g\Delta N)$.Fie i maxim pentru care x începe prin $g' = g(C_0, ..., C_i)$.Atunci g' şi peretele M' între C_i şi C_{i+1} verifică *(a)* şi *(b)*.

Propoziţie 1.8 Fie A o cameră şi $\mathcal{B}$ o mulţime de camere.Pentru ca $\mathcal{B}$ să verifice condiţia *(i)*:
(i_a) $A \in \mathcal{B}$
(i_b) Dacă $B \in \mathcal{B}$, atunci $D(A, B) \subset \mathcal{B}$
(i_c) Fie M, N pereţi ai unei camere B.Dacă A şi B sunt de aceeaşi parte a lui M şi N şi dacă $B.\Delta M$ şi $B.\Delta M$ sunt în $\mathcal{B}$, atunci $B.\Delta(M \cap N) \in \mathcal{B}$.
este suficient şi necesar ca:
(ii) Să existe o unică cameră C astfel ca $\mathcal{B} = D(A, C)$.

(ii)$\Rightarrow$*(i)* este clară.
Pentru *(i)*$\Rightarrow$*(ii)* aplicăm **Propoziţia 1.7** mulţimii de clase de galerii $u(A, B)$ pentru $B \in \mathcal{B}$ şi aplicăm **Corolar 1.2** (*(i)*$\Leftrightarrow$*(ii)*) clasei de galerii $x = u(A, X)$ astfel obţinute.

Corolar 1.9 Fie A şi B două camere vecine separate prin peretele M şi C de aceeaşi partea lui M ca şi B.Există C' astfel ca

$$D(A, C) \cap D_M(B) = D(B, C')$$

Corolar 1.10 *(i)* Fie A, C_1, C_2 trei camere.Există C astfel ca

$$D(A, C) = D(A, C_1) \cap D(A, C_2)$$

(ii) Fie A, C_1 două camere şi M perete al lui A.Există C' astfel încât

$$D(A, C') = D(A, C_1) \cap D_M(A)$$

(de fapt *(ii)* este un caz particular pentru $C_2 = -A.\Delta(M)$).

Propoziţie 1.11*(i)* Fie A, B, C trei camere, F o galerie de la A la B şi G_1, G_2 galerii de la B la C.Dacă $FG_1 \sim FG_2$ atunci $G_1 \sim G_2$
(ii) De asemenea, dacă $G_1E \sim G_2E$, atunci $G_1 \sim G_2$
(iii) Fie g o clasă de echivalenţă de galerii de sursă A.Există o cameră C astfel ca g să înceapă prin $u(A, B)$ dacă şi numai dacă $B \in D(A, C)$.

(i)$\Rightarrow$*(ii)* se demonstrează prin trecerea la galerii opuse.
Fie $G = (C_0, ..., C_n)$ şi $G' = (C'_0, ..., C'_n)$ galerii de lungime n de aceleaşi extremităţi.Dacă $n \geq 1$, fie $G_1 = (C_1, ..., C_n)$ şi $G'_1 = (C'_1, ..., C'_n)$.Dacă în plus $C_1 \neq C'_1$ notăm cu M, M' pereţii care separă $C_0 = C'_0$ de C_1 şi C'_1 şi fie $A = C_0.\Delta(M \cap M')$.Fie relaţia $R_n(G, G')$ următoare între galeriile G, G' : $R_n(G, G') \Leftrightarrow$ avem
α) $n = 0$
β) $n \neq 0, C_1 = C'_1, G_1 \sim G'_1$
γ) $n \neq 0, C_1 \neq C'_1$ şi există o galerie F de la A la $C_n = C'_n$ astfel ca $G_1 \sim u(C_1, A).F$ şi $G'_1 \sim u(C'_1, A).F$
Se demonstrează prin inducţie după n că R_n este relaţie de echivalenţă şi că $R_n(G, G') \Leftrightarrow G \sim G'$

Corolar 1.12 Condiţiile din **Propoziţia 1.7** sunt echivalente.

Presupunem *(ii)* şi demonstrăm (i_c).Dacă $x = gh$, h de sursă b, rezultă din **Propoziţia 1.11** că h începe prin $\Delta(M)$ şi $\Delta(N)$.Fie C camera a cărei existenţă e garantată de **Propoziţia 1.11** pentru h.Cum M şi N separă B de C, atunci $\pi'_{M\cap N}(C)$ nu poate fi decât $\pi'_{M\cap N}(B)$.Δ şi (i_c) rezultă din **Propoziţia 1.3**.

Corolar 1.13 Pentru orice cameră A, fie $n(A, i)$ numărul claselor de galerii de sursă A şi de lungime i. Fie

$$f_A = \sum{}_0^{\propto} n(A, i)t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$$

Pentru orice cameră A şi pentru P parcurgând initersecţiile de pereţi ai lui A, avem

$$\sum_P (-1)^{codim(P)} t^{d(A, A.\Delta(P))} f_{A.\Delta(P)} = 1$$

De aici rezultă că :*a)* numărul de galerii de lungime i care încep prin $\Delta(P)$ este $n(A.\Delta(P), i - d(A, A.\Delta(P)))$ (din 1.11(i)) şi
b) clasele de galerii care încep prin $\Delta(P)$ şi $\Delta(Q)$ încep prin $\Delta(P \cap Q)$(din 1.11(iii)).

Algoritm 1.14 Fie $G = (A_0, ..., A_n)$ o galerie de lungime $n \geq 1, G_1 = (A_1, ..., A_n), M$ peretele care separă A_0 de A_1, C camera a cărei existenţă e garantată de **Propoziţia 1.11**(iii)(pentru G) şi C_1 camera analoagă pentru G_1.Putem calcula C prin inducţie cu ajutorul formulei următoare:

$$D(A_1, C) = D_M(A_1) \cap D(A_1, C_1)$$

Cum $A_1 \in D(A, C)$, M separă A de C şi $C \in D_M(A_1)$.Din 1.11 (i) avem $D(A_1, C) \subset D(A_1, C_1)$, de unde incluziunea " $\subset$ ".Reciproc, dacă $B \in D_M(A_1) \cap D(A_1, C_1)$, G_1 începe prin $u(A_1, B)$ şi G începe prin $u(A, A_1)u(A_1, B) = u(A, B)$ $\square$

Corolar 1.15 Fie G şi H galerii compozabile.Fie A sursa lui G, B sursa lui H şi C garantată de 1.11 (iii): avem $H \sim u(B, C).H'$.Atunci, pentru orice cameră D, pentru ca clasa GH să înceapă prin $u(A, D)$ este necesar şi suficient ca $Gu(B, C)$ să înceapă prin $u(A, D)$.

Propoziţie 1.16 Fie A cameră, P intersecţie de pereţi ai lui A, $F = F(P)$ şi g o clasă de echivalenţă de galerii de sursă A.Există o clasă de galerii g' ale lui $(V_P, \mathcal{A}_P)$ de sursă$\pi_F^{-1}(A)$ astfel că orice galerie H în $(V_P, \mathcal{A}_P)$ începe prin $\pi_F(H)$ dacă şi numai dacă g' începe prin H.

Fie G mulţimea claselor de galerii h de sursă $\pi_F^{-1}(A)$ din $(V_P, \mathcal{A}_P)$ astfel că g începe prin $\pi_F(H)$.
Ţinând cont de caracterizarea din 1.7 pentru $\mathcal{G}$, g' va corespunde cu galeria x din enunţul proprietăţii amintite.$\square$

Putem defini o categorie având ca obiecte mulţimea camerelor, iar ca morfisme mulţimea galeriilor.Vom nota cu $Gal_0(V, \mathcal{A})$ această categorie.
În acelaşi mod vom defini categoria $Gal_+(V, \mathcal{A})$ având ca obiecte mulţimea camerelor şi drept morfisme mulţimea claselor de echivalenţă de galerii.
Fie A, B, C trei camere, E o galerie de la A la B, F o galerie de la B la C.Vom nota EF coompunerea acestor galerii.Legea $*$ (respectiv $G \longrightarrow -G$) este o antiechivalenţă (respectiv o echivalenţă) de categorii.

Lema 1.17 *(i)* În Gal_+ pentru orice galerie g avem

$$g\Delta = \Delta(-g)$$

(ii) Pentru orice g şi h de sursă A din Gal_+ există n astfel încât $g\Delta^n$ începe prin h.Dacă h este compunerea a k galerii $u(A_i, A_{i+1})$ putem lua $n = k$.

Prin recurenţă, e suficient de demonstrat *(i)* pentru galerii de lungime 1.Pentru $G = (B, C)$ avem:
$g\Delta = u(B, C)u(C, -C) = u(B, C)u(C, -B)u(-B, -C) = u(B, -B)u(-B, -C) = \Delta(-g)$
(ii) rezultă din *(i)* prin inducţie după k $\square$

Următorul rezultat poate fi dedus din lema anterioară şi **Propoziţie 1.11** (i, iii):

Propoziţie 1.18 *(i)* În Gal_+ compunerea morfismelor este o operaţie simplificabilă la stânga şi la dreapta.
(ii) Fie $Gal(V, \mathcal{A})$ categoria (grupoidul) dedus din Gal_+ făcând morfismele inversabile.Vom numi *pozitive* toate morfismele lui Gal care aparţin imaginii lui Gal_+.Functorul canonic din Gal_+ în Gal este fidel şi toate morfismele din Gal se pot pune sub forma $g = g_1\Delta^{-n} = \Delta^{-n}g_2$ cu g_1, g_2 pozitive.

Pentru orice perete M este bine definit numărul de traversări ale lui M de către g din Gal_+.Această funcţie a lui g se poate defini prin aditivitate pentru $g \in Gal$.Mai general, pentru orice intersecţie de pereţi P vom putea folosi proprietatea universală a categoriei Gal_+ pentru a defini functorii:

$$\pi'_P : Gal(V, \mathcal{A}) \longrightarrow Gal(V_P, \mathcal{A_P})$$

Dacă A e cameră, P intersecţie de pereţi ai lui A şi $F = F(P)$.Functorul π_F induce un functor:

$$\pi_F : Gal_0(V_P, \mathcal{A_P}) \longrightarrow Gal_0(V, \mathcal{A})$$

Imaginea acestui functor este stabilă la echivalenţă şi induce un functor fidel

$$\pi_F : Gal_+(V_P, \mathcal{A_P}) \longrightarrow Gal_+(V, \mathcal{A})$$

Propoziţie 1.19 În ipotezele anterioare functorul $\pi_F : Gal(V_P, \mathcal{A_P}) \longrightarrow Gal(V, \mathcal{A})$ este fidel.

Propoziţie 1.20 Fie C cameră, I, J mulţimi de pereţi ai lui C, $K = I \cap J$, P, Q, R intersecţii de pereţi din I, J respectiv K şi $F(P), F(Q), F(R)$ faţetele corespunzătoare în C.Faţeta $F(R)$ este cea mai mică faţetă conţinănd $F(P)$ şi $F(Q)$. În grupoidul $Gal(V, \mathcal{A})$ avem

$$\pi_{F(P)}(Gal(V_P, \mathcal{A_P}) \cap \pi_{F(Q)}(Gal(V_Q, \mathcal{A_Q})) = \pi_{F(R)}(Gal(V_R, \mathcal{A_R}))$$

Dacă o cameră admite drept faţete $F(P)$ şi $F(Q)$ atunci ea admite şi $F(R)$ drept faţetă, ceea ce demonstrează afirmaţia propoziţiei pentru obiecte.
Fie acum $g \in Hom_{Gal}(A, B)$ şi presupunem că $g = \pi_{F(P)}(g'_1) = \pi_{F(Q)}(g'_2)$.Atunci avem $g'_1 = \Delta(P)^{-n} g_1$" şi $g'_2 = \Delta(Q)^{-n} g_2$" cu g_i" pozitive, pentru $n \geq 0$ suficient de mare.
Fie $g_1 = \pi_{F(P)}(g_1")$ şi $g_2 = \pi_{F(Q)}(g_1")$.$\Delta^n \Delta(P)^{-n}$ este pozitiv şi avem în $Gal_+(V, \mathcal{A})$

$$(\Delta^n \Delta(P)^{-n}) g_1 = (\Delta^n \Delta(Q)^{-n}) g_2$$

Lema 1.21 Dacă $h \in Hom_{Gal_+}(A, B)$ începe prin $\Delta^n \Delta(P)^{-n}$ şi prin $\Delta^n \Delta(Q)^{-n}$, atuci h începe prin $\Delta^n \Delta(R)^{-n}$.

Odată demonstrat acest lucru rezultă $(\Delta^n \Delta(P)^{-n})g_1 = (\Delta^n \Delta(Q)^{-n})g_2 = (\Delta^n \Delta(P)^{-n})g_3$ cu g_3 pozitiv.Deci $g = \Delta(R)^{-n} g_3$. Galeria pozitivă $g_3 = \Delta(R)^n g$ aparţine imaginii lui $\pi_{F(P)}$ şi $\pi_{F(Q)}$. Aşadar ea nu traversează pereţii care nu conţin P sau Q, deci nici pe cei care nu conţin R, de unde rezultă că g_3 aparţine imaginii $\pi_{F(R)}\square$

Propoziţie 1.22 Fie F o faţetă a unei camere C asociată unei intersecţii de pereţi P. Atunci $\pi_F^{-1}(Gal(V, \mathcal{A})) = Gal_+(V_P, \mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \subset Gal(V_P, \mathcal{A}_{\mathcal{P}})$

Capitolul 2

Imobile

Vom considera $(V, \mathcal{A})$ aranjament real verificînd IPOTEZA, V spaţiu vectorial real de dimensiune r. Notăm cu S sfera de rază 1 din V, definită relativ la o structură euclidiană arbitrară pe V.Hiperplanele $M \in \mathcal{A}$ induc o triangulare pe S şi vom nota din nou cu S structura simplicială corespunzătoare şi realizarea sa geometrică."Transportăm" de asemenea pe S terminologia utilizată pentru V (camere, feţe, faţete, vecinătate, galerii...).

Vom alege A_0 cameră fundamentală în S.Vom construi un spaţiu I_+ depinzând de V, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$, înzestrat cu o aplicaţie $q : I_+ \longrightarrow S$
Vom nota $\mathcal{Z}_+$ mulţimea claselor de echivalenţă de galerii de sursă A_0:

$$\mathcal{Z}_+ = \bigcup_B Hom_{Gal_+}(A_0, B)$$

Fie Z_+ suma disjunctă, indexată după $g \in \mathcal{Z}_+$ a simplexului închis asociat lui S, definit de

$$Z_+ = \bigcup_{g \in \mathcal{Z}} (aderen\c{t}a\ camerei\ finale\ a\ lui\ g)$$

Fie q' aplicaţia evidentă din Z_+ în S.Definim I_+ ca fiind un cât al lui Z_+.Dacă G e o galerie de la A_0 la B şi C este o cameră vecină lui B vom lipi $(final\ de\ g)^-$ şi $(final\ de\ gBC)^-$ după faţa comună închisă a imaginilor lor în S.Spaţiul I_+ este descompus în faţete, imagini ale faţetelor din Z_+ şi se asociază bijectiv cu faţete de pe S.Camerele sale, feţele,respectiv vârfurile sunt faţetele sale de dimensiune $r-1$, $r-2$, respectiv 0.

Vârfurile unei faţete F sunt vârfurile conţinute în aderenţa $\overline{F}$ a lui F. Camerele lui I_+ sunt indexate de $\mathcal{Z}_+$ şi vom nota cu $\tilde{A}_0.g$ pe cea de indice g şi cu $\tilde{A}_0$ pe cea de indice A_0.Dacă $g \in Hom_{Gal_+}(A_0, A)$, $\tilde{A} = \tilde{A}_0.g$ şi $H = (C_0, ..., C_n)$ galerie de la A la B de clasă h,notăm

$$\tilde{A}.h = \tilde{A}_0.gh$$

Camerele $\tilde{A}.(C_0, ..., C_i)$ $(0 \leq i \leq n)$ formează o galerie în I_+.Numim *pozitive* galeriile astfel obţinute.

Lema 2.1 Fie F faţetă a lui S, A, B două camere ale lui S având pe F drept faţetă,$g \in Hom_{Gal_+}(A_0, A)$ şi $h \in Hom_{Gal_+}(A_0, B)$.Sunt echivalente:
(a) În I_+ faţetele $q^{-1}(F)$ ale lui $\tilde{A}_0.g$ şi $\tilde{A}_0.h$ coincid.
(b) $g^{-1}h \in Hom_{Gal}(A, B)$ este în $\pi_F(Gal)$
(c) Există g_1 şi h_1 în $\pi_F(Gal_+)$ astfel ca $gg_1 = hh_1$

Condiţia *(b)* dă o relaţie de echivalenţă între galerii de sursă A_0 al căror final este o cameră având pe F drept faţetă.Rezultă că *(a)⇒(b)*. *(b)⇒(c)* rezultă din 1.18(ii), iar *(c)⇒(a)* se deduce imediat plecând de la definiţii.□
Din lema anterioară *(a)⇔(b)* şi **Propoziţia 1.20** rezultă următoarea

Propoziţie2.2 Orice faţetă a lui I_+ este unic determinată de mulţimea vîrfurilor sale.Putem deci descrie I_+ ca realizarea geometrică a schemei simpliciale următoare:
(a) Dacă x vârf al lui S, fie $\mathcal{G}(x)$ submulţimea lui Gal_+ formată din elemente g de sursă A_0 şi final o cameră al cărei vârf este x.Fie $\mathcal{G}(x)/\pi_x$ câtul lui $\mathcal{G}(x)$ prin relaţia de echivalenţă 2.1(b) pentru $F = x$. Atunci mulţimea vârfurilor este

$$\bigcup_x \mathcal{G}(x)/\pi_x$$

(b) Pentru ca o mulţime E de vârfuri să formeze un simplex este necesar şi suficient să existe o galerie de sursă A_0 astfel că, pentru $y \in E$, g să fie în $\mathcal{G}(qy)/\pi qy$
.

Propoziţie 2.3 Fie F faţetă în I_+.Există o clasă de galerii g astfel ca,pentru ca F să fie faţetă a unei camere $B = \tilde{A}_0.h$ este necesar şi suficient să avem

$$h = g\pi_F(h')$$

pentru h' convenabil ales în Gal_+.

Fie g o galerie de lungime minimă astfel ca F să fie faţetă a lui $A = \tilde{A}_0.g$ şi $B = \tilde{A}_0.h$ o cameră care are pe F drept faţetă.Din **Lema 2.1**(*(a)↔(c)*) există galeriile h_1 şi h_2 în $(V_{qF}, \mathcal{A}_{qF})$ cu $g\pi_F(h_1) = h\pi_F(h_2)$.Aplicăm **Propoziţia 1.16** (transformata sa prin *).Cum g este minimală rezută că h_1 se termină prin h_2, adică $h_1 = h'h_2$.De aici (cu simplificarea din *1.11*) rezultă $g = \pi_F(h').h$, ceea ce încheie demonstraţia.□

Dacă A este cameră în I_+ vom nota cu $S(A)$ reuniunea camerelor închise $(A.(qA, B))^-$, pentru B cameră a lui S.
Vom arăta că $q|_{S(A)}$ este un izomorfism între $S(A)$ şi S.

Fie $\hat{I_+}$ spaţiul dedus din I_+ prin "imbinarea" sferelor $S(A)$.Mai precis, fie B_r bilă de bord S.Din punct de vedere simplicial putem considera B_r ca fiind conul peste spaţiul simplicial S.Definim $\hat{I_+}$ ca spaţiul construit ataşând la I_+ o familie de copii ale lui B_r, familie indexată după mulţimea de camere ale lui I_+.Aplicaţiile de ataşare sunt:

$$\partial b(A) \xrightarrow{\sim} S \xleftarrow{\tilde{q}} S(A)$$

Aplicaţiile de ataşare sunt simpliciale, astfel că $\hat{I_+}$ este realizarea geometrică a unei scheme simpliciale (de vîrfuri cele ale lui I_+ şi centrele bilelor ataşate).Spaţiul $\hat{I_+}$ este înzestrat cu o aplicaţie simplicială:

$$q : \hat{I}_+ \longrightarrow B_r$$

Propoziţie 2.4 Spaţiul $\hat{I_+}$ este contractibil.

Atunci spaţiul I_+ este buchetul de sfere $S(A)$.
Fie $(I_+)_n$ reuniunea camerelor închise $(\tilde{A}_0.g)^-$ pentru g de lungime $\leq n$ şi $(\hat{I}_+)_n$ reuniunea mulţimilor $(I_+)_n$ şi a mulţimii de bile $b(A)$ pentru $\partial b(A) \in (I_+)_n$. Atunci $(\hat{I}_+)_0 = \overline{A_0}$ (deci contractibilă). $\hat{I}_+ = \varinjlim(\hat{I}_+)_n$. **Propoziţia 2.3** rezultă atunci din

Lema 2.4 $(\hat{I}_+)_n$ este retractă de deformare a lui $(\hat{I}_+)_{n+1}$

Vom construi o familie continuă $(\phi_t)_{0\leq t\leq 1}$, de aplicaţii continue ale lui $(\hat{I}_+)_{n+1}$ în el însuşi, cu $\phi_0 = id$, $\phi_t|_{(\hat{I}_+)_n} = id$ şi $\phi_1((\hat{I}_+)_{n+1}) = (\hat{I}_+)_n$. Fie $A = \tilde{A}_0.g$ o cameră în $(\hat{I}_+)_{n+1}$ care nu e în $(\hat{I}_+)_n$ şi F o faţetă a sa.

Lema 2.5 Presupunem că există o cameră $B = \tilde{A}_0.h$ în $(\hat{I}_+)_{n+1}$, diferită de A, având ca faţetă pe F.Atunci există o cameră $B' = \tilde{A}_0.h'$ în $(\hat{I}_+)_n$ şi un perete M al lui qB' cnţinând qF, astfel că $A = B'.\Delta M$

Fie g_0 galeria considerată în **Propoziţia 2.3**.Avem $g = g_0\pi_F(g_1)$ şi $h = g_0\pi_F(h_1)$. Stim că $lg(g_1) \neq 0$ (altfel, cum $A \neq B$, ar rezulta $lg(h) > lg(g) = n+1$)Pentru un perete convenabil ales M al lui qA avem $g_1 = h'\Delta M$ şi fie $B' = \tilde{A}_0.h'$.Dacă $\overline{A}$ este aderenţa camerei A atunci $\overline{A} \cap (I_+)_n$ este reuniunea unei mulţimi (nevide) de feţe închise şi în $(I_+)_{n+1}$ punctele $\overline{A} - (\overline{A} \cap (I_+)_n)$ nu aparţin decât unei singure camere închise $\overline{A}$.
Distingem două cazuri:
(1) $\overline{A} \cap (I_+)_n \neq \partial\overline{A}$.În acest caz nu există sferă $S(B)$ cu $A \subset S(B) \subset (I_+)_{n+1}$.Vom lua drept $\phi_t|_{\overline{A}}$ o retracţie a lui $\overline{A}$ peste $\overline{A} \cap (I_+)_n$
(2) Dacă $\overline{A} \cap (I_+)_n = \partial\overline{A}$
Cum $A = \tilde{A}_0.g$, pentru orice perete M al lui qA, rezultă din 2.5 că g se termină

cu ΔM.Din 1.18(b) urmează că g se termină prin $\Delta :$ deci$A = B.\Delta$, cu B unic definit de A (din 1.11(ii)). Când trecem de la $(I_+)_{n+1}$ la $(I_+)_n$ A şi interiorul bilei $b(B)$ dispar.Definim $\phi_t|_{b(B)}$ o retractă a lui $b(B)$ peste $S(B) - A$.

Cum toate bilele care dispar sunt de tipul precedent, construcţia aplicaţiilor ϕ_t este completă şi izomorfismul $q|_{S(A)} \longrightarrow S$ este demonstrat.

În mod similar cu I_+ definim spaţiul I, înzestrat cu aplicaţia $q :\longrightarrow S$, înlocuind Gal_+ cu Gal.Notăm

$$\mathcal{Z} = \bigsqcup_B Hom_{Gal}(A_0, B) Z = \bigsqcup_{g \in \mathcal{Z}} (aderen\c{t}a\, camerei\, finale\, a\, lui\, g)$$

Fie q' aplicaţia evidentă din Z în S. Atunci spaţiul I este un cît al lui Z, cu q aplicaţia indusă de q'.Pentru g în $\mathcal{Z}$ de final B şi C cameă vecină cu B, "lipim" (aderenţa finalului lui g) şi (aderenţa finalului lui $g(BC)$) pe faţa comună închisă a imaginilor lor în S.Mai exact, dacă B şi C sunt camere având o faţetă comună F şi $g \in Hom_{Gal}(A, B)$, $h \in Hom_{Gal}(A_0, C)$ atunci, în I, faţetele închise $q'^{-1}(F)^-$ ale $(final\, g)^-$ şi $(final\, h)^-$ se identifică dacă şi numai dacă

$$hg^{-1} \in \pi_F Hom_{Gal}(\pi_F^{-1}(B), \pi_F^{-1}(C))$$

Definim noţiuni similare cu cele de pe I_+ pe I.Analog deducem că fiecare faţetă a lui I este unic determinată de mulţimea vârfurilor sale, şi I apare ca realizare geometrică a unei scheme simpliciale similar descrise cu cea de pe I.

Folosind aplicaţia $q : I \longrightarrow S$ şi descompunerea lui I în camere, I este înzestrat cu structura adiţională următoare: o compunere $\tilde{B}.g$ care asociază unei camere $\tilde{B}$ din I de imagine B în S şi unei galerii $g \in Hom_{Gal}(B, C)$ o cameră în I de imagine C în S.Construcţia $g \mapsto \tilde{B}.g$ defineşte un izomorfism al spaţiului analog lui I obţinut luînd B drept cameră fundamentală, cu I. (pentru $A_0 = B$ rezultă automorfisme ale lui I).

Fie A cameră a lui I deasupra lui A_0.Definim aplicaţia:

$$iA : I_+ \longrightarrow I(\hat{I}_+ \longrightarrow \hat{I})$$

compatibilă cu proiecţia pe S (respectiv B_r),care duce camera închisă $(A.g)^-$ a lui I_+ (respectiv bila $b(A.g)$ din $\hat{I}_+$) în camera (respectiv bila) de acelaşi indice din I (respectiv $\hat{I}$).

Propoziţie 2.6 *(i)* i_A identifică I_+ cu un subspaţiu al lui I şi $\hat{I}_+$ cu un subspaţiu al lui $\hat{I}$.
(ii) Avem $I = \underrightarrow{lim}(i_{\tilde{A}_0.\Delta^{-2n}}(I_+))$ şi $\hat{I} = \underrightarrow{lim}(i_{\tilde{A}_0.\Delta^{-2n}}(\hat{I}_+))$.

Afirmaţiile *(i)* şi *(ii)* pentru $\hat{I}$ şi $\hat{I}_+$ rezultă din afirmaţiile similare pentru I şi $I+$.

Fie B şi C două camere ale lui S având o faţetă comună F, $g \in Hom_{Gal_+}(A_0, B)$, $h \in Hom_{Gal_+}(A, C)$.

Presupunem că faţetele $q^{-1}(f)$ ale camerelor $(A.g)^-$ şi $(A.h)^-$ coincid în I. Atunci avem $g^{-1}h = \pi_F(e)$ pentru $e \in Hom_{Gal}(\pi_F^{-1}B, \pi_F^{-1}C)$.
Din 1.17 putem scrie $e = e_1 e_2^{-1}$, cu $e_i \in Gal_+$.Functorul π_F fiind fidel avem $g\pi_F(e_1) = h\pi_F(e_2)$ în Gal_+ şi deci faţetele $q^{-1}F$ ale lui $(A.g)^-$ şi $(A.h)^-$ sunt deja egale în I_+.

Pentru a demonstra *(ii)* este suficient de remarcat că $g = \Delta^{-2n}g'$ cu $g' \in Gal_+$, pentru orice g de sursă A_0 din Gal.$\square$

Deci $\pi_i(\hat{I}) = \underrightarrow{lim}\pi_i(\hat{I}_+)$.Cum I este CW complex, deducem

Teorema 2.7 Spaţiul $\hat{I}$ este contractibil.

Deci spaţiul I este buchetul de sfere $S(A)$, pentru A parcurgând mulţimea camerelor din I.

Capitolul 3

Acoperiri

Fie $V_{\mathbb{C}}$ complexificatul spaţiului vectorial real V, $M_{\mathbb{C}}$ complexificatul hiperplanului $M \in \mathcal{A}$ şi

$$Y = V_{\mathbb{C}} - \bigcup_{M \in \mathcal{A}} M_{\mathbb{C}}$$

În acest capitol vom construi prin "ataşari" un spaţiu $\tilde{Y}$ deasupra lui Y. Construcţia va fi făcută cu ajutorul lui I şi $\hat{I}$.Faţetele lui V diferite de $\{0\}$ şi cele ale lui S sunt în bijecţie canonică şi vom putea trece de la unele la altele în cursul demonstraţiilor ce urmează.Vom păstra aceeaşi notaţie pentru faţete corespondente.

Lema 3.1 Fie A, B, C trei camere ale lui I, cu $C \in S(A) \cap S(B)$.Atunci q induce un izomorfism între $S(A) \cup S(B)$ şi intersecţia lui S cu semispaţiile închise $D'_M(qC)$ conţinând qC delimitate de un perete M care separă qA de qB.

Intersecţia mulţimilor $D_M(C)$ este reuniune de camere închise.Fie C' una din ele. Atunci qA şi qB sunt de aceeaşi parte a oricărui perete care separă qC de C'.De aici, corespondentele pe $S(A)$ sau $S(B)$ a unei galerii minimale de la qC la C' coincid (pe S) şi $(C')^- \in q(S(A) \cup S(B))$.

Reciproc, dacă o faţetă F nu este în intersecţia mulţimilor $D'_M(qC)$, există un perete M astfel ca $F \nsubseteq M$ care separă qA de qB şi F de qC.Presupunem prin absurd că $F \in q(S(A) \cup S(B))$.Dacă D este cameră în S având ca faţetă pe F şi $(C_0, ..., C_{n+1})$ galerie de la qC la D,fie M_i pertele care separă C_i de C_{i+1} şi α_i(respectiv $/\beta_i$) $= \pm 1$, după cum C_{i+1} şi A (respectiv B) sunt sau nu de aceeaşi parte a lui M_i.Prin ipoteză, F este faţetă pentru $C\Delta {M_0}^{\alpha_0} ... \Delta {M_n}^{\alpha_n}$ şi pentru $C\Delta {M_0}^{\beta_0} ... \Delta {M_n}^{\beta_n}$.Dar, pentru că $F \nsubseteq M$

$$\sum_{M_i = M} \alpha_i = \sum_{M_i = M} \beta_i$$

Contradicţie, deoarece un termen este 1, iar celălalt -1.$\square$

Lema 3.2 Fie $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{I}$ partea reală şi partea imaginară de la $V_{\mathbb{C}}$ în V.Fie $v \in V_{\mathbb{C}}$ şi F faţetă a lui V astfel ca $\mathcal{R}v \in F$.Pentru ca $v \in Y$ este necesar şi suficient ca $pr_F(\mathcal{I}v)$ să fie într-o cameră a lui $(V_F, \mathcal{A}_F)$.

Suportul intuitiv pentru raţionamentele ce urmează este următorul:oricărei "parcurgeri" în I a unei galerii de forma $C\Delta {M_1}^{\varepsilon_0}...\Delta {M_k}^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_i = \pm 1$ îi corespunde un drum α (clasă de drumuri) în Y.Imaginea prin $\mathcal{R}$ a drumului α din V trece din cameră în cameră, traversând succesiv pereţii $M_1, ..., M_k$ în punctele m_i.Pentru $\varepsilon_i = 1$ (respectiv $\varepsilon_i = -1$) drumul trece printr-una din cele două componente conexe R ale mulţimii $\mathcal{R}^{-1}(m_i) \cap Y$ (aflată în bijecţie cu $V - M_i$): aceea astfel ca $\mathcal{I}R$ să conţină (respectiv să nu conţină) camera precedentă.

Notaţii: *(i)* Fie C cameră în $(V.\mathcal{A})$. Notăm $Y(C)$ deschisul din Y format din acei $x \in V_{\mathbb{C}}$ verificând condiţia: dacă F este faţetă în V astfel ca $\mathcal{R}x \in F$, atunci $pr_F\mathcal{I}x \in \pi'_F(C)$.
(ii) Dacă A, B camere în I şi $S(A) \cap S(B)$ conţine o cameră C notăm cu $Y,(A, B)$ intersecţia semispaţiilor deschise $D'_M(qC)^o$ pentru M ca în 3.1.Fie

$$Y(A, B) = Y(qA) \cap Y(qb) \cap \mathcal{R}_{-1}Y'(A, B) \subset V_{\mathbb{C}}$$

Dacă $S(A) \cap S(B) = \emptyset$, punem $Y(A, B) = \emptyset$
(iii) Dacă F faţetă în V numim *stea în jurul lui* F, notată $Et(F)$ reuniunea faţetelor deschise din $(V, \mathcal{A})$ în a căror aderenţă este inclus F.
(iv) Pentru F faţetă în V, C cameră în $(V_F, \mathcal{A}_F)$ notăm

$$V(F, C) = \{v \in V_{\mathbb{C}}/\mathcal{R}v \in Et(F), pr_F\mathcal{I}v \in C\}$$

Lema 3.3 Fie G faţetă în V.Mulţimile $V(F, C)$ pentru o faţetă F astfel ca $F^- \supset G$ şi C cameră în V_F formează o acoperire deschisă a lui $Y \cap \mathcal{R}^{-1}(EtG)$.În particular (pentru $G = \{0\}$) mulţimile $V(F, C)$ acoperă Y.

Fie Y' reuniunea disjunctă, indexată de bilele $b(A)$ din $\hat{I}$

$$Y' = \bigsqcup_{b(A)} Y(qA)$$

Notăm $Y'(b(A))$ componenta de indice $b(A)$. Avem o proiecţie evidentă $p' : Y' \longrightarrow Y$.Fie R următoarea relaţie pe Y':pentru $x \in Y'(b(A))$ şi $y \in Y'(b(B))$, $R(x, y)$ înseamnă că $p'(x) = p'(y)$ şi $p'(x), p'(y) \in Y(A, B)$.

Notăm $\tilde{Y} = Y'/R$.Avem proiecţia evidentă

$$p : \tilde{Y} \longrightarrow Y$$

Pentru orice bile $b(A)$ din $\hat{I}$ notăm $\tilde{Y}(b(A))$ imaginea lui $Y'(b(A))$ în $\tilde{Y}$.Teorema următoare va implica faptul că Y este un spaţiu de tip $K(\pi, 1)$.

Teorema 3.4 $\tilde{Y}$ este acoperire contractibilă a lui Y.

Mai întâi se arată că $\tilde{Y}$ este o acoperire a lui Y.Se demonstrează că $p^{-1}V(F,C)$ este o sumă de copii ale lui $V(F,C)$
. Dacă pentru o faţetă a lui I notăm

$$\tilde{Y}(F) = \bigcup_{F \in S(C)} (\tilde{Y}(b(C)) \cap p^{-1}\mathcal{R}^{-1}Et(qF))$$

şi dacă $o(A)$ este centrul unei bile $b(A)$ a lui $\hat{I}$ notăm

$$\tilde{Y}(o(A)) = \tilde{Y}(b(A)) \cap p^{-1}V(\{0\}, A)$$

atunci avem următoarea
Lema 3.5 *(i)* $\tilde{Y}(s)$ pentru s vârf al lui $\hat{I}$ formează o acoperire a lui $\tilde{Y}$ al cărei nerv este $\hat{I}$ (adică o familie de $\tilde{Y}(s)$ are intersecţia nevidă $\Leftrightarrow$ s-urile corespund la vârfurile unei faţete în $\hat{I}$).
(ii) Dacă o faţetă F a lui I are ca vârfuri $s_0, ..., s_p$ atunci

$$\tilde{Y}(F) = \tilde{Y}(s_0) \cap ... \cap \tilde{Y}(s_p)$$

(iii) Dacă $F \subset S(A)$ atunci $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(F)$ este contractibilă: $\tilde{Y}(o(A))$ este contractibilă.

Se demonstrează că dacă $F \subset S(A)$ p induce un izomorfism între $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(F)$ şi $Y(qA) \cap \mathcal{R}^{-1}Et(qF)$ şi deci e suficient de demonstrat că $Y(qA) \cap \mathcal{R}^{-1}Et(qF)$ este contractibilă: fie v_0 un vector astfel ca $\mathcal{I} \in A$. Atunci pentru $0 \leq t \leq 1$ definim $\phi_t : v \longrightarrow v_0 + t(v - v_0)$ de la $Y(A)$ şi $\mathcal{R}^{-1}Et(F)$ în ele însele. Avem $\phi_0(Y(A) \cap \mathcal{R}^{-1}Et(F)) = \{v_0\}$ şi $\phi_1 = id$.

În final, demonstrăm că $\tilde{Y}$ este contractibilă prin inducţie după dimensiunea spaţiului V.Mai întâi se demonstrează că

$$\tilde{Y}(F) = \bigcup_{F \in B^-} \tilde{Y}(b(B)) \cap p^{-1}\mathcal{R}^{-1}Et(F)$$

şi trecând la spaţiul factor $(V_F, \mathcal{A}_F)$ notăm I_F imobilul corespunzător.Pentru $B = \tilde{A}_0.g_F$ cameră în I_F vom nota $\pi_F(B)$ camera $\tilde{A}^I_{F,0}.\pi_F(g_F)$, unde $A_{F,0}$ este camera fundamentală aleasă în $(V_F, \mathcal{A}_F)$.Atunci rescriem

$$\tilde{Y}(F) = \bigcup_{B \in I_F} \tilde{Y}(b(\pi_F(B))) \cap p^{-1}\mathcal{R}^{-1}Et(F)$$

Dacă $\tilde{Y}_F = (V_F)_{\mathbb{C}} - \bigcup_{M \in \mathcal{A}_F} M_{\mathbb{C}}$, notăm $\tilde{Y}_F$ ridicarea lui Y_F construită plecând de la I_F.

Se dovedeşte că există o compatibilitate între construcţiile $\tilde{Y}(F)$ şi $\tilde{Y}_F$ şi există diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y}_F & \tilde{Y}(F) \arrow[l] \arrow[d] \\ Y_F \arrow[u, leftarrow] & \mathcal{R}^{-1}Et(F) \in Y \arrow[l, "pr_F"'] \end{tikzcd}$$

care duce $\tilde{Y}(b(\pi_F(B))) \cap p^{-1}\mathcal{R}^{-1}Et(F)$ în $\tilde{Y}(b(B))$, B cameră în I_F. Dacă prima săgeată verticală e ridicare, atunci şi cea de-a doua va fi ridicare. Se verifică imediat că pr_F este echivalenţă omotopică, de unde $\tilde{Y}(F)$ şi $\tilde{Y}_F$ au acelaşi tip de omotopie.

Informaţia e suficientă pentru a finaliza demonstraţia inductivă a faptului că $\tilde{Y}$ este contractibil. Fie $\mathcal{U}$ acoperirea deschisă a lui $\tilde{Y}$ dată de $Y\tilde{(s)}$, s vârf al lui $\hat{I}$. $\hat{I}$ este nervul lui $\mathcal{U}$ (3.5). Din ipoteza de inducţie, intersecţiile nevide aparţinând lui $\mathcal{U}$ sunt contractibile. Aceasta implică faptul că (Bott & Tu-Differential Forms in Algebraic Topology) $\tilde{Y}$ şi $\hat{I} = Nerf(\mathcal{U})$ au acelaşi tip de omotopie. Cum $\hat{I}$ contractibil (2.7), $\tilde{Y}$ va fi contractibil.$\square$

Capitolul 4

Grupuri de braiduri generalizate

Din nou considerăm V spaţiu vectorial real de dimensiune finită şi $W \in Gl(V)$ grup finit generat de reflexii.Presupunem că $V^W = \{0\}$ şi fie Φ structură euclidiană pe V invariantă la W, iar $\mathcal{A}$ aranjament de hiperplane astfel încât reflexia ortogonală relativ la $\mathcal{A}$ să fie în W.Stim că:
(a) $(V, \mathcal{A})$ verifică IPOTEZA
(b) W permută camerele lui $(V, \mathcal{A})$ printr-o acţiune strict simplu tranzitivă
(c) Dacă $x \in V$ aparţine unei camere închise A^-, stabilizatorul său este generat de reflexii în raport cu pereţii lui A conţinând x.
(d) Grupul W acţionează liber pe $Y_W = V_{\mathbb{C}} - \bigcup_{M \in \mathcal{A}} M_{\mathbb{C}}$ (rezultă din *(c)*).

Din *(b)* rezultă că pentru două camere C_1, C_2 există un unic $w \in W$ astfel ca $wC_0 = C_1$. Aceşti w induc un sistem tranzitiv de bijecţii între pereţii diferitelor camere. Trecând la cât obţinem o mulţime D cu (dim V) elemente şi, pentru fiecare cameră C, o bijecţie ϕ_C a lui D cu mulţimea pereţilor lui C.Avem

$$\phi_{wC}(i) = w\phi_C(i)$$

Notăm cu $(m_{ij})_{i,j \in D}$ matricea Coxeter asociată mulţimii D.Fie A_0 cameră în $(V, \mathcal{A})$. Pentru $i \in D$, fie w_i reflexia relativ la peretele $\phi_{A_0}(i)$. **Teorema 1**($\vee$.3.2)-Bourbaki demonstrează că W este generat de w_i, aceşti generatori satisfăcând doar relaţiile

$$(w_i w_j)^{m_{ij}} = e$$

Fie $X_W = Y_W/W$. Cum W acţionează liber pe Y_W, rezultă că proiecţia canonică $Y_W \mapsto X_W$ este acoperire. Fie $y_0 \in A_0$ imaginea lui $x_0 \in X_W$. Pentru orice $i \in D$, fie l'_i clasa de omotopie a drumului din Y_W de la y_0 la $w_i(y_0)$ care conţine linia unind succesiv vârfurile y_0, $y_0 + iy_0$, $w_i(y_0) + iy_0$, $w_i(y_0)$.Imaginea l_i a drumului l'_i în X_W este o buclă în x_0.

Teorema 4.1 *(i)* Grupul fundamental $\pi_1(X_W, x_0)$ este generat de l_i, cu relaţiile

$$(l_i l_j)^{m_{ij}} = (l_j l_i)^{m_{ji}}$$

(ii) acoperirea universală a lui X_W este contractibilă: X_W este $K(\pi, 1)$.

(ii) rezultă din faptul că Y_W este un spaţiu de tip $K(\pi, 1)$.
Fie $G = (C_0, ..., C_n)$ galerie şi M_i perete care separă C_{i-1} de C_i. Atunci $\phi^{-1}_{C_{i-1}}(M_i) = \phi^{-1}_{C_i}(M_i)$.Notăm $l(G)$ elementul $\phi^{-1}_{C_1}(M_1)...\phi^{-1}_{C_n}(M_n)$ din $L_+(D)$. Aplicaţia l induce o bijecţie între mulţimea galeriilor G de sursă dată şi $L_+(D)$.
Avem
(*) $l(w(G)) = l(G), W \in W$
(**) $l(G_0 G_1) = l(G_0) l(G_1)$
Fie $w : L(D) \longrightarrow W$ morfismul care prelungeşte aplicaţia $i \to w_i$ din D în W.

Propoziţia 4.2 Pentru orice galerie de sursă A_0 avem

$$A_0.g = w(l(G))(A_0)$$

Rezultă din identitatea

$$[(w_1...w_{n-1})w_n(w_1...w_{n-1})^{-1}][(w_1...w_{n-2})w_{n-1}(w_1...w_{n-2})^{-1}]...[w_1] = w_1...w_n$$

Din afirmaţia anterioară rezultă că, pentru $w \in W$, întregul $d(A_0, w(A_0))$ este cuvântul în w_i de lungime minimă egal cu w.Mai precis, l induce o bijecţie între mulţimea de galerii minimale de la A_0 la wA_0 cu mulţimea cuvintelor $w \in L(D)$ de lungime minimală,astfel ca $w = w(m)$.

Numim *monoid de braiduri de tip* D, notat G_+ monoidul cu unitate generat de D, cu relaţiile

$$(ij)^{m_{ij}} = (ji)^{m_{ji}}$$

Numim *grup de braiduri de tip* D, sau *grup de braiduri generalizate*, notat G, grupul generat de D, cu relaţiile între generatori aceleaşi cu cele din G_+.
W admite de altfel prezentarea

$$< w_i / (w_i w_j)^{m_{ij}} = (w_j w_i)^{m_{ji}} >$$

deci $i \mapsto w_i$ defineşte un morfism de la G în W.
(***) Se constată că două galerii G_0 şi G_1 sunt echivalente dacă $l(G_0)$ şi $l(G_1)$ au aceeaşi imagine în G_+.
Atunci **Propoziţia 2.6** se traduce în: pentru $w \in W$, imaginea în G_+ a cuvintelor $m \in L(D)$ de lungime minimală printre cele astfel încât $w = w(m)$ nu depinde decât de w. Vom nota această imagine cu $r(w)$. Atunci r este o secţiune a aplicaţiei $w : G_+ \longrightarrow W$. Din **Propoziţia 4.2** avem

$$r(w) = l(u(A_0, wA_0))$$

Categoria cât a lui $Gal_+(V, \mathcal{A})$ prin W este definită astfel
(a) mulţimea obiectelor sale conţine un singur element

$$Ob(Gal_+(V, \mathcal{A}))/W$$

(b) monoidul morfismelor sale este $Fl(Gal_+(V, \mathcal{A}))/W$ şi trecerea la cât $Gal_+(V, \mathcal{A}) \longrightarrow (Gal_+(V, \mathcal{A})/W$ este functor.Cum categoria are un singur obiect, ea se reduce la monoidul morfismelor sale. Mai mult, din proprietăţile lui l ((*), (**), (***)) rezultă că acesta identifică acest monoid cu G_+.
În acelaşi mod definim $(Gal(V, \mathcal{A})/W$, categorie cu un singur obiect, şi aplicând proprietatea universală prelungim l la un izomorfism de grupuri între grupul morfismelor sale şi G:

$$\begin{tikzcd}
Gal(V_+, \mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & Gal(V_+, \mathcal{A})/W \arrow[r, "l"] \arrow[d] & G_+ \arrow[d] \\
Gal(V, \mathcal{A}) \arrow[r] & Gal(V, \mathcal{A})/W \arrow[r, "l"] & G
\end{tikzcd}$$

Putem atunci traduce o serie de rezultate obţinute pentru Gal_+ şi Gal:
Teorema 4.3 *(i)* În G_+ translaţia la stânga şi la dreapta sunt injective.
(ii) G_+ verifică condiţia Ore la stânga şi la dreapta.Rezultă deci din *(i)* că G_+ se scufundă în G.
(iii) Pentru J parte a lui G, fie G_J^+ (respectiv G_J) submonoidul (respectiv subgrupul) lui G_+ (respectiv G) generat de $i \in J$. Atunci aplicaţia evidentă identifică G_J^+ (respectiv G_J) cu monoidul (respectiv grupul) de braiduri de tip J.
(iv) $G_J^+ = G_J \cap G_+$
(v) Dacă J şi K sunt părţi ale lui D, avem $G_J \cap G_K = G_{J \cap K}$.
(vi) Fie $n(i)$ numărul de elemente din G_+ de lungime i şi fie $f = \sum n(i)t^i$. Pentru $J \in D$, fie $m(J)$ numărul de pereţi care trec prin intersecţia unor pereţi ai unei camere A, de indice în J (=numărul de reflexii în grupul Weil W_J). Atunci:

$$f = (\sum_{J \in D} (-1)^{|J|} t^{m(J)})^{-1}$$

Fie $x, y \in G_+$. Spunem că x începe prin y dacă există $z \in G_+$ astfel ca $x = yz$. Atunci putem rescrie **Propoziţia 1.11**(iii) astfel
Lema 4.4 Fie $x \in G_+$. Există o cameră C astfel ca, pentru orice $w \in W$ x începe prin $r(w)$ dacă şi numai dacă $wA_0 \in D(A_0, C)$.

Dacă J este o parte a lui D şi P intersecţia de pereţi $\phi_{A_0}(i), i \in J$.Notăm cu $D(J)$ elementul $l(A_0, A_0.\Delta(P))$ din G_+; fie $\Delta = \Delta(D)$ şi $i \mapsto \bar{i} = \phi_{-C}^{-1}\phi_C(i)$

involuţia de opoziţie relativ la D. Notăm cu $w \mapsto \overline{w}$ automorfismele lui $L_+(D)$, G_+ şi G care duc i în $\bar{i}$.(avem $m_{ij} = m_{\overline{ij}}$.Atunci (din 1.17) avem:

$$g\Delta = \Delta\overline{g}$$

În particular Δ^2 este central.
Mai mult, cum pentru orice $i \in D$ Δ începe prin i (avem $\Delta = ix$,în G_+), deducem

Propoziţia 4.5 G poate fi dedus din G_+ făcând inversabil Δ^2.

Putem de asemenea "traduce" construcţia imobilului I ataşat lui $(V, \mathcal{A})$
(a) Mulţimea vârfurilor lui I este

$$I^o = \bigsqcup_{i \in D} G/G_{D-\{i\}}$$

(b) Pentru ca o mulţime de vârfuri să genereze un simplex este necesar şi suficient ca el să fie conţinut în mulţimea de clase $gG_{D-\{i\}}$ pentru $g \in G$.
(c) Sfera fundamentală $S_0 = S(A_0)$ este reuniunea simplexului fundamental generat de clasele laterale ale unităţii e în $G/G - D - \{i\}$ cu transformatele sale prin $r(w)$ $(w \in W)$.

Descrierea anterioară face evidentă existenţa unei acţiuni la stânga a lui G asupra lui I. Ea este compatibilă cu mulţimea de sfere $S(A)$ şi cu corespondenţa $A \mapsto S(A)$.

Prin transport de structură G acţionează asupra acoperirii $\tilde{Y}_W$ a lui Y_W. Avem morfismul echivariant:

$$(G - \tilde{Y}_W) \longrightarrow (W - Y_W)$$

Deducem că G este grupul fundamental al lui $X_W = Y_W/W$ şi este demonstrată **Teorema 4.1** *(i)*.

Vom arăta că în G problema cuvântului, a conjugării şi calcularea centrului lui G pot fi rezolvate (pe modelul grupului braid, dat de Garside). Oricum, dacă graful Coxeter D al lui W este sumă disjunctă de grafuri D_α grupul de braiduri de tip D este produs de grupuri de braiduri de tip D_α, deci e suficient de considerat cazul grafului D conex.

Problema cuvântului: putem decide dacă două cuvinte din $L(D)$ au aceeaşi imagine în G:
(a) A şti că două cuvinte din $L^+(D)$ au aceeaşi imagine în G_+ este posibil pentru că relaţiile din G_+ nu modifică lungimea cuvintelor şi numărul cuvintelor de lungime dată e finit.
(b) Dacă avem m_1, m_2 în $L(D)$ putem găsi m_1', m_2' în $L^+(D)$ şi $k \geq 0$ astfel ca

$m_i'\Delta^{-k}$ şi m_i au aceeaşi imagine în G. Deci m_1, m_2 au aceeaşi imagine în G dacă şi numai dacă m_1' şi m_2' au aceeaşi imagine în G_+.

Teorema 4.6 Dacă graful Coxeter este conex(nevid) şi involuţia de opoziţie e trivială (respectiv netrivială) atunci centrul lui G este monogen infinit, generat de Δ (respectiv Δ^2).

Fie $x \in G_+$ cu proprietatea:
(*) pentru orice $i \in D$, există $i' \in D$ astfel încât $ix = xi'$
Este suficient să demonstrăm că, dacă x verifică (*) şi $x \neq 0$ atunci $x = \Delta y, y \in G_+$. Prin inducţie după lungimea lui x arătăm că x cu proprietatea (*) este de forma Δ^k, $k \geq 0$. În paticular centrul lui G_+ este conţinut în mulţimea elementelor de forma Δ^k, $k \geq 0$. Din 4.3(i) şi 4.5 centrul lui G este conţinut în mulţimea elementelor de forma Δ^k, $k \in \mathbb{Z}$ şi teorema rezultă din faptul că $g\Delta = \Delta\overline{g}, g \in G$.

Fie deci $x \in G_+$ cu proprietatea (*), C cameră ca în 4.4 şi w imaginea în W a lui $lu(A_0, C)$. Avem $x = r(w)y, y \in G_+$. Fie $i \in D$. Atunci $ix = r(w)yi'$ începe prin $r(w)$: $ir(w) = r(w)i$". În particular pentru orice i există i" cu $iw = wi$", ceea ce înseamnă că orice perete al lui A_0 este de asemenea perete al lui wA_0. Însă dintre cele $2^{|D|}$ conuri simpliciale deschise delimitate de pereţii lui A_0 numai A_0 şi $-A_0$ sunt camere: sunt singurele pentru care unghiurile între feţe sunt $\leq \pi/2$. Dacă $x \neq 0$ atunci $w \neq e$, deci $wA_0 = -A_0$, adică $\Delta = r(w)\Box$.

Fie D' graful având D ca mulţime de vârfuri,două vârfuri fiind legate de o muchie dacă şi numai dacă m_{ij} este impar. Notăm D_0 numărul de componente conexe ale lui D'.

Definim epimorfismul

$$L_g :\longrightarrow \mathbb{Z}^{D_0}$$

care duce i în vectorul bazei de indice componenta conexă în D' a lui i. Se poate verifica că L_g identifică $\mathbb{Z}^{D_0}$ cu cel mai mare cât abelian al lui G.

Vom da în continuare un mod de testare a faptului că două elemente x, y ale lui G sunt conjugate. E suficient să ne rezumăm la cazul $x, y \in G_+$ deoarece, Δ^2 fiind central, x, y sunt conjugate dacă şi numai dacă $\Delta^{-2k}x$ şi $\Delta^{-2k}xy$ sunt. Dacă x şi y sunt conjugate, atunci există a în G_+ astfel ca $xa = ay$ şi $Lg(x) = Lg(y)$. Există însă un număr finit de $z \in G_+$ de lungime $Lg(x)$. În plus, cum W este finit, va funcţiona următorul procedeu de testare:

Lema 4.7 Fie $x, y \in G_+$.Dacă x şi y sunt conjugate atunci există un şir $x_0 = x, ..., x_n = y$ de elemente din G_+ şi un şir de elemente din W astfel ca

$$x_{i+1}r(w_i) = r(w_i)x_i$$

Alegem a astfel ca $xa = ay$ şi scriem $a = r(w_1)...r(w_{n-1})$, $w_i \in W$ (4.4), apoi se face inducţie după n. $\square$

Bibliografie

[1] Deligne P., *Les immmeubles des groupes de tresses generalises,* Inventiones math. 17, 273-302(1972)- Springer Verlag

[2] Bourbaki N., *Groupes et algebres de Lie,* Paris: Hermann 1968

[3] Orlik P., Terao H., *Arrangements of Hyperplanes,* Springer-Verlag 1992

[4] Birman J., *Braids, Links and Mapping class groups,* Annals of Mathematics Studies- Princeton University press, 1974

[5] Bott R., Tu W.L. *Differential Forms in Algebraic Topology,* Springer-Verlag 1982