LUCRARE DE DIZERTAȚIE - MASTER S.N.S.B.

TITLUL : *Arbori simpliciali*

STUDENT : Cimpoeaş Mircea

PROFESOR : Popescu Dorin

Data susținerii :
Rezultat obținut:

§0.Prezentarea lucrării.

Această lucrare prezintă rezultatele cele mai importante din teoria arborilor simpliciali. Materialele de bază ale acestei lucrări constă în trei articole ale matematicienei canadiene Sara Faridi.(vezi bibliografia)

În primul capitol sunt prezentate noțiuni de bază despre complexele simpliciale: idealul fațetelor, non-fețelor, localizarea unui complex simplicial etc. În al doilea capitol sunt prezentate proprietățile fundamentale ale arborilor simpliciali (ce este o frunză; orice frunză are un vârf liber; definiția arborelui simplicial, orice arbore simplicial are cel puțin 2 frunze; exemple, generalizarea teoremei Konig etc.)

În al treilea capitol enunț şi demonstrez teorema de structură a arborilor nemixtați. În capitolul 4 definesc şi exemplific noțiunea de complex simplicial altoit. Arăt că un complex simplicial altoit este nemixtat, şi că altoirea se păstreză prin localizare. În capitolul 5 arăt că un complex altoit este Cohen-Macaulay.

În capitolul 6 exemplific câteva dualizări ale unui complex simplicial (complexul acoperirilor, complexul Stanley-Reisner, complexul complementar, complexul Alexander) şi legături între acestea pe care le voi utiliza ulterior. În capitolul 7 arăt că idealul fațetelor unui arbore simplicial este secvențial-Cohen-Macaulay. Pentru aceasta, utilizez noțiunile de rezoluție liniară şi câturi liniare pentru un ideal…

În capitolul 8 definesc noțiunea de cvasi-arbore (introdusă de Zheng), care constituie o generalizare a noțiunii de arbore. De asemenea, enunț câteva rezultate importante legate de aceasta. În capitolul 9 demonstrez că realizarea geometrică a unui (cvasi)-arbore este un spațiu topologic contractibil.

Prin aplicațiile ei atât în domeniul cercetării pure cât şi în cercetarea aplicată (de ex în teoria optimizării rețelelor de calculatoare) teoria arborilor simpliciali reprezintă un domeniu foarte activ în matematică. Din acest motiv, mi-am ales ca subiect al lucrării mele de dizertație să fac o introducere în această tematică atât de actuală…

Cu speranța că am reuşit să realizez un echilibru între dorința de a prezenta cât mai multe lucruri şi cea de a mă face înțeles şi de către nespecialişti, închei această prezentare şi trec la fapte: ☺

§1.Complexe simpliciale. Definiții preliminare.

Definiția 1: Se numeşte complex simplicial pe mulțimea de vârfuri $V=\{v_1,\dots v_n\}$, o submulțime $\Delta\subseteq P(V)$ care verifică următoarele proprietăți:

a) $\{v_i\}\in\Delta$, $\forall i=\overline{1,n}$.

b) Dacă $F\in\Delta$ şi $G\subseteq F$, atunci $G\in\Delta$.

Elementele $F\in\Delta$ se numesc fețe ale complexului simplicial. Dimensiunea unei fețe este $\dim(F)=\mathrm{card}(F)-1$. Prin convenție, $\dim(\varnothing)= -1$.

Dimensiunea complexului simplicial este prin definiție: $\dim(\Delta)=\max\{\dim(F),F\in\Delta\}$

O față maximală (în raport cu relația de incluziune) se numeşte fațetă.

Este uşor de observat că un complex simplicial este perfect determinat de fațetele sale $F_1,\dots F_q$ motiv pentru care notăm $\Delta=<F_1,\dots F_q>$. Un complex simplicial cu o unică fațetă se numeşte simplex.

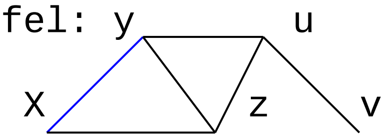
Prin subcomplex simplicial, vom înțelege un complex simplicial generat de o submulțime de fațete ale lui Δ.

Definiția 2: Fie Δ un complex simplicial şi k un corp. Lui Δ îi asociem următoarele ideale:

$F(\Delta) = <x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s}\,|\,\{v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_s}\}\in\Delta$ e fațetă> - idealul fațetelor lui Δ.

$N(\Delta) = <x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s}\,|\,\{v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_s}\}\notin\Delta>$ idealul Stanley-Reisner al non-fețelor lui Δ.

Exemplul 1: Dacă $\Delta=<xyz,\ yzu,\ uv>$, complex simplicial care arată astfel:



Atunci: $F(\Delta)=(xyz,\ yzu,\ uv)<k[x,y,z,u,v]$ şi
$N(\Delta)=(ux,\ vx,\ vy,\ vz)<k[x,y,z,u,v]$.

Definiția 3: O submulțime de vârfuri $A\subseteq V$ se numeşte acoperire cu vârfuri a lui Δ, dacă fiecare fațetă din Δ conține cel puțin un vârf din A.

O acoperire cu vârfuri se numeşte minimală dacă nu pot extrage din ea una mai mică.

Exemplul 2: În exemplul 1 avem acoperirile minimale următoare: {x,u}, {y,u}, {z,u}, {y,v}, {z,v}.

Definiția 3: Un complex simplicial $\Delta=<F_1,\dots F_q>$ se numeşte conex, dacă $\forall 1\le i<j\le q$, există un şir de fațete $F_i=F_{i1}$, F_{i2}, … $F_{it}=F_j$ astfel că intersecția a două fațete consecutive din şir este nevidă.

Definiția 4: Un complex simplicial se numeşte pur dacă toate fațetele au aceiaşi dimensiune. Complexul simplicial din exemplul 1 nu este pur deoarece are fațete de dimensiune 2 şi de dimensiune 1.

Un complex simplicial se numeşte nemixtat dacă toate acoperirile sale minimale au acelaşi număr de elemente.

Definiția 5: Dat $I=<m_1,\dots m_q><k[x_1,x_2,\dots,x_n]=R$ ideal generat de o mulțime de monoame libere de pătrate, în care apar toate variabilele $x_1,x_2,\dots,x_n$, îi putem asocia următoarele două complexe simpliciale:

$\delta_F(I) = <F_1,\dots F_q>$, unde $F_i=<v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_s}>$ cu $m_1=x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s}$.

$\delta_N(I) = <F=\{v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_s}\}\mid x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s}\notin I>$.

Este uşor de observat că $\delta_F(F(\Delta))=\Delta$ şi $\delta_N(N(\Delta))=\Delta$!

Propoziția 1: Fie $I=<m_1,\dots m_q>$ ideal ca mai sus, atunci: $\delta_F(I)$ este nemixtat $\Leftrightarrow$ $\delta_N(I)$ este pur.

<u>Demonstrație</u>: După cum se ştie, orice ideal prim din Ass(R/I), pentru I<R monomial este generat de variabile. Observăm că $P=<x_{i_1},x_{i_2},\dots x_{i_s}>\in Min(I)$ $\Leftrightarrow$ $\{v_{i_1},v_{i_2},\dots v_{i_s}\}$ este acoperire minimală pentru $\delta_F(I)$.

Deci $\delta_F(I)$ nemixtat $\Leftrightarrow$ toate primele minimale ale lui I au acelaşi număr de generatori $\Leftrightarrow$ toate fațetele lui $\delta_N(I)$ au aceiaşi dimensiune = ht(P) pentru $P\in Min(I)$ $\Leftrightarrow$ $\delta_N(I)$ este pur.

Definiția 6: Dat Δ un complex simplicial şi $F(\Delta)$,$N(\Delta)$ cele două ideale asociate din $R = k[x_1,\dots,x_n]$, putem să-i asociem următoarele două inele:

$K[\Delta]=R/N(\Delta)$ inelul Stanley-Reisner al lui Δ.

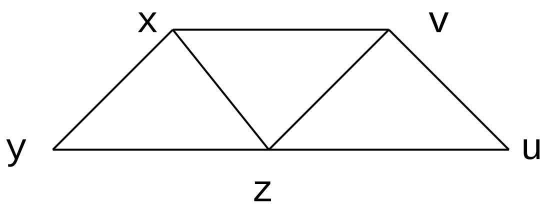
$R(\Delta)=R/F(\Delta)$.

Ne vor interesa condiții suficiente pentru ca aceste inele să fie Cohen-Macaulay.

Definiția 7: Fie Δ un complex simplicial şi $I=F(\Delta)$. Presupun $I=<m_1,\dots m_q>$. Fie $P<R$ ideal prim /I, generat de variabile $P=(x_{i_1},x_{i_2},\dots x_{i_s})$. (de exemplu $P\in Ass(R/I)$). Fie $I_P=(m_1',\dots m_q')$. $\Delta_P=\delta_F(I_P)$ s.n. localizarea lui Δ în P.

Mai precis, m_i' este obținut din m_i prin suprimarea variabilelor care nu apar în idealul P. Următorul exemplu va fi, sper, concludent:

Exemplul 2: Dacă Δ este următorul complex simplicial care arată astfel:



$I = F(\Delta) = <xyz, xzv, zvu>$. $m_1=xyz$, $m_2=xzv$, $m_3=zvu$.

a. Consider $P = (x, z, v)$. Atunci, $m_1'=xz$, $m_2'=xzv$, $m_3'=zu$ deci $I_P = (xz, zu)$.

b. Consider $Q = (z, v, u)$. Atunci, $m_1'=z$, $m_2'=vz$, $m_3'=vu$ şi deci $I_Q = (z, vu)$.

Propoziția 2: Dacă Δ este un complex simplicial nemixtat şi $I=F(\Delta)$. Atunci pentru $P\in V(I)$, complexul localizat Δ_P rămâne nemixtat. În plus, $\alpha(\Delta)=\alpha(\Delta_P)$, unde $\alpha(\Delta)$=numărul minim de elemente pentru o acoperire cu vârfuri a lui Δ.

Demonstrație: Mai întâi observăm că în Δ_P variabilele ce nu apar în P nu apar nici în $m_1',\dots m_q'$. De asemenea, unele monoame devin redundante. Putem deci presupune că idealul $I_P=(m_1',\dots m_t')$, pentru un $t\leq q$. De asemenea, fațetele corespunzătoare vor fi $F_i'=F_i \cap \{v_{i_1},v_{i_2},\dots v_{i_s}\}$.

Observăm că orice acoperire minimală cu vârfuri pentru Δ care este conținută în mulțimea $\{v_{i_1},v_{i_2},\dots v_{i_s}\}$ rămâne acoperire minimală şi pentru Δ_P, deoarece:

Dacă am un ideal prim minimal $Q\in Min(I)$, $Q\subseteq P$, atunci Q_P este prim minimal peste I_P.

Δ nemixtat $\Rightarrow$ toate primele minimale peste I au aceiaşi înălțime, deci, din argumentul anterior, rezultă că toate primele minimale peste I_P au aceiaşi înălțime, deci Δ_P este nemixtat. Evident, $\alpha(\Delta)=\alpha(\Delta_P)$!

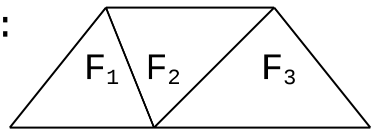
Se poate da şi următorul argument combinatoric pentru a arăta că Δ_P este nemixtat:

Dacă $B\subseteq\{v_{i_1},v_{i_2},\dots v_{i_s}\}$ e o acoperire minimală pentru Δ_P, atunci B acoperă fațetele $F_1',\dots F_t'$ dar şi $F_{t+1}',\dots F_q'$, deci de fapt este o acoperire cu vârfuri pentru Δ. Extrag B' *o acoperire minimală cu vârfuri pentru Δ. Evident B′ are $\alpha(\Delta)$ elemente. Dar dacă B′ acoperă pe Δ este evident că îl acoperă şi pe Δ_P. Dar de aici rezultă că B′=B! Morala este că: $\alpha(\Delta)=\alpha(\Delta_P)$!*

§2.Arbori simpliciali. Proprietăţi elementare.

Definiţia 1: Fie Δ un complex simplicial şi $F\in\Delta$. Spunem că F este frunză dacă F este singura faţetă sau dacă: $(\exists)G\in\Delta$ o faţetă, astfel că $(\forall)F'\in\Delta$ faţetă, $F'\neq F$, rezultă că $F'\cap F \subseteq G\cap F$. Altfel spus, $\{F'\cap F \mid F'\neq F\}$ are un unic element maximal.

Faţeta G se numeşte coadă a frunzei F. Mulţimea cozilor lui F se notează $U(\Delta;F)$ şi se numeşte mulţimea universală a lui F.

Exemplul 1: 

F_1 şi F_3 sunt frunze care au coada F_2.

Propoziţia 1: Dacă $F\in\Delta$ este o frunză, atunci F are un vârf liber (adică un vârf care nu mai aparţine nici unei alte faţete)

<u>Demonstraţie</u>: Presupunem $F=\{v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_s}\}$ şi, prin reducere la absurd, presupunem că $(\exists)F_j\in\Delta$ cu $v_{i_j}\in F_j$ pentru j=1,s. Fie $G\in U(\Delta;F)$ o coadă pentru F. Atunci, din definiţie, avem $F_j\cap F \subseteq G\cap F$, $j=1,s \Rightarrow (\forall)v_{i_j}\in G\cap F \Rightarrow F=\{v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_s}\}\subseteq G\cap F$, ceea ce este evident absurd, din motive de dimensiune.

Definiţia 2: Un complex simplicial conex Δ se numeşte arbore simplicial, dacă orice subcomplex al său (inclusiv el însuşi) are (cel puţin) o frunză. Dacă nu mai cerem ca Δ să fie conex, obţinem noţiunea de pădure simplicială.

Observaţie: Noţiunea de arbore simplicial reprezintă o generalizare a noţiunii de arbore din teoria grafurilor. Într-adevăr, dacă Δ este un arbore simplicial de dimensiune 1, el este, ca graf, arbore! Totuşi, definiţia din teoria grafurilor (Un arbore este un graf conex fără cicluri) nu se poate generaliza, motiv pentru care, noţiunea de arbore simplicial a fost introdusă plecând de la generalizarea următoarei proprietăţi a arborilor:

Un graf G este arbore $\Leftrightarrow$ Orice subgraf al său are cel puţin un capăt (corespondentul noţiunii de frunză…)

Aşa cum în teoria grafurilor, avem următoarea proprietate: Dacă G este un arbore, atunci G are cel puțin 2 capete, este firesc să ne aşteptăm la ceva analog pentru arbori simpliciali. Asta ne spune propoziția următoare:

Propoziția 2: Orice arbore simplicial, cu cel puțin 2 fațete, are cel puțin două frunze.

<u>Demonstrație</u>: *Presupun $\Delta=<F_1,\dots F_q>$, $q\geq 2$ şi fac inducție după q. Pentru q=2 afirmația este evidentă deoarece ambele fațete sunt în acest caz frunze! Presupun $q\geq 3$.*

Aleg F_1 o frunză pentru Δ şi $G_1\in U(\Delta;F_1)$ o coadă a ei. Fie subcomplexul $\Delta'=<F_2,\dots F_q>$. Din ipoteza de inducție, rezultă că Δ' are 2 frunze distincte, să zicem F_2 şi F_3. Evident, cel puțin una dintre ele diferă de G_1. Să zicem că aceasta ar fi F_2. Arăt că F_2 este frunză pentru Δ:

Fie $G_2\in U(\Delta';F_2)$. Atunci pentru $i\neq 1,2 \Rightarrow F_i\cap F_2 \subseteq G_2\cap F_2$. Pentru a arăta că F_2 este frunză pentru Δ tot ce mai avem de verificat este că: $F_1\cap F_2 \subseteq G_2\cap F_2$. Dar asta e simplu: Cum F_1 este frunză pentru $\Delta \Rightarrow F_1\cap F_2 \subseteq G_1\cap F_1$. În această incluziune, intersectăm cu F_2. Obținem:

$F_1\cap F_2 \subseteq G_1\cap F_1\cap F_2 \subseteq G_1\cap F_2 \subseteq G_2\cap F_2$,ultima incluziune având loc pentru că $G_1 \neq F_2$ şi F_2 este frunză în Δ'.

Propoziția 3: Dacă Δ este un arbore simplicial. I=F(Δ) şi P ideal prim peste I generat de variabile atunci complexul localizat Δ_P este o pădure simplicială.

Demonstrație: Presupun $I = <m_1,\dots m_q>$ şi $P = <x_{i_1},x_{i_2},\dots x_{i_s}>$, atunci $I_P = <m_1',\dots m_q'>$, unde m_i' este obținut din m_i prin suprimarea variabilelor care nu apar în idealul P.

Fie $\Delta_1'=<F_1',\dots F_t'>$ un subcomplex în Δ_P. Vreau să arăt că Δ_1' are o frunză. Dacă t=1, este evident, deci pp.t>1. Consider subcomplexul corespunzător $\Delta_1=<F_1,\dots F_t>$ al lui Δ. Cum Δ este arbore $\Rightarrow \Delta_1$ are o frunză, să zicem F_1. Aleg o coadă $G\in U(\Delta;F_1)$. Nu îmi mai rămâne decât să observ că F_1' este frunză în Δ_1', iar G' este coadă.

Notații: Dat Δ un complex simplicial, notăm:

$\alpha(\Delta)$=numărul minim de elemente al unei acoperiri minimale cu vârfuri.

$\beta(\Delta)$=numărul maxim de fațete independente (care nu au nici un vârf în comun, două câte două)

Observație: Reamintesc teorema lui Konig: Dacă G este un graf bipartit atunci α(G)=β(G), unde α(G)=numărul minim de elemente al unei acoperiri cu vârfuri pentru G şi β(G) este numărul maxim de muchii independente în G.
Această teoremă admite următoarea generalizare:
Teoremă: Dacă Δ e un arbore nemixtat, atunci $\alpha(\Delta)=\beta(\Delta)$.
Pentru a demonstra teorema, vom utiliza următoarea:

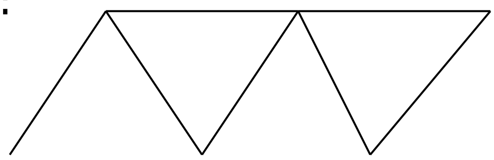
Lema 1: Dacă Δ este un complex simplicial nemixtat care are o frunză F cu o codiță G atunci $\alpha(\Delta)=\alpha(\Delta\backslash G)$, unde prin $\Delta\backslash G$ înțeleg subcomplexul lui Δ generat de toate fațetele lui Δ mai puțin G.

Demonstrația lemei: Notez $r=\alpha(\Delta)$. Notez $\Delta'=\Delta\backslash G$. Aleg A o acoperire minimală cu vârfuri pentru Δ'. Evident, A are cel mult r elemente. Cum F este fațetă în Δ', există un element $x\in A$ astfel că $x\in F$. Dacă x este vârf liber al frunzei F, îl putem înlocui printr-un vârf legat $x'\in F$, care în mod necesar aparține lui G, căci G e coada lui F.
Obțin astfel o acoperire cu vârfuri A'' a lui Δ' care va conține o acoperire minimală A'. Evident card(A')$\leq$r. Numai că A' este o acoperire minimală pentru tot Δ, deci cum acesta este nemixtat $\Rightarrow$ card(A')=card(A)=r, ceea ce implică $\alpha(\Delta)=\alpha(\Delta\backslash G)=r$.

Demonstrația teoremei: Presupun $\Delta=<F_1,\ldots F_q>$ şi fac inducție după q. Pentru q=1, afirmația este evidentă. Presupun $q\geq 2$. Aleg F o frunză a lui Δ şi G o coadă a ei. Conform lemei, $\alpha(\Delta)=\alpha(\Delta\backslash G)=r$. Atunci, din ipoteza de inducție, în $\Delta\backslash G$ există r fațete independente, care, evident, rămân independente şi în Δ. Dar atunci este clar că $\beta(\Delta)\geq\alpha(\Delta)$.
Reciproca rezultă imediat din faptul că dată o acoperire cu vârfuri, ea trebuie să conțină cel puțin un vârf distinct pentru fiecare fațetă independentă. Deci $\alpha(\Delta)\geq\beta(\Delta)$!

Observație: Inegalitatea $\alpha(\Delta)\geq\beta(\Delta)$ are loc întotdeauna, oricare ar fi complexul simplicial Δ.

Exemplul 2:



Observație: Acesta este un arbore simplicial nemixtat cu $\alpha(\Delta)=\beta(\Delta)=2$.

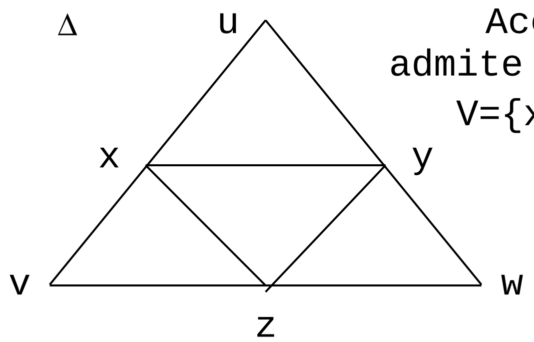
Definiția 3: Un complex simplicial Δ pe o mulțime de vârfuri V se numeşte n-partit dacă există o partiție a mulțimii V, $V=V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ astfel că:

$(\forall)x,y\in V_i$, atunci nu există nici o fațetă $F\in\Delta$ cu $x,y\in F$.

Propoziția 4: Un arbore simplicial Δ de dimensiune cel mult n admite o n+1 partiție.

Demonstrație: Facem inducție după q = numărul de fațete al lui $\Delta=<F_1,\ldots F_q>$. Pentru q=1 este evident. Presupun $q\geq 2$. Presupun că F_q este o frunză şi F_{q-1} este o coadă a sa. Notez $\Delta'=<F_1,\ldots F_{q-1}>$. Din ipoteza de inducție, Δ' este n+1 partit, deci mulțimea vârfurilor lui Δ' admite o scriere $V' = V_1 \cup\ldots\cup V_{n+1}$. Reataşez pe F_q la Δ' pentru a obține complexul inițial Δ. Atunci, vârfurile lui F_q sunt fie în F_{q-1} fie sunt vârfuri libere. Vârfurile care sunt în F_{q-1} sunt deja în V' iar cele libere le distribuim, câte unul, în acele V_i-uri care nu conțin vârfuri din $F_q \cap F_{q-1}$. Obținem astfel o n+1 partiție pentru Δ.

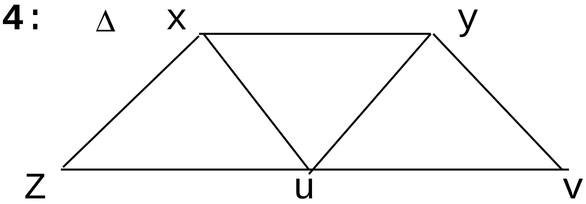
Exemplul 3: Δ



Acesta este un complex ce admite 3-partiția următoare: $V=\{x,w\}\cup\{u,z\}\cup\{v,y\}$.

Observație: Δ *este mixtat cu* $\alpha(\Delta)=2$ şi $\beta(\Delta)=1$.
Δ *nu este arbore!*

Exemplul 4: Δ



Observăm că: Δ *este un arbore mixtat cu* $\alpha(\Delta)=\beta(\Delta)=1$.
Δ *admite 3 partiția:* $V=\{z,y\}\cup\{x,v\}\cup\{u\}$.

§3.Teorema de caracterizare a arborilor nemixtați.

Lema 1: Fie Δ un complex simplicial nemixtat. Presupunem că $r=\alpha(\Delta)=\beta(\Delta)$ şi $\{F_1,\ldots F_r\}$mulțime de fațete independente. Atunci orice vârf din Δ aparține unei fațete F_i. Altfel spus: $V(\Delta) = V(F_1)\cup\ldots\cup V(F_r)$.

Demonstrație: Fie x un vârf al lui Δ. Presupun că x nu aparține nici unei fațete F_i. Aleg A o acoperire minimală cu vârfuri a lui Δ cu $x\in A$. Oricum, A trebuie să conțină cel puțin un vârf din fiecare fațete independente F_i. Dar atunci r = card(A)>r, ceea ce este evident absurd.

Exemplu 1: Dacă G este graful complet cu 5 vârfuri notate x,y,z,u,v atunci G este nemixtat cu $\alpha(G)=4$ şi $\beta(G)=2$. De exemplu {xy,uv} este o mulțime independentă maximală de fațetă iar z nu aparține vârfurilor acestor fațete.

Lema 2: Dacă Δ este un arbore nemixtat cu $r=\alpha(\Delta)=\beta(\Delta)$ şi $\{F_1,\ldots F_r\}$ sunt fațete independente, atunci toate frunzele lui Δ sunt printre acestea.

Demonstrație: Fie $F\in\Delta$ o frunză. Atunci există $x\in F$ un vârf liber. Presupun că $F\in\{F_1,\ldots F_r\}$. Atunci ar rezulta că $x \notin V(F_1)\cup\ldots\cup V(F_r) = V(\Delta)$, ceea ce e evident absurd!

Lema 3: Fie Δ este un arbore nemixtat. Atunci orice mulțime maximală de fațete independente cu $\alpha(\Delta)$ elemente nu conține nici o coadă a unei frunze. În particular, o coadă într-un arbore nemixtat nu poate fi frunză.

Demonstrație: Dacă G este o coadă pentru o frunză F, atunci cum F este în orice mulțime independentă de fațete din Δ, cum $F\cap G \neq \emptyset$, rezultă că G nu poate face parte!

Lema 4: Dacă Δ este un arbore nemixtat şi F este o frunză care are o coadă G atunci $\Delta'=\Delta\setminus G$ e arbore nemixtat.

Demonstrație: Presupunem $\Delta=<F_1,\dots F_q>$ şi $V=\{v_1,\dots v_n\}$ mulțimea vârfurilor lui Δ. Facem inducție după n. Dacă $n=1$ este clar, deci presupun $n>1$.

Notez $r=\alpha(\Delta)$ şi aleg A o acoperire minimală cu vârfuri pentru Δ'. Din lema 2.1 rezultă că $\alpha(\Delta')=r$.

Dacă A conține un vârf din G atunci A e acoperire şi pentru Δ deci are r elemente.

Presupun că $A\cap G=\emptyset$ şi $card(A)>r$.

I. Arăt că $\exists x\in V\setminus(A\cup G)$. Presupun prin reducere la absurd că $V=A\cup G$. Atunci pentru $\forall y\in A$, $\exists H\in\Delta'$ fațetă astfel că $H\cap A=\{y\}$ (altfel ar rezulta că $A\setminus\{y\}$ este de asemenea o acoperire cu vârfuri, absurd!)

Atunci cum $V=A\cup G \Rightarrow H=(G\cap H)\cup\{y\}$.

Pe de altă parte, pot presupune că $\{F_1,\dots F_r\}$ este o mulțime maximală de fațete independente. Cum G este coadă, din lema 3 $\Rightarrow G\notin\{F_1,\dots F_r\}$.

Cum $card(A)>r$ rezultă că cel puțin o fațetă dintre $F_1,\dots F_r$ conține 2 elemente distincte din A. Să presupunem deci că $A\cap F_r = \{y_1,\dots y_s\}$ pentru un $s>1$. Atunci e evident că $F_r = (F_r \cap G) \cup \{y_1,\dots y_s\}$.

Alegem $H_1,\dots,H_s$ fațetele lui Δ cu $H_i = (H_i \cap G) \cup \{y_i\}$. Şi considerăm arborele $<F_r,G,H_1,\dots,H_s>$ care are, după cum ştim, cel puțin două frunze. Numai că, din modul cum au fost alese fațetele acestui arbore, numai G ar putea avea un vârf liber, ceea ce este absurd!

II. Fie $x\in V\setminus(A\cup G)$. Notez P = idealul prim generat de mulțimea $V\setminus\{x\}$. Notez $I=F(\Delta)$ şi $I'=F(\Delta')$. Presupunem că, complexul localizat $\Delta_P=<F_1',\dots F_t'>$ unde $F_i'=F_i\setminus\{x\}$, $t\le q$. Ştim din propoziția 2.3 că Δ_P este pădure. De asemenea, din propoziția 1.2 $\Rightarrow \Delta_P$ e nemixtat cu $\alpha(\Delta_P)=\alpha(\Delta)=r$.

Ne concentrăm acum asupra lui Δ_P'. În afară de G' toate celelalte fațete ale lui Δ_P' coincid cu cele ale lui Δ_P. Asta reiese din: Dacă $F_i'\in\Delta_P'$ atunci pentru $j\ne i$ avem $F_j'\not\subset F_i'$. Pe de altă parte, dacă $G'=G$ atunci $G'\not\subset F_i'$ de unde $F_i'\in\Delta_p$.

În consecință, dacă $F_i'\in\Delta_P$ atunci $F_j'\not\subset F_i'$ pentru $j\ne i$ şi $F_j\in\Delta'$ cu atât mai mult acest lucru este valabil pentru $F_j\in\Delta_P'$ şi deci conform argumentului de mai sus, rezultă că $F_i'\in\Delta_P'$. Avem două posibilități:

a. Dacă $G'\notin\Delta_P' \Rightarrow \Delta_P=\Delta_P'$ deci A este acoperire minimală pentru Δ_P care este nemixtat cu $\alpha(\Delta_P)=r$. Absurd!

b. Dacă $G'\in\Delta_P'$ $\Rightarrow$ $F'\in\Delta_P$, deoarece: dacă $H'\subseteq F'$ pentru un $H\in\Delta$ $\Rightarrow$ $H\cap F\neq\emptyset$ şi deci $H\cap F\subseteq G\cap F$ $\Rightarrow$ $H'\subseteq G'$ ceea ce e absurd. Mai observ că F' are cel puțin 2 vârfuri, cel puțin un vârf liber care e în A şi cel puți un vârf ce e în $G'=G$. Similar, observ că F' e frunză în Δ_P cu coada G'. Din ipoteza de inducție $\Rightarrow$ $\Delta_P'=\Delta_P\setminus<G'>$ este un arbore nemixtat. Dar atunci card(A)=r, absurd! q.e.d.

Teorema de caracterizare a arborilor nemixtați.

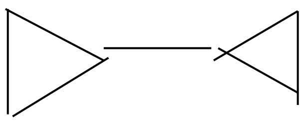
Dacă Δ este un arbore simplicial nemixtat, atunci există fațetele $F_1,\dots,F_r$, $G_1,\dots,G_s$ astfel că Δ este generat de aceste fațete şi, în plus:

1) $F_1,\dots,F_r$ sunt toate frunzele lui Δ.
2) $\{F_1,\dots,F_r\}\cap\{G_1,\dots,G_s\}=\emptyset$
3) Fațetele $F_1,\dots,F_r$ sunt independente.
4) Dacă $H\in\{G_1,\dots,G_s\}$, atunci H nu are vârfuri libere.

Demonstrație: Presupunem că am demonstrat punctul 1). Atunci 2),3) şi 4) reies imediat din lemele 1,2,3. Vom demonstra punctul 1) prin inducție după q = numărul de fațete al arborelui simplicial Δ. Dacă q=1, afirmația este evidentă. Dacă q=2, ajungem la o contradicție, fiindcă un arbore cu 2 fațete este în mod necesar mixtat.

Presupunem q=3. Fie F_1 şi F_2 două frunze şi G_1 cea de-a treia fațetă a arborelui. Cum Δ este conex şi nemixtat atunci G_1 nu poate fi frunză (pentru că frunzele sunt fațete independente) deci G_1 este o coadă atât pentru F_1 cât şi pentru F_2.

Cred că următorul exemplu va ilustra cel mai bine această situație:



În cazul general (q>3) procedăm astfel. Alegem G o coadă pentru Δ. Conform lemei 3, G nu este frunză. Atunci, $\Delta'=\Delta\setminus G$ este un arbore nemixtat cu $\alpha(\Delta')=r$, conform lemei 4. Atunci, din ipoteza de inducție, avem că $\Delta'=<F_1,\dots,F_r,G_1,\dots,G_s>$ astfel că sunt îndeplinite condițiile 1)-4) din enunțul teoremei.

Din condiția 4), rezultă imediat că dacă F este frunză pentru Δ, atunci ea rămâne frunză pentru Δ' deoarece are cel puțin un vârf liber. Pentru a demonstra teorema, este suficient să arăt reciproca acestei afirmații, şi anume că $F_1,\dots,F_r$ sunt frunzele arborelui Δ! Mai întâi observ că $\Delta=<F_1,\dots,F_r,G_1,\dots,G_s,G>$. Avem 2 cazuri:

I. Presupunem că G este singura coadă a lui Δ.

Fără a pierde din generalitate, putem presupune că $F_1,\dots,F_{e-1}$ sunt frunzele lui Δ şi $F_e,\dots,F_r$ nu sunt frunze. Înlăturând $F_1,\dots,F_{e-1}$obţinem pădurea $\Delta''=<F_e,\dots,F_r,G_1,\dots,G_s,G>$. Atunci Δ'' are cel puţin două frunze. Arătăm că $G_1,\dots,G_s$ nu pot fi frunze, fiindcă nu au vârfuri libere:

Clar, $G_1,\dots,G_s$ nu au vârfuri libere în Δ. Ca faţete în Δ'' ele tot nu au vârfuri libere, fiindcă G fiind singura coadă din Δ, avem $G_i\cap F_j \subseteq G\cap F_j$ pentru $i=1,\dots s$ şi $j=1,\dots e-1$.

Cum G este faţetă în Δ'',prin eliminarea $F_1,\dots,F_{e-1}$ nu se eliberează nici un vârf pentru $G_1,\dots,G_s$.

Dar de aici rezultă că cel puţin una dintre faţetele $F_e,\dots,F_r$ este frunză pentru Δ''. Să presupunem că F_e e frunză. Atunci există o faţetă $G'\in\Delta''$ astfel că avem:

$H\cap F_e \subseteq G'\cap F_e$ pentru toate faţetele $H\in \Delta''\setminus<F_e>$.

Cum $F_i \cap F_e = \emptyset$ pentru $i=1,\dots e-1$ rezultă imediat că avem: $H\cap F_e \subseteq G'\cap F_e$ pentru toate faţetele $H\in \Delta\setminus<F_e>$, adică F_e este o frunză în Δ, contradicţie cu ipoteza făcută. Deci, în concluzie, în acest caz, $F_1,\dots,F_r$ sunt toate frunze ale lui Δ.

II. Presupunem că Δ are o altă coadă G' distinctă de G. Considerăm prezentarea $\Delta=<F_1,\dots,F_r,G_1,\dots,G_s,G>$. Cum $\{F_1,\dots,F_r\}$ este o mulţime maximală de faţete independente, rezultă că $G'\notin\{F_1,\dots,F_r\}$ deci $G'\in\{G_1,\dots,G_s\}$. Vom arăta în cele ce urmează că F_1 este frunză în Δ. (Absolut analog se arată că şi $F_2,\dots,F_r$ sunt frunze în Δ, rezultând c.c.t.d.)

Cum F_1 este frunză în $\Delta' \Rightarrow$ există o coadă, să zicem G_1 şi deci $H\cap F_1 \subseteq G_1\cap F_1$ pentru $H \neq G, F_1$.(1)

Pe de altă parte $\Delta''=\Delta\setminus<G'>$ este un arbore nemixtat. Din faptul că $\{F_1,\dots,F_r\}$ este o mulţime independentă maximală de faţete pentru Δ'' rezultă din ipoteza de inducţie că F_1 este frunză pentru Δ''. În consecinţă, există o coadă $G_2\in \Delta''$cu: $H\cap F_1 \subseteq G_2\cap F_1$ pentru $H \neq G',F_1$.(2)

În particular $\Rightarrow G'\cap F_1 \subseteq G_1\cap F_1$ şi $G\cap F_1 \subseteq G_2\cap F_1$. (3)

Distingem în cele ce urmează, următoarele 3 cazuri:

a. Dacă $G_1 \neq G' \Rightarrow G_1\in \Delta''$ şi din (2) $\Rightarrow G_1\cap F_1 \subseteq G_2\cap F_1$. Atunci din (1)şi(2) $\Rightarrow H\cap F_1 \subseteq G_2\cap F_1$,$\forall$ $H \neq F_1$ şi deci F_1 este o frunză în Δ cu coada G_2.

b. Dacă $G_2 \neq G$, obţinem în mod similar că F_1 este o frunză în Δ cu coada G_1.

c. Presupunem că $G_1 = G'$ şi $G_2 = G$. Prin reducere la absurd, vom presupune că F_1 nu este o frunză în Δ. Atunci avem relaţiile următoare:

$$\left.\begin{array}{l} - \ G\cap F_1 \not\subset G'\cap F_1 \text{ , datorită relațiilor (1) şi (3).} \\ - \ G'\cap F_1 \not\subset G\cap F_1 \text{ , datorită relațiilor (2) şi (3).} \\ - \ H\cap F_1 \subseteq (G\cap G')\cap F_1 \text{ ,pt. } H\neq G,G',F_1 \text{ din(1) şi (3).} \end{array}\right| (4)$$

Din relațiile (4), rezultă că există un $x\in G\cap F_1\backslash G'$ şi există un $y\in G'\cap F_1\backslash G$.

Căutăm o acoperire minimală pentru $\Delta\backslash<G,G',F_1>$ care nu conține nici unul din vârfurile lui G,G' şi F_1. Pentru a arăta că acest lucru este posibil, din ce-a de-a treia condiție a relațiilor (4) este suficient să arătăm că nu există nici o fațetă în $\Delta\backslash<G,G',F_1>$ care să aibă toate vârfurile în $G\cup G'$. Presupunem prin absurd că H ar fi o asemenea fațetă:

Atunci avem $H = (H\cap G)\cup(H\cap G')$. Considerăm arborele $\Delta_1=<G,G',F_1,H>$. Atunci Δ_1 are două frunze. Să observăm că H nu poate fi frunză, fiindcă nu are vârfuri libere (toate vârfurile lui H sunt fie în G, fie în G' din ipoteză). Dacă F_1 ar fi frunză, atunci ea nu poate să le aibă pe G sau G' drept cozi, fiindcă s-ar contrazice primele două condiții din (4) şi deci H trebuie să fie coadă atât pentru G cât şi pentru G'. Dar atunci ar rezulta că $G\cap F_1 \subseteq H\cap F_1$ deci $x\in H$, ceea ce contrazice iarăşi relațiile (4).

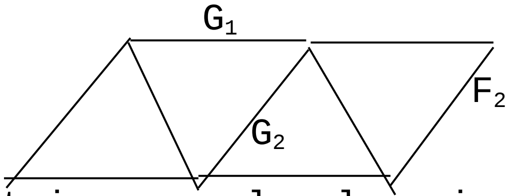
În concluzie, G şi G' sunt cele două frunze din Δ_1. Să considerăm G. Dacă G' este coadă pentru G, rezultă că $F_1\cap G \subseteq G'\cap G \subseteq G'$ ceea ce contrazice (4). Dacă H este coadă pentru G, atunci $F_1\cap G \subseteq H\cap G$, deci $x\in H$, ceea ce contrazice iarăşi relațiile (4). Absolut analog se arată că G sau H nu pot fi cozi pentru G'.

Morala: F_1 e coadă atât pentru G, cât şi pentru G'. Dar atunci: $H\cap G \subseteq F_1\cap G$ şi $H\cap G' \subseteq F_1\cap G'$ deci $H\subseteq F_1$ ceea ce este evident absurd.

Revenind, am reuşit să arătăm că fiecare fațetă a lui Δ diferită de G şi G' are cel puțin un vârf care nu aparține lui G şi G' şi (din (4)) cu atât mai mult nu aparține lui F_1.

Fie A o acoperire minimală pentru $\Delta\backslash<G,G',F_1>$ care nu conține nici unul din vârfurile lui G,G' şi F_1. Cum arborele $\Delta\backslash<G,G',F_1>$ are $r-1$ fațete independente, rezultă că $card(A)\geq r-1$. Numai că atunci $A\cup\{x,y\}$ este o acoperire minimală cu cel puțin $r+1$ vârfuri a lui Δ, ceea ce contrazice faptul că Δ este nemixtat cu $r=\alpha(\Delta)$!

Exemplul 1: Următorul complex simplicial este un arbore nemixtat, ce verifică proprietățile (1)-(4) ale teoreme:



§4.Altoirea complexelor simpliciale.

Definiția 1: Spunem că Δ este o altoire a complexului simplicial $\Delta'=<G_1,\dots,G_s>$ cu fațetele $\{F_1,\dots,F_r\}$, dacă:

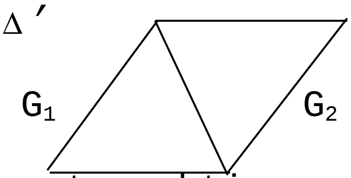
1) $V(\Delta')\subseteq V(F_1)\cup\dots\cup V(F_r)$.
2) $\{F_1,\dots,F_r\}\cap\{G_1,\dots,G_s\}=\emptyset$.
3) Fațetele $F_1,\dots,F_r$ sunt independente.
4) $F_1,\dots,F_r$ sunt toate frunzele lui Δ.
5) Dacă $H\in\{G_1,\dots,G_s\}$ este o coadă pentru o frunză a lui Δ, atunci complexul $\Delta\setminus H$ este altoit.

Observație: Din condiția (5) rezultă că dacă F este o frunză în Δ atunci mulțimea $\{H\cap F \mid H\in \Delta\}$ e total ordonată.

Propoziția 1: Dacă Δ' este un arbore simplicial, iar Δ este o altoire a sa, atunci Δ este arbore simplicial.

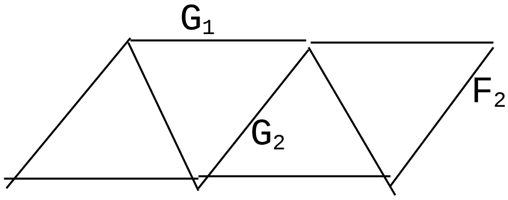
Demonstrație: Fie Δ'' un subcomplex în Δ. Vreau să arăt că el conține cel puțin o frunză. Dacă Δ'' este subcomplex în Δ', atunci în mod evident el conține o frunză, fiindcă Δ' este arbore. Presupunem că Δ'' nu e inclus în Δ'. Atunci $\exists i$ cu $F_i\in\Delta''$. Aplicând observația anterioară, este evident că F_i este frunză!

Exemple: Fie Δ' *Δ' este un arbore.*

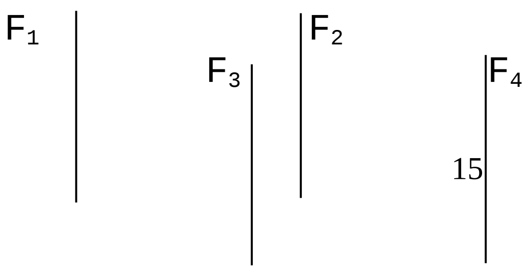


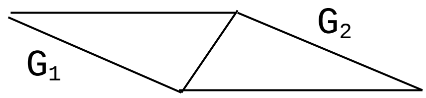
Prin altoire, putem obține următorii arbori:

1.



2.





Teorema 1: Dacă Δ este un complex simplicial obținut prin altoirea lui Δ' cu fațetele $\{F_1,\ldots,F_r\}$ atunci Δ este nemixtat şi $\alpha(\Delta)=r$.

Demonstrație: *Dacă* $\{G_1,\ldots,G_s\}=\emptyset$ *afirmația este imediată. Presupunem deci* $s>0$ *şi facem inducție după* q = *numărul de fațete ale lui* Δ. *Primul caz este* $q=3$. *Presupunem că* $\Delta=\langle G_1,G_2,F_1\rangle$ *cu* F_1 *unica frunză. Numai că atunci, din prima condiție a definiției unui complex altoit, ar rezulta că* $G_1\subseteq F_1$ *şi* $G_2\subseteq F_1$ *ceea ce este evident absurd! Deci* $\Delta=\langle G_1,F_1,F_2\rangle$ *cu* F_1,F_2 *frunze şi* G_1 *coadă pentru ambele. Din condiția (1)* $\Rightarrow G_1\subseteq F_1\cup F_2$ *şi din (4)*$F_1\cap F_2=\emptyset$. *Dar atunci e uşor de observat că* Δ *e nemixtat cu* $\alpha(\Delta)=2$.

Presupunem $q>3$. *Fie* F_1 *o frunză cu coada* G_1. *Din condiția (5)* $\Rightarrow \Delta'=\Delta\setminus\langle G_1\rangle$ *este de asemenea un arbore altoit, deci, din ipoteza de inducție, rezultă că* Δ' *este nemixtat cu* $\alpha(\Delta')=r$. *Vrem să arătăm acelaşi lucru despre arborele* Δ.

Fie A *o acoperire minimală pentru* Δ. $card(A)\geq r$ *deoarece* Δ *conține* r *fațete independente,* $F_1,\ldots F_r$. *Presupunem prin reducere la absurd că,* $card(A)>r$. *Cum* A *este o acoperire cu vârfuri pentru* Δ', *pot extrage din ea o subacoperire minimală* A', *care are deci* r *elemente. Cum* A' *e inclusă strict în* A *rezultă că* A' *nu conține nici un vârf din* G_1 *deci, în mod necesar, conține un vârf liber al frunzei* F_1. *Cum* A *e acoperire pentru* Δ, A *conține un vârf* $y\in G_1$. *Presupunem* $y\in G_1\cap F_2$ *(evident,* $y\notin F_1$ *căci* A *este acoperire minimală!) deci avem de fapt* $A=A'\cup\{y\}$.

Pe de altă parte, şi A' *conține un vârf* $z\in F_2$, *deci frunza* F_2 *contribuie cu două vârfuri la acoperirea* A. *Este clar că atât* y *cât şi* z *nu sunt vârfuri libere, altfel unul din ele ar fi redundant.*

Presupunem că G_2 *este coadă pentru* F_2. *Fie* $\Delta''=\Delta\setminus\langle G_2\rangle$. *Tot din ipoteza de inducție, rezultă că* Δ'' *este nemixtat cu* $\alpha(\Delta'')=r$, *deci* A *are o submulțime* A'' *cu* r *elemente care e acoperire minimală pentru* Δ''. *Numai că* A *are deja* *exact un vârf în frunzele $F_1, F_3, \dots, F_r$ deci singurul mod de a obține A'' din A este să-l înlături pe y sau pe z.*

Dar asta înseamnă că fie $A''=A\setminus\{y\}$ fie $A''=A \setminus\{z\}$. În ambele cazuri însă rezultă că A'' conține un vârf din G_2 deci de fapt A'' este o acoperire cu vârfuri pentru Δ care are r elemente, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

În concluzie, A are r elemente, deci $\alpha(\Delta)=r$.

q.e.d.

Corolar: Dacă Δ este un arbore simplicial, atunci Δ este nemixtat $\Leftrightarrow$ Δ este altoit.

Demonstrație: Presupunem că Δ este arbore nemixtat. Atunci, din teorema de structură a arborilor nemixtați din paragraful anterior, se constată imediat că Δ este altoit. Reciproca reiese automat din teorema precedentă.

Teorema 2: Localizarea unui complex simplicial altoit, rămâne complex simplicial altoit.

Demonstrație: Presupunem $\Delta=\langle F_1,\dots,F_r,G_1,\dots,G_s\rangle$. Dacă Δ are doar o fațetă, afirmația este evidentă, aşa că presupun că Δ are cel puțin 3 fațete (am văzut că 2 nu se poate!).

Presupun că $P=(x_1,\dots x_h)$ cu $h<n$, unde $V=\{x_1,\dots x_n\}$ este mulțimea vârfurilor complexului Δ. Atunci, după cum am arătat, $\Delta_P=\langle F_1',\dots,F_t',G_1',\dots,G_u'\rangle$ pentru $t\le r$ şi $u\le s$, unde $F_i' = F_i \cap\{x_1,\dots,x_h\}$ şi $G_j' = G_j \cap\{x_1,\dots,x_h\}$ iar $F_{t+1}',\dots,F_r'$ şi $G_{u+1}',\dots,G_s'$ sunt conținute în cel puțin una dintre fațetele $F_1',\dots,F_t',G_1',\dots,G_u'$. Vom renumerota fațetele lui Δ_P în modul următor:

Pentru $i=1,\dots t$ notăm $H_i = F_i'$. Pentru $i=t+1,\dots r$ ştim că F_i' conține cel puțin una dintre fațetele $F_1',\dots,F_t'$, G_1', $\dots,G_u'$. Dar cum, din definiție, $F_i\cap F_j = \emptyset$ pentru $i\neq j$, atunci există un $j\le u$ cu $G_j'\subseteq F_i'$. Pentru acest j particular, definim $H_i = G_j'$. Arătăm că alegerea lui j este bună: Dacă există $f\le u$, $f\neq j$ cu $G_f'\subseteq F_i'$, atunci ar rezulta, dintr-o observație anterioară, că fie $G_j'\subseteq G_f'$, fie $G_f'\subseteq G_j'$ şi cum ambele sunt fațete, ar rezulta că $G_f'=G_j'$ ceea ce e evident absurd. Notăm $E_1,\dots E_v$ toate celelalte fațete ale lui Δ_P distincte de $H_1,\dots H_r$. Obținem prezentarea $\Delta_P=\langle H_1,\dots,H_r,E_1,\dots,E_v\rangle$.

Vrem să arătăm că Δ_P este un complex simplicial obținut din altoirea lui $\langle E_1,\dots,E_v\rangle$ cu $\{H_1,\dots,H_r\}$.

Arăt mai întâi că fațetele $\{H_1,\dots,H_r\}$ sunt două câte două disjuncte. Într-adevăr pentru $i_1,i_2 \leq r$, $i_1 \neq i_2$ există $j_1,j_2 \leq r$, $j_1 \neq j_2$ astfel că: $H_{i1} \subseteq F_{j1}' \subseteq F_{j1}$ şi $H_{i2} \subseteq F_{j2}' \subseteq F_{j2}$ şi în plus $F_{j1} \cap F_{j2} = \emptyset$ şi $H_{i1} \cap H_{i2} = \emptyset$. În concluzie, condiția (4) din definiția altoirii este îndeplinită.

Pe de altă parte, din teorema 1, Δ este un complex nemixtat şi deci, conform propoziției 1.2, şi Δ_P este un complex nemixtat cu $\alpha(\Delta)=\alpha(\Delta_P)$. Aplicând acum lema 5.1 deducem că $V(\Delta_P)=V(H_1)\cup\dots\cup V(H_r)$.

Dar atunci şi condiția (1) de altoire este satisfăcută. În particular, de aici rezultă că $E_1,\dots,E_v$ nu pot avea vârfuri libere, deci nu pot fi frunze pentru Δ_P. Condiția (3) rezultă din construcția lui Δ_P.

Arătăm în cele ce urmează că $H_1,\dots,H_r$ sunt toate frunzele lui Δ_P. Dacă $\Delta_P=\langle H_1,\dots,H_r\rangle$ atunci Δ_P este altoit prin definiție. Presupunem că Δ_P are o componentă conexă Δ' cu două sau mai multe fațete. Cum Δ' este conexă, ea trebuie să conțină cel puțin un E_i şi cum $V(\Delta_P) = V(H_1)\cup\dots\cup V(H_r)$, Δ' conține de asemenea nişte H_j -uri. Presupunem deci că $\Delta'=\langle H_1,\dots,H_e\rangle\cup\langle E_1,\dots,E_f\rangle$, $e\leq r$ şi $f\leq v$.

Arăt, de exemplu, că H_1 este frunză pentru Δ'. Considerăm următoarele două cazuri:

I. $H_1 = F_i'$ pentru un $i\leq t$. Cum Δ' e conex, există nişte fațete care se intersectează cu H_1. Să zicem că $E_{j1},\dots,E_{jl}$ sunt toate fațetele care se intersectează cu H_1. Putem presupune că $E_{jz} = G_{mz}'$. Deci: $F_i'\cap G_{mz}'\neq\emptyset$ şi cu atât mai mult avem: $F_i\cap G_{mz}\neq\emptyset$. Din prima observație a acestui capitol, putem presupune că avem lanțul de incluziuni: $F_i\cap G_{m1} \supseteq F_i\cap G_{m2} \supseteq\dots \supseteq F_i\cap G_{ml}$, ceea ce prin intersecție cu $\{x_1,\dots x_h\}$ devine: $F_i'\cap G_{m1}' \supseteq F_i'\cap G_{m2}' \supseteq\dots \supseteq F_i'\cap G_{ml}'$, adică: $H_1\cap E_{j1} \supseteq H_1\cap E_{j2} \supseteq\dots \supseteq H_1\cap E_{jl}$. Rezultă imediat că H_1 este frunză pentru Δ' şi deci condiția (5) din definiția altoirii se verifică.

II. $H_1 = G_j'$ pentru un $j\leq u$. În acest caz, există un $i\leq r$ astfel că $H_1 = G_j' \subseteq F_i'$. Exact ca în cazul anterior, alegem $E_{j1},\dots,E_{jl}$ fațetele din Δ' care intersectează H_1. La fel, presupunem $E_{jz} = G_{mz}'$. Cum mulțimea $F_i\cap G_{mz}$ e nevidă, urmărind acelaşi argument ca mai sus, deducem că avem: (*) $F_i'\cap G_{m1}' \supseteq F_i'\cap G_{m2}' \supseteq\dots \supseteq F_i'\cap G_{ml}'$.

Cum $G_j'\subseteq F_i'$, intersectând (*) cu G_j', vom obține că: $G_j'\cap G_{m1}' \supseteq G_j'\cap G_{m2}' \supseteq\dots \supseteq G_j'\cap G_{ml}'$, ceea ce, prin traducere devine: $H_1\cap E_{j1} \supseteq H_1\cap E_{j2} \supseteq\dots \supseteq H_1\cap E_{jl}$.

Aşadar H_1 este frunză pentru Δ' şi deci condiţia (5) din definiţia altoirii se verifică.

§5.Complexele simpliciale altoite sunt Cohen-Macaulay.

Fie Δ un complex simplicial altoit, de prezentare $\Delta = \langle F_1,\dots,F_r,G_1,\dots,G_s \rangle$, unde $r=\alpha(\Delta)$ şi $F_1,\dots,F_r$ sunt frunzele lui Δ. Fie $V=\{x_1,\dots x_n\}$ mulţimea vârfurilor lui Δ. Considerăm inelul $R(\Delta)=R/F(\Delta)$, unde $R = k[x_1,\dots x_n]$. În acest paragraf ne propunem să arătăm că $R(\Delta)$ este un inel Cohen-Macaulay.

Lema 1: $\dim(R(\Delta))\leq n-r$.

Demonstraţie: Observăm că dacă P este prim minimal peste $I=F(\Delta)$ rezultă că P e generat de variabile care formează o acoperire minimală a lui Δ. De aici, cum Δ este nemixtat $\Rightarrow$ $ht(P)=\alpha(\Delta)$,deci $\dim(R(\Delta))\leq \dim(R)-ht(I) = n-r$.

Lema 2: Pentru a arăta că $R(\Delta)$ este Cohen-Macaulay, este suficient să găsim un şir regulat cu n-r elemente omogene din $\mathbf{m} = (x_1,\dots x_n)$.

Demonstraţie: Demonstraţia are următorii doi paşi.
I. Dacă găsim un astfel de şir regulat cu n-r elemente $\Rightarrow$ $depth(R(\Delta)_m)\geq n-r$ şi cum, lema 1 avem în plus că $\dim(R(\Delta)_m)\leq n-r$, rezultă că $R(\Delta)_m$ este inel local-C-M. Pentru a arăta că $R(\Delta)$ este C-M trebuie să localizăm şi în alte ideale maximale!
II. Fie $I=F(\Delta)$. Dacă $\mathbf{n}<R$ este un alt ideal maximal, putem presupune că $P=(x_1,\dots,x_e)$ este idealul generat de toate variabilele $x_i\in\mathbf{n}$. Atunci I_P este idealul faţetelor complexului Δ_P care, conform teoremei 4.2, este la rândul său altoit. Scriem $\mathbf{n} = P+Q$, unde $Q<k[x_{e+1},\dots,x_n]$. Atunci $R(\Delta)_{\mathbf{n}} = k[x_1,\dots,x_e]_P/I_P \otimes_k k[x_{e+1},\dots,x_n]_Q$.

Deci, pentru a arăta că $R(\Delta)_n$ este Cohen-Macaulay este suficient să arăt că $k[x_1,\ldots,x_e]_P/I_P$ este C-M, deoarece, în mod evident $k[x_{e+1},\ldots,x_n]_Q$ este C-M! Numai că, în cazul inelului $k[x_1,\ldots,x_e]_P/I_P$ e vorba de localizarea în idealul irelevant… caz rezolvat în punctul I al demonstrației.

Pentru a putea ajunge la demonstrația rezultatului central al acestui capitol, avem nevoie de următoarea lemă, privind polarizarea idealelor.

Lema de polarizare: Fie $R=k[x_1,\ldots,x_n]$ şi $I=(m_1,\ldots,m_q)$, unde $m_1,\ldots,m_q$ sunt monoame. Atunci există o k-algebră de polinoame $R'=k[x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_m']$ şi un ideal $I'=(n_1,\ldots,n_q)$ cu $n_1,\ldots,n_q$ monoame libere de pătrate şi $h=h_1,\ldots h_m$ un şir regulat de elemente omogene de grad 1 pentru R'/I' astfel că avem: $R'/(I',h)\cong R/I$.

I′ se numeşte polarizatul idealului I.

Demonstrație: Presupunem că variabila x_1 apare în m_1 la o putere $\geq$ 2. Presupun: $m_1=x_1^{a1}g_1,\ldots$ $m_r=x_1^{ar}g_r$ cu $a_1\geq 2$ şi $a_i\geq 1$ şi x_1 nu divide g_i şi nici f_j pentru $j>r$. Fie $R'=R[x_0]$. Consider idealul $I'=<x_0x_1^{a1-1}g_1,\ldots,x_0x_1^{ar-1}g_r,f_{r+1},\ldots,f_q><R'$. Aleg $h=x_0-x_1$. Evident, $R'/(h)\cong R$ şi $R'/(I',h)\cong R/I$. De asemenea, în I′ apar, într-un sens evident, mai puține variabile la puteri $\geq$ 2 deci printr-un procedeu inductiv ajungem la rezultatul dorit, odată ce demonstrăm că h este element regulat în R′/I′:

Presupunem prin absurd că h nu ar fi regulat. Atunci $h\in Div_0(R'/I')=\bigcup_{P\in Ass(R'/I')} P$ $\Rightarrow (\exists)P\in Ass(R'/I')$ cu $h\in P$.

Cum P este ideal monomial peste I′, ştim că $P=(I':u)$, unde u este un monom cu $u\notin I'$. Cum $h=x_0-x_1\in P$, iar P este ideal monomial $\Rightarrow x_0,x_1\in P$ şi deci $x_0u,x_1u\in I'$.

$x_1u\in I' \Rightarrow x_1u = x_0x_1^{ai-1}g_iw \Rightarrow (u\notin I') \Rightarrow u = x_0x_1^{ai-2}g_iw$.

$x_0u\in I' \Rightarrow x_0u = x_0^2x_1^{ai-1}g_iw = \begin{cases} x_0x_1^{a_j-1}g_jw' \\ f_jw'' \end{cases}$, dar în ambele cazuri obținem că x_0 este în suportul lui w' sau w'', deci în concluzie, putem simplifica cu x_0 obținând astfel că $u\in I'$ ceea ce este evident absurd!

Exemplu: Dacă $I=(x_1^2,x_2^2,x_3)$, atunci $I'=(x_0x_1,x_{-1}x_2,x_3)$ şi $h_1=x_0-x_1$, iar $h_2=x_{-1}-x_2$.

Teoremă: Dacă Δ este un complex simplicial altoit, atunci: $R(\Delta)=R/F(\Delta)$ este un inel Cohen-Macaulay.

Înainte de demonstrație, enunț următorul corolar:

Corolar: Dacă Δ este un arbore simplicial, atunci Δ este nemixtat $\Leftrightarrow$ $R(\Delta)$ este Cohen-Macaulay.

<u>Demonstrație</u>: Am arătat deja că un arbore simplicial este nemixtat $\Leftrightarrow$ Δ este altoit. Totodată, cum $R(\Delta)$ este Cohen-Macaulay $\Rightarrow$ Δ este nemixtat, avem şi implicația inversă!

Demonstrația teoremei: Presupunem că frunza F_i are vârfurile $\{y_i,x_1^i,\dots x_{ui}^i\}$, unde y_i este un vârf liber. Vrem să arătăm că şirul (*) $y_1-x_1^1,\dots,y_1-x_{u1}^1,\dots,y_r-x_1^r,\dots,y_r-x_{ur}^r$ este un şir exact în $R(\Delta)$ care are în mod evident n-r elemente! Atunci, din lema 2,va rezulta că $R(\Delta)$ este C-M.

Pentru a arăta acest lucru, voi demonstra că şirul de mai sus provine din polarizarea inelului următor: $S=k[y_1,\dots,y_r]/(y_1^{u1+1},\dots,y_r^{ur+1},f_1,\dots f_s)$ unde f_i este obținut din fațeta G_i prin înlocuirea cu y_j a fiecărui vârf din $G_i\cap F_j$.

Intuitiv, afirmația de mai sus nu este greu de văzut. Singura problemă care poate apărea este ca, prin factorizarea cu şirul exact (*) să nu ajungem cumva la o permutare a vârfurilor lui Δ. Pentru a evita această problemă, vom utiliza faptul că pentru un complex altoit, avem o ordine totală pe mulțimea $\{G\cap F_i | G\in\Delta\}$.

Fie $H_1^i,\dots,H_{ei}^i$ toate fațetele care intersectează F_i, astfel că: $H_1^i\cap F_i \subseteq \dots \subseteq H_{ei}^i\cap F_i$. Atunci, şirul (*) îl ordonăm astfel că dacă $x_e^i \in H_f^i \Rightarrow x_{e+1}^i \in H_f^i$.

Utilizăm inducția după numărul de fațete ale lui Δ. Dacă înlăturăm o coadă, şi zicem G_1 atunci $\Delta'=\Delta\backslash\langle G_1\rangle$ este în continuarea un complex altoit pe aceiaşi mulțime de vârfuri şi cu $\alpha(\Delta')=\alpha(\Delta)$. Atunci dacă $R(\Delta')=R/F(\Delta')$ avem că $\dim(R(\Delta'))=\dim(R(\Delta))$. Mai mult, Δ' are aceleaşi frunze ca şi Δ şi anume $F_1,\dots,F_r$. Atunci, din ipoteza de inducție, şirul (*) polarizează:

$S'=k[y_1,\dots,y_r]/(y_1^{u1+1},\dots,y_r^{ur+1},f_2,\dots f_s)$.

Ipoteza de inducție ne-a asigurat că după aplicarea şirului (*) toate fațetele lui Δ' sunt refăcute în pozițiile lor originale şi cu ordonarea lor inițială. Mai avem de arătat că procesul de polarizare reface şi pe G_1, pornind de la monomul f_1.

Dar asta este destul de clar, devreme ce pentru fiecare i, $G_1 \cap F_i$ are locul său fixat în şirul ordonat: $H_1^i \cap F_i \subseteq \ldots \subseteq H_{ei}^i \cap F_i$. Atunci, dacă, $card(G_1 \cap F_i)=h_i$, primele h_i aplicări ale lui (*) refac $G_1 \cap F_i$ fără a muta această faţă în faţete care au intersecţie mai mare cu F_i.

Cum G_1 are intersecţii disjuncte cu $F_1,\ldots,F_r$, odată ce am factorizat prin şirul $y_i-x_1^i,\ldots,y_i-x_{ui}^i$ constatăm cu bucurie că G_1 a fost refăcută la poziţia ei iniţială.

§6.Dualizarea complexelor simpliciale.

Definiţia 1: Fie Δ un complex simplicial. Se numeşte complexul simplicial asociat, al acoperirilor lui Δ, notat Δ_M, complexul al cărui faţete sunt acoperirile minimale ale lui Δ.

Observaţie: Δ este nemixtat $\Leftrightarrow$ Δ_M este pur.

Propoziţia 1: Dacă Δ este un complex simplicial, atunci Δ_M este un dual al lui Δ în sensul că: $\Delta_{M\,M} = \Delta$.

Demonstraţie: Presupunem că $\Delta=<F_1,\ldots,F_q>$ şi $\Delta_M=<G_1,\ldots,G_p>$. Notăm Q_i idealul prim generat de elementele lui G_i. Atunci este evident că $I=F(\Delta)=Q_1\cap\ldots\cap Q_p$, deoarece Q_i corespunde unei acoperiri minimale, I este ideal radical şi orice prim minimal peste I este de fapt un Q_i!

Mai întâi, arătăm că orice faţetă a lui Δ este o acoperire cu vârfuri pentru Δ_M. Consider faţeta F_1. Tot cu F_1 notez şi monomul corespunzător din I. Cum $F_1 \in Q_i, \forall i$, rezultă că F_1 conţine cel puţin un vârf din fiecare G_i. Deci F_1 este o acoperire cu vârfuri pentru Δ_M.

Presupunem că F este o acoperire minimală cu vârfuri pentru Δ_M. Cum F conţine un vârf din fiecare G_i, atunci F , privit ca monom, aparţine tuturor idealelor Q_i şi deci $F \in I$. Deci $\exists j$ cu F_j divide F, altfel spus $F_j \subseteq F$, dar cum F_j este acoperire cu vârfuri pentru Δ_M iar F este presupusă minimală $\Rightarrow F=F_j$. Dar asta ne arată că $F_1,\ldots,F_q$ sunt toate acoperirile minimale pentru Δ_M, deci $\Delta_{M\,M} = \Delta$.

Definiția 2: Fie Δ un complex simplicial. Se numeşte complexul simplicial Stanley-Reisner asociat lui Δ, complexul $\Delta_N = \delta_N(F(\Delta))=\{F|\ F\notin\Delta\}$.

Observație: $\Delta_{N\ N} = \Delta$. (*Într-adevăr:* $\Delta_N = \{F|\ F\notin\Delta\} \Rightarrow \Delta_{NN} =\{F|\ F\notin\Delta_N\}=\{F|F\in\Delta\}=\Delta$*.)*

Definiția 2: Fie Δ un complex simplicial. Se numeşte complexul simplicial complementar al lui $\Delta=\langle F_1,\dots,F_q\rangle$, complexul $\Delta^C=\langle F_1^C,\dots,F_q^C\rangle$, unde $F_i^C = V\setminus F_i$. V=mulțimea vârfurilor lui Δ.

Observație: $\Delta^{C\ C}=\Delta$. (evident)
Definiția 3: Dacă Δ este un complex simplicial pe mulțimea de vârfuri $V=\{v_1,\dots v_n\}$, se numeşte dualul Alexander al lui Δ, complexul simplicial definit prin: $\Delta^{\vee} = \{V\setminus F\ |F\notin\Delta\}$.

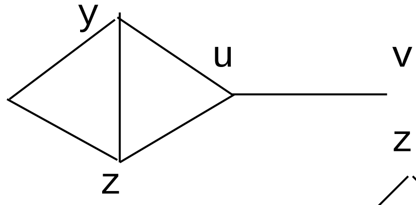
Observație: $(\Delta^{\vee})^{\vee} = \Delta$. (evident)

Propoziția 2: Fie Δ un complex simplicial, atunci:
(a) $\Delta_N = \Delta_M{}^C$.
(b) $\Delta_N{}^{\vee} = \Delta_{MN} = \Delta^C$.

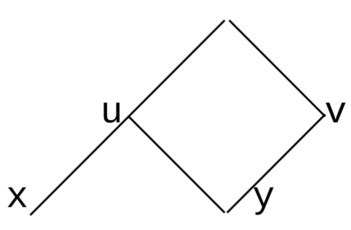
Demonstrație: (a)Rezultă imediat din relația următoare: $N(\Delta)=\bigcap_{F\in\Delta,\text{fațetă}} P_F$, *unde* P_F *= idealul generat de variabilele care apar în complementara fațetei F.*
(b) Din punctul (a) $\Rightarrow \Delta_{MN} =\Delta_{MM}{}^C = \Delta^C$. *Nu ne mai rămâne decât să arătăm că* $\Delta_N{}^{\vee} = \Delta^C$. *Dar* $\Delta_N{}^{\vee} = \{V\setminus F|F\notin\Delta_N\}$ *iar* $\Delta^C=\{V\setminus F|F\in\Delta\}$, *numai că* $F\notin\Delta_N \Leftrightarrow F\in\Delta$, *deci propoziția este demonstrată!*

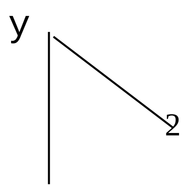
Noțiunile anterioare ar fi greu de înțeles fără un exemplu concret:

Fie $\Delta = \langle xyz,yzu,uv\rangle$: x

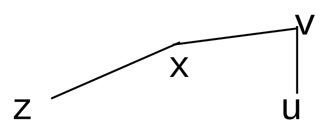


Atunci: $\Delta_M = \langle xu,\ yu,\ yv,\ zu,\ zv\rangle$





Δ^C = <uv,xv,xyz>



$\Delta_N = \Delta_M^C$ = <yvz, xvz, xzu, xyv, xyu>

Δ^V = <zyv, zyu, xzu, xyu>

§7.Secvențialitatea Cohen-Macaulay a arborilor.

Definiția 1: Fie k un corp şi R o k-algebră graduată. (În particular, $R=k[x_1,\dots,x_n]$. Fie M un R-modul. Spunem că M este R-modul secvențial Cohen-Macaulay, dacă există o filtrare a lui M cu submodule graduate:$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_r = M$ astfel încât avem:

a)M_i/M_{i-1} este R-modul Cohen-Macaulay.

b)$\dim(M_i/M_{i-1}) < \dim(M_{i+1}/M_i)$, pentru i=1,r-1.

Rezultatul principal al acestui capitol constă în:

Teoremă:(Faridi) Idealul fațetelor $F(\Delta)$ al unui arbore simplicial este secvențial Cohen-Macaulay.

Pentru a putea da o demonstație a acestei teoreme, avem nevoie de câteva definiții şi rezultate preliminare:

Definiția 2: Dat I un ideal monomial generat de monoame libere de pătrate şi $\Delta = \delta_F(I)$, definim idealul dual al lui I,notat $I^\vee$ ca fiind idealul fațetelor complexului Δ_M.

Definiția 3: Spunem că un ideal $I<R = k[x_1,x_2,\dots,x_n]$ are o rezoluție liniară, dacă R/I are o rezoluție minimală liberă astfel că elementele nenule ale matricilor date de aplicațiile $R^{\beta_j} \to R^{\beta_{j-1}}$ sunt polinoame omogene de grad 1.

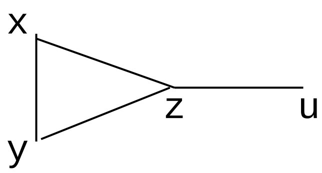
Teoremă(Eagon-Reiner): Fie $I<R = k[x_1,x_2,\dots,x_n]$ un ideal monomial generat de monoame libere de pătrate. Atunci R/I este Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow$ $I^\vee$ are o rezoluție liniară.

Demonstrație: vezi articolul „Eagon-Reiner: Resolution of Stanley-Reisner rings and Alexander duality, J.Pure Appl. Algebra 130 (1998) no.3,265-275"

Teoremă(Duval): Fie $I<R = k[x_1,x_2,\dots,x_n]$ un ideal monomial generat de monoame libere de pătrate şi $\Delta_N = \delta_N(I)$ complexul Stanley-Reisner asociat. Atunci R/I este secvențial-Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow$ pentru orice $i=0,\dots\dim(\Delta_N)$, dacă $\Delta_{N,i}$ este subcomplexul pur de dimensiune i, atunci $R/N(\Delta_{N,i})$este un inel Cohen-Macaulay.

Demonstrație: Vezi articolul „Duval A.M. Algebraic shifting and sequentially Cohen-Macaulay simplicial complexes, Electron.J.Combin.3(1996) no.1"

Exemplu: Fie Δ următorul complex simplicial:



Avem $F(\Delta)=<xyz, zu>$
Avem $\Delta_N = <xyu>$

$\Delta_{N,0} = <x,y,u>$, deci $I_0 = N(\Delta_{N,0}) = <z>$.
$\Delta_{N,1} = <xy,xu,yu>$, deci $I_1 = N(\Delta_{N,1}) = <xyz,xyu,zu>$.
$\Delta_{N,2} = <xyu>$, deci $I_2 = N(\Delta_{N,2}) = <zu,zx,zy,xy,xu,yu>$.

Se constată uşor că dacă $R=k[x,y,z,u]$, atunci R/I_i sunt inele Cohen-Macaulay pentru i=0,2 deci conform teoremei Duval $\Rightarrow$ R/I este secvențial-Cohen-Macaulay.

Definiția 4: Fie I un ideal monomial liber de pătrate într-un inel de polinoame $R=k[x_1,\dots,x_n]$. Pentru $k>0$, notăm $I_{[k]}$ = componenta omogenă liberă de pătrate de grad k în I, generată de toate monoamele libere de pătrate de grad k din idealul I.

Propoziție (Criteriu de secvențialitate-Cohen-Macaulay):

Fie I un ideal monomial liber de pătrate într-un inel de polinoame $R=k[x_1,\dots,x_n]$. Atunci I este secvențial Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow$ pentru orice k, $I^{v}_{[k]}$ are o rezoluție liniară.

Demonstrație: Presupunem $\Delta = \delta_F(I) = <F_1,\dots F_q>$. Presupunem că $\Delta_M = <G_1,\dots G_p>$. Cum $\Delta_N = \Delta_M^C$ (din propoziția 6.2(a)) rezultă că $\Delta_N = <G_1^C,\dots G_p^C>$. Fie $i\in\{0,\dots\dim(\Delta_N)\}$ arbitrar fixat. Notăm $\Delta_{N,i} = <H_1,\dots H_u>$. Din Teorema Eagon-Reiner, a *arăta că $I_i = N(\Delta_{N,i})$ este un ideal Cohen-Macaulay revine la a arăta că $I^v{}_i$ are o rezoluție liniară.*

Din propoziția 6.2(a), observăm că $I^v{}_i$ este idealul fațetelor lui $\Delta_{N,i}{}^C$ deci ne interesează ce se întâmplă cu H^C unde H este o fațetă în $\Delta_{N,i}$. Cum H aparține unui subcomplex în Δ_N rezultă că există o fațetă $G_j{}^C \in \Delta_N$ astfel că $H \subseteq G_j{}^C$. Dar atunci $G_j = G_j{}^{CC} \subseteq H^C$ ceea ce se traduce prin faptul că H^C conține o acoperire minimală cu vârfuri a lui Δ, deci este o acoperire cu n-(i+1) vârfuri a lui Δ.

În mod similar, dacă G este o acoperire cu vârfuri pentru Δ cu n-(i+1) elemente putem constata că G^C este o fațetă în $\Delta_{N,i}$.

Discuția de mai sus ne arată că idealul $I^v{}_k$ este generat de monoame corespunzătoare acoperirilor cu n-i-1 elemente pentru Δ. Deci $I^v{}_i = I^v{}_{[n-i-1]}$. Atunci, conform teoremei Eagon-Reiner, a arăta că $\Delta_{N,i}$ este Cohen-Macaulay revine la a arăta că $I^v{}_{[n-i-1]}$ are rezoluție liniară. Teorema Duval încheie demonstrația!

Definiția 5: Fie $I=(m_1,\dots,m_q)<R$ un ideal monomial, minimal generat de monoamele $m_1,\dots,m_q$. Spunem că I are câturi liniare, dacă există o ordine pe $m_1,\dots,m_q$ pe mulțimea generatorilor minimali astfel că $(m_1,\dots,m_{i-1}):m_i$ este generat de o mulțime de variabile.

Lema 1: Dacă $I=(m_1,\dots,m_q)$ e un ideal monomial care are câturi liniare şi generatorii m_i au acelaşi grad, atunci I are o rezoluție liniară.

Demonstrație: Facem inducție după q. Pentru q=1 este clar. Presupunem q>1 şi notăm $I'=(m_1,\dots,m_{q-1})$. Atunci, din ipoteza de inducție I' are o rezoluție liniară, şi conform unui rezultat de algebră comutativă (v.Brunns-Herzog „Cohen-Macaulay Rings" secțiunea 5.5) avem:

$$\left|\begin{array}{l} Tor_i(k,R/I')_a = 0 \text{ , pentru } a \neq i+d, \text{ unde } d=grad(m_i). \\ Tor_i(k,R/I':I)_a = 0 \text{ , pentru } a \neq i+1. \end{array}\right.$$

Consider următorul şir exact:

$$0 \longrightarrow R/(I':I)(-d) \xrightarrow{m_q} R/I' \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Prin trecere la omologie, obținem şirul lung exact:

$$\dots \longrightarrow Tor_i(k,R/(I':I)(-d)) \longrightarrow Tor_i(k,R/I) \longrightarrow Tor_i(k,R/I') \longrightarrow Tor_{i-1}(k,R/(I':I)(-d)) \longrightarrow \dots$$

Observăm de aici dă dacă $Tor_i(k,R/I)_a \neq 0$, atunci rezultă că a = i+d, deci R/I are o rezoluție liniară.

Lema 2: Dacă Δ este un complex simplicial pe mulțimea de vârfuri $V=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Presupunem că $x\in V$ astfel că $V\setminus\{x\}$ este o acoperire cu vârfuri pentru Δ. Fie P_x idealul prim generat de variabilele din $V\setminus\{x\}$. Atunci localizarea lui Δ în idealul P_x corespunde, prin dualitatea acoperirii, înlăturării tuturor fațetelor lui Δ_M care conțin pe x. Altfel spus, dacă $\Delta'=\Delta_{Px}$ şi $A_1,\ldots,A_t$ sunt toate fațetele lui Δ_M care conțin pe x $\Rightarrow \Delta_M'=\Delta_M\setminus\{A_1,\ldots,A_t\}$.

Demonstrație: Să observăm mai întâi că o fațetă în Δ_M' este generată de mulțimea variabilelor unui ideal prim minimal peste $I=F(\Delta)$ care nu conține pe x şi deci, în particular, aparține lui Δ_M. Reciproc, dacă A este o fațetă din $\Delta_M\setminus\{A_1,\ldots,A_t\}$, atunci lui A îi corespunde un ideal prim minimal peste I care nu conține pe x, deci un ideal prim minimal peste I_{Px}.

Teorema 1: Fie Δ un arbore (pădure) simplicial. Fie $I=F(\Delta)$. Fie $\alpha(\Delta)\leq i\leq n$, atunci $I^v_{[i]}$ are câturi liniare.

Demonstrație: Facem inducție după n = numărul de vârfuri ale lui Δ. Dacă n=1, atunci Δ constă într-un singur vârf, iar $I^v_{[1]}=(x_1)$ are evident câturi liniare. Presupunem aşadar n>1.

***I**. Mai întâi, consider următorul caz special: Δ este o pădure care conține fațetele $\{x_1\},\ldots,\{x_j\}$ pentru j<n. Atunci putem considera $I'=F(\Delta)$ ca ideal în $k[x_1,\ldots,x_{n-j}]$ (I,I' au aceiaşi mulțime de generatori, doar că aceşti trăiesc în inele diferite).*

Aplicând ipoteza de inducție, rezultă că pentru fiecare i, $I'^v_{[i]}$ are câturi liniare. Se verifică uşor că avem: $I^v_{[i]} = I'^v_{[i]} + x_nI'^v_{[i-1]}$.

Presupunem că: $I'^v_{[i]}=(A_1,\ldots A_a)$ şi $I'^v_{[i-1]}=(B_1,\ldots B_b)$, unde generatorii sunt trecuți în ordinea corectă pentru câturi liniare. Pentru a arăta că $I^v_{[i]}=(A_1,\ldots A_a) + x_n(B_1,\ldots B_b)$ are câturi liniare, vom considera cazul când există un monom $m\in k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ astfel că $mx_nB_j\in(A_1,\ldots,A_a,x_nB_1,\ldots,x_nB_{j-1})$.

Cum $I'^v_{[i-1]}$ are câturi liniare, rezultă că pentru o variabilă z care divide pe m, avem $zx_nB_j\in(x_nB_1,\ldots,x_nB_{j-1})$. Dacă $mx_nB_j\in(A_1,\ldots,A_a)$ atunci cum B_j este deja o acoperire cu vârfuri pentru Δ cu i elemente $\Rightarrow zB_j\in(A_1,\ldots,A_a)$. Cu atât mai mult, pentru orice z care divide m, putem conclude că

$zx_nB_j\in(A_1,\dots,A_a)$! Acest argument rezolvă cazul când $\Delta=<x_1,\dots,x_j>$ şi $j<n$.

***II**. Dacă $\Delta=<x_1,\dots,x_n>$ atunci singurul ideal ce poate fi considerat este $I^v{}_{[n]}=(x_1\dots x_n)$ care prin definiţie are cât liniar în mod evident!*

***III**.Acum putem trece la cazul general, presupunând în plus că Δ conţine o faţetă cu mai mult de un vârf. Mai mult, putem presupune că Δ are o frunză F cu dim(F)>0 şi cu un vârf liber $x = x_1$. Putem scrie atunci pentru $\Delta_{M,}$ că: $\Delta_{M,[i]} = \delta_F(I^v{}_{[i]}) = <A_1,\dots,A_t> \cup <xB_1,\dots,xB_s>$ unde $A_1,\dots,A_t$ sunt acoperirile cu vârfuri pentru Δ cu i elemente care nu conţin pe x, iar $xB_1,\dots,xB_s$ sunt celelalte acoperiri cu vârfuri pentru Δ (cele care conţin pe x). <u>Observaţie</u>: Am utilizat convenţia $xB=\{x\}\cup B$!*

Fie $\Delta'= \Delta_{Px}$ şi $\Delta''=\Delta\setminus<F>$. Atât Δ' cât şi Δ'' sunt păduri care au ca mulţime de vârfuri $\{x_2,\dots,x_n\}$. De asemenea, observăm că Δ' este un complex simplicial nevid. Folosind notaţiile din lema precedentă, avem că: $\Delta'_{M,[i]}=<A_1,\dots,A_t>$ şi $\Delta''_{M,[i]}=<B_1,\dots,B_s>$.

Pentru a verifica ultima identitate, observăm că pentru j=1,…s atunci din faptul că xB_j este o acoperire pentru Δ, rezultă că B_j este o acoperire pentru Δ''(căci x este vârf liber în F, deci x acoperă doar pe F). Pe de altă parte, dacă A este o acoperire pentru Δ'' cu i-1 elemente atunci xA este în $\Delta_{M,[i]}$ deci $xA\in\{xB_1,\dots,xB_s\}$.

Aplicând ipoteza de inducţie pentru pădurile Δ'şi Δ'' rezultă că idealele: $I^{v'}{}_{[i]}=<A_1,\dots,A_t>$ şi $I^{v''}{}_{[i-1]}=<B_1,\dots,B_s>$ din $k[x_2,\dots,x_n]$ admit ambele câturi liniare. Putem presupune că ordinea $A_1,\dots,A_t$ (respectiv $B_1,\dots,B_s$) este ordinea din definiţia câturilor liniare. Vrem să arătăm că idealul $I^v{}_{[i]}=(A_1,\dots,A_t)+x(B_1,\dots,B_s)$ admite câturi liniare.

Aplicăm inducţie descendentă după i. Evident, avem $I^v{}_{[n]}=(x_1\dots x_n)$ care admite câturi liniare. De asemenea, putem presupune i>1, căci $I^v{}_{[1]}$ este generat de o mulţime de variabile, dacă nu este cumva zero.

***a**. Primul caz interesant este cel al idealului $(A_1,\dots,A_t):xB_1$. Dar B_1 este o acoperire cu variabile pentru $\Delta''=\Delta\setminus<F>$ deci $yB_1\in I^v{}_{[i]}$ pentru orice vârf y al lui F care nu se află în B_1. Deci, dacă m este un monom astfel că $mxB_1\in I'^v{}_{[i]}$ atunci există un monom n şi un indice j astfel încât să avem $mxB_1=nA_j$ (conform unei discuţii precedente).*

Dacă B_1 deja conţine un vârf al lui F, atunci B_1 este o acoperire cu i-1 elemente pentru Δ' şi deci pentru orice y care divide m $\Rightarrow yB_1\in\{A_1,\dots,A_t\}$. Altfel, cum există

un vârf y al lui F în A_j, dacă y divide pe m, iarăşi rezultă că $yxB_1\in(A_1,\ldots,A_t)$!
***b**. În cazul general al idealului $(A_1,\ldots,A_t,xB_1,\ldots,xB_{j-1}):xB_j$ dacă pentru un monom m, $mxB_j\in(xB_1,\ldots,xB_{j-1})$ atunci din ipoteza de inducţie pentru $I^{v''}_{[i-1]}$ există o variabilă y care divide m a.î. $yx\,B_j\in(xB_1,\ldots,xB_{j-1})$. Dacă $mxB_j\in(A_1,\ldots,A_t)$ atunci dintr-un argument analog cu cel de la pasul a, găsim o variabilă y care divide pe m cu $yxB_j\in(A_1,\ldots,A_t)$.*

Teoremă:(Faridi) Idealul faţetelor F(Δ) al unui arbore simplicial este secvenţial Cohen-Macaulay.

Demonstraţie: Fie I=F(Δ) Din teorema 1 şi lema 1 $\Rightarrow$ idealul $I^{v}_{[i]}$ are o rezoluţie liniară, pentru $\alpha(\Delta)\leq i\leq n$. Dar atunci, din criteriu de secvenţialitate-C-M $\Rightarrow$ q.e.d.

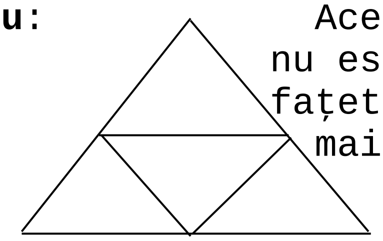
Corolar: Dacă Δ este un arbore simplicial C-M (deci nemixtat) atunci Δ_N este şelabil.

§8.O generalizare a noţiunii de arbore simplicial.

Definiţia 1: (Zheng) Un complex simplicial conex Δ se numeşte cvasi-arbore dacă faţetele lui Δ pot fi ordonate $F_1,F_2,\ldots,F_m$ astfel că F_i e frunză pentru $\langle F_1,\ldots,F_{i-1}\rangle$,i=2,…m.
Dacă nu mai cerem conexitate, obţinem noţiunea de cvasi-pădure.

Observaţie: Dacă Δ este arbore(pădure) atunci Δ este cvasi-arbore (cvasi-pădure). Reciproca, în general, nu mai este adevărată.

Exemplu:



Acest complex este cvasi-arbore, dar nu este arbore, fiindcă, dacă înlăturăm faţeta din mijloc, ceea ce obţinem nu mai are nici o frunză!

Propoziţie: Dacă Δ este o cvasi-pădure, atunci N(Δ) e generat de monoame de gradul 2.

Demonstraţie: Fie $F_1,F_2,\ldots,F_m$ o ordine bună pe mulţimea frunzelor. Aplicăm inducţie după m. Pentru m=1 este clar. Cum $\Delta'=\langle F_1,F_2,\ldots,F_{m-1}\rangle$ e tot cvasi-pădure, Δ' verifică *ipoteza de inducție. Fie F_k o coadă pentru F_m $(k<m)$. Atunci $\forall G\in\Delta' \Rightarrow G\cap(F_m\setminus F_k)=\emptyset$.*

Presupunem că există H o non-față minimală cu cel puțin 3 elemente. Cum H e non față, $(\exists)p\in H$ cu $p\notin F_m$. Dacă $q\in F_m \Rightarrow \{p,q\}\in\Delta$, deci $(\exists)j<m$ cu $\{p,q\}\subset F_j$. Deci $q\in F_j\cap F_m \Rightarrow q\in F_k$, deci $H\cap(F_m\setminus F_k)=\emptyset$, ceea ce arată că H este o non-față minimală în Δ' cu cel puțin 3 elemente. Absurd!

Definiție: Dacă Δ este un complex simplicial pe mulțimea de vârfuri $V=\{v_1,\dots v_n\}$, se numeşte dualul Alexander al lui Δ, complexul simplicial definit prin $\Delta^{\vee} = \{V\setminus F \mid F\notin\Delta\}$.

Evident, $(\Delta^{\vee})^{\vee} = \Delta$.

Teoremă:(Caracterizare algebrică a cvasi-pădurilor)

Fie Δ un complex simplicial. Atunci Δ este cvasi-pădure $\Leftrightarrow \mathrm{pd}(N(\Delta^{\vee}))=1$

Teoremă:(Dirac) Fie G un graf. Atunci UASE:

(1)G este cordal.(orice ciclu cu lungime$\geq$3 are o coardă)

(2)G este 1-scheletul unei cvasi-păduri.

§9.Caracterizarea topologică a arborilor simpliciali.

Definiție: Un spațiu topologic X se numeşte contractibil, dacă este omotop cu un spațiu topologic format dintr-un singur punct $x_0\in X$. Adică: Există $F: X\times[0,1] \to X$ continuă astfel că $F(x,0)=x_0$, $\forall x\in X$ şi $F(x,1)=x$, $\forall x\in X$. (Altfel spus, aplicațiile 1_X şi x_0 sunt omotope)

În general, două spații topologice X şi Y se numesc omotope, dacă există $f: X \to Y$ şi $g: Y \to X$ continue astfel că $f\circ g \simeq 1_Y$ şi $g\circ f \simeq 1_X$.

Exemplu: $\mathbb{R}^n$ este contractibil. Într-adevăr, aleg omotopia $F:\mathbb{R}^n\times[0,1] \to \mathbb{R}^n$, $F(x,t)=tx$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ şi $\forall t\in[0,1]$.

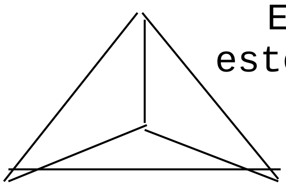
Analog, o submulțime stelată în $\mathbb{R}^n$ e contractibilă.

Definiție: Dat Δ un complex simplicial abstract, putem să îi asociem realizarea sa geometrică într-un spațiu $\mathbb{R}^n$, astfel: Unei fațete de dimensiune q îi asociem un q-simplex standard (=acoperirea convexă a q+1 puncte afin independente). Lipim apoi (topologic) aceste simplexe, după cum ne spune intersecția fațetelor…

Propoziție: Fie G un graf, atunci G este arbore $\Leftrightarrow$ Realizarea sa geometrică este un spațiu topologic contractibil.

Demonstrație: Un arbore este un graf fără ciclii. Geometric, aşa ceva este un spațiu contractibil! Reciproc, dacă G nu este arbore, atunci conține un număr de q>0 ciclii, ceea ce topologic revine la o sumă conexă de q cercuri (spațiu care evident nu mai e contractibil!)

Problema care se pune este dacă ne putem aştepta la o generalizare a acestei propoziții pentru arbori simpliciali arbitrari (sau cvasi-arbori, de ce nu?). În primul rând, să observăm că nu mai puteam avea o caracterizare cu „dacă şi numai dacă”, ceea ce reiese imediat din exemplul următor:

Exemplu: Δ  Este un spațiu contractibil, dar nu este arbore (nici cvasi-arbore!)!

Teoremă:

Dacă Δ este un arbore, atunci Δ este un spațiu topologic contractibil.

Cheia demonstrației constă în următoarea lemă:

Lemă: Dacă Δ este un complex simplicial care are o frunză $F\in\Delta$, atunci Δ este omotop cu $\Delta\setminus\langle F\rangle$.

Demonstrație: Fie G o coadă pentru F. Atunci vârfurile lui F fie sunt libere, fie sunt în $F\cap G$. Numai că $F\cap G$ este o față în Δ, deci geometric vorbind este un i-simplex. Se observă atunci imediat că F se retractă la $F\cap G$, deci de fapt Δ se retractă la $\Delta\setminus\langle F\rangle$.

Demonstrația teoremei: Aleg $F_1,F_2,\ldots,F_m$ o ordine bună pe mulțimea frunzelor. Aplicând succesiv lema anterioară, constat că: $\Delta=\langle F_1,\ldots,F_m\rangle$; $\langle F_1,\ldots,F_{m-1}\rangle$; …; $\langle F_1\rangle$ care este un spațiu topologic contractibil!

Consecințe:

1. Dacă Δ este un arbore simplicial, atunci Δ este contractibil.

2.Dacă Δ este o cvasi-pădure (sau o pădure) atunci Δ e omotop cu o mulțime discretă de m puncte, unde m= numărul de componente conexe ale lui Δ.

* *
*

Bibliografie:

1.Winnfred Brunns, Jurgen Herzog „Cohen Macaulay Rings”, Cambridge studies in advanced mathematics, 1998.
2.Sara Faridi „Simplicial trees are sequentially Cohen-Macaulay”, 27.august 2003.
3.Sara Faridi „The facet ideal of a simplicial complex”, Manuscripta Mathematica(109),2002.
4.Sara Faridi „Cohen-Macaulay properties of square-free monomial ideals”, 2002.
5.R.Villareal „Monomial algebras”
6.J.Herzog „Workshop on monomial algebras – Eforie 2003”, I.M.A.R. Seminaries series no. 3/2003

Cuprins: