

Introducere în Geometria Varietăților Torice

Marian Aprodu

SNSB 2005 – 2006

Cuprins

Introducere.	5
1 Noțiuni de Geometrie Algebrică.	9
1.1 Varietăți Afine. Definiții și Exemple.	9
1.2 Topologia Zariski.	12
1.3 Inele de coordonate. Morfisme.	14
1.4 Structura de spațiu inelat pe o varietate afină.	16
1.5 Varietăți abstracte.	22
1.6 Aplicații raționale.	24
1.7 Normalitate.	25
1.8 Dimensiune.	27
1.9 Spațiul tangent afin.	28
1.10 Diferențiale și spațiul tangent Zariski.	30
2 Noțiuni de Geometrie Convexă.	35
2.1 Conuri Poliedrale.	35
2.2 Conuri Duale. Teorema lui Farkas.	38
2.3 Conuri Ascuțite.	48
2.4 Construcția Practică a Conurilor Duale.	49
2.5 Conuri Poliedrale Raționale.	51
3 Varietăți Torice Afine.	55
3.1 Spațiul Afin Reîncărcat.	55
3.2 \mathbb{C} -Algebra Asociată unui Monoid.	56
3.3 Monoizi Asociați Conurilor.	57
3.4 Varietăți Torice Afine.	59
3.5 Deschiși Afini Principali.	62
3.6 Structuri Suplimentare pe o Varietate Torică Afină.	63
3.7 Netezimea Varietăților Torice Afine.	65
4 Varietăți Torice Abstracte.	67
4.1 Separarea Conurilor.	67
4.2 Varietăți Torice Abstracte.	68
4.3 Exemple de Varietăți Torice.	69
4.4 Acțiunea Torului n -dimensional pe o Varietate Torică.	72
4.5 Morfisme Torice.	72

4.6	Subgrupuri cu un Parametru, Caractere și Puncte-limită.	73
4.7	Structura Orbitelor.	77
4.8	Închiderile orbitelor.	80
5	Varietăți Torice Proiective.	83
5.1	Subvarietăți Invariante ale Spațiului Proiectiv.	83
5.2	Politopuri.	83
5.3	Varietatea Torică Asociată unui Politop Laticial.	87
5.4	Morfisme Asociate Politopurilor Laticiale.	88
5.5	Aplicația Moment.	88
5.6	Topologia Varietăților Netede și Proiective.	88
5.7	Polinomul Ehrhart.	88

Introducere.

Originile geometriei torice se pierd în calculul aproximativ al numerelor iraționale. Aria unei figuri în plan poate fi aproximată cu numărul de puncte cu coordonate întregi pe care le conține. Cu cât figura este mai mare, cu atât aproximația este mai bună. De exemplu, pentru a aproxima numărul π putem considera un cerc cu raza de 5 unități și obținem $\pi \approx 3,24$, vezi Figura 1. Considerând un cerc de rază egală

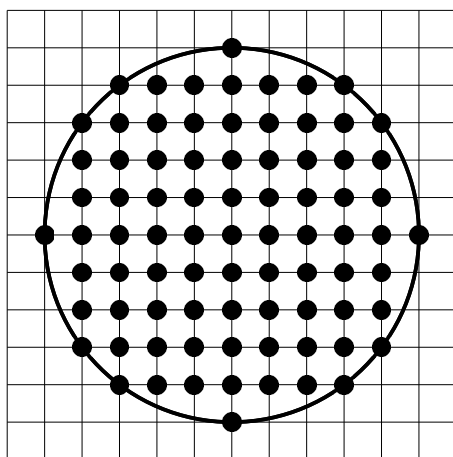


Figura 1: 81 de puncte cu coordonate întregi.

cu 10 unități, vom obține aproximația deja mult mai bună $\pi \approx 3,17$, vezi Figura 2.

În cazul unui poligon convex cu vârfuri întregi, există o legătură directă, dată de formula Pick (1899), între numărul de puncte întregi conținute în poligon, numărul total de puncte întregi de pe laturi și aria poligonului. În dimensiune superioară însă, înlocuind poligonul cu un *politop convex*, calculul volumului devine complicat. De aici încolo, este nevoie de instrumente de lucru mult mai puternice decât o simplă analiză combinatorială. Este exact locul unde intervine Geometria Algebrică.

Un curs de geometria varietăților torice este în primul rând de un curs de Geometrie Algebrică. Obiectele principale de studiu sunt varietățile algebrice, dar este vorba de varietăți de un tip special, care sunt asociate unor obiecte provenind din geometria convexă : conuri, eventaie, politopuri. Un avantaj indiscutabil al Geometriei Torice este faptul că varietățile pot fi vizualizate într-un mod cât se poate de concret. Nu mai suntem deci obligați să trasăm o varietate complexă (așa cum se întâmplă adesea, mai ales în Geometria Curbelor Complexe) ca și cum ar fi o varietate reală. Pentru edificare, am inclus o figură care ne arată planul proiectiv

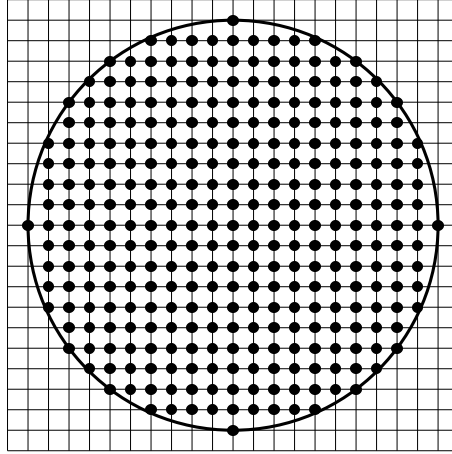


Figura 2: 317 puncte cu coordonate întregi.

complex văzut din perspectiva Geometriei Torice, vezi Figura 3.

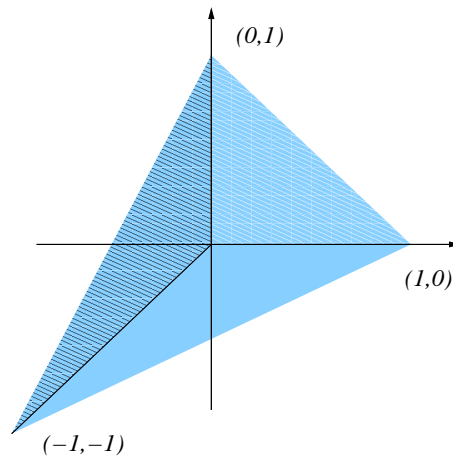


Figura 3: Planul Proiectiv Complex din Perspectiva Geometriei Torice.

Primul Capitol reamintește noțiunea de varietate algebrică afină (peste corpul numerelor complexe) și proprietățile de bază. O parte din demonstrații au fost omise în mod intenționat, fiind lăsate ca exerciții. Alte rezultate sunt teoreme clasice (precum Teorema Zerourilor a lui Hilbert) care pot fi găsite în orice curs de algebră comutativă, de exemplu [AM69]. Al doilea Capitol este o introducere rapidă în Geometria Convexă. În timp ce o bună parte a tratatelor de Geometrie Convexă încep cu studiul politopurilor (din motive de compacitate), am preferat calea indicată de [Fu93], anume de a începe prezentarea cu teoria conurilor convexe. Motivul este unul simplu, deoarece conurilor de un anumit tip (ascuțite, raționale, poliedrale convexe) li se asociază în mod natural varietăți algebrice affine. Or, varietățile affine sunt piesele constitutive ale varietăților algebrice abstracte. Definirea varietăților torice affine este tratată în Capitolul 3. În Capitolul 4, studiem varietăți torice abstracte ca fiind asociate unor evantaie. Ele sunt obținute prin lipiri ale varietăților torice

afine, așa cum varietățile algebrice abstracte sunt obținute prin lipiri succesive ale varietăților afine. În fine, ultimul Capitol tratează varietățile torice proiective.

Este imposibil de pretins, într-un domeniu cu tradiție și referințe solide, originalitate deplină în pregătirea unui curs introductiv. Nici unul din rezultatele sau noțiunile din acest manuscris nu este original, fiind parte integrantă a patrimoniului științific clasic. Sursele principale de inspirație pe care le-am folosit sunt publicațiile citate în Bibliografie, cu un accent special pe notele de curs ale lui William Fulton [Fu93], ale lui Mircea Mustață [Mu04], precum și pe notele de la Școala de Vară de la Grenoble [BBBC00]. Pentru partea generală de Geometrie Algebrică, cartea lui Robin Hartshorne [Ha77] este indiscutabil referința ideală, iar [AM69] rămâne încă după atâția ani un excelent tratat de algebră comutativă. Totuși, trebuie subliniat faptul că materialul prezent nu este o simplă traducere a referințelor menționate, ci a fost trecut prin prisma gândirii personale a autorului.

București, 2006

Capitolul 1

Noțiuni de Geometrie Algebrică.

Pentru simplitate, pe parcursul întregului curs vom lucra numai cu varietăți definite peste corpul \mathbb{C} al numerelor complexe.

1.1 Varietăți Afine. Definiții și Exemple.

Definiția 1.1 O varietate algebrică afină V este o mulțime de tipul

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, P_1(x) = \dots = P_m(x) = 0\},$$

unde $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Se notează $V = \mathbb{V}(P_1, \dots, P_m)$; V provine de la cuvântul englez "vanishing" = "anulare".

O *varietate algebrică abstractă* este un obiect care local arată ca o varietate afină: definiția exactă va fi precizată mai târziu. Varietățile algebrice apar în numeroase locuri, de exemplu, în teoria numerelor, teoria codurilor sau în fizica teoretică modernă. Este justificată deci dorința de a înțelege cât mai bine posibil geometria acestor obiecte. Categoria varietăților algebrice fiind suficient de bogată, este dificil de imaginat un procedeu unitar de prezentare a unei liste exhaustive. Unul din țelurile geometriei algebrice este acela de a indica metode viabile de clasificare a varietăților și de a le organiza în liste, în funcție de *comportamentul* lor geometric.

Iată câteva exemple familiare.

Exemplul 1.2 1. *Varietățile liniare afine.* Mulțimea soluțiilor unui sistem liniar cu coeficienți complecși:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}X_1 + \dots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

este o varietate algebrică.

2. *Cuadricele.* Este vorba de o singură ecuație de gradul doi cu coeficienți complecși.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}X_iX_j + 2 \sum_{i=1}^n b_iX_i + c = 0.$$

Deja în stabilirea formei canonice a unei cuadrice cu coeficienți reali se simțea nevoia introducerii numerelor complexe, datorită faptului că ecuații de tipul $X_1^2 + X_2^2 + 1 = 0$ nu au soluții reale.

3. *Hipersuprafețele în \mathbb{C}^n* . Sunt varietăți definite printr-o singură ecuație netrivială :

$$\sum_{i=1}^d \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = d} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} = 0.$$

4. *Curba lui Fermat de grad n* . Pentru orice număr natural $n \geq 3$, se consideră ecuația

$$x^n + y^n = 1.$$

A durat aproape 400 de ani până când matematicienii au reușit să arate (ultimele detalii fiind puse la punct cu tehnici extrem de avansate de către A. Wiles) că ecuația de mai sus nu are soluții $x, y \in \mathbb{Q}$; acest rezultat este cunoscut sub numele de *Marea Teoremă a lui Fermat*.

Observația 1.3 Fie $V \subset \mathbb{C}^n$ o varietate afină definită de ecuațiile $P_1 = \dots = P_m = 0$. Atunci orice combinație ale polinoamelor P_i , cu coeficienți polinomiali,

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^m Q_i(X_1, \dots, X_n) P_i(X_1, \dots, X_n),$$

se va anula pe V . În limbajul algebrei comutative, aceasta înseamnă că elementele idealului $I = (P_1, \dots, P_m)$ generat de polinoamele P_1, \dots, P_m definesc aceeași mulțime a zerourilor V . De aceea are sens să notăm $\mathbb{V}(I) := \mathbb{V}(P_1, \dots, P_m)$ (parantezele aici nu mai joacă nici un rol).

Exercițiul 1.4 Arătați că mulțimile următoare sunt varietăți algebrice :

1. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2, x_1 + tx_2 = 0, \text{ pentru orice } t \in \mathbb{C}\}$.
2. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3, x_1^2 + x_2^2 + tx_3 + 1 = 0, \text{ pentru orice } t \in \mathbb{C}\}$.

Exercițiul anterior și soluția sa ne arată un fenomen interesant : chiar dacă pornim cu un număr infinit de ecuații polinomiale, din ele putem extrage un număr finit păstrând mulțimea soluțiilor. Acesta este în fapt enunțul Teoremei Bazei a lui Hilbert, care ne arată că întotdeauna va avea loc această proprietate.

Teorema 1.5 (Hilbert) *Orice ideal din inelul $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ este finit generat.*

În particular, pentru orice ideal arbitrar $I \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, are sens să introducem mulțimea zerourilor :

$$\mathbb{V}(I) := \{x \in \mathbb{C}^n, P(x) = 0 \text{ pentru orice } P \in I\}.$$

Observația 1.6 Proprietatea ca orice ideal să fie finit generat, numită *noetherianitate*, deosebește fundamental geometria algebrică de geometria diferențială. Dacă înlocuim inelul de polinoame cu inelul de funcții diferențiabile C^∞ pe \mathbb{C}^n (sau mai general pe \mathbb{R}^n), atunci nu mai este adevărat că din orice mulțime de ecuații putem extrage o mulțime finită. **Exercițiul :** Găsiți un exemplu.

Până acum am vorbit despre mulțimea zerourilor unui ideal de polinoame. Putem să inversăm definiția :

Definiția 1.7 Fie $V \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ o varietate afină. Idealul lui V este idealul

$$\mathbb{I}(V) := \{P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n], P(x) = 0 \text{ pentru orice } x \in V\}.$$

Exercițiul 1.8 Arătați că $\mathbb{I}(V)$ este într-adevăr un ideal.

Evident, ne putem pune întrebarea ce legătură există între idealul de definiție al lui V și idealul asociat lui V . Răspunsul este dat de următoarele trei rezultate :

Propoziția 1.9 Dacă $V \subset \mathbb{C}^n$ este o varietate afină atunci

$$V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V)).$$

Demonstrație. Exercițiu. □

Propoziția 1.10 Dacă $I \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ este ideal atunci

$$I \subset \mathfrak{r}(I) \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)),$$

unde

$$\mathfrak{r}(I) := \{P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n], \text{ există } q \in \mathbb{N}, \text{ a.î. } P^q \in I\}$$

este radicalul lui I .

Demonstrație. Exercițiu. □

Exercițiul 1.11 Arătați că $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(I)) = \mathfrak{r}(I)$ pentru orice ideal.

Propoziția anterioară admite o formă mult mai tare, Teorema Zerourilor a lui Hilbert (*Nullstellensatz*).

Teorema 1.12 (Hilbert) Cu notațiile de mai sus, avem

$$\mathfrak{r}(I) = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)).$$

Exercițiul 1.13 Arătați că în general $I \neq \mathfrak{r}(I)$. (Indicație : considerați ideale generate de puteri ale unor polinoame ireductibile)

Idealele care verifică $I = \mathfrak{r}(I)$ se numesc ideale *radicale*. Teorema Zerourilor a lui Hilbert stabilește o corespondență bijectivă între mulțimea varietăților afine din \mathbb{C}^n și mulțimea idealelor radicale din $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Versiunea originală a Teoremei Zerourilor (numită azi *forma slabă*) este o consecință a Teoremei 1.12 :

Corolarul 1.14 (Hilbert) *Orice ideal maximal al lui $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ este de forma $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^n, a} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$, cu $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. În particular, obținem o corespondență bijectivă $a \mapsto \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^n, a}$ între punctele spațiului afin \mathbb{C}^n și idealele maximale din $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.*

În rezultatul de mai sus, este esențial faptul că lucrăm peste corpul numerelor complexe. Dacă înlocuim \mathbb{C} cu \mathbb{R} , atunci enunțul nu mai este valabil.

Exercițiul 1.15 Găsiți un exemplu de ideal maximal într-un inel de polinoame peste corpul numerelor reale care nu este de forma de mai sus. (Indicație : peste \mathbb{R} există polinoame ireductibile de grad cel puțin doi, de exemplu $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$).

Exercițiul 1.16 Arătați că orice mulțime din \mathbb{R}^n dată prin ecuații polinomiale reale poate fi definită printr-o singură ecuație. Teorema Zerourilor a lui Hilbert interzice acest fenomen când lucrăm peste corpul \mathbb{C} .

Propoziția 1.17 (Proprietăți ale corespondenței între ideale și varietăți) *Fie $V_i \subset \mathbb{C}^n$ o mulțime arbitrară de varietăți afine și $I_j \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ o mulțime arbitrară de ideale. Atunci*

1. $\mathbb{I}(\cap V_i) = \mathfrak{r}(\sum \mathbb{I}(V_i))$.
2. $\mathbb{I}(V_1 \cup V_2) = \mathbb{I}(V_1) \cap \mathbb{I}(V_2)$.
3. $\mathbb{V}(\sum I_j) = \cap \mathbb{V}(I_j)$.
4. $\mathbb{V}(I_1 \cap I_2) = \mathbb{V}(I_1) \cap \mathbb{V}(I_2)$.

Observația 1.18 Suma a două ideale radicale nu este neapărat un ideal radical. De exemplu, pentru $I = (X_2) \subset \mathbb{C}[X_1, X_2]$, $J = (X_2 - X_1^2) \subset \mathbb{C}[X_1, X_2]$, suma lor nu este radical. **Exercițiu :** Justificați.

1.2 Topologia Zariski.

Fiind date de anularea unor polinoame, care sunt în particular funcții continue, varietățile afine sunt mulțimi închise în topologia Euclidiană a spațiului afin \mathbb{C}^n . Ele se comportă însă ca închisii dintr-o topologie de sine stătătoare :

Propoziția 1.19 *Mulțimea varietăților afine din \mathbb{C}^n formează o topologie pe \mathbb{C}^n . Mai precis :*

1. *Mulțimea vidă este o varietate afină.*
2. *\mathbb{C}^n este varietate afină.*

3. O intersecție arbitrară de varietăți afine este o varietate afină.

4. O reuniune finită de varietăți afine este o varietate afină.

Demonstrație. 1, 2, Exercițiu. Pentru 3 și 4 se aplică Propoziția 1.17 și Teorema Bazei a lui Hilbert. Pentru 4, se aplică inducția după numărul de varietăți. \square

Această nouă topologie pe \mathbb{C}^n , diferită de cea uzuală, în care închișii sunt varietățile afine, se numește *Topologia Zariski*. Deschișii Zariski, complementarele varietăților, au tendința de a fi foarte mari :

Exercițiul 1.20 Demonstrați că orice două mulțimi deschise nevide din topologia Zariski au intersecția nevidă.

Urma topologiei Zariski pe o varietate afină V se numește în mod logic *Topologia Zariski* a varietății V . Mulțimile închise sunt intersecțiile lui V cu alte varietăți afine. Printre deschișii unei varietăți se distinge o clasă specială, a complementarelor suvarietăților definite de câte o singură ecuație.

Definiția 1.21 Fie $V \subset \mathbb{C}^n$ o varietate afină și $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Deschisul Zariski

$$V_P := \{x \in V, P(x) \neq 0\},$$

se numește deschis afin principal.

Observația 1.22 Deschișii afini principali formează o bază de deschiși pentru topologia Zariski : orice deschis Zariski este o reuniune finită de deschiși principali. Nu orice deschis Zariski însă este un deschis afin principal (**Exercițiu** : Justificați).

Observația 1.23 Un deschis principal V_P nu se schimbă dacă înlocuim P cu un alt polinom Q așa încât $P - Q \in \mathbb{I}(V)$.

Exercițiul 1.24 Arătați că intersecția a doi deschiși principali este un deschis principal.

Exercițiul 1.25 Arătați că, înlocuind \mathbb{C} cu \mathbb{R} peste tot în definițiile anterioare, orice deschis Zariski este un deschis principal. (Indicație : Exercițiul 1.16).

Definiția 1.26 Pentru orice submulțime $A \subset V$ a unei varietăți afine, închiderea sa în topologia Zariski \overline{A} este cea mai mică varietate afină care conține A .

Exercițiul 1.27 Găsiți exemple în care închiderea în topologia Zariski și închiderea în topologia Euclidiană sunt diferite.

Definiția 1.28 Un spațiu topologic se numește ireductibil dacă nu poate fi exprimat ca reuniunea a două submulțimi închise proprii. Echivalent, intersecția oricăror două submulțimi deschise nevide este nevidă. Prin definiție, mulțimea vidă se consideră ca fiind un spațiu ireductibil.

Exemplul 1.29 Spațiul afin \mathbb{C}^n este un spațiu ireductibil.

Propoziția 1.30 Orice submulțime nevidă deschisă a unui spațiu ireductibil este un spațiu ireductibil și dens. Închiderea unei submulțimi ireductibile al unui spațiu topologic este un spațiu ireductibil.

Demonstrație. Exercițiu. \square

Propoziția 1.31 *O varietate afină V este un spațiu ireducibil în topologia Zariski dacă și numai dacă $\mathbb{I}(V)$ este un ideal prim.*

Demonstrație. Exercițiu (indicație : folosiți Propoziția 1.17). □

Propoziția 1.32 *Orice varietate afină V se exprimă în mod unic, până la o permutare a factorilor, ca o reuniune $V = V_1 \cup \dots \cup V_q$, unde V_i sunt varietăți afine ireductibile astfel încât $V_i \not\subset V_j$ pentru orice $i \neq j$.*

Demonstrația are la bază noetherianitatea inelului de polinoame (Teorema Bazei a lui Hilbert), noetherianitatea inelelor cât și definiții echivalente ale noetherianității.

1.3 Inele de coordonate. Morfisme.

Definiția 1.33 *Inelul de coordonate afine al varietății afine $V \subset \mathbb{C}^n$ este inelul cât*

$$\mathcal{O}(V) := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{I}(V).$$

Elementele lui $\mathcal{O}(V)$ se numesc funcții regulate pe V , de aceea $\mathcal{O}(V)$ se mai numește și inelul de funcții regulate.

În spatele acestei definiții se află ideea este că două polinoame diferite care coincid pe varietatea V induc aceeași funcție pe V . Funcțiile regulate sunt de fapt funcții definite pe V care sunt obținute prin restricții de polinoame. Am evitat folosirea termenului de *funcții polinomiale* pentru că este un termen care depinde de scufundarea lui V . Vom arăta că termenul de funcție regulată este un termen intrinsec, deoarece putem privi o varietate afină într-un mod abstract, fără a face referire la o scufundare anume. Diferența este una de nuanță, așa cum vom vedea mai târziu.

Exercițiul 1.34 *Fie $V \subset \mathbb{C}^n$ și $W \subset \mathbb{C}^m$ două varietăți afine. Arătați că $V \times W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ este o varietate afină. Care este inelul său de coordonate afine ?*

Definiția 1.35 *Fie $V \subset \mathbb{C}^n$ și $W \subset \mathbb{C}^m$ două varietăți afine. Un morfism $\phi : V \rightarrow W$ este un m -uplu de funcții regulate*

$$\phi = (f_1, \dots, f_m) : V \rightarrow \mathbb{C}^m$$

a cărei imagine se găsește în W .

Să remarcăm că un morfism de la V la dreapta afină \mathbb{C} este același lucru cu o funcție regulată pe V .

Propoziția 1.36 *O funcție $\phi : V \rightarrow W$ este un morfism dacă și numai dacă pentru orice $f \in \mathcal{O}(W)$, rezultă $f \circ \phi \in \mathcal{O}(V)$.*

O consecință imediată este faptul că un morfism $\phi : V \rightarrow W$ de varietăți afine induce prin compunere cu ϕ un morfism de \mathbb{C} -algebre $\phi^\# : \mathcal{O}(W) \rightarrow \mathcal{O}(V)$.

Propoziția 1.37 *Compunerea a două morfisme este un morfism.*

În modul acesta, putem vorbi de *categoria varietăților afine*. Obținem prin asocierea $V \rightarrow \mathcal{O}(V)$, $\phi \rightarrow \phi^\#$ un functor contravariant de la categoria varietăților afine la categoria \mathbb{C} -algebrelor, a cărei imagine poate fi precizată.

Propoziția 1.38 *Orice \mathbb{C} -algebră A , finit generată, fără elemente nilpotente, este izomorfă cu inelul de coordonate al unei varietăți afine. Dacă în plus A nu are divizori ai lui zero, atunci este inelul de coordonate al unei varietăți ireductibile.*

Demonstrație. Dacă A este generată de elementele x_1, \dots, x_n , atunci din definiție, există un morfism surjectiv $\psi : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$, $X_i \mapsto x_i$. Atunci, dacă $I = \ker(\psi)$ avem $A \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I$. Cum A nu are elemente nilpotente, rezultă că I este un ideal radical și, notând $V = \mathbb{V}(I)$, obținem $A \cong \mathcal{O}(V)$. \square

Propoziția 1.39 *Orice izomorfism de \mathbb{C} -algebre între inelele de coordonate $\mathcal{O}(W)$ și $\mathcal{O}(V)$ a două varietăți afine W și V este indus de un izomorfism $\phi : V \rightarrow W$ în categoria varietăților afine.*

Demonstrație. Să presupunem că $W \subset \mathbb{C}^m$, iar $\mathcal{O}(W) = \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]/\mathbb{I}(W)$. Notăm cu $y_i := Y_i \bmod \mathbb{I}(W)$. Dacă $\phi^\# : \mathcal{O}(W) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ este izomorfismul inițial, atunci definim $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}^m$ prin $\phi(a) = (\phi^\#(y_1)(a), \dots, \phi^\#(y_m)(a))$, pentru orice punct $a \in V$. Aplicația ϕ are imaginea conținută în W , deoarece pentru orice polinom $P \in \mathbb{I}(W)$ și pentru orice punct $a \in V$, avem

$$P(\phi(a)) = P(\phi^\#(y_1)(a), \dots, \phi^\#(y_m)(a)) = \phi^\#(P \bmod \mathbb{I}(W))(a) = 0;$$

mai sus am folosit faptul că $\phi^\#$ este un morfism de \mathbb{C} -algebre. Este evident că $\phi^\#$ este indus de ϕ prin compunere. \square

Observația 1.40 Dacă $A \cong \mathcal{O}(V)$, unde V este o varietate afină, atunci grație Teoremei Zerourilor a lui Hilbert, există o bijecție între punctele lui V și mulțimea idealelor maximale ale lui A , care este numită *spectrul maximal* al inelului A și notată $\text{Specm}(A)$. Topologia Zariski de pe V induce o topologie, bine definită datorită Propoziției precedente, pe $\text{Specm}(A)$. Prin abuz de terminologie, spunem că $\text{Specm}(A)$ este o varietate afină.

Am arătat practic :

Teorema 1.41 *Functorul contravariant :*

$$V \mapsto \mathcal{O}(V),$$

stabilește o echivalență de categorii contra-variantă între categoria varietăților afine și categoria \mathbb{C} -algebrelor finit generate fără elemente nilpotente al cărui functor invers este :

$$A \mapsto \text{Specm}(A).$$

În particular, pentru orice două varietăți afine V și W , avem o bijecție

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Var}\text{-}\mathrm{Aff}}(V, W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathrm{alg}}(\mathcal{O}(W), \mathcal{O}(V)),$$

iar o varietate afină este complet determinată de inelul său de coordonate afine.

Prin acest functor, varietățile ireductibile corespund \mathbb{C} -algebrelor integrale finite generate. Morfismelor dominante de varietăți ireductibile (i.e. cu imagine densă) le corespund morfisme injective de algebre integrale. Morfismelor de incluziune de varietăți le corespund morfisme surjective de algebre.

Observația 1.42 Din Teorema precedentă, rezultă că punctele unei varietăți afine V sunt în corespondență bijectivă cu mulțimea morfismelor de \mathbb{C} -algebre de la $\mathcal{O}(V)$ la \mathbb{C} . Într-adevăr, punctele lui V sunt în corespondență bijectivă cu morfismele de varietăți afine :

$$\{\star\} = \mathrm{Specm}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Specm}(\mathcal{O}(V)) = V.$$

1.4 Structura de spațiu inelat pe o varietate afină.

Atât noțiunea de varietate afină, cât și noțiunile de morfism între varietăți sau funcție regulată sunt noțiuni definite global. De multe ori în studiul geometriei varietăților avem nevoie de noțiuni locale (de exemplu, pentru studiul netezimii). Acest studiu local este permis de structura mai bogată de *spațiu inelat* pe o varietate afină. Ideea este una simplă, și anume : pentru a cunoaște structura intimă a unei varietăți, este suficient să cunoaștem comportamentul funcțiilor locale legate de această structură. Cu alte cuvinte, funcțiile *convenabile* definite local pe varietate determină complet structura acelei varietăți.

Definiția 1.43 Fie $U \subset V$ un deschis Zariski într-o varietate ireductibilă V și $x \in U$. O funcție $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ se numește regulată în x dacă există V_x o vecinătate a lui x și $f, g \in \mathcal{O}(V)$ cu $g(y) \neq 0$ pentru orice $y \in V_x$, astfel încât $\varphi(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$ pentru orice $y \in V_x$. Funcția φ se numește regulată pe U dacă este regulată în orice punct din U .

Definiția 1.44 O funcție rațională pe o varietate afină ireductibilă V este un element din corpul de fracții, notat $K(V)$, al inelului de coordonate $\mathcal{O}(V)$.

Observația 1.45 Prin definiție, o funcție regulată într-un punct dintr-o varietate afină ireductibilă V definește un element din corpul de fracții $K(V)$ al lui $\mathcal{O}(V)$. Într-adevăr, dacă P_1, P_2, Q_1, Q_2 sunt polinoame, iar $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ ca funcții definite pe un deschis nevid din X , atunci $P_1Q_2 \equiv P_2Q_1$ pe acel deschis. Mulțimea pe care două funcții regulate coincid este o mulțime închisă. Din ireductibilitatea lui V obținem $P_1Q_2 \equiv P_2Q_1$ pe V . Rezultă că $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ ca elemente din $K(V)$. Reciproc, o funcție rațională va defini o funcție regulată pe deschisul pe care numitorul său nu se anulează.

Observația 1.46 O funcție regulată într-un punct $x \in V$ al unei varietăți afine ireductibile este un element din inelul local $\mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,x}}$, unde $\mathfrak{m}_{V,x} \subset \mathcal{O}(V)$ este idealul maximal corespunzător punctului x . Această observație este compatibilă cu observația precedentă, deoarece localizatele unui inel integru sunt toate conținute în corpul său de fracții.

Avem la dispoziție două noțiuni de regularitate : cea introdusă mai sus și cea din Secțiunea precedentă. Ar trebui să arătăm că ele coincid.

Propoziția 1.47 Fie V o varietate algebrică afină ireductibilă. O funcție $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ care este regulată în orice punct din V este un element din $\mathcal{O}(V)$.

Demonstrație. Funcția $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ care este regulată în orice punct din V înseamnă că pentru orice punct $x \in V$ există o vecinătate V_x și două funcții polinomiale $f_x, g_x \in \mathcal{O}(V)$ astfel încât $\varphi \equiv \frac{f_x}{g_x}$ pe V_x .

Observăm că idealul generat de numitorii g_x în $\mathcal{O}(V)$ este întregul inel $\mathcal{O}(V)$. În caz contrar, acest ideal ar fi conținut într-un ideal maximal din $\mathcal{O}(V)$. Din Teorema Zerourilor a lui Hilbert, ar exista un punct $x \in V$ în care toți numitorii s-ar anula, ceea ce este absurd, căci $g_x(x) \neq 0$.

Atunci există puncte $x_1, \dots, x_m \in V$ și există $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{O}(V)$ astfel încât $1 = \sum_{i=1}^m h_i g_{x_i}$. Rezultă că, în corpul de fracții al lui $\mathcal{O}(V)$ avem egalitatea

$$\varphi = \sum_{i=1}^m h_i g_{x_i} \varphi.$$

Dar $g_{x_i} \varphi = f_{x_i}$, ceea ce arată că $\varphi \in \mathcal{O}(V)$. □

Observația 1.48 Același argument din demonstrația Propoziției de mai sus este aplicat pentru a arăta ca pentru orice inel integru A , avem

$$A = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \subset A \\ \text{ideal maximal}}} A_{\mathfrak{m}}$$

în inelul de fracții al lui A .

Noțiunea de funcție regulată definită într-un punct, sau pe un deschis dintr-o varietate afină V poate fi introdusă și în absența condiției de ireductibilitate. Putem defini o *funcție regulată într-un punct* $x \in V$ ca fiind un element din inelul local $\mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,x}}$. Spre deosebire de cazul varietăților ireductibile, localizatele în idealele maximale ale lui $\mathcal{O}(V)$ nu mai sunt însă conținute toate ca subinele într-un inel comun. Pentru a evita discuțiile pe tema bunei definiri ca funcție a unei fracții formale de tipul f/g , este convenabil să privim o funcție regulată ca fiind o mulțime de reprezentări sub forma f/g , mai degrabă decât prin intermediul valorilor sale.

Definiția 1.49 (Grothendieck) Fie $U \subset V$ un deschis Zariski într-o varietate algebrică afină V . O funcție regulată pe U este o funcție

$$\varphi : U \rightarrow \prod_{x \in V} \mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,x}}$$

asa încât pentru orice $x \in U$ există V_x o vecinătate a lui x din U și $f, g \in \mathcal{O}(V)$ cu $g \notin \mathfrak{m}_{V,y}$ pentru orice $y \in V_x$, astfel încât $\varphi(y) = \frac{f}{g}$ în $\mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,y}}$ pentru orice $y \in V_x$.

În contrast cu definiția clasică a funcțiilor regulate ca fiind funcții care local sunt fracții, vezi [Se55], definiția de mai sus are avantajul de a putea fi generalizată imediat la cazul schemelor.

În cazul varietăților ireductibile, cele două definiții 1.43 și 1.49 sunt echivalente. Acest fapt rezultă din observația, aplicată deja anterior, că două fracții raționale coincid ca funcții pe o mulțime deschisă nevidă dacă și numai dacă ele coincid ca elemente din corpul de fracții al inelului de coordonate, vezi Observația 1.45.

Observația 1.50 Propoziția 1.47 are un analog identic în cazul varietăților afine arbitrare. O demonstrație poate fi dedusă din [Ha77, II, Proposition 2.2 (c)].

Definiția locală a funcțiilor regulate ne permite să introducem structura de spațiu inelat pe o varietate afină. Reamintim, pentru conveniență, următoarele definiții (recomandând [Ha77, Chap. II] pentru un excelent rezumat de teoria fasciculelor) :

Definiția 1.51 Un fascicol de grupuri abeliene (resp. inele, resp. inele peste \mathbb{C} etc) \mathcal{F} pe un spațiu topologic X este o asociere, pentru orice deschis $U \subset X$

$$U \mapsto \mathcal{F}(U),$$

unde $\mathcal{F}(U)$ este un grup abelian (resp. inel, resp. \mathbb{C} -algebră), și pentru orice doi deschiși $U' \subset U \subset X$, un morfism $r_{U'}^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$, care satisface regula de compatibilitate $r_{U''}^{U'} \circ r_{U'}^U = r_{U''}^U$, pentru $U'' \subset U' \subset U$, și astfel încât, pentru orice deschis $U \subset X$, orice acoperire deschisă $(U_i)_{i \in I}$ a lui U și orice familie de elemente $(s_i)_{i \in I}$ cu $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, cu proprietatea că $r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ pentru orice $i, j \in I$ să existe un unic element $s \in \mathcal{F}(U)$ cu $s_i = r_{U_i}^U(s)$ pentru orice i .

Elementele lui $\mathcal{F}(U)$ se numesc secțiuni, iar aplicațiile $r_{U'}^U$ se numesc aplicații de restricție.

Observația 1.52 Dacă $V \subset X$ este o mulțime deschisă, atunci \mathcal{F} induce un fascicol de grupuri abeliene (inele, \mathbb{C} -algebre etc) $\mathcal{F}|_V$, numit restricția lui \mathcal{F} la V , definit prin $\mathcal{F}|_V(U) := \mathcal{F}(U)$ pentru orice deschis $U \subset V$.

Observația 1.53 Dacă $\phi : X \rightarrow Y$ este o aplicație continuă, orice fascicol \mathcal{F} pe X induce un fascicol $\phi_*\mathcal{F}$ pe Y , numit imaginea directă a lui \mathcal{F} , definit prin $(\phi_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(\phi^{-1}(U))$ pentru orice deschis $U \subset Y$.

Definiția 1.54 Fibra unui fascicol \mathcal{F} într-un punct $x \in X$ este grupul (resp. inelul, resp. \mathbb{C} -algebra)

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U).$$

Un fascicol de inele \mathcal{O}_X pe X se numește fascicol de inele locale dacă pentru orice x , fibra $\mathcal{O}_{X,x}$ este un inel local.

Definiția 1.55 Un morfism de fascicole de grupuri abeliene (resp. inele, resp. inele peste \mathbb{C} , resp. inele locale) $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ este o familie de morfisme $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ de grupuri (resp. inele, resp. \mathbb{C} -algebre, resp. inele locale), care comută cu aplicațiile de restricție.

Definiția 1.56 • Un spațiu inelat (resp. spațiu inelat peste \mathbb{C} , respectiv spațiu inelat local) este o pereche (X, \mathcal{O}_X) , unde X este spațiu topologic, iar \mathcal{O}_X este fascicol de inele (respectiv fascicol de \mathbb{C} -algebre, respectiv fascicol de inele locale).

- Un morfism de spații inelate (respectiv spații inelate peste \mathbb{C}), respectiv spații inelate locale $\Phi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ este o pereche $\Phi = (\phi, \phi^\#)$, unde $\phi : X \rightarrow Y$ este o aplicație continuă, iar $\phi^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow \phi_*\mathcal{O}_X$ este morfism de fascicole de inele (respectiv de \mathbb{C} -algebre, respectiv de inele locale).

Observația 1.57 Dacă $U \subset X$ este o submulțime deschisă, atunci fascicolul structural \mathcal{O}_X induce o structură de spațiu inelat pe U prin restricție : $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$. Dacă (X, \mathcal{O}_X) este spațiu inelat peste \mathbb{C} , respectiv spațiu inelat local, atunci la fel este și (U, \mathcal{O}_U) . Incluziunea lui U în X devine un morfism de spații inelate (respectiv spații inelate peste \mathbb{C}), respectiv spații inelate locale.

Definiția 1.58 Fie V o varietate algebrică afină. Definim fascicolul de funcții regulate pe V , notat cu \mathcal{O}_V , ca fiind fascicolul :

$$U \mapsto \mathcal{O}_V(U) := \{\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \text{ regulată pe } U\}.$$

Propoziția 1.59 Pentru orice varietate afină V și orice punct $a \in V$, fibra

$$\mathcal{O}_{V,a} := \varinjlim_{a \in U} \mathcal{O}_V(U)$$

a fascicolului \mathcal{O}_V în a este izomorfă cu localizatul $\mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,a}}$.

Demonstrație. Se definește un morfism de la $\mathcal{O}_{V,a}$ la inelul local $\mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,a}}$ asociind fiecărei secțiunii locale $s \in \mathcal{O}(U)$, unde U este o vecinătate a lui a , reprezentarea sa f/g din inelul $\mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,a}}$, conform Definiției 1.49. Morfismul definit este clar surjectiv. Se arată că acest morfism este și injectiv, vezi [Ha77, II. Proposition 2.2 (a)] pentru detalii. \square

Corolarul 1.60 Pentru orice varietate afină V , fascicolul \mathcal{O}_V este un fascicol de inele locale peste \mathbb{C} .

Observația 1.61 Un morfism ϕ între două varietăți afine V și W induce un morfism de spații inelate locale peste \mathbb{C} , $\Phi = (\phi, \phi^\#) : (V, \mathcal{O}_V) \rightarrow (W, \mathcal{O}_W)$, unde, pentru orice $U \subset W$ deschis Zariski și $\varphi \in \mathcal{O}_W(U)$, avem

$$\phi^\#(\varphi) := \varphi \circ \phi|_{\phi^{-1}(U)}.$$

Condiția de a fi morfism de inele locale înseamnă că dacă o funcție regulată definită local pe codomeniu se anulează într-un punct, atunci compunerea sa cu ϕ se anulează pe preimaginea punctului în cauză. Această proprietate evidentă explică nevoia de a lucra în categoria spațiilor inelate locale.

Teorema 1.62 Dacă $\Phi = (\phi, \phi^\#) : (V, \mathcal{O}_V) \rightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ este un morfism în categoria spațiilor inelate locale peste \mathbb{C} între două varietăți algebrice afine atunci ϕ este un morfism de varietăți afine, iar $\phi^\#$ este indus de ϕ .

Demonstrație. Demonstrația este asemănătoare cu demonstrația Propoziției 1.39. Presupunem că $V \subset \mathbb{C}^n$, $W \subset \mathbb{C}^m$, iar

$$\mathcal{O}(V) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{I}(V),$$

$$\mathcal{O}(W) = \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]/\mathbb{I}(W).$$

Notăm $x_i := X_i \bmod \mathbb{I}(V)$ și $y_i := Y_i \bmod \mathbb{I}(W)$.

Datorită identităților $\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,x}}$ și analogelor pentru W , rezultă că $\phi^\#$ este complet determinat de morfismul de \mathbb{C} -algebre

$$\phi_W^\# : \mathcal{O}(W) \rightarrow \mathcal{O}(V).$$

Definim $\phi_i = \phi_W^\#(y_i) \in \mathcal{O}(V)$, pentru $i = 1, \dots, m$ și arătăm că

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m).$$

Dacă $a = (a_1, \dots, a_n) \in V$, $b = \phi(a) = (b_1, \dots, b_m)$, iar $\mathfrak{m}_{V,a} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset \mathcal{O}(V)$ este idealul maximal al lui a , considerăm funcțiile regulate care se anulează în a , $\phi_i - \phi_i(a) \in \mathcal{O}(V)$. Atunci $y_i - \phi_i(a) \in (\phi_W^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_{V,a})$. Din faptul că Φ este morfism de spații inelate locale, avem $(\phi_W^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_{V,a}) = \mathfrak{m}_{W,\phi(a)}$, deci $y_i - \phi_i(a) \in (y_1 - b_1, \dots, y_m - b_m)$ pentru orice i . Rezultă că $b_i = \phi_i(a)$ pentru orice i . \square

Observația 1.63 Din Teorema 1.62 desprindem următoarea concluzie : categoria varietăților algebrice afine se scufundă ca și categorie plină și fidelă a categoriei spațiilor inelate locale.

Am văzut că orice deschis Zariski într-o varietate afină este înzestrat cu o structură indusă de spațiu inelat. Printre deschișii Zariski, am identificat clasa specială a deschișilor afini principali. Vom arăta că aceștia sunt la rândul lor varietăți afine.

Lema 1.64 Fie V o varietate afină, $f \in \mathcal{O}(V)$ și V_f deschisul afin principal în V definit de f . Atunci

$$\mathcal{O}_V(V_f) \cong \mathcal{O}(V)_f := \left\{ \frac{g}{f^q}, g \in \mathcal{O}(V), q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demonstrație. Se definește un morfism de la $\mathcal{O}(V)_f$ la $\mathcal{O}_V(V_f)$, asociind fiecărei fracții g/f^q secțiunea deasupra lui V_f :

$$V_f \rightarrow \coprod_{x \in V_f} \mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,x}}, x \mapsto g/f^q \in \mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_{V,x}}.$$

Se arată relativ ușor că această aplicație este injectivă. Partea dificilă este verificarea surjectivității; vezi [Ha77, II. Proposition 2.2 (b)]. \square

Propoziția 1.65 Orice deschis afin principal V_f într-o varietate afină V din \mathbb{C}^n este izomorfă cu o varietate algebrică afină din \mathbb{C}^{n+1} .

Demonstrație. Să presupunem că

$$V = \mathbb{V}(P_1, \dots, P_m) \subset \mathbb{C}^n,$$

iar $P_0 \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ este un reprezentant al lui f . Dacă $x \in V$ este un punct, atunci $P_0(x) \neq 0$ dacă și numai dacă există $x_0 \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$1 - x_0 P_0(x) = 0.$$

Introducem variabila suplimentară X_0 . Atunci V_f se identifică cu varietatea

$$W = \mathbb{V}(P_1, \dots, P_m, 1 - X_0 P_0(X_1, \dots, X_n)) \subset \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n,$$

izomorfismul fiind obținut din scufundarea canonică liniară a lui \mathbb{C}^n în \mathbb{C}^{n+1} , morfismul invers fiind dat de proiecția pe ultimii n factori. Rămâne de arătat că

$$(V_f, \mathcal{O}_V|_{V_f}) \cong (W, \mathcal{O}_W).$$

Pentru aceasta, folosim Lema precedentă. \square

Observația 1.66 Nu orice deschis Zariski poate fi realizat ca varietate afină. Un exemplu este $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, vezi Observația 1.69.

Observația 1.67 În demonstrația Propoziției 1.65, scrierea

$$V \setminus V_f = \mathbb{V}(P_0, P_1, \dots, P_m)$$

nu este neapărat unică, deschisul V_f putând fi scufundat în moduri diferite în \mathbb{C}^{n+1} după același algoritm. Mai mult, dacă f este decompozabil, i.e. $P = Q_1 \dots Q_s$ cu $Q_j \in \mathcal{O}(X)$, atunci putem realiza deschisul U ca varietate afină în \mathbb{C}^{n+s} , introducând s variabile suplimentare Y_1, \dots, Y_s și identificând U cu $\mathbb{V}(P_1, \dots, P_m, 1 - Y_1 Q_1, \dots, 1 - Y_s Q_s)$. Toate aceste structuri sunt însă izomorfe în categoria varietăților afine.

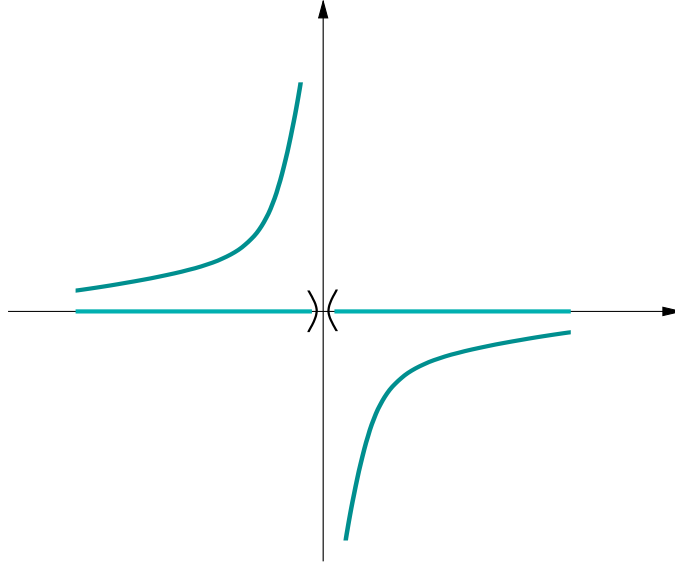


Figura 1.1: Ilustrarea demonstrației Propoziției 1.65

Observația 1.68 Din Propoziția 1.65 (sau Observația 1.67), rezultă că deschisul Zariski $T_n := (\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ poate fi privit la rândul său ca o varietate afină în spațiul $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Această varietate, care se numește *tor algebric n -dimensional*, va juca un rol primordial în geometria varietăților torice. Terminologia provine din faptul că torul topologic $S^1 \times \cdots \times S^1 \subset T_n$ este homotopic echivalent cu torul algebric.

Pentru $n = 1$ avem $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{C}[X, X^{-1}]$. În general, vom obține

$$\mathcal{O}(T_n) \cong \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}].$$

Acest inel se numește *inelul de polinoame Laurent* în variabilele X_1, \dots, X_n . Incluziunea $T_n = (\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ care este evident un morfism de varietăți afine corespunde incluziunii naturale

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \subset \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$$

privită ca morfism de \mathbb{C} -algebre.

Observația 1.69 Deschisul $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ nu este o varietate afină. Se poate arăta că aplicația de restricție a funcțiilor regulate $: \mathcal{O}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$ este un izomorfism (**Exercițiu** : Justificați). Evident, incluziunea $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^2$ nu este izomorfism.

1.5 Varietăți abstracte.

O varietate algebrică abstractă (sau, pe scurt, o varietate algebrică) este obținută prin *lipirea* unui număr de varietăți algebrice afine. Structura obținută este aceea de spațiu inelat local.

Definiția 1.70 (Grothendieck-Serre) *O varietate algebrică abstractă este un spațiu inelat local peste \mathbb{C} , (X, \mathcal{O}_X) astfel încât :*

- (i) *Orice punct $x \in X$ are o vecinătate V cu proprietatea că $(V, \mathcal{O}_X|_V)$ este izomorf ca spațiu inelat local peste \mathbb{C} cu o varietate algebrică afină.*
- (ii) *Diagonala Δ a lui $X \times X$ este închisă.*

Notăție. Pentru orice punct $a \in X$, idealul maximal al inelului local $\mathcal{O}_{X,a}$ va fi notat cu $\mathfrak{m}_{X,a}$.

Observația 1.71 În articolul său celebru *Faisceaux algébriques cohérents*, Serre numește un spațiu inelat care nu îndeplinește decât prima condiție a Definiției 1.70, *o prevarietate*, [Se55]. A doua condiție din Definiție se numește condiția de *separare*.

Exemplul 1.72 Fie X o varietate afină și $U \subset X$ un deschis Zariski. Atunci $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ este o varietate algebrică abstractă. Într-adevăr, U este o reuniune de deschiși afini principali, Observația 1.22, iar orice deschis afin principal este o varietate afină, Propoziția 1.65. Amânăm pe moment prezentarea altor exemple fundamentale de varietăți algebrice abstracte (de altminteri necesară) pentru capitolele următoare.

Topologia pe X se numește *topologia Zariski*, deoarece restricția sa la fiecare deschis afin este topologia Zariski de pe acel deschis.

Observația 1.73 O varietate abstractă este obținută prin *lipirea* unui număr de varietăți algebrice afine, cu structurile de spațiu inelat. Această lipire este realizată concret în modul următor. Presupunem că este dată o familie $(V_i)_{i \in I}$ de varietăți algebrice afine și presupunem că pentru orice $i, j \in I$, este dat câte un deschis V_{ij} din V_i și câte un izomorfism în categoria spațiilor inelate locale $\Phi_{ij} = (\phi_{ij}, \phi_{ij}^\#) : V_{ij} \rightarrow V_{ji}$ care să satisfacă următoarele proprietăți de compatibilitate :

- (a) $V_{ii} = V_i$ și $\Phi_{ii} = \text{id}_{V_i}$.
- (b) $\Phi_{jk}|_{V_{ji} \cap V_{jk}} \circ \Phi_{ij}|_{V_{ij} \cap V_{ik}} = \Phi_{ik}|_{V_{ij} \cap V_{ik}}$.

Putem defini atunci o varietate algebrică abstractă (X, \mathcal{O}_X) (*lipind* varietățile V_i după deschișii V_{ij} = astfel :

- Spațiul topologic subiacent este :

$$X = \left(\prod_{i \in I} V_i \right) / \sim,$$

unde \sim este o relație de echivalență dată prin : $x_i \in V_i$ și $x_j \in V_j$ sunt echivalente dacă și numai dacă $x_i \in V_{ij}$, $x_j \in V_{ji}$ și $x_j = \phi_{ij}(x_i)$. Topologia indusă este cea canonică, așa încât proiecția

$$\rho : \prod_{i \in I} V_i \rightarrow \left(\prod_{i \in I} V_i \right) / \sim$$

să fie continuă. Față de această topologie, fiecare V_i se identifică cu câte un deschis din X , notat tot V_i , care este imaginea lui V_i prin proiecția ρ . Cu aceste identificări $V_i \cap V_j = V_{ij} = V_{ji}$.

- Fascicolul de structură \mathcal{O}_X este definit într-un mod asemănător : pentru $U \subset X$ deschis, notăm cu U_i preimaginea lui U în V_i prin ρ și definim

$$\mathcal{O}_X(U) = \{(f_i)_{i \in I}, f_i \in \mathcal{O}_{V_i}(U_i), f_i|_{U_i \cap V_{ij}} = \phi_{ij}^\#(f_j|_{U_j \cap V_{ji}})\}.$$

Cu alte cuvinte, o funcție regulată pe un deschis $U \subset X$ este o colecție de funcții regulate pe fiecare $U \cap V_i$, care coincid pe intersecții.

Observația 1.74 Procesul de lipire permite definirea topologiei Euclidiene pe o varietate algebrică abstractă ca fiind indusă de topologiile Euclidiene pe deschișii afini pe care îi lipim, funcțiile regulate definite pe varietăți afine fiind continue și în topologia Euclidiană.

Un *morfism* între două varietăți algebrice abstracte este prin definiție un morfism în categoria spațiilor inelate locale. Analogul Teoremei 1.41 în noul context este :

Teorema 1.75 Pentru orice varietate algebrică abstractă (X, \mathcal{O}_X) și orice varietate afină V , morfismele de varietăți

$$\Phi = (\phi, \phi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (V, \mathcal{O}_V)$$

sunt în corespondență bijectivă cu morfismele de \mathbb{C} -algebre

$$\phi^\# : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

prin asocierea

$$\Phi = (\phi, \phi^\#) \mapsto \phi^\# : \mathcal{O}(V) \rightarrow \phi_*(\mathcal{O}_X)(V) = \mathcal{O}_X(X).$$

1.6 Aplicații raționale.

Am văzut că funcțiile regulate induc și determină morfismele de varietăți. La rândul lor, funcțiile raționale definesc o nouă noțiune, aceea de *aplicație rațională*.

Definiția 1.76 • Fie $V \subset \mathbb{C}^n$ și $W \subset \mathbb{C}^m$ două varietăți afine și presupunem că V este ireductibilă. O aplicație rațională ϕ de la V la W , notată $\phi : V \dashrightarrow W$, este o funcție definită pe un deschis V_0 al lui V cu valori în W și ale cărui componente $\phi_i : V_0 \rightarrow \mathbb{C}$ sunt funcții regulate pe V_0 .

- Fie (X, \mathcal{O}_X) și (Y, \mathcal{O}_Y) două varietăți algebrice abstracte, așa încât X este o varietate ireductibilă. O aplicație rațională de la X la Y , notată ca și mai înainte $\phi : X \dashrightarrow Y$, este un morfism de varietăți $\phi : (V_0, \mathcal{O}_X|_{V_0}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, unde $V_0 \subset X$ este un deschis Zariski.

Aparent, noțiunea de funcție regulată depinde de domeniul său de definiție. În practică, aceasta nu este o problemă majoră, deoarece două funcții regulate definite local care coincid pe un deschis din intersecția domeniilor lor vor coincide pe întregul deschis de intersecție. Acest fapt ne permite să extindem orice aplicație rațională pe un deschis maximal de definiție. Astfel, are sens să vorbim și de *imaginea* unei aplicații raționale. În plus, dacă acest deschis maximal coincide cu varietatea de plecare, atunci avem de-a face chiar cu un morfism de varietăți.

În cazul în care varietatea de sosire coincide cu dreapta afină \mathbb{C} , aplicațiile raționale se numesc *funcții raționale*. Ca și în cazul afin, mulțimea funcțiilor raționale pe o varietate ireductibilă (X, \mathcal{O}_X) este un corp, notat cu $K(X)$.

Compunerea a două aplicații raționale nu se poate realiza întotdeauna : de exemplu, dacă imaginea uneia este disjunctă de domeniul de definiție al celeilalte. Pentru le putea compune, avem nevoie de o condiție suplimentară :

Definiția 1.77 *O aplicație rațională $\phi : X \dashrightarrow Y$ între două varietăți ireductibile se numește dominantă, dacă imaginea sa este densă în Y .*

Este relativ ușor de văzut că această condiție de dominanță rezolvă problema bunei definirii a compunerii, în particular, orice aplicație rațională dominantă $\phi : X \dashrightarrow Y$ determină un morfism $\phi^\# : K(Y) \rightarrow K(X)$ peste \mathbb{C} între corpurile de funcții raționale. Atunci ne putem restrânge atenția numai asupra aplicațiilor raționale dominante, iar în modul acesta obținem o nouă categorie, în care obiectele sunt varietățile ireductibile, iar morfismele sunt aplicațiile raționale. Un izomorfism în această categorie se numește o *aplicație birațională*. Ca și în cazul morfismelor de varietăți, și această categorie are o contraondere algebrică :

Teorema 1.78 *Functorul contravariant $(X, \mathcal{O}_X) \mapsto K(X)$, $\phi \mapsto \phi^\#$ stabilește o echivalență de categorii între categoria în care obiectele sunt varietățile ireductibile, iar morfismele sunt aplicațiile raționale dominante și categoria corpurilor de tip finit peste \mathbb{C} . Două varietăți sunt birațional izomorfe dacă și numai dacă au corpurile de funcții raționale izomorfe peste \mathbb{C} .*

1.7 Normalitate.

Definiția 1.79 *Fie B un inel integră și $A \subset B$ un subinel.*

- *Un element $x \in B$ se numește întreg peste A dacă există un polinom monic (coeficientul dominant este inversibil) cu coeficienți în A care se anulează în x .*
- *Extinderea $A \subset B$ se numește întreagă dacă orice element din B este întreg peste A .*
- *A se numește întreg închis în B dacă orice element din B care este întreg peste A se găsește în A .*

- *Un inel integru A se numește normal dacă este întreg închis în corpul său de fracții $K(A)$; adică rădăcinile din $K(A)$ ale oricărui polinom monic cu coeficienți în A se găsesc în A .*

Exemplul 1.80 Orice inel factorial este un inel normal.

Definiția 1.81 Închiderea întregă a inelului A în corpul său de fracții este inelul

$$A' := \{x \in K(A), \text{ există } a_1, \dots, a_n \in A, \text{ a.î. } a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} + x^n = 0\}.$$

Propoziția 1.82 A' este un inel normal.

Observația 1.83 Este ușor de remarcat că intersecția a două inele normale cu același corp de fracții este tot un inel normal. Această remarcă și Observația 1.48 ne conduc împreună la următoarea :

Propoziția 1.84 *Normalitatea este o proprietate locală : A este normală dacă și numai dacă $A_{\mathfrak{m}}$ este inel normal pentru orice $\mathfrak{m} \subset R$ ideal maximal, dacă și numai dacă $A_{\mathfrak{p}}$ este inel normal pentru orice ideal prim $\mathfrak{p} \subset A$.*

Definiția 1.85 *O varietate afină ireductibilă V se numește normală dacă inelul său de coordonate affine este un inel normal.*

Observația 1.86 Din Propoziția 1.84, normalitatea unei varietăți affine V este echivalentă cu normalitatea tuturor inelelor locale $\mathcal{O}_{V,a}$.

Definiția 1.87 *O varietate abstractă ireductibilă (X, \mathcal{O}_X) se numește normală dacă pentru orice punct $x \in X$, inelul local $\mathcal{O}_{X,x}$ este un inel normal.*

Normalitatea are multe avantaje, printre care faptul că varietățile normale sunt netede în codimensiune doi, [Sa76]. Prin urmare, normalitatea poate fi văzută ca o variantă slăbită a netezimii. Chiar dacă o varietate nu este normală, ea poate fi *normalizată*.

Teorema 1.88 *Dacă V este o varietate afină ireductibilă, atunci închiderea întregă a inelului său de coordonate affine este o \mathbb{C} -algebră finit generată.*

Din acest rezultat și din Teorema de corespondență între algebre finit generate și varietăți affine deducem existența unei varietăți affine ireductibile normale V' și al unui morfism dominant $V' \rightarrow V$. Se poate arăta că acest V' satisface o proprietate de universalitate care îi asigură unicitatea. V' se numește *normalizata lui V* .

Exemplul 1.89 Inelul $\mathbb{C}[X_1, X_2]/(X_1^3 - X_2^2)$ nu este un inel normal. Într-adevăr, dacă notăm cu $V = \mathbb{V}(X_1^3 - X_2^2) \subset \mathbb{C}^2$ și x_1, x_2 funcțiile regulate pe V induse de coordonatele X_1 , respectiv X_2 , atunci în $\mathcal{O}(V)$ avem

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 - x_1 = 0,$$

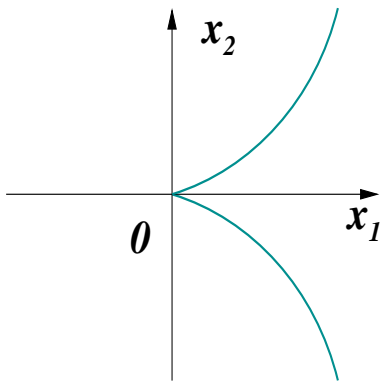


Figura 1.2: Curba cuspidală din Exemplul 1.89

ceea ce arată că elementul x_2/x_1 este întreg peste $\mathcal{O}(V)$. Cu toate acestea, $x_2/x_1 \notin \mathcal{O}(V)$, ceea ce arată că $\mathcal{O}(V)$ nu este normal.

Normalizata varietății V este dreapta afină \mathbb{C} . Pentru a vedea aceasta, procedăm în modul următor. Mai întâi, se arată că închiderea întregă a lui $\mathcal{O}(V)$ în corpul său de fracții este inelul $\mathbb{C}[x_2/x_1]$. După aceea, $\mathbb{C}[x_2/x_1] \cong \mathbb{C}[X]$ (**Exercițiu** : Completați detaliile de demonstrație începând cu ireductibilitatea lui V).

Exercițiul 1.90 Fie $V = \mathbb{V}(X_1X_2 - X_3X_4) \subset \mathbb{C}^4$. Atunci

$$\mathcal{O}(V) = \mathbb{C}[u_1u_2, u_3u_4, u_1u_3, u_2u_4] \subset \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3, u_4].$$

V este de fapt o varietate torică și vom vedea că ele sunt normale, normalitatea provenind din saturarea monoidului de definiție. Până atunci, arătați că V este ireductibilă.

1.8 Dimensiune.

Noțiunea de *dimensiune* a unei varietăți abstracte se introduce mai întâi în cazul varietăților ireductibile.

Definiția 1.91 Fie V o varietate afină. Dimensiunea lui V este

$$\dim(V) := \max\{n, \exists Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n \subset X, Z_i \text{ ireductibile}\}.$$

Deoarece toate proprietățile geometrice au o contrapondere algebrică prin intermediul Teoremei de Corespondență, este natural să ne întrebăm care este interpretarea dimensiunii. Cum subvarietățile ireductibile corespund idealelor prime, un lanț de subvarietăți va da naștere unui lanț de ideale prime. Lungimea maximă a unui astfel de lanț este *dimensiunea Krull* a inelului de coordonate. Mai mult decât atât :

Teorema 1.92 Dimensiunea unei varietăți ireductibile V coincide cu gradul de transcendență peste \mathbb{C} a corpului de fracții al lui $\mathcal{O}(V)$.

Demonstrația folosește Lema de Normalizare Noether, vezi de exemplu [AM69, pag. 69], [Hu74, VIII. Theorem 7.2] :

Teorema 1.93 (Noether) *Fie K un corp și A o K -algebră finit generată, al cărui corp de fracții $K(A)$ are gradul de transcendență n peste K . Atunci există n elemente $x_1, \dots, x_n \in A$, algebric independente peste K așa încât extinderea de inele $K[x_1, \dots, x_n] \subset A$ să fie întreagă ; în particular, extinderea de corpuri $K(x_1, \dots, x_n) \subset K(A)$ este finită.*

Iată câteva consecințe directe ale Teoremei 1.92 :

Corolarul 1.94 *Dimensiunea spațiului afin \mathbb{C}^n este n .*

Corolarul 1.95 *Dimensiunea unei varietăți afine ireductibile este egală cu dimensiunea normalizatei ei.*

Corolarul 1.96 *Dimensiunea unei varietăți afine ireductibile V este egală cu dimensiunea oricărui deschis nevid din V .*

Teorema 1.97 *Dimensiunea oricărei hipersuprafețe ireductibile din \mathbb{C}^{n+1} este egală cu n .*

Folosind din nou Teorema 1.92, Lema de Normalizare Noether și Teorema Elementului Primitiv (reamintim că lucrăm numai cu corpuri de caracteristică zero, deci orice extindere algebrică este separabilă) obținem următoarea reciprocă a Teoremei 1.97 :

Teorema 1.98 *Orice varietate ireductibilă de dimensiune n este birațional izomorfă cu o hipersuprafață din \mathbb{C}^{n+1} .*

Teorema 1.99 (Teorema dimensiunii fibrelor) *Fie $\Phi = (\phi, \phi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfism dominant de varietăți ireductibile. Atunci :*

- (i) *Pentru orice y din imaginea lui ϕ , dimensiunea fibrei lui ϕ deasupra lui y este cel puțin $\dim(X) - \dim(Y)$.*
- (ii) *Există un deschis Zariski nevid în Y cu proprietatea că dimensiunea fibrei deasupra fiecărui punct al său este exact $\dim(X) - \dim(Y)$.*

1.9 Spațiul tangent afin.

Spațiul tangent este un invariant local fundamental al unei varietăți, deoarece el caracterizează netezimea într-un punct. În cadrul algebric, spațiul tangent este definit prin analogie cu cazul varietăților diferențiabile. Deoarece varietățile abstracte sunt obținute din varietățile afine prin lipiri locale, va trebui să definim mai întâi spațiul tangent la o varietate afină.

Fixăm $I = (P_1, \dots, P_m) \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un ideal radical, definim $V = \mathbb{V}(P_1, \dots, P_m)$ și considerăm $a \in V$ un punct ; în particular, $P_j \in \mathfrak{m}_{V,a} \subset \mathcal{O}(V)$ pentru orice j .

Introducem *spațiul tangent afin* în a la varietatea V . Așa cum îi spune numele, acesta este o varietate liniară afină în \mathbb{C}^n . Intuitiv, spațiul tangent afin este reuniunea dreptelor din \mathbb{C}^n care trec prin a și sunt tangente la V . Evident, va trebui precizat ce înseamnă o dreaptă tangentă la V .

Fie $a \neq x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ un alt punct și considerăm dreapta (complexă) L_x care trece prin a și x ; aceasta are o reprezentare parametrică de tipul :

$$\mathbb{C} \ni t \mapsto tx + (1 - t)a \in \mathbb{C}^n.$$

Intersecția dreptei L_x cu V este mulțimea :

$$\{y = tx + (1 - t)a, P_j(y) = 0 \forall j\}.$$

Definim polinoamele în $(n + 1)$ variabile

$$F_j(X, t) := P_j(tX + (1 - t)a) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, t],$$

unde $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Condiția de tangență a unei drepte L_x cu varietatea V este aceea că L_x intersec-tează V în a în două puncte confundate, ceea ce se traduce prin :

$$\frac{\partial F_j}{\partial t}(x, 0) = 0, \forall j.$$

Aplicând formula de derivare a funcțiilor compuse, observăm că

$$\frac{\partial F_j}{\partial t}(x, 0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(a)(x_i - a_i),$$

de unde obținem *ecuațiile spațiului tangent afin* :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(a)(X_i - a_i) = 0, \forall j = 1, \dots, m.$$

Propoziția 1.100 *Definiția spațiului tangent afin nu depinde de alegerea generatorilor idealului $\mathbb{I}(V)$.*

Demonstrație. Alegem polinom $f \in \mathbb{I}(V)$ arbitrat și un punct $a \in V$. Dacă $\mathbb{I}(V) = (P_1, \dots, P_m)$, atunci există polinoamele P_j așa încât

$$f = \sum_{i=1}^m Q_i P_i$$

și atunci, folosind relațiile $P_j(a) = 0$, obținem

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a)(X_i - a_i) = \sum_{j=1}^m P_j(a) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(a)(X_i - a_i) \right).$$

□

Observația 1.101 Spațiul tangent afin la varietatea V în punctul a este un subspațiu afin al lui \mathbb{C}^n . Printr-o translație a lui a în origine $X \mapsto X - a$, imaginea spațiului tangent afin devine un subspațiu vectorial al lui \mathbb{C}^n (spațiul director al spațiului tangent afin), ale cărui ecuații sunt :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(a) X_i = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Spațiul tangent afin împreună cu structura suplimentară de spațiu vectorial indusă de bijecția (obținută prin translație) cu spațiul său director se numește *spațiul tangent în a la V* și se notează $T_a V$.

Exemplul 1.102 1. $V = \mathbb{C}^n$, atunci pentru orice $a \in \mathbb{C}^n$, avem $T_a \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$.

2. $V = \mathbb{V}(Y - X^2) \subset \mathbb{C}^2$, avem $T_0 V = V(X) \subset \mathbb{C}^2$.

3. $V = \mathbb{V}(X^2 - Y^3) \subset \mathbb{C}^2$, avem $T_0 V = \mathbb{C}^2$.

1.10 Diferențiale și spațiul tangent Zariski.

Definim mai întâi diferențiala unui polinom.

Definiția 1.103 Pentru orice polinom $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ și pentru orice punct $a \in \mathbb{C}^n$, definim diferențiala lui f în a ca fiind polinomul de grad 1, $d_a f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$:

$$d_a f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a) (X_i - a_i).$$

Observația 1.104 Dacă f este de gradul 1, atunci $d_a f = f + f(a)$.

Observația 1.105 Ecuațiile spațiului tangent afin la varietatea afină $\mathbb{V}(P_1, \dots, P_m) \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ se scriu simplificat :

$$d_a P_1 = \dots = d_a P_m = 0.$$

Observația 1.106 $d_a f$ este termenul de gradul 1 din dezvoltarea lui f conform formulei lui Taylor :

$$f(X) = f(a) + d_a f + \text{termeni de grad } \geq 2,$$

mai precis, dacă f este de grad d , atunci

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_n^{\alpha_n}}(a) (X_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (X_n - a_n)^{\alpha_n}.$$

Exercițiu : Demonstrați formula lui Taylor. Indicație : polinoamele

$$\{(X_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (X_n - a_n)^{\alpha_n}\}_{|\alpha| \leq d}$$

formează o bază în spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult d .

Considerăm în continuare o varietate afină $V = \mathbb{V}(P_1, \dots, P_m) \subset \mathbb{C}^n$ și $a \in V$. Am definit mai sus diferențiala unui polinom în n variabile ca fiind un polinom în n variabile. Dacă pornim cu o funcție regulată pe varietatea V , atunci schimbând reprezentării săi, diferențialele lor, chiar privite ca funcții regulate pe V sunt diferite (**Exercițiu** : găsiți un exemplu). Cu alte cuvinte, aplicația \mathbb{C} -liniară

$$d_a : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$$

nu induce în general o aplicație :

$$d_a : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(V).$$

Totuși, se arată relativ ușor, ca în demonstrația Propoziției 1.100 că diferențiala unei funcții regulate pe V este bine definită ca funcție regulată pe $T_a V$, adică aplicația de diferențiere induce o aplicație \mathbb{C} -liniară :

$$d_a : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(T_a V), f \mapsto (d_a f)|_{T_a V}.$$

Mai mult, pentru orice funcție regulată $f \in \mathcal{O}(V)$, diferențiala sa $(d_a f)|_{T_a V}$ privită ca funcție regulată de la $T_a V$ la \mathbb{C} este o aplicație \mathbb{C} -liniară, altfel spus, $d_a f \in (T_a V)^\vee$. Obținem deci o aplicație \mathbb{C} -liniară :

$$d_a : \mathcal{O}(V) \rightarrow (T_a V)^\vee.$$

Propoziția 1.107 d_a induce un izomorfism

$$\mathfrak{m}_{V,a}/\mathfrak{m}_{V,a}^2 \xrightarrow{\sim} (T_a V)^\vee.$$

Demonstrație. Presupunem de la început că $\mathbb{I}(V) = (P_1, \dots, P_m)$.

Arătăm ca restricția aplicației de diferențiere

$$d_a : \mathfrak{m}_{V,a} \rightarrow (T_a V)^\vee$$

este surjectivă și că nucleul său coincide cu $\mathfrak{m}_{V,a}^2$.

Surjectivitatea. Orice funcție regulată pe $T_a V$ este indusă de un polinom f de gradul 1 în n variabile. Liniaritatea are drept consecință $f(a) = 0$. Atunci f induce o funcție regulată pe V care se află în $\mathfrak{m}_{V,a}$ și a cărei diferențială coincide cu ea însăși.

Arătăm $\ker(d_a) \supset \mathfrak{m}_{V,a}^2$. Elementele din $\mathfrak{m}_{V,a}^2$ sunt sume de produse de tipul $f \cdot g$ cu $f, g \in \mathfrak{m}_{V,a}$. Folosim formula de derivare a unui produs (**Exercițiu** : demonstrați-o) :

$$d_a(f \cdot g) = g(a) \cdot d_a f + f(a) \cdot d_a g.$$

Arătăm $\ker(d_a) \subset \mathfrak{m}_{V,a}^2$. Alegem un reprezentant $F \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ al lui f și presupunem că $f \in \mathfrak{m}_{V,a}$ cu $d_a f \equiv 0$ ca funcție regulată pe $T_a V$. Atunci $d_a F$ aparține idealului care definește $T_a V$, adică

$$d_a F \in (d_a P_1, \dots, d_a P_m).$$

Din motive de grad, există $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ așa încât

$$d_a F = \sum_{j=1}^m \lambda_j d_a P_j.$$

Este evident că polinoamele F și $F - \sum \lambda_j P_j$ definesc aceeași funcție regulată f pe V , pe de altă parte

$$d_a(F - \sum \lambda_j P_j) = 0$$

și $F(a) = 0$ ceea ce înseamnă că primii doi termeni din dezvoltarea conform formulei lui Taylor, Observația 1.106, a lui $F - \sum \lambda_j P_j$ sunt nuli, deci

$$F - \sum \lambda_j P_j \in (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)^2 \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n],$$

deci

$$f \in \mathfrak{m}_{V,a}^2 \subset \mathcal{O}(V).$$

□

Definiția 1.108 Spațiul vectorial $(\mathfrak{m}_{V,a}/\mathfrak{m}_{V,a}^2)^\vee$ se numește spațiul tangent Zariski al lui V în punctul a .

Observația 1.109 Avantajul de a lucra cu spațiul tangent Zariski este faptul că este definit de o manieră intrinsecă, ce nu depinde de scufundarea lui V într-un spațiu afin anume. În particular, ne arată ca dimensiunea spațiului tangent este un invariant local al varietății.

Definiția 1.110 Fie (X, \mathcal{O}_X) o varietate algebrică abstractă și $a \in X$ un punct. Spațiul tangent la X în a este spațiul vectorial $T_a X := (\mathfrak{m}_{X,a}/\mathfrak{m}_{X,a}^2)^\vee$.

Observația 1.111 În definiția precedentă, dacă a aparține unui deschis afin V , atunci $T_a X \cong T_a V$.

Propoziția 1.112 Pentru orice punct a dintr-o varietate algebrică ireductibilă X , avem $\dim(T_a X) \geq \dim(X)$, iar egalitatea dimensiunilor este realizată pe un deschis Zariski nevid din X .

Demonstrație. Este suficient să arătăm concluzia în cazul în care X este o varietate afină. Considerăm varietatea de incidență :

$$\{(a, x) \in V \times \mathbb{C}^n, x \in T_a V\} \subset V \times \mathbb{C}^n$$

și proiecțiile p_1 și p_2 pe V , respectiv, pe \mathbb{C}^n . Deoarece p_1 este surjectivă, iar fibrele sale sunt spațiile tangente afine, ecuațiile spațiilor tangente ne arată că imaginea lui p_2 este închisă în \mathbb{C}^n . Din Teorem Dimensiunii Fibrelor 1.99, deducem că funcția $a \mapsto \dim(T_a V)$ este superior semicontinuă ; în particular, valoarea minimă este atinsă pe un deschis Zariski din V . Arătăm că această valoare minimă coincide cu dimensiunea varietății. Grație ireductibilității lui V și a Teoremei 1.98, putem

presupune deja că V este o hipersuprafață din \mathbb{C}^n . Scriem $V = \mathbb{V}(P)$, cu $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ și $T_a V = \mathbb{V}(d_a P)$. Din Teorema Idealului Principal a lui Krull 1.97, rezultă $\dim(V) = n - 1$. În cazul în care $d_a P \neq 0$, $T_a V$ este la rândul său o hipersuprafață, deci dimensiunea sa este $n - 1$, iar dacă $d_a P = 0$ atunci $T_a V$ coincide cu \mathbb{C}^n deci este de dimensiune n . Dimensiunea spațiilor tangente este deci cel puțin egală cu dimensiunea lui V . Pentru a termina demonstrația, remarcăm că pentru a dintr-un deschis nevid din V avem $d_a P \neq 0$. Într-adevăr, dacă am avea $d_a P \equiv 0$ pentru orice $a \in V$, atunci derivatele parțiale $\partial P / \partial X_i$ ale lui P ar fi identic nule pe V , deci ar aparține idealului generat de P , ceea ce este imposibil, din motive de grad. \square

Definiția 1.113 *Un punct $a \in X$ dintr-o varietate algebrică se numește neted dacă $\dim(T_a X) = \dim(X)$. Punctele care nu sunt netede se numesc puncte singulare. Varietatea X se numește netedă dacă nu are puncte singulare.*

Propoziția 1.114 *Inelul local $\mathcal{O}_{X,a}$ al unui punct neted $a \in X$ este un inel factorial.*

Corolarul 1.115 *Orice varietate netedă este o varietate normală.*

Capitolul 2

Noțiuni de Geometrie Convexă.

Geometria Convexă are drept obiect principal de studiu corpurile poliedrale în dimensiune arbitrară, prin aceasta cuprinzând poligoanele (în dimensiune doi). Geometria Torică lucrează exclusiv cu obiecte convexe ale căror vârfuri au coordonate întregi. Pentru rezultate optimale, este recomandat ca notele de curs să fie scrise pe foi de caiet de matematică.:-)

2.1 Conuri Poliedrale.

O varietate torică va fi construită, așa cum vom vedea, din *evantaie*, care sunt mulțimi de conuri convexe de un tip anume. De aceea, trebuie mai întâi să studiem aceste conuri. Vom fixa de la început un spațiu vectorial real de dimensiune finită E . Noțiunile folosite vor fi în general independente de alegerea unei baze, de aceea vom putea presupune de multe ori că E este direct spațiul \mathbb{R}^n . Pentru a elimina orice confuzie posibilă, precizăm ca *închișii* și *deschișii* cu care vom lucra sunt închișii și deschișii din topologia Euclidiană.

Definiția 2.1 O submulțime $\sigma \subset E$ se numește convexă dacă pentru orice $v, w \in \sigma$ și pentru orice $0 \leq \lambda \leq 1$, avem $\lambda v + (1 - \lambda)w \in \sigma$.

Observația 2.2 Definiția ne spune că pentru orice două puncte conținute în σ , segmentul determinat de ele este complet conținut în σ .

Exemplul 2.3 O bilă din \mathbb{R}^n , $B(0, R) := \{v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \leq R\}$ este o mulțime convexă.

Exemplul 2.4 O mulțime cu cel puțin două componente conexe nu este o mulțime convexă.

Observația 2.5 Orice mulțime A din E este conținută într-o submulțime convexă minimală a lui E , numită *acoperirea convexă a lui A* , și definită prin :

$$\text{conv}(A) := \left\{ v = \sum \lambda_j v_j, \lambda_j \geq 0, v_j \in A \text{ pentru orice } j \text{ și } \sum \lambda_j = 1 \right\}.$$

Definiția 2.6 O submulțime $\sigma \subset E$ se numește con dacă pentru orice $v \in \sigma$, și orice scalar pozitiv $\lambda > 0$, avem $\lambda v \in \sigma$.

Exemplul 2.7 O semidreaptă $\mathbb{R}_+ \cdot x$, unde $x \in E$, este un con.

Exemplul 2.8 Mulțimea

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 < x_3^2\}$$

este un con. Este de asemenea un deschis în \mathbb{R}^3 . Închiderea sa este tot un con, obținut prin transformarea inegalității stricte " $<$ " în " \leq ".

Exemplul 2.9 O mulțime mărginită σ din \mathbb{R}^n este un con dacă și numai dacă $\sigma = \{0\}$.

Observația 2.10 Un con $\sigma \subset E$ este o mulțime convexă dacă și numai dacă pentru orice $v, w \in \sigma$ și orice doi scalari $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, avem $\alpha v + \beta w \in \sigma$.

Definiția 2.11 Fie $\{e_1, \dots, e_m\} \subset E$ o mulțime finită de vectori nenuli. Conul generat de $\{e_1, \dots, e_m\}$ este mulțimea

$$\sigma(e_1, \dots, e_m) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \lambda_i \geq 0 \right\} \subset E.$$

O mulțime $\sigma \subset E$ se numește un con poliedral dacă există $\{e_1, \dots, e_m\} \subset E$ astfel încât $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$. Vectorii e_1, \dots, e_m se numesc generatorii conului σ .

Propoziția 2.12 Orice con poliedral este un con.

Demonstrație. Se aplică direct definiția. □

Propoziția 2.13 Orice con poliedral este o mulțime convexă.

Demonstrație. Se aplică direct definiția. □

Vom arăta că un con poliedral este o mulțime închisă, în contrast cu conurile definite la modul general, care nu sunt neapărat închise (vezi exemplul de mai sus).

Teorema 2.14 (Carathéodory) Fie $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$ un con poliedral și $v \in \sigma$. Atunci există $I \subset \{1, \dots, m\}$ astfel încât $(e_i)_{i \in I}$ este o mulțime liniar independentă și $v \in \sigma((e_i)_{i \in I})$.

Demonstrație. Din definiție, putem scrie v ca o combinație liniară cu coeficienți pozitivi de vectori dintre e_1, \dots, e_m . Putem alege această combinație ca având numărul minim de vectori, cu alte cuvinte alegem $I \subset \{1, \dots, m\}$ astfel încât :

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i,$$

cu $\lambda_i > 0$ pentru $i \in I$, și v nu poate fi scris ca o combinație liniară cu coeficienți pozitivi de $\text{card}(I) - 1$ dintre vectorii e_1, \dots, e_m .

Pentru simplitate, presupunem că $I = \{e_1, \dots, e_s\}$. Arătăm că mulțimea $(e_i)_{i \in I}$ este liniar independentă. Într-adevăr, în caz contrar, există $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}$, nu toți zero, astfel încât

$$\sum_{i=1}^s \mu_i e_i = 0.$$

Înmulțind eventual identitatea de mai sus cu -1 , putem presupune că o parte dintre coeficienții μ_i sunt strict pozitivi. După o renumerotare, putem presupune în plus că

$$\frac{\mu_s}{\lambda_s} = \max \left\{ \frac{\mu_i}{\lambda_i}, i = \overline{1, s} \right\}$$

Atunci

$$\mu_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} - \frac{\lambda_s}{\mu_s} \right) \geq 0, \forall i = \overline{1, s}$$

(dacă $\mu \geq 0$, atunci afirmația rezultă din alegerea făcută; dacă $\mu \leq 0$ atunci expresia este pozitivă, ca produs de două numere negative). Calculăm

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i e_i - \lambda_s \sum_{i=1}^{s-1} \frac{\mu_i}{\mu_s} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} \mu_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} - \frac{\lambda_s}{\mu_s} \right) e_i. \end{aligned}$$

Aceasta contrazice presupunerea făcută asupra minimalității lui I . □

Definiția 2.15 *Un con poliedral se numește simplicial dacă este generat de o mulțime liniar independentă de vectori.*

Exemplul 2.16 Conul generat în \mathbb{R}^3 de vectorii $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ nu este simplicial.

Exercițiul 2.17 Orice con poliedral în \mathbb{R}^2 este simplicial.

Corolarul 2.18 *Orice con poliedral este o reuniune finită de conuri simpliciale.*

Demonstrație. Scriem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m) \subset E$. Din Teorema lui Carathéodory rezultă că :

$$\sigma = \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, m\} \\ (e_i)_{i \in I} \text{ lin. indep.}}} \sigma((e_i)_{i \in I}).$$

□

Propoziția 2.19 *Orice con simplicial este o mulțime închisă în E .*

Demonstrație. Scriem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m) \subset E$, cu vectorii e_1, \dots, e_m liniar independenți. Atunci avem un izomorfism liniar

$$\text{Span}(e_1, \dots, e_m) \rightarrow \mathbb{R}^m, \sum \lambda_i e_i \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

conul σ fiind preimaginea mulțimii închise

$$\{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \lambda_i \geq 0, \forall i\} \subset \mathbb{R}^m$$

Cum spațiul generat de e_1, \dots, e_m este o mulțime închisă în E , rezultă că σ este o mulțime închisă în E . \square

Corolarul 2.20 *Orice con poliedral este o mulțime închisă.*

Definiția 2.21 *Dimensiunea unui con poliedral $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m) \subset E$ este dimensiunea celui mai mic subspațiu vectorial din E în care σ este conținut. Echivalent,*

$$\dim(\sigma) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Span}(e_1, \dots, e_m)).$$

2.2 Conuri Duale. Teorema lui Farkas.

Începem mai întâi prin a reminti câteva noțiuni din algebra liniară.

Definiția 2.22 *Notăm cu E^\vee sau $\check{E} := \{u : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ liniară}\}$ spațiul dual al lui E . Un element din \check{E} se numește funcțională liniară. Considerăm $\langle \cdot, \cdot \rangle : \check{E} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ aplicația biliniară naturală $(u, v) \mapsto u(v)$.*

Definiția 2.23 *Fie $u \in \check{E} \setminus \{0\}$. Definim hiperplanul ortogonal :*

$$u^\perp := \ker(u) = \{v \in E, \langle u, v \rangle = 0\} \subset E;$$

Convenție. Pe parcursul acestui Capitol vom lucra numai cu hiperplane care trec prin origine, adică subspații liniare proprii de codimensiune 1 în E . Mai târziu vom lucra și cu hiperplane afine, care sunt obținute din hiperplane liniare prin translații. Pentru a nu îngreuna prea mult terminologia, hiperplanele liniare vor fi numite simplu *hiperplane*. Aceeași convenție se va aplica și pentru *semi-spații* (un semi-spațiu fiind una din componentele conexe ale complementarei unui hiperplan).

Observația 2.24 *Orice hiperplan din E este de forma u^\perp , pentru un $u \in \check{E} \setminus \{0\}$. Elementul u nu este unic, dar orice u' care definește același hiperplan diferă de u printr-un scalar, adică $u' = \lambda u$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Un hiperplan împarte spațiul E în două componente conexe. Este convenabil să gândim din nou în termeni de nuclee ale funcționalelor liniare.

Definiția 2.25 Fie $u \in \check{E} \setminus \{0\}$. Definim semi-spațiile :

1. $u_{\geq 0} := \{v \in E, \langle u, v \rangle \geq 0\} \subset E$. (semi-spațiu închis).
2. $u_{> 0} := \{v \in E, \langle u, v \rangle > 0\} \subset E$. (semi-spațiu deschis).
3. $u_{\leq 0} := \{v \in E, \langle u, v \rangle \leq 0\} \subset E$. (semi-spațiu închis).
4. $u_{< 0} := \{v \in E, \langle u, v \rangle < 0\} \subset E$. (semi-spațiu deschis).

Cu notațiile de mai sus, cele două componente conexe ale lui $E \setminus u^\perp$ sunt $u_{> 0}$ și $u_{< 0}$.

Definiția 2.26 Fie $u \in \check{E}$, $u \neq 0$. Doi vectori $v, w \in E$ sunt de aceeași parte a hiperplanului u^\perp dacă $\langle u, v \rangle \cdot \langle u, w \rangle \geq 0$. O mulțime de vectori v_1, \dots, v_m se află de aceeași parte a lui u^\perp dacă oricare ar fi i, j , vectorii v_i și v_j se află de aceeași parte a lui u^\perp .

Lema 2.27 Fie $v_1, \dots, v_m \in E$ o mulțime de vectori aflați de aceeași parte a unui hiperplan u^\perp . Atunci există un hiperplan u_0^\perp , unde $0 \neq u_0 \in \check{E}$, și există $i \in \{1, \dots, m\}$ așa încât v_1, \dots, v_m se află de aceeași parte a lui u_0^\perp și $v_i \in u_0^\perp$.

Demonstrație. Alegem o normă euclidiană pe E și presupunem, prin normalizare, că vectorii sunt unitari. Înlocuind le nevoie u cu $-u$ putem presupune că $v_i \in u_{\geq 0}$. Prin renumerotare putem de asemenea presupune că $\langle u, v_1 \rangle = \max\{\langle u, v_i \rangle\}$. Atunci compunem u cu inversa rotației care transformă v_1 într-un vector coliniar cu proiecția sa pe u^\perp ($\langle u, v_1 \rangle$ este lungimea proiecției lui v_1 pe u^\perp). Dacă u_0 este această nouă aplicație liniară, atunci u_0 satisface toate condițiile cerute. \square

Observația 2.28 Lema 2.27 se aplică evident pentru o mulțime de vectori al cărui număr depășește dimensiunea spațiului ambient. Dacă $m \leq n$, atunci ipoteza inițială ca vectorii să se afle de o parte a unui hiperplan este automat satisfăcută, deoarece există un hiperplan care să conțină $m - 1$ dintre ei.

Revenim acum la geometria convexă.

Definiția 2.29 Dacă σ este un con convex în E , atunci definim conul dual :

$$\check{\sigma} := \{u \in \check{E}, \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}.$$

Câteodată, pentru a evita confuziile, conul dual va fi notat cu σ^\vee .

Cu notațiile de mai sus, condiția $u \in \check{\sigma}$ este echivalentă cu $\sigma \subset u_{\geq 0}$. În definiția de mai sus, am admis și funcționala nulă ca aparținând mulțimii $\check{\sigma}$.

Propoziția 2.30 $\check{\sigma}$ este un con convex închis.

Demonstrație. Convexitatea se verifică direct din definiție. Pentru a demonstra faptul că $\check{\sigma}$ este închis, presupunem că $u_n \rightarrow u$ este un șir convergent, cu $\langle u_n, v \rangle \geq 0$ pentru orice $v \in \sigma$; trecând la limită obținem $\langle u, v \rangle \geq 0$ pentru orice $v \in \sigma$, adică $u \in \check{\sigma}$. \square

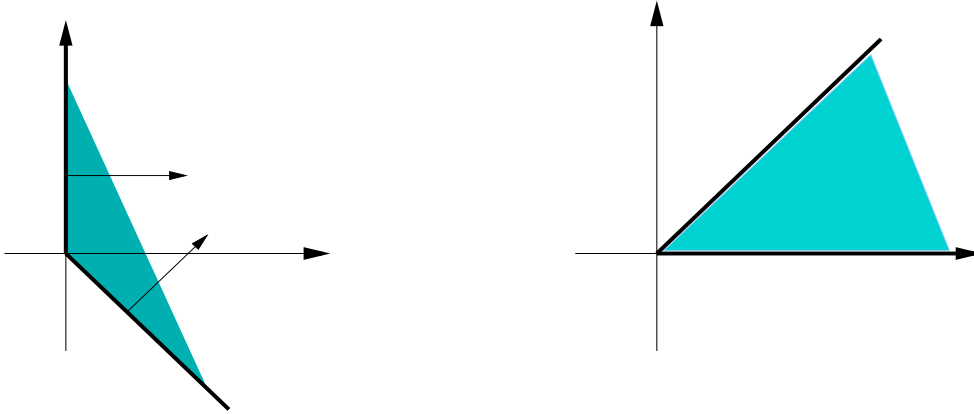


Figura 2.1: Conuri Duale

Vom demonstra că dacă σ este în plus poliedral, atunci $\check{\sigma}$ este și el poliedral. Acest rezultat, cunoscut sub numele de Teorema lui Farkas, este o consecință a unui alt rezultat mai general care ne spune că orice con poliedral n -dimensional este o intersecție de semi-spății. Obținem astfel o nouă descriere a conurilor poliedrale de dimensiune maximă, la fel de naturală ca și definiția în sine, ca fiind intersecții finite de semi-spății. Ne vom concentra asupra acestei Teoreme pentru restul Secțiunii. Totul va fi bazat următorul rezultat fundamental din geometria convexă, pe care îl enunțăm fără demonstrație (o demonstrație completă poate fi găsită, de exemplu, în [Ro70]).

Teorema 2.31 (Teorema de Dualitate) *Fie σ un con închis convex, și $v \notin \sigma$. Atunci există $u \in \check{\sigma}$ astfel încât $\langle u, v \rangle < 0$.*

Enunțul Teoremei de Dualitate poate fi reformulat astfel, [Ro70, Theorem 14.1, p.121] :

$$(\check{\sigma})^\vee = \sigma.$$

Teorema de Dualitate se aplică evident conurilor poliedrale, pentru că am demonstrat în secțiunea precedentă că sunt conuri închise. În cazul conurilor poliedrale, se poate da o demonstrație directă, mult simplificată.

Demonstrația Teoremei de Dualitate pentru Conuri Poliedrale. Scriem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m) \subset E$. Vrem să arătăm că există $u \in \check{E}$ astfel încât :

$$\begin{cases} \langle u, e_i \rangle \geq 0, \forall i = 1, \dots, m, \\ \langle u, v \rangle < 0. \end{cases}$$

Distingem două cazuri :

Cazul 1. $v \notin \text{Span}(e_1, \dots, e_m)$.

În acest caz, există un hiperplan care conține $\text{Span}(e_1, \dots, e_m)$ și nu conține v , deci există $u \in \check{E}$ astfel încât $\langle u, e_i \rangle = 0$ și $\langle u, v \rangle \neq 0$. Înlocuind eventual u cu $-u$, putem presupune $\langle u, v \rangle < 0$.

Cazul 1. $v \in \text{Span}(e_1, \dots, e_m)$.

În acest caz, raționăm prin inducție după m . Pentru $m = 1$, avem $v = \lambda_1 e_1$ cu $\lambda_1 < 0$, alegem $u \in \check{E}$, $u = -\langle v, \cdot \rangle$, unde de data aceasta $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar pe E .

Pasul de inducție $(m - 1) \Rightarrow m$. Avem $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$ și nu toți λ_i sunt nenegativi. Printr-o renumerotare, putem presupune că $\lambda_1 < 0$. Afirmăm că există $u_0 \in \check{E}$ astfel încât :

$$\begin{cases} \langle u_0, e_i \rangle \geq 0, \forall i = 1, \dots, m - 1, \\ \langle u_0, v \rangle < 0. \end{cases}$$

Într-adevăr, ori $v \notin \text{Span}(e_1, \dots, e_{m-1})$ și atunci aplicăm Cazul 1, ori $v \in \text{Span}(e_1, \dots, e_{m-1})$, dar $v \notin \sigma(e_1, \dots, e_{m-1})$ și atunci aplicăm ipoteza de inducție.

Dacă $\langle u_0, e_m \rangle \geq 0$, atunci u_0 este elementul din \check{E} căutat. Presupunem deci că $\langle u_0, e_m \rangle < 0$.

Definim vectorii următori :

$$\begin{cases} \varepsilon_i = e_i + \mu_i e_m, \forall i = 1, \dots, m - 1, \\ w = v + \mu_0 e_m, \end{cases}$$

unde

$$\begin{cases} \mu_i = -\frac{\langle u_0, e_i \rangle}{\langle u_0, e_m \rangle}, \forall i = 1, \dots, m - 1, \\ \mu_0 = -\frac{\langle u_0, v \rangle}{\langle u_0, e_m \rangle}. \end{cases}$$

Să observăm că $w \notin \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1})$. Într-adevăr, dacă

$$w = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i \varepsilon_i,$$

cu $\gamma_i \geq 0$, atunci

$$v = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i e_i + \left(\sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i \mu_i - \mu_0 \right) e_m \in \sigma(e_1, \dots, e_m)$$

ceea ce este absurd. Din ipoteza de inducție, există $u' \in \check{E}$ cu :

$$\begin{cases} \langle u', \varepsilon_i \rangle \geq 0, \forall i = 1, \dots, m, \\ \langle u', w \rangle < 0. \end{cases}$$

Definim atunci

$$u = u' - \frac{\langle u', e_m \rangle}{\langle u_0, e_m \rangle} u_0$$

și calculăm

$$\begin{aligned} \langle u, e_i \rangle &= \langle u', \varepsilon_i \rangle \geq 0, \\ \langle u, e_m \rangle &= 0, \\ \langle u, v \rangle &= \langle u', w \rangle, \end{aligned}$$

ceea ce arată că u este elementul căutat. □

Definiția 2.32 Fie σ un con poliedral. O față τ a lui σ este o intersecție a lui σ cu un hiperplan față de care σ se află de aceeași parte : $\tau = \sigma \cap u^\perp$, pentru un element $u \in \check{\sigma}$. Conul σ este privit ca față a sa. Toate celelalte fețe $\tau \neq \sigma$ se numesc fețe proprii.

Lema 2.33 Orice față a unui con poliedral este un con poliedral.

Demonstrație. Scriem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$. Fie $u \in \check{\sigma}$. Demonstrăm că

$$\sigma \cap u^\perp = \sigma(\{e_1, \dots, e_m\} \cap u^\perp).$$

Incluziunea $\sigma \cap u^\perp \supset \sigma(\{e_1, \dots, e_m\} \cap u^\perp)$ este evidentă.

Pentru incluziunea directă, considerăm $v = \sum_i \lambda_i e_i \in \sigma \cap u^\perp$. Atunci

$$\left\langle u, \sum \lambda_i e_i \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_i \lambda_i \langle u, e_i \rangle = 0.$$

Dar $\lambda_i \geq 0$ și $\langle u, e_i \rangle \geq 0$ pentru orice i , în particular $\lambda_i \langle u, e_i \rangle = 0$ pentru toți i . Rezultă că $\lambda_i = 0$ dacă $\langle u, e_i \rangle \neq 0$. \square

Observația 2.34 Din Demonstrația Lemei 2.33 rezultă că un con poliedral are un număr finit de fețe.

Lema 2.35 O față τ a lui σ este proprie dacă și numai dacă $\dim(\tau) < \dim(\sigma)$.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că $\dim(\tau) < \dim(\sigma)$ pentru o față proprie, implicația reciprocă fiind evidentă. Ca în Lema 2.33, lucrăm cu generatorii e_1, \dots, e_m conului σ . Presupunând că $\tau = \sigma \cap u^\perp$ pentru $u \in \check{\sigma}$, τ este generat de acei e_i care se găsesc în u^\perp . Fața τ fiind proprie, există un i pentru care $e_i \notin u^\perp$. Atunci

$$e_i \notin \text{Span}(\{e_1, \dots, e_m\} \cap u^\perp),$$

deci $\text{Span}(\{e_1, \dots, e_m\} \cap u^\perp) \subsetneq \text{Span}(e_1, \dots, e_m)$ \square

Lema 2.36 Dacă σ nu este subspațiu liniar, atunci σ are cel puțin o față proprie.

Demonstrație. Înlocuind E cu spațiul generat de σ , putem presupune că $\dim(\sigma) = n$ și $\sigma \neq E$. Din Teorema de Dualitate rezultă că $\check{\sigma} \neq \{0\}$. \square

Lema 2.37 O intersecție de fețe este o față.

Demonstrație. Dacă $u_1, u_2 \in \check{\sigma}$, atunci rezultă direct din definiție că

$$\sigma \cap u_1^\perp \cap u_2^\perp = \sigma \cap (u_1 + u_2)^\perp.$$

(suma a două numere pozitive nu poate fi zero decât ambele numere sunt zero). \square

Lema 2.38 *O față a unei fețe este o față.*

Demonstrație. Scriem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$. Fie $u_1 \in \check{\sigma}$ un element nenul, $\tau = \sigma \cap u_1^\perp$ față definită de u_1 , $u_2 \in \check{\tau}$ și $\eta = \tau \cap u_2^\perp$ față lui τ definită de u_2 . Pentru orice număr pozitiv k suficient de mare demonstrăm că

$$u_3 := ku_1 + u_2 \in \check{\sigma}$$

și

$$\eta = \sigma \cap u_3^\perp.$$

Pentru prima afirmație, este suficient să arătăm că

$$\langle ku_1 + u_2, e_i \rangle \geq 0,$$

pentru generatorii e_i ai lui σ . Dacă $\langle u_1, e_i \rangle = 0$, atunci $e_i \in \tau$ și deci $\langle u_2, e_i \rangle \geq 0$. Dacă $\langle u_1, e_i \rangle > 0$, atunci putem alege k astfel încât $\langle ku_1 + u_2, e_i \rangle > 0$. Generatorii fiind în număr finit, prima afirmație este demonstrată.

Demonstrăm a doua afirmație prin dublă incluziune. Incluziunea $\tau \cap u_2^\perp \subset \sigma \cap u_3^\perp$ fiind evidentă rămâne să arătăm $\tau \cap u_2^\perp \supset \sigma \cap u_3^\perp$. Fie

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \text{ unde } \lambda_i \geq 0, \text{ pentru orice } i,$$

un element din $\sigma \cap u_3^\perp$. Din egalitatea

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \langle u_3, e_i \rangle = 0$$

și din $u_3 \in \check{\sigma}$ obținem $\langle u_3, e_i \rangle = 0$ pentru orice i cu $\lambda_i \neq 0$. Deoarece am ales $k \gg 0$ așa încât $\langle u_3, e_i \rangle > 0$ pentru $e_i \notin \tau$, deducem că dacă $\lambda_i \neq 0$ atunci $e_i \in \tau$, ceea ce implică $x \in \tau$. Mai departe, obținem $\langle u_1, x \rangle = 0$ și $x \in u_2^\perp$. \square

Definiția 2.39 *O față τ a lui σ este o față de codimensiune 1, i.e. $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$.*

Lema 2.40 *Orice față proprie este conținută într-o față.*

Demonstrație. Fie $\tau = \sigma \cap u^\perp \subsetneq \sigma$ o față proprie, unde $u \in \check{\sigma}$. Demonstrăm că τ este conținută într-o față prin inducție după codimensiunea lui τ . Dacă τ este de codimensiune 1, atunci este o față și nu mai avem nimic de demonstrat.

Presupunem că τ este de codimensiune cel puțin 2. În acest caz, arătăm că τ este conținută într-o față τ' cu $\dim(\tau') > \dim(\tau)$. Scriem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$. Înlocuind E cu $\text{Span}(e_1, \dots, e_m)$, dacă este nevoie, putem presupune că

$$\text{Span}(e_1, \dots, e_m) = E,$$

i.e. $\dim(\sigma) = n$. Pentru simplitate, presupunem că $\{e_1, \dots, e_m\} \cap u^\perp = \{e_1, \dots, e_s\}$. Din Demonstrația Lemei 2.33, $\tau = \sigma(e_1, \dots, e_s)$. Notăm $F := \text{Span}(e_1, \dots, e_s)$ și \widehat{e}_i clasele vectorilor e_i în E/F , pentru $i \in \{s+1, \dots, m\}$. Atunci u definește o aplicație liniară $\widehat{u} \in (E/F)^\vee$, astfel încât $\langle \widehat{u}, \widehat{e}_i \rangle > 0, \forall i \in \{s+1, \dots, m\}$. Deoarece $\text{codim}(\tau) \geq 2$, rezultă că $\dim(E/F) \geq 2$, deci $\dim(\widehat{u}^\perp) \geq 1$. Vectorii $\widehat{e}_{s+1}, \dots, \widehat{e}_m$ se găsesc de aceeași parte a hiperplanului \widehat{u}^\perp , fără a fi conținuți în \widehat{u}^\perp . Din Lema 2.27, există un hiperplan în E/F astfel încât $\widehat{e}_{s+1}, \dots, \widehat{e}_m$ se găsesc de aceeași parte a sa și care în plus conține cel puțin unul dintre vectorii $\widehat{e}_{s+1}, \dots, \widehat{e}_m$. Cu alte cuvinte, există $\widehat{\omega} \in (E/F)^\vee$ și $i \in \{s+1, \dots, m\}$, astfel încât $\widehat{e}_{s+1}, \dots, \widehat{e}_m \in \widehat{\omega}_{\geq 0}$ și $\widehat{e}_i \in \widehat{\omega}^\perp$. Mai departe, obținem $\omega \in \check{\sigma}$, astfel încât $\tau \subset \omega^\perp$ și $e_i \in \omega^\perp$. Atunci $\sigma \cap \omega^\perp$ este o față care conține τ , strict mai mare decât τ . \square

Corolarul 2.41 *Mulțimea fațetelor este nevidă.*

Lema 2.42 *Orice față proprie este intersecția fațetelor care o conțin.*

Demonstrație. Procedăm prin inducție după codimensiune. În codimensiune 1, aplicăm Lema 2.35. Presupunem că τ este o față de codimensiune cel puțin 2. Din Lema 2.40, τ este conținută într-o față γ . Atunci, din ipoteza de inducție aplicată pentru $\tau \subset \gamma$, τ este intersecție de fațete ale lui γ , iar fiecare dintre acestea este intersecția unei fațete din σ cu γ . \square

Lema 2.43 *Dacă $\dim(\sigma) = n$, atunci frontiera topologică a lui σ în E este reuniunea fețelor (sau fațetelor) proprii.*

Demonstrație. Pentru incluziunea directă fie v un punct pe frontiera lui σ . Atunci există un șir $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset E \setminus \sigma$ care converge la v . Din Teorema de Dualitate, rezultă că există un șir de funcționale $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \check{\sigma}$, astfel încât

$$\langle u_i, v_i \rangle < 0, \forall i. \quad (2.1)$$

Prin normalizare, putem presupune că toate u_i sunt de normă 1. Cum sfera din \check{E} este o mulțime compactă, deducem că putem găsi un subșir al lui $\{u_i\}_i$ convergent la o funcțională $u_0 \in \check{E}$. Trecând la limită în relația (2.1) obținem $\langle u_0, v \rangle \leq 0$. Dar $\check{\sigma}$ este un con convex închis, Propoziția 2.30, ceea ce implică $u_0 \in \check{\sigma}$. În particular $\langle u_0, v \rangle \geq 0$. Deci $v \in \sigma \cap u_0^\perp$. Am arătat că frontiera este conținută în reuniunea fețelor. Pentru a demonstra că frontiera este inclusă în reuniunea fațetelor, aplicăm Lema 2.40.

Pentru incluziunea reciprocă, să remarcăm mai întâi că interiorul lui σ este nevid. Într-adevăr, scriem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$, cu $\text{Span}(e_1, \dots, e_m) = E$; după o numerotare putem presupune că $\{e_1, \dots, e_n\}$ formează o bază în E . Atunci mulțimea combinațiilor liniare de forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ cu $\lambda_i > 0 \forall i$, formează o mulțime deschisă în E care este complet conținută în σ . Fie $\tau = \sigma \cap u^\perp$ o față a lui σ , $v \in \tau$ și

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \sigma, \lambda_i > 0 \forall i$$

un punct interior. Deoarece o față este conținută în hiperplanul u^\perp , rezultă că intersecția segmentului determinat de v și w (care este complet conținut în σ , din convexitate) consistă doar în punctul v . În plus toate punctele de pe acest segment, cu excepția lui v , sunt puncte interioare : dacă $v = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ cu $\mu_i \geq 0$, și $0 < \lambda \leq 1$, atunci

$$\lambda w + (1 - \lambda)v = \sum_{i=1}^n ((1 - \lambda)\mu_i + \lambda\lambda_i) e_i$$

are toți coeficienții strict pozitivi. Aceasta arată că v este limita unui șir de puncte interioare. De asemenea, conectând v printr-un segment cu un vector din $u_{<0}$, putem arăta că v este limita unui șir din $u_{<0} \subset E \setminus \sigma$. Rezultă că v aparține frontierei lui σ . \square

Observația 2.44 În cazul general, renunțând la condiția $\dim(\sigma) = n$, putem enunța un rezultat similar folosind *frontiera relativă* a lui σ , în locul frontierei topologice, i.e. frontiera lui σ în spațiul generat de el. Complementara frontierei relative a lui σ în σ se numește *interiorul relativ* al lui σ și se notează $\text{relint}(\sigma)$. Atunci obținem :

$$\text{relint}(\sigma) = \sigma \setminus \left(\bigcup_{\tau \subsetneq \sigma \text{ față}} \tau \right).$$

Teorema 2.45 Dacă $\sigma \neq E$ și $\dim(\sigma) = n$, notând $\tau_1 = \sigma \cap u_1^\perp, \dots, \tau_q = \sigma \cap u_q^\perp$ fațetele lui σ , unde $u_i \in \check{\sigma}, \forall i$, atunci

$$\sigma = (u_1)_{\geq 0} \cap \dots \cap (u_q)_{\geq 0}.$$

Demonstrație. Incluziunea directă este evidentă.

Arătăm că $(u_1)_{\geq 0} \cap \dots \cap (u_q)_{\geq 0} \subset \sigma$. Presupunem prin absurd că v este un punct în intersecție, dar nu aparține lui σ . Fie w un punct interior al lui σ . Unim v și w printr-un segment. Atunci acest segment va intersecta frontiera lui σ într-un punct $x = \lambda v + (1 - \lambda)w$, $0 < \lambda < 1$. Atunci x se găsește pe o față a lui σ , Lema 2.43, deci există $i \in \{1, \dots, q\}$ astfel încât $\langle u_i, x \rangle = 0$. Pe de altă parte, $v \in (u_i)_{\geq 0}$, deci $\langle u_i, v \rangle \geq 0$. Din Lema 2.43, avem $\langle u_i, w \rangle > 0$. Or, în acest caz, am avea $0 = \langle u_i, x \rangle = \lambda \langle u_i, v \rangle + (1 - \lambda) \langle u_i, w \rangle > 0$, contradicție. \square

Corolarul 2.46 Orice con poliedral (nu neapărat de dimensiune maximă) diferit de E este intersecția unui număr finit de semi-spații.

Demonstrație. Fie $F \subset E$ spațiul generat de conul poliedral σ . Din Teorema 2.45, avem

$$\sigma = (u_1)_{\geq 0} \cap \dots \cap (u_q)_{\geq 0},$$

unde $u_i \in \check{F}$. Dacă W este un complement algebric al lui F în E , putem prelungi fiecare u_i la o funcțională pe E , care se anulează pe W . Atunci formula de mai sus rămâne valabilă. \square

Am ajuns la rezultatul principal al acestei secțiuni.

Teorema 2.47 (Farkas) *Dacă σ este un con poliedral, atunci și $\check{\sigma}$ este un con poliedral.*

Demonstrație. În cazul în care $\sigma = E$, obținem $\check{\sigma} = \{0\}$, care este un con poliedral. Presupunem deci $\sigma \neq E$. Din Corolarul 2.46, putem scrie

$$\sigma = (u_1)_{\geq 0} \cap \cdots \cap (u_q)_{\geq 0},$$

unde $u_i \in \check{E}$. Conul generat de $\{u_1, \dots, u_q\}$ în \check{E} este un con poliedral. Din definiția conului dual, avem relația următoare :

$$\check{\sigma}(u_1, \dots, u_q) = \{v \in E, \langle u_i, v \rangle \geq 0, \forall i\} = (u_1)_{\geq 0} \cap \cdots \cap (u_q)_{\geq 0},$$

deci $\check{\sigma} = \check{\sigma}(u_1, \dots, u_q)$. Din Teorema de Dualitate, deducem că

$$\check{\sigma} = \sigma(u_1, \dots, u_q).$$

□

De asemenea, direct din Demonstrația Teoremei lui Farkas, obținem :

Propoziția 2.48 *Fie $u_1, \dots, u_q \in \check{E} \setminus \{0\}$. Atunci $(u_1)_{\geq 0} \cap \cdots \cap (u_q)_{\geq 0}$ este un con poliedral.*

În conjuncție cu Teorema 2.45, Propoziția precedentă ne permite să formulăm o definiție echivalentă a conurilor poliedrale :

Definiția 2.49 *Un con poliedral este o intersecție finită de semi-spații închise.*

În procedeul practic de construcție al unui con dual cu ajutorul Teoremei lui Farkas plecăm de la fațetele lui σ și determinăm generatorii conului dual. Pentru fețele de codimensiune superioară putem proceda de o manieră similară pentru a descrie toate fețele conului dual. Vom folosi următoarea definiție :

Definiția 2.50 *Fie τ o față a lui σ . Notăm*

$$\tau^\perp := \{u \in \check{E}, \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in \tau\}.$$

Propoziția 2.51 *Fie τ o față a lui σ . Atunci $\tau^* := \check{\sigma} \cap \tau^\perp$ este o față a conului dual $\check{\sigma}$ cu $\dim(\tau) + \dim(\check{\sigma} \cap \tau^\perp) = n$. Corespondența $\tau \mapsto \check{\sigma} \cap \tau^\perp$ stabilește o bijecție (descrescătoare față de relația de ordine dată de incluziune) între fețele lui σ și fețele lui $\check{\sigma}$.*

Demonstrație. Fie $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m) \subset E$ și considerăm $v_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$, cu $\lambda_i > 0$ un punct din interiorul relativ. Atunci $\tau^\perp = \check{\tau} \cap v_0^\perp$, ceea ce implică $\tau^* = \check{\sigma} \cap (\check{\tau} \cap v_0^\perp)$, deci $\tau^* = \check{\sigma} \cap v_0^\perp$, ($\check{\tau} \supset \check{\sigma}$). Prin urmare, τ^* este o față a lui $\check{\sigma}$.

Să arătăm mai întâi că această asociere este bijectivă. Pentru o față $\check{\sigma} \cap v_0^\perp$ a lui $\check{\sigma}$, cu $v_0 \in \sigma = (\check{\sigma})^\vee$, considerăm τ cea mai mică față a lui σ care conține v_0 . Atunci v_0 este în interiorul relativ al lui τ , deci $\tau^\perp = \check{\tau} \cap v_0^\perp$ și $\tau^* = \check{\sigma} \cap v_0^\perp$; în particular, fața $\check{\sigma} \cap v_0^\perp$ este de forma căutată.

Corespondența $\tau \mapsto \tau^*$ este deci o aplicație surjectivă de la fețele lui σ la fețele lui $\check{\sigma}$, în particular

$$\text{card}\{\text{fețe în } \sigma\} \geq \text{card}\{\text{fețe în } \check{\sigma}\}.$$

Înlocuind σ cu $\check{\sigma}$ și aplicând Teorema de Dualitate obținem și

$$\text{card}\{\text{fețe în } \check{\sigma}\} \geq \text{card}\{\text{fețe în } \sigma\},$$

deci cele două numere sunt egale și funcția $\tau \mapsto \tau^*$ este bijectivă.

Este clar că dacă $\tau_1 \subset \tau_2$, atunci $\tau_2^* \subset \tau_1^*$. Pentru a arăta că $\dim(\tau) + \dim(\tau^*) = n$, considerăm un lanț

$$\tau = \tau_0 \subsetneq \dots \subsetneq \tau_\ell = \sigma$$

de fețe ale lui σ astfel încât τ_i este o fațetă a lui τ_{i+1} ; rezultă și că $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - \ell$. Aplicând $-*$, obținem

$$\tau^* = \tau_0^* \supsetneq \dots \supsetneq \tau_\ell^* = \sigma^*,$$

iar incluziunile sunt stricte, deoarece aplicația $-*$ este bijectivă. De asemenea, τ_{i+1}^* este o fațetă a lui τ_i^* , altfel τ_{i+1}^* ar fi conținută într-o fațetă τ'^* , ceea ce înseamnă că $\tau_i \subsetneq \tau' \subsetneq \tau_{i+1}$, absurd. Deci $\dim(\tau^*) = \ell + \dim(\sigma^*)$. Dar $\sigma^* = \check{\sigma} \cap \sigma^\perp = \sigma^\perp$, rezultă că $\dim(\tau^*) = n - \dim(\tau)$. \square

În Propoziția de mai sus, nu trebuie să confundăm τ^* cu conul dual al lui τ . În primul rând, τ^* este o față a lui $\check{\sigma}$, pe când $\check{\tau}$ conține $\check{\sigma}$. Mai precis :

Propoziția 2.52 *Dacă $u \in \check{\sigma}$ și $\tau = \sigma \cap u^\perp$, atunci*

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_+^* \cdot (-u).$$

Demonstrație. Datorită Teoremei de Dualitate, este suficient să arătăm că dualele lor coincid. Calculăm

$$(\check{\sigma} + \mathbb{R}_+^* \cdot (-u))^\vee = \{v \in E, \langle \omega + \lambda \cdot (-u), v \rangle \geq 0, \forall \omega \in \check{\sigma}, \forall \lambda > 0\},$$

deci

$$(\check{\sigma} + \mathbb{R}_+^* \cdot (-u))^\vee = \sigma \cap u^\perp = \tau,$$

unde mai sus am mai aplicat odată Teorema de Dualitate și am folosit faptul că $u \in \check{\sigma}$, deci $\sigma \cap (-u)_{\geq 0} = \sigma \cap (-u)^\perp$. \square

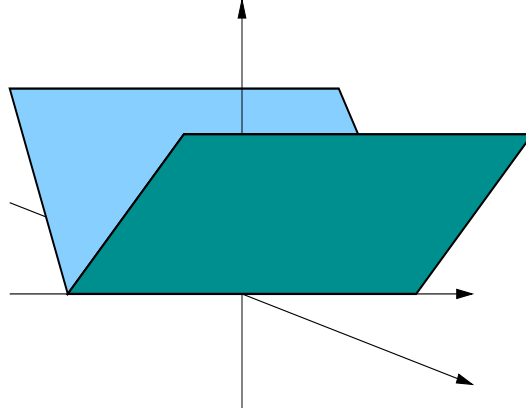


Figura 2.2: Con care nu este ascuțit ; Exercițiul 2.55.

2.3 Conuri Ascuțite.

Condiția de convexitate în sens strict, care definește conurile ascuțite este o condiție asupra subspațiilor liniare conținute într-un con poliedral σ . Un subspațiu liniar $L \subset E$ care este complet conținut în σ va fi conținut în orice față a lui σ . Într-adevăr, fie $u \in \check{\sigma}$ și $v \in L \subset \sigma$. Atunci $\langle u, v \rangle \geq 0$, din definiție. Dar $-v \in L \subset \sigma$, deci $\langle u, -v \rangle \geq 0$.

Lema 2.53 $\sigma \cap (-\sigma)$ este cel mai mare subspațiu conținut în σ .

Definiția 2.54 Un con poliedral $\sigma \subset E$ se numește ascuțit sau strict convex dacă $\sigma \cap (-\sigma) = 0$.

Exercițiul 2.55 Determinați conul dual al conului $\sigma(e_1 + e_3, -e_1 + e_3, e_2, -e_2)$. Se observă că $\check{\sigma}$ este de dimensiune doi.

Fenomenul apărut în exercițiul precedent nu este întâmplător.

Lema 2.56 $\sigma \subset E$ este ascuțit dacă și numai dacă $\dim(\check{\sigma}) = n$.

Demonstrație. Avem $\dim(\check{\sigma}) = n$ dacă și numai dacă $\dim(\check{\sigma})^* = 0$ dacă și numai dacă $(\check{\sigma})^* = 0$. Dar $(\check{\sigma})^* = \sigma \cap (-\sigma)$. \square

Exemplul 2.57 Un con simplicial este ascuțit.

Exemplul 2.58 O față a unui con ascuțit este un con ascuțit.

O proprietate foarte utilă a conurilor ascuțite este faptul că îi putem determina o mulțime minimală de generatori.

Definiția 2.59 O rază a unui con poliedral este o față de dimensiune unu.

Propoziția 2.60 Fie $\sigma \neq 0$ un con poliedral ascuțit și fie $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ razele lui σ . Dacă $e_i \in \tau_i \setminus \{0\}$, pentru orice $i = 1, \dots, m$, atunci $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$, iar $\{e_1, \dots, e_m\}$ este o mulțime minimală de generatori, în sensul că orice altă mulțime de generatori trebuie să conțină și multipli $\{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_m e_m\}$, cu $\lambda_i > 0$.

Demonstrație. Fiecare e_i se găsește în interiorul relativ al lui τ_i și atunci $\tau_i^* = \check{\tau}_i \cap e_i^\perp$. Mai mult, din complementaritatea dimensiunilor și din faptul că σ este ascuțit, rezultă că τ_i^* este o fațetă a lui $\check{\sigma}$ pentru orice i . Din Propoziția 2.51, deducem că $\tau_1^*, \dots, \tau_m^*$ sunt toate fațetele lui $\check{\sigma}$.

Din Teorema 2.45, avem

$$\check{\sigma} = \bigcap_{i=1}^m (e_i)_{\geq 0},$$

iar din demonstrația Teoremei lui Farkas obținem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$.

Presupunem acum $\sigma = \sigma(e'_1, \dots, e'_k)$. Deoarece τ_i este o față a lui σ , ea este generată, ca și con poliedral, de acei e'_j pe care îi conține. Dar τ_i este de dimensiune 1, deci fiecare dintre e'_j este un multiplu de un element e_i . \square

Observația 2.61 Putem spune că un con ascuțit este generat de razele sale.

Observația 2.62 Chiar dacă la început nu pornim cu un con ascuțit, în multe situații ne putem reduce la cazul conurilor ascuțite prin procedeul clasic de factorizare. Dacă $\sigma \subset E$ este un con poliedral și $L = \sigma \cap (-\sigma)$ este cea mai mică față a sa, atunci imaginea lui σ în spațiul cât $(\sigma + L)/L \subset E/L$ este un con ascuțit. Mai mult, fețele lui σ sunt în corespondență bijectivă cu fețele lui $(\sigma + L)/L$ prin aplicația $\tau \mapsto (\tau + L)/L$.

Aplicând demonstrația Teoremei lui Farkas și observația că dualul unei raze este de fapt un semi-spațiu, obținem :

Corolarul 2.63 Dacă σ este ascuțit, atunci

$$\check{\sigma} = \bigcap_{i=1}^m \check{\tau}_i,$$

unde τ_1, \dots, τ_m sunt razele lui σ .

2.4 Construcția Practică a Conurilor Duale.

Așa cum am văzut, un sistem minimal de generatori ai unui con poliedral ascuțit este determinat de razele sale. Acest fapt de poate aplica pentru dualul unui con $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m) \subset E$ de dimensiune n . Razele lui $\check{\sigma}$ sunt în corespondență bijectivă, prin intermediul Propoziției 2.51, cu fațetele lui σ , care sunt $(n - 1)$ -dimensionale. Acest scurt raționament ne conduce la următorul procedeu practic de determinare al unui con dual :

Pasul 1. Se identifică $(n-1)$ -uplurile $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-1}}\}$ de vectori liniar independenți dintre generatorii $\{e_1, \dots, e_m\}$ ai lui σ .

Pasul 2. Pentru un astfel de $(n-1)$ -uplu $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-1}}\}$ se găsește un element $u \in \check{E} \setminus \{0\}$ astfel încât, pentru orice $k = 1, \dots, n-1$, să avem $\langle u, e_{i_k} \rangle = 0$.

Pasul 3. Dacă $\langle u, e_i \rangle \geq 0$ pentru orice $i = 1, \dots, m$, atunci $\sigma \cap u^\perp$ este o fațetă a lui σ și u definește o rază, deci un generator al lui $\check{\sigma}$. Se alege un alt $(n-1)$ -uplu și se trece la Pasul 2.

Pasul 4. Dacă $\langle u, e_i \rangle \leq 0$ pentru orice $i = 1, \dots, m$, atunci $\sigma \cap (-u)^\perp$ este o fațetă a lui σ și $(-u)$ definește o rază, deci un generator al lui $\check{\sigma}$. Se alege un alt $(n-1)$ -uplu și se trece la Pasul 2.

Pasul 5. Dacă $\langle u, e_i \rangle$ ia semne diferite, atunci $(n-1)$ -uplul $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-1}}\}$ este ignorat. Se alege un alt $(n-1)$ -uplu și se trece la Pasul 2.

Algoritmul este sintetizat în Figura 2.3.

Exemplul 2.64 Fie $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ baza canonică, $\{\check{e}_1, \check{e}_2\} \subset \check{\mathbb{R}}^2$ baza duală și $\sigma = \sigma(e_1, e_2)$. Atunci $\check{\sigma} = \sigma(\check{e}_1, \check{e}_2)$.

Exemplul 2.65 Fie $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ baza canonică, $\{\check{e}_1, \check{e}_2\} \subset \check{\mathbb{R}}^2$ baza duală și $\sigma = \sigma(e_2, -e_1 - e_2)$. Atunci $\check{\sigma} = \sigma(\check{e}_1, -\check{e}_1 + \check{e}_2)$.

Exemplul 2.66 Fie $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ baza canonică, $\{\check{e}_1, \check{e}_2\} \subset \check{\mathbb{R}}^2$ baza duală și $\sigma = \sigma(e_1, -e_1 - e_2)$. Atunci $\check{\sigma} = \sigma(-\check{e}_2, \check{e}_1 - \check{e}_2)$.

Exemplul 2.67 Fie $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ baza canonică, $\{\check{e}_1, \check{e}_2\} \subset \check{\mathbb{R}}^2$ baza duală și $\sigma = \sigma(e_1, e_1 + e_2)$. Atunci $\check{\sigma} = \sigma(\check{e}_2, \check{e}_1 - \check{e}_2)$.

Exemplul 2.68 Fie $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ baza canonică, $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \check{e}_3\} \subset \check{\mathbb{R}}^3$ baza duală și $\sigma = \sigma(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$. Atunci $\check{\sigma} = \sigma(\check{e}_1, \check{e}_2, \check{e}_3, \check{e}_1 + \check{e}_2 - \check{e}_3)$.

În exemplele de mai sus, σ și $\check{\sigma}$ au același număr de generatori. Totuși, nu întotdeauna se întâmplă acest lucru :

Exemplul 2.69 (Fulton) Fie $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset \mathbb{R}^4$ baza canonică, $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \check{e}_3, \check{e}_4\} \subset \check{\mathbb{R}}^4$ baza duală și fie vectorii, pentru $i = 1, \dots, 4$,

$$\varepsilon_i = -e_i + 2 \sum_{j \neq i} e_j.$$

Considerăm $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_4, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4)$. Atunci σ este un con ascuțit cu $\{e_1, \dots, e_4, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4\}$ un sistem minimal de generatori, iar un sistem minimal de generatori pentru $\check{\sigma}$ este mulțimea cu 12 elemente :

$$\{2\check{e}_i + \check{e}_j, i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4, i \neq j\}.$$

(Exercițiu. Scrieți detaliile.)

2.5 Conuri Poliedrale Raționale.

Definiția 2.70 • O latică N este un grup abelian finit generat fără torsiune.

- Latică duală a unei latici N este latică $\check{N} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$.
- Spațiul generat de o latică N este spațiul vectorial real $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.
- Latică naturală $N = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ se numește latică canonică din \mathbb{R}^n .

Observația 2.71 Incluziunea $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ induce o incluziune canonică $N \subset N_{\mathbb{R}}$, care în cazul laticii canonice din \mathbb{R}^n este incluziunea inițială $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Observația 2.72 Dacă M este latică duală a unei latici N , atunci avem o identificare naturală: $M_{\mathbb{R}} = (N_{\mathbb{R}})^{\vee}$.

Observația 2.73 Aplicația biliniară $\langle \cdot, \cdot \rangle : \check{N}_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ se restrânge la o aplicație:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \check{N} \times N \rightarrow \mathbb{Z}$$

Definiția 2.74 Fie σ un con poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$.

- σ se numește rațional (relativ la N), sau con în latică N dacă există $e_1, \dots, e_m \in N$ astfel încât $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$.
- σ se numește regulat dacă este ascuțit și dacă este generat de o parte a unei baze din N peste \mathbb{Z} .

Propoziția 2.75 Dacă $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ este un con poliedral rațional, atunci orice față a lui σ este un con rațional, iar dualul său este de asemenea un con rațional (relativ la \check{N}).

Demonstrație. Dacă $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$ cu $e_i \in N$, iar τ este o față a lui σ , stim că τ , ca și con poliedral, este generat de acei e_i care sunt conținuți în τ , Lema 2.33.

Pentru a arăta raționalitatea lui $\check{\sigma}$, presupunem mai întâi că $\dim(\sigma) = n$, i.e. σ este ascuțit. Atunci $\check{\sigma}$ este generat de elemente nenule din razele sale. Or, razele lui $\check{\sigma}$ corespund fațetelor lui σ care sunt conuri raționale, o rază fiind deci de forma $\mathbb{R} \cdot u$ cu $\sigma \cap u^{\perp}$ fațetă. Cum u este ortogonal pe $(n-1)$ vectori liniar independenți cu coordonate întregi, semidreapta $\mathbb{R} \cdot u$ conține un punct cu coordonate raționale, al cărui multiplu va avea coordonate întregi.

Dacă $\dim(\sigma) < n$, notăm cu $F = \text{Span}(e_1, \dots, e_m)$ și cu W un complement algebric al lui F în $N_{\mathbb{R}}$, care să fie generat la rândul său de vectori din N . Existența lui W este obținută considerând mai întâi un complement algebric al spațiului generat de vectorii e_1, \dots, e_m în $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ și tensorându-l apoi peste \mathbb{Q} cu \mathbb{R} . Atunci obținem $\check{\sigma} = \check{W} + ((\sigma + W)/W)^{\vee}$. \square

Propoziția 2.76 *Dacă $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ este un con regulat, atunci orice față a sa este un con regulat și dualul său este de asemenea un con regulat.*

Demonstrație. Pentru prima afirmație, remarcăm că un con este regulat dacă și numai dacă mulțimea generatorilor minimali ai razelor sale poate fi completată la o bază din $N_{\mathbb{R}}$, iar o față τ este generată de razele lui σ care sunt conținute în τ . A doua afirmație reiese direct din definiția conului dual. \square

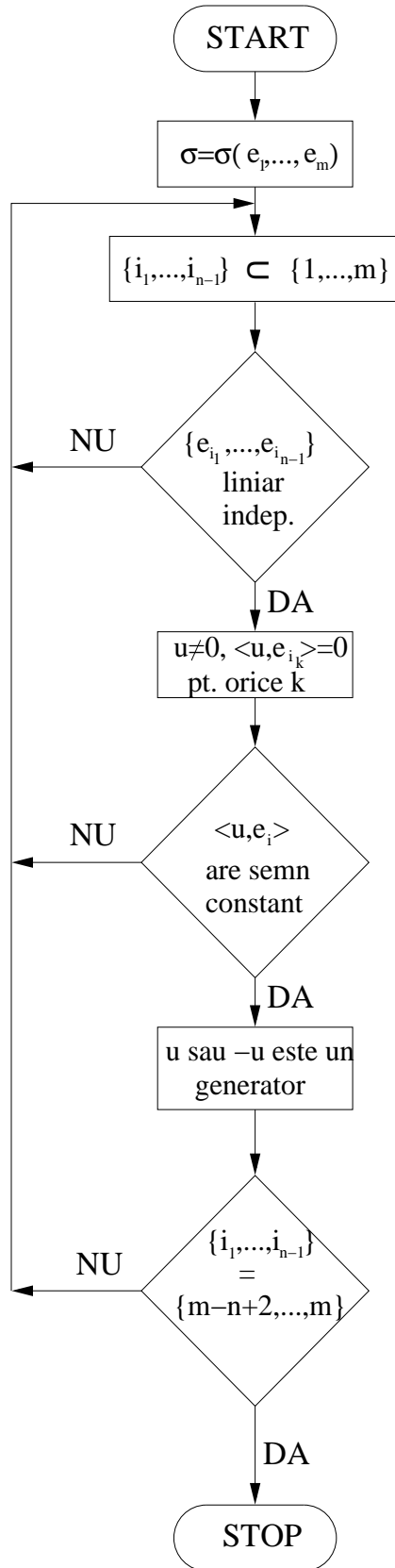


Figura 2.3: Construcția Conului Dual.

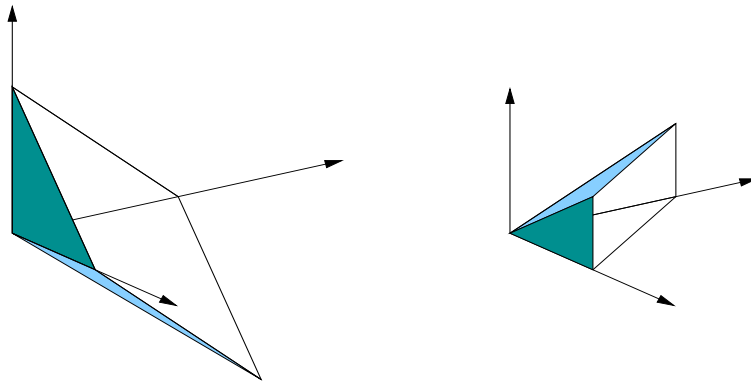


Figura 2.4: Conurile $\tilde{\sigma}$ și σ din Exemplul 2.68

Capitolul 3

Varietăți Torice Afine.

BLABLA (PENDING)

3.1 Spațiul Afîn Reîncărcat.

Să începem cu următoarele două exemple :

Exemplul 3.1 Considerăm spațiul afîn \mathbb{C}^n . Inelul său de coordonate afine este $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. O bază a lui $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ ca și \mathbb{C} -spațiu vectorial este formată din monoame : $X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$, unde $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$. Evident, multiplicarea monoamelor comută cu exponenții

$$(X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) \cdot (X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) = X_1^{i_1+j_1} \dots X_n^{i_n+j_n},$$

cu alte cuvinte există un izomorfism de monoizi χ între \mathbb{N}^n și baza lui $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ peste \mathbb{C} :

$$\chi : u = (i_1, \dots, i_n) \mapsto \chi^u = X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}, \quad \forall u \in \mathbb{N}^n,$$

cu

$$\chi^u \cdot \chi^{u'} = \chi^{u+u'}, \quad \forall u, u' \in \mathbb{N}^n.$$

Exemplul 3.2 Considerăm torul algebric n -dimensional $T_n = (\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$. Inelul său de coordonate afine este

$$\mathcal{O}(T_n) = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}] = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}].$$

O bază a lui $\mathcal{O}(T_n)$ peste \mathbb{C} este formată din monoame Laurent : $X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$, unde $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$, cu proprietatea binecunoscută

$$(X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) \cdot (X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) = X_1^{i_1+j_1} \dots X_n^{i_n+j_n},$$

de unde obținem izomorfism de monoizi χ între \mathbb{Z}^n și baza lui $\mathcal{O}(T_n)$ peste \mathbb{C} :

$$\chi : u = (i_1, \dots, i_n) \mapsto \chi^u = X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}, \quad \forall u \in \mathbb{Z}^n,$$

cu

$$\chi^u \cdot \chi^{u'} = \chi^{u+u'}, \quad \forall u, u' \in \mathbb{Z}^n.$$

Putem spune fără a greși că $\mathcal{O}(T_n)$ este generat ca spațiu vectorial complex de \mathbb{Z}^n , așa cum $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ este generat, ca spațiu vectorial, de \mathbb{N}^n .

Exercițiul 3.3 Repetați descrierea de mai sus în cazul unui produs de tipul $\mathbb{C}^n \times T_k$.

O varietate torică afină este obținută într-un mod similar. Deoarece varietățile afine sunt complet determinate de inelele lor de coordonate, este suficient să le precizăm generatorii peste \mathbb{C} și legea de multiplicare a lor.

3.2 \mathbb{C} -Algebra Asociată unui Monoid.

Reamintim că un *monoid* $(S, +)$ este o mulțime înzestrată cu o operație asociativă, comutativă și cu element neutru 0, un morfism de monoizi fiind o aplicație care comută cu operațiile și care transportă elementul neutru al domeniului în elementul neutru al codomeniului.

Definiția 3.4 Oricărui monoid S i se asociază o \mathbb{C} -algebră $\mathbb{C}[S]$ numită algebra monoidală, definită astfel :

- Ca spațiu vectorial complex, $\mathbb{C}[S]$ este generat de S .
- Elementele bazei lui $\mathbb{C}[S]$ peste \mathbb{C} sunt notate cu χ^u pentru orice $u \in S$ și sunt numite monoame.
- Multiplicarea a două elemente din bază este definită ca $\chi^{u_1} \cdot \chi^{u_2} = \chi^{u_1+u_2}$.
- Elementul unitate este $1 = \chi^0$.

În cazul în care monoidul S este chiar grup, atunci algebra monoidală se numește algebra grupală.

Observația 3.5 Aplicația $(S, +) \rightarrow (\mathbb{C}[S], \cdot)$, $u \mapsto \chi^u$ este un morfism injectiv de monoizi.

Lema 3.6 Dacă S și S' sunt doi monoizi, iar $\varphi : S \rightarrow S'$ este un morfism de monoizi, atunci φ induce un morfism de algebre $\mathbb{C}[S] \rightarrow \mathbb{C}[S']$. Această asociere este injectivă, adică avem o aplicație injectivă

$$\text{Hom}_{\text{Mon}}(S, S') \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[S], \mathbb{C}[S']),$$

care, în plus, păstrează injectivitatea și surjectivitatea morfismelor.

Direct din proprietatea de universalitate a produsului tensorial obținem următoarea :

Lema 3.7 Dacă S și S' sunt doi monoizi, atunci

$$\mathbb{C}[S \times S'] \cong \mathbb{C}[S] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S'].$$

Exemplul 3.8 1. Dacă $S = 0$, atunci $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}$.

2. Dacă $S = \mathbb{N}^n$, atunci $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

3. Dacă $S = \mathbb{Z}^n$, atunci $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$.

4. Fie $S = \mathbb{N} \setminus \{1\} \subset \mathbb{N}$ monoidul generat de 2 și 3. Atunci

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[X_1, X_2]/(X_1^3 - X_2^2).$$

În exemplele precedente, am considerat monoizi finit generați. Interesul pentru acești monoizi este legitim, deoarece ei produc algebre finit generate :

Lema 3.9 *Dacă S este finit generat, atunci $\mathbb{C}[S]$ este \mathbb{C} -algebră finit generată.*

Demonstrație. Deoarece S este finit generat, există un morfism surjectiv $\mathbb{N}^m \rightarrow S$, iar în continuare aplicăm Lema 3.6. \square

3.3 Monoizi Asociați Conurilor.

Considerăm N o latice de rang n , $M = \check{N}$ laticea duală și $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un con poliedral rațional.

Definiția 3.10 *Definim monoidul asociat lui σ ca fiind monoidul aditiv : $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M \subset M \subset M_{\mathbb{R}}$.*

O proprietate remarcabilă a monoizilor asociați conurilor este următoarea :

Lema 3.11 (Gordan) *S_σ este un monoid finit generat.*

Demonstrație. Am arătat că dualul unui con poliedral rațional este rațional. Atunci putem scrie $\check{\sigma} = \sigma(u_1, \dots, u_m) \subset M_{\mathbb{R}}$, cu $u_i \in M$. Mulțimea

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i, \lambda_i \in [0, 1], \forall i \right\}$$

este o mulțime compactă, deci $K \cap M$ este o mulțime finită.

Demonstrăm că S_σ este generat de $K \cap M$. Într-adevăr, dacă $u \in S_\sigma$, atunci

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i$$

cu $\lambda_i \geq 0$. Descompunem λ_i în părțile întregi și fracționare : $\lambda_i = [\lambda_i] + \{\lambda_i\}$ și atunci

$$u = \sum_{i=1}^m [\lambda_i] u_i + \sum_{i=1}^m \{\lambda_i\} u_i$$

este o combinație de elemente din $K \cap M$ cu coeficienți naturali. \square

Monoidul S_σ sunt ceea ce se numește un *monoid întreg saturat* :

Definiția 3.12 • *Un monoid întreg este un submonoid finit generat $S \subset M$ al unei latici M .*

- *Dacă S este un monoid întreg, atunci definim grupul generat de S ca fiind $S^{\text{gp}} := S + (-S) \subset M$.*
- *Dacă S este un monoid întreg, atunci definim saturatul lui S ca fiind*

$$S^{\text{sat}} := \{u \in S^{\text{gp}}, \text{ există } m \in \mathbb{N}, m \cdot u \in S\} \subset S^{\text{gp}} \subset M.$$

- *Un monoid întreg S se numește saturat dacă $S = S^{\text{sat}}$.*

Observația 3.13 Se arată că, în definiția de mai sus, S^{gp} este o latice, iar S^{sat} este un monoid. Mai mult, $S \subset S^{\text{sat}} \subset S^{\text{gp}}$, $(S^{\text{sat}})^{\text{sat}} = S^{\text{sat}}$, iar $(S^{\text{sat}})^{\text{gp}} = S^{\text{gp}}$. Orice incluziune $S' \subset S$ induce incluziuni naturale $(S')^{\text{gp}} \subset S^{\text{gp}}$ și $(S')^{\text{sat}} \subset S^{\text{sat}}$.

Exercițiul 3.14 Arătați că un monoid S_σ asociat unui con poliedral rațional este un monoid saturat. În plus, dacă σ este ascuțit, atunci $S^{\text{gp}} = M$.

Propoziția 3.15 *Fie $S \subset M$ un monoid întreg și fie $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ conul poliedral rațional al cărui dual este conul generat de S , i.e. $\sigma := \sigma(S)^\vee$. Atunci $S^{\text{sat}} = S_\sigma = \sigma(S) \cap M$; în particular S^{sat} este un monoid întreg.*

Demonstrație. Deoarece $S \subset S_\sigma$ și S_σ este saturat, rezultă că $S^{\text{sat}} \subset S_\sigma$. Rămâne deci să arătăm incluziunea reciprocă $S_\sigma \subset S^{\text{sat}}$. Alegem $u \in S_\sigma$. Din Teorema Carathéodory 2.14 aplicată lui $\sigma(S)$ (S este finit generat, deci $\sigma(S)$ este un con poliedral) rezultă că putem găsi $u_1, \dots, u_m \in S$ vectori liniar independenți și $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ așa încât

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i.$$

Deoarece sistemul $\{u_1, \dots, u_m\} \subset M$ poate fi completat la o bază a lui $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, iar $u \in S \subset M$, rezultă că toți coeficienții $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sunt raționali. Prin aducere la același numitor comun, rezultă că există un număr natural m astfel încât $m \cdot \lambda_i \in \mathbb{Z}$ pentru orice i , ceea ce implică $m \cdot u \in S$. Atunci $u \in S^{\text{sat}}$. \square

Corolarul 3.16 *Un monoid întreg S este saturat dacă și numai dacă este asociat unui con poliedral rațional.*

Revenim la cazul unui con poliedral rațional $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$.

Lema 3.17 $\mathbb{C}[S_\sigma]$ este un inel integru.

Demonstrație. Într-adevăr, incluziunea $S_\sigma \hookrightarrow M \cong \mathbb{Z}^n$ ne induce, din Lema 3.6 un morfism injectiv de inele $\mathbb{C}[S_\sigma] \hookrightarrow \mathbb{C}[M] \cong \mathbb{C}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$. \square

Exercițiul 3.18 Corpul de fracții al inelului $\mathbb{C}[S_\sigma]$ coincide cu corpul de fracții al inelului $\mathbb{C}[S_\sigma^{\text{gp}}]$. Remarcăm că inelul $\mathbb{C}[S_\sigma^{\text{gp}}]$ este izomorf cu un inel de polinoame Laurent.

Inelele cu care lucrăm sunt prin urmare subinele ale inelelor de polinoame Laurent. O descriere încă mai precisă a inelului $\mathbb{C}[S_\sigma]$ ca inel de polinoame Laurent este obținută considerând un izomorfism $N \cong \mathbb{Z}^n$, deci și un izomorfism $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ în modul următor :

Definiția 3.19 Fie

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}} c_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in \mathbb{C}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm],$$

un polinom Laurent. Definim suportul lui f ca fiind mulțimea finită :

$$\text{Supp}(f) := \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n, c_{i_1 \dots i_n} \neq 0\}.$$

Propoziția 3.20 $\mathbb{C}[S_\sigma] = \{f \in \mathbb{C}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm], \text{Supp}(f) \subset \check{\sigma}\}$.

Demonstrație. Inelul $\mathbb{C}[S_\sigma]$ este generat de monoamele χ^u cu $u \in \check{\sigma} \cap M$. Prin scufundarea $\mathbb{C}[S_\sigma] \subset \mathbb{C}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$ și pentru $u = (i_1, \dots, i_n) \in \check{\sigma} \cap M$, χ^u se identifică cu monomul Laurent $X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$. Evident $\text{Supp}(\chi^u) = \{u\}$ și din descompunerea $f = \sum_{u \in \check{\sigma} \cap M} c_u \chi^u$ obținem concluzia dorită. \square

3.4 Varietăți Torice Afine.

Fie N o latice de rang n , $M = \check{N}$ și $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un con poliedral rațional ascuțit (ceea ce implică $\dim(\check{\sigma}) = n$). Am definit S_σ monoidul asociat lui σ a cărui algebră monoidală este o \mathbb{C} -algebră integră finit generată. Din Teorema de corespondență 1.41, rezultă că $\mathbb{C}[S_\sigma]$ este inelul de coordonate afine al unei varietăți algebrice afine ireductibile $X_\sigma = \text{Specm}(\mathbb{C}[S_\sigma])$, numită *varietatea torică asociată conului* σ .

Primele exemple sunt cele uzuale :

Exemplul 3.21 (Spațiul afin) Fie e_1, \dots, e_n baza canonică din \mathbb{R}^n și fie conul $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^n$. Atunci $\check{\sigma} = \sigma(\check{e}_1, \dots, \check{e}_n) \subset \check{\mathbb{R}}^n$ și $S_\sigma = \mathbb{N}^n$, iar $X_\sigma = \mathbb{C}^n$.

Exemplul 3.22 (Torul algebric) Fie e_1, \dots, e_n baza canonică din \mathbb{R}^n și fie conul $\sigma = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Atunci $\check{\sigma} = \sigma(\check{e}_1, -\check{e}_1, \dots, \check{e}_n, -\check{e}_n) = \check{\mathbb{R}}^n$ și $S_\sigma = M \cong \mathbb{Z}^n$, iar $X_\sigma = T_n$. Mai general, în cazul $\sigma = \{0\} \subset N_{\mathbb{R}}$, unde N este o latice arbitrară, obținem varietatea torică asociată $T_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$; prin alegerea unei baze în N , remarcăm că varietatea T_N este de fapt izomorfă cu torul algebric n -dimensional T_n .

Observația 1.42 are un corespondent mult mai precis în cazul varietăților torice

Propoziția 3.23 *Punctele lui X_σ sunt în corespondență bijectivă cu morfismele de monoizi de la S_σ la monoidul multiplicativ (\mathbb{C}, \cdot) .*

Demonstrație. Punctele lui X_σ sunt în corespondență bijectivă cu morfismele de varietăți afine :

$$\{\star\} = \text{Specm}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Specm}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = X_\sigma,$$

care în continuare sunt în corespondență bijectivă cu morfismele de \mathbb{C} -algebre de la $\mathbb{C}[S_\sigma]$ la \mathbb{C} . Mai departe,

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[S_\sigma], \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Mon}}(S_\sigma, (\mathbb{C}, \cdot)),$$

izomorfismul fiind cel natural. \square

Putem spune deci că un punct din X_σ este același lucru cu un morfism de monoizi între S_σ și \mathbb{C} .

Definiția clasică a unei varietăți algebrice afine implică folosirea ecuațiilor polinomiale. În cazul varietăților torice, ecuațiile pot fi date explicit :

Propoziția 3.24 *Notațiile ca mai sus. Presupunem că S_σ este generat de u_1, \dots, u_m , cu $u_i \in \mathbb{Z}^n$, atunci $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[\chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_m}] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]/I_\sigma$, unde I_σ este idealul generat de polinoame de tipul*

$$X_1^{a_1} \dots X_m^{a_m} - X_1^{b_1} \dots X_m^{b_m},$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\sum_i a_i u_i = \sum_i b_i u_i$.

Demonstrație. Deoarece S_σ este generat de u_1, \dots, u_m , avem un morfism surjectiv de monoizi :

$$\varphi : \mathbb{N}^n \rightarrow S_\sigma, (a_1, \dots, a_m) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i u_i,$$

care, din Lema 3.6, induce un morfism surjectiv de \mathbb{C} -algebre,

$$f : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m] \rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma], f(X_i) = \chi^{u_i}.$$

Este deci clar că $I_\sigma \subset \ker(f)$, rămâne de arătat că $I_\sigma \supset \ker(f)$.

Fie $P \in \ker(f)$ un polinom. Descompunem P într-o sumă de polinoame $P = P_1 + \dots + P_k$, unde P_j sunt obținute regroupând monoamele din descompunerea lui P cu aceeași imagine prin f . Concret, pentru orice j , avem

$$P_j = \lambda_j \chi^{\sum_i a_{ij} u_i},$$

cu $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ și $a_{ij} \in \mathbb{N}$, așa încât $\sum a_{ij} u_i \neq \sum a_{ik} u_i$, dacă $i \neq k$.

Dacă $f(P) = 0$, cum elementele $\{\chi^u\}_{u \in S_\sigma}$ formează o bază complexă a lui $\mathbb{C}[S_\sigma]$, deci $f(P_j) = 0$ pentru orice j . Dar fiecare P_j este o sumă de monoame de forma $X_1^{a_1} \dots X_m^{a_m}$ cu $\varphi(a_1, \dots, a_m)$ fixat. Cum $f(P_j) = 0$ pentru fiecare j , suma coeficienților monoamelor ce intră în compoziția lui P_j (ceea ce am notat cu λ_j) trebuie să fie zero. Atunci fiecare P_j este un element din I_σ . \square

Observația 3.25 Din definiție, monoamele χ^u , pentru $u \in S_\sigma$ sunt funcții regulate pe varietatea X_σ . În Propoziția anterioară, am definit practic o scufundare $X_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ prin $z \mapsto (\chi^{u_1}(z), \dots, \chi^{u_m}(z))$ și am identificat ecuațiile imaginii.

Observația 3.26 În cazul laticii canonice $N = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, pentru orice element $u \in \check{N}$, monomul χ^u este o funcție regulată pe torul n -dimensional T_n . Explicit, pentru $u = (a_1, \dots, a_n)$ și $z = (z_1, \dots, z_n) \in T_n$, avem $\chi^u(z) = z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}$. Dacă $S_\sigma = \mathbb{N}.u_1 + \dots + \mathbb{N}.u_m$, putem defini morfismul $T_n \rightarrow \mathbb{C}^m$ prin $z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\chi^{u_1}(z), \dots, \chi^{u_m}(z))$. Atunci X_σ este cea mai mică varietate afină în \mathbb{C}^m care conține imaginea aplicației de mai sus : echivalent, X_σ este închiderea imaginii în topologia Zariski din \mathbb{C}^m .

Iată alte exemple de varietăți torice afine :

Exemplul 3.27 Fie $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\} \subset \mathbb{Z}^n$ o parte a unei baze peste \mathbb{Z} , nu neapărat a celei canonice, și fie conul $\sigma = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \subset \mathbb{R}^n$. Completând $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ la o bază $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ și notând cu $\{\check{\varepsilon}_1, \dots, \check{\varepsilon}_n\}$ baza duală, obținem :

$$S_\sigma = \mathbb{N}\check{\varepsilon}_1 + \dots + \mathbb{N}\check{\varepsilon}_m + \mathbb{Z}\check{\varepsilon}_{m+1} + \dots + \mathbb{Z}\check{\varepsilon}_n,$$

iar $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_{\check{\varepsilon}_1}, \dots, X_{\check{\varepsilon}_m}, X_{\check{\varepsilon}_{m+1}}^\pm, \dots, X_{\check{\varepsilon}_n}^\pm]$, deci $X_\sigma = \mathbb{C}^m \times (\mathbb{C}^*)^{n-m}$.

Exemplul 3.28 Fie e_1, e_2 baza canonică din \mathbb{R}^2 , $\{\check{e}_1, \check{e}_2\} \subset \check{\mathbb{R}}^2$ baza duală și fie conul poliedral rațional $\sigma = \sigma(2e_1 - e_2, e_2) \subset \mathbb{R}^2$. Atunci $\check{\sigma} = \sigma(\check{e}_1, \check{e}_1 + 2\check{e}_2) \subset \check{\mathbb{R}}^2$. Din demonstrația Lemei 3.11 deducem că $S_\sigma = \mathbb{N}.\check{e}_1 + \mathbb{N}.\check{e}_2 + \mathbb{N}.\check{e}_3$, deci $X_\sigma \subset \mathbb{C}^3$. Determinăm idealul său, $I_\sigma \subset \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ folosind Propoziția anterioară.

Știm că I_σ este generat de polinoame de tipul $X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} - X_1^{b_1} X_2^{b_2} X_3^{b_3}$ unde $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că :

$$a_1\check{e}_1 + a_2(\check{e}_1 + \check{e}_2) + a_3(\check{e}_1 + 2\check{e}_2) = b_1\check{e}_1 + b_2(\check{e}_1 + \check{e}_2) + b_3(\check{e}_1 + 2\check{e}_2).$$

Observăm că $a_1 = a_3 = b_2 = 0, b_1 = b_3 = 1, a_2 = 2$ este o soluție a sistemului de mai sus, ceea ce înseamnă că polinomul $X_1 X_3 - X_2^2$ se găsește în I_σ . Notăm $2c = b_2 - a_2 = 2(a_1 - b_1) = 2(a_3 - b_3)$ și presupunem că $c > 0$. Atunci

$$X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} - X_1^{b_1} X_2^{b_2} X_3^{b_3} = X_1^{b_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} (X_1 X_3 - X_2^2) ((X_1 X_3)^{c-1} - \dots),$$

arătând că idealul I_σ este generat de $X_1 X_3 - X_2^2$. Varietatea X_σ este definită de o singură ecuație : $X_1 X_3 - X_2^2 = 0$ în \mathbb{C}^3 (și este un con peste o conică proiectivă).

Exemplul 3.29 Fie $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ baza canonică, $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \check{e}_3\} \subset \check{\mathbb{R}}^3$ baza duală și $\sigma = \sigma(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$. Am văzut în Exemplul 2.68 că $\check{\sigma} = \sigma(\check{e}_1, \check{e}_2, \check{e}_3, \check{e}_1 + \check{e}_2 - \check{e}_3)$. Atunci S_σ are patru generatori, care coincid cu generatorii conului $\check{\sigma}$. Ca și în exemplul precedent, se arată că idealul lui X_σ în \mathbb{C}^4 , $I_\sigma \subset \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ este generat de polinomul $X_1 X_2 - X_3 X_4$ (iar X_σ este un con peste o cuadrică proiectivă).

3.5 Deschiși Afini Principali.

În definiția unei varietăți torice afine, am plecat de la o latice N și de la un con poliedral rațional ascuțit $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ și am construit varietatea X_{σ} . Am văzut de asemenea că dacă τ este o față a lui σ , atunci τ este la rândul său un con poliedral rațional ascuțit în $N_{\mathbb{R}}$, deci τ definește de asemenea o varietate torică afină X_{τ} . Se pune întrebarea naturală ce legătură există între varietățile X_{σ} și X_{τ} .

Propoziția 3.30 *Fie N o latice de rang n și $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un con poliedral, rațional ascuțit și τ este o față a lui σ . Atunci $X_{\tau} \subset X_{\sigma}$ este un deschis afin principal.*

Pentru demonstrație avem nevoie de următoarea :

Lema 3.31 *Există $u \in S_{\sigma}$ așa încât $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ și $S_{\tau} = S_{\sigma} + \mathbb{N} \cdot (-u)$.*

Demonstrație. Scriem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$ cu $e_i \in N$, astfel încât $\tau = \sigma(e_1, \dots, e_s)$, adică $\tau \cap \{e_1, \dots, e_m\} = \{e_1, \dots, e_s\}$.

Din bijecția din Propoziția 2.51 între fețele lui σ și fețele lui $\check{\sigma}$, deducem că τ este de forma $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$, cu $u \in \tau^$ din interiorul relativ al lui τ^* . Putem alege evident $u \in \tau^* \cap M$, deci $u \in S_{\sigma}$. Am demonstrat în Propoziția 2.52 că $\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_+^* \cdot (-u)$, de unde rezultă că $S_{\sigma} + \mathbb{N} \cdot (-u) \subset S_{\tau}$.

Să arătăm incluziunea reciprocă. Fie $w \in S_{\tau} = \check{\tau} \cap M = (\check{\sigma} + \mathbb{R}_+^* \cdot (-u)) \cap M$. Știm că $\langle u, v \rangle > 0$ pentru orice $v \in \sigma \setminus \tau$, ceea ce implică $\langle u, e_i \rangle > 0$ pentru $i = s+1, \dots, m$. Arătăm că pentru un număr întreg $k \gg 0$, avem $w+k \cdot u \in S_{\sigma}$. Este evident că $w+k \cdot u \in M$, deci trebuie arătat că $w+k \cdot u \in \check{\sigma}$, adică $\langle w+k \cdot u, e_i \rangle \geq 0$ pentru $i = 1, \dots, m$. Dacă $i \leq s$, atunci $\langle u, e_i \rangle \geq 0$ pentru că $w \in \check{\tau}$. Dacă $i \geq s+1$, avem $\langle w+k \cdot u, e_i \rangle \geq 0$, deoarece $k \gg 0$. \square

Demonstrație. (Propoziția 3.30). Considerăm u ca în Lema anterioară. Atunci

$$\mathbb{C}[S_{\tau}] = \mathbb{C}[S_{\sigma} + \mathbb{N} \cdot (-u)] = (\mathbb{C}[S_{\sigma}])_{\chi^u} = \mathcal{O}(U_{\chi^u}).$$

\square

Observația 3.32 Evident, nu orice deschis afin principal este de forma descrisă mai sus. Fețele unui con corespund numai complementarelor subvarietăților date de ecuații de tipul $\chi^u = 0$.

Observația 3.33 Deoarece conul de plecare σ din definiția unei varietăți torice afine este ascuțit, $\{0\}$ este o față a lui σ . Din Propoziția 3.30 deducem că $X_0 \cong T_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$ este scufundat ca deschis afin principal în X_{σ} . Mai precis, dacă $\check{\sigma} = \sigma(u_1, \dots, u_m) \subset \check{N}_{\mathbb{R}}$, atunci $\sigma \cap (u_1 + \dots + u_m)^{\perp} = 0$, deci T_N se identifică cu deschisul afin principal $U_{\chi^{u_1+\dots+u_m}}$. Varietatea T_N astfel scufundată în X_{σ} se va numi *torul mare din X_{σ}* .

Corolarul 3.34 *Dacă $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ este un con poliedral rațional ascuțit, atunci dimensiunea lui X_{σ} coincide cu rangul lui N .*

Demonstrație. Torulul mare T_N din X_{σ} are dimensiunea egală cu rangul lui N . Aplicăm apoi Corolarul 1.96. \square

3.6 Structuri Suplimentare pe o Varietate Torică Afină.

O varietate torică afină este o varietate de un tip special. Este de așteptat că varietățile torice afine să fie înzestrate cu structuri speciale, care să le diferențieze în categoria varietăților afine. Fixăm în continuare $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un con poliedral rațional ascuțit, unde N este o latice de rang n .

Structura de monoid algebric.

O primă structură specială pe varietatea torică afină X_{σ} este structura de monoid algebric

$$\cdot : X_{\sigma} \times X_{\sigma} \rightarrow X_{\sigma},$$

i.e. o structură de monoid care este un morfism de varietăți afine. Aceasta poate fi descrisă prin intermediul morfismului indus la nivelul inelelor de coordonate afine.

$$\mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[S_{\sigma}] \rightarrow \mathbb{C}[S_{\sigma}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[S_{\sigma} \times S_{\sigma}],$$

indus la rândul său de morfismul diagonal de monoizi :

$$S_{\sigma} \rightarrow S_{\sigma} \times S_{\sigma}, u \mapsto (u, u).$$

Punctual, structura de monoid se descrie astfel : considerăm două puncte arbitrare din X_{σ} , cărora le corespund două morfisme de monoizi (Propoziția 3.23) $\varphi, \psi : S_{\sigma} \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$. Se definește produsul lor în mod canonic : $\varphi \cdot \psi : S_{\sigma} \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$ prin $(\varphi \cdot \psi)(u) = \varphi(u) \cdot \psi(u)$, pentru orice $u \in S_{\sigma}$. Elementul neutru din X_{σ} este punctul x_0 ce corespunde morfismului constant $\equiv 1$.

Un alt punct particular important din X_{σ} , numit *punctul distins*, notat cu x_{σ} , este punctul ce corespunde morfismului de monoizi $S_{\sigma} \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$, definit prin :

$$u \mapsto \begin{cases} 1 & \text{dacă } u \in \sigma^{\perp} = \sigma^* = \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}) \\ 0 & \text{altminteri} \end{cases}.$$

Observația 3.35 În cazul torului $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$, structura monoidală este cea grupală : $(v \otimes a) \cdot (w \otimes b) = (v + w) \otimes (a \cdot b)$. Pentru laticea canonică $N = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, obținem :

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n),$$

pentru orice $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in T_n$.

Observația 3.36 Cu excepția torurilor, structura monoidală definită mai sus pe X_{σ} nu va fi o structură grupală, de exemplu, structura de pe \mathbb{C}^n este structura multiplicativă :

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n),$$

care diferă de structura grupală aditivă.

Acțiunea torului mare T_N .

Am văzut că torul T_N se scufundă în X_{σ} identificându-se cu deschisul afin principal X_0 corespunzător incluziunii $\{0\} \subset \sigma$ ca față. Restricția structurii de monoid

de pe X_σ la T_N este structura grupală de pe T_N (se verifică la nivelul inelelor de coordonate afine), ceea ce induce o acțiune a lui T_N pe X_σ , $T_N \times X_\sigma \rightarrow X_\sigma$ indusă de această multiplicare. Concret, scufundarea lui T_N în X_σ este dată de $t \mapsto t.x_0$; în particular, observăm că acțiunea torului are o orbită deschisă.

Descrierea de mai sus caracterizează perfect varietățile torice :

Propoziția 3.37 *Fie X o varietate algebrică afină, normală, ireductibilă, de dimensiune n , care conține torul algebric T_n ca deschis și astfel încât structura grupală a lui T_n se extinde la o acțiune a lui T_n pe X_σ . Atunci există un con rațional poliedral $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât $X \cong X_\sigma$ și scufundarea $T_n \subset X$ să fie dată de $t \mapsto t.x_0$.*

Demonstrație. Scriem $T_n = \text{Specm}(\mathbb{C}[M])$ cu $\mathbb{Z}^n \cong M = \check{\mathbb{Z}}^n \subset \check{\mathbb{R}}^n$. Din ireductibilitatea lui X , observăm că incluziunea T_n induce o incluziune de \mathbb{C} -algebre $\mathcal{O}(X) \subset A_0 := \mathbb{C}[M]$.

Definim submonoidul lui M :

$$S := \{u \in M, \chi^u \in \mathcal{O}(X)\}$$

și observăm că un polinom Laurent $f = \sum_u c_u \chi^u$ aparține lui $\mathcal{O}(X)$ dacă și numai dacă $c_u \chi^u \in \mathcal{O}(X)$, pentru orice $u \in M$. Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{O}(X)$, atunci $\sum_u c_u \chi^u \otimes \chi^u \in A_0 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(X)$, deoarece acțiunea torului este compatibilă cu structura de grup de pe T_n . Cum $\chi^u \otimes \chi^u$ sunt liniar independente peste \mathbb{C} rezultă că, pentru orice $u \in M$ avem $c_u \chi^u \otimes \chi^u \in A_0 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(X)$, deci, pentru orice $u \in M$ obținem $c_u \chi^u \in \mathcal{O}(X)$.

Această observație ne conduce la concluzia că $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[S]$. În plus, deoarece $\mathcal{O}(X)$ este o \mathbb{C} -algebră finit generată, monoidul S este finit generat.

Presupunem că

$$S = \sum_{i=1}^m \mathbb{N}.u_i$$

și considerăm conul poliedral rațional ascuțit $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ al cărui con dual n -dimensional $\check{\sigma}$ este generat de u_1, \dots, u_m . Arătăm că $S = S_\sigma$. Incluziunea $S \subset S_\sigma$ este evidentă, ne rămâne de arătat incluziunea inversă.

Fie $u \in S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$. Din Teorema lui Carathéodory, 2.14, rezultă că există un subsistem de vectori liniar independenți $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_p}\}$ astfel încât $u = \sum \lambda_k u_{j_k}$, unde $\lambda_k \geq 0$. Cum $u \in M$ și $u_{j_k} \in M$, deducem că $\lambda_k \in \mathbb{Q}$ pentru orice k și atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu $m.u \in S$. Mai departe, rezultă că $(\chi^u)^m \in \mathcal{O}(X)$, iar din normalitatea lui $\mathcal{O}(X)$ obținem $\chi^u \in \mathcal{O}(X)$. Aceasta încheie demonstrația. \square

Condiția de normalitate din ipoteza Propoziției anterioare este una naturală, deoarece :

Propoziția 3.38 *Inelul $\mathbb{C}[S_\sigma]$ este un inel normal.*

Demonstrație. Fie τ_1, \dots, τ_m razele lui σ . Am arătat în Corolarul 2.63 că

$$\check{\sigma} = \bigcap_{i=1}^m \check{\tau}_i.$$

Atunci obținem, aplicând Propoziția 3.20 că

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^m \mathbb{C}[S_{\tau_i}],$$

intersecția fiind considerată în inelul de polinoame Laurent în n variabile. Dar τ_i sunt semispații, deci $\mathbb{C}[S_{\tau_i}] \cong \mathbb{C}[X_1, X_2^\pm, \dots, X_n^\pm]$, pentru orice i . Pentru a încheia demonstrația aplicăm faptul elementar că o intersecție de inele normale cu același corp de fracții este un inel normal. \square

Corolarul 3.39 *Fie $S \subset M$ un monoid întreg. Atunci S este saturat dacă și numai dacă \mathbb{C} -algebra monoidală $\mathbb{C}[S]$ este întregă.*

Corolarul 3.40 *Fie $S \subset M$ un monoid întreg. Atunci închiderea întregă a algebrei $\mathbb{C}[S]$ este algebra $\mathbb{C}[S^{\text{sat}}]$.*

Observația 3.41 Am văzut în Exemplul 3.8.4 că inelul de coordonate al varietății $V = \mathbb{V}(X_1^3 - X_2^2) \subset \mathbb{C}^2$ este un inel monoidal. Cu toate acestea, varietatea nu este torică, nefiind o varietate normală. Echivalent, monoidul de definiție nu este saturat.

3.7 Netezimea Varietăților Torice Afine.

Vom arăta că singurele varietăți torice afine netede sunt produsele de spații afine și toruri algebrice.

Teorema 3.42 *Fie N o latice și $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un con poliedral rațional ascuțit. Atunci varietatea torică afină asociată X_σ este netedă dacă și numai dacă σ este un con regulat ; vezi Definiția 2.74.*

Demonstrație. Notăm cu n rangul lui N . Presupunem mai întâi că σ este regulat. Scriem $\sigma = \sigma(e_1, \dots, e_m)$, cu $e_1, \dots, e_m \in N$ o parte a unei baze. Completăm mulțimea de generatori la o bază $\{e_1, \dots, e_n\}$ a lui N peste \mathbb{Z} și notăm cu $\check{e}_1, \dots, \check{e}_n$ baza duală din \check{N} . Remarcăm acum că

$$\check{\sigma} = \sigma(\check{e}_1, \dots, \check{e}_m, \pm\check{e}_{m+1}, \dots, \pm\check{e}_n),$$

iar izomorfismul $N \cong \mathbb{C}^n$ indus de baza $\{e_1, \dots, e_n\}$ induce un izomorfism

$$X_\sigma \cong \mathbb{C}^m \times T_{n-m}.$$

Reciproc, presupunem că varietatea X_σ este netedă. Observăm că ne putem reduce la cazul $\dim(\sigma) = n$, înlocuind N cu $N \cap \text{Span}(\sigma)$. Într-adevăr, dacă $\dim(\sigma) = m < n$, iar dacă σ este regulat în $\text{Span}(\sigma)$, atunci σ este regulat în $N_{\mathbb{R}}$.

Presupunem deci că $\dim(\sigma) = n$, adică $\check{\sigma}$ este ascuțit. Atunci punctul distins $x_\sigma \in X_\sigma$ este neted. Reamintim că x_σ corespunde morfismului de \mathbb{C} -algebre $\mathbb{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{C}$ definit prin :

$$\chi^u \mapsto \begin{cases} 1 & \text{dacă } u \in \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}) = 0. \\ 0 & \text{altminteri} \end{cases}$$

al cărui nucleu coincide cu idealul maximal $\mathfrak{m}_{X_\sigma, x_\sigma} \subset \mathbb{C}[S_\sigma]$, Observația 1.42. În particular, rezultă că idealul maximal al lui x_σ este generat de monoamele χ^u , cu $u \in \check{\sigma} \setminus \{0\}$, iar $\mathfrak{m}_{X_\sigma, x_\sigma}^2$ este generat de monoame de tipul $\chi^{u_1+u_2}$, unde $u_1, u_2 \in \check{\sigma} \setminus \{0\}$. Spațiul cotangent Zariski $\mathfrak{m}_{X_\sigma, x_\sigma} / \mathfrak{m}_{X_\sigma, x_\sigma}^2$ este deci generat de monoame χ^u , unde $u \in \check{\sigma} \setminus \{0\}$ nu se poate scrie ca o sumă $u_1 + u_2$ cu $u_1, u_2 \in \check{\sigma} \setminus \{0\}$. Pentru simplitate, vom numi un astfel de element u *ireductibil*. Dimensiunea spațiului tangent la X_σ în x_σ coincide deci cu numărul de elemente ireductibile.

Din presupunerea făcută ca $\check{\sigma}$ să fie ascuțit, putem scrie $\check{\sigma} = \sigma(u_1, \dots, u_m)$, unde $\sigma(u_1), \dots, \sigma(u_m)$ sunt razele lui $\check{\sigma}$, iar u_i generează $\sigma(u_i) \cap \check{N}$ pentru orice i . Deoarece $\dim(\check{\sigma}) = n$, avem $m \geq n$. Este relativ ușor de văzut, din minimalitatea sistemului de generatori că fiecare dintre u_i este un element ireductibil. Din netezime, rezultă că $m \leq n$, deci $m = n$, iar elementele u_1, \dots, u_n sunt singurele elemente ireductibile și generează monoidul S_σ . Din egalitatea $S_\sigma + (-S_\sigma) = \check{N}$, rezultă că u_1, \dots, u_n formează o bază a lui \check{N} peste \mathbb{Z} , ceea ce arată că $\check{\sigma}$ este un con regulat. Pentru a încheia demonstrația, folosim Propoziția 2.76. \square

Capitolul 4

Varietăți Torice Abstracte.

Ca și în cazul varietăților algebrice abstracte, varietățile torice abstracte sunt obținute din varietăți torice afine prin procedeul de lipire. Lipirea este compatibilă cu structurile torice, conducând la o structură torică *globală*.

4.1 Separarea Conurilor.

Vom folosi următoarele două rezultate de geometrie convexă :

Lema 4.1 (Lema de Separare) Fie $\sigma, \sigma' \subset \mathbb{R}^n$ două conuri poliedrale a căror intersecție τ este o față a fiecăruia. Atunci există $u \in \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}')$, astfel încât $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$.

Demonstrație. Considerăm conul poliedral :

$$\gamma = \sigma - \sigma' := \{v - v', v \in \sigma, v' \in \sigma'\}.$$

Alegem u un element arbitrar din interiorul relativ al lui $\check{\gamma}$ și arătăm că u satisface condițiile din concluzie.

Mai întâi să remarcăm că $u \in \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}')$, deoarece $\check{\gamma} \subset \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}')$.

Demonstrăm că $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$.

Observăm că, deoarece u este în interiorul relativ al lui $\check{\gamma}$, $\gamma \cap u^\perp$ este cea mai mică față a lui γ , adică :

$$\gamma \cap u^\perp = \gamma \cap (-\gamma) = (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma).$$

Atunci $\sigma \cap \sigma' \subset (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma)$, deci $\tau \subset u^\perp$; în particular, $\tau \subset \sigma \cap u^\perp$ și $\tau \subset \sigma' \cap u^\perp$. Rămâne de arătat că $\sigma \cap u^\perp \subset \tau$ și $\sigma' \cap u^\perp \subset \tau$; ambele incluziuni se arată în mod analog. De exemplu, alegem $v \in \sigma \cap u^\perp$, implică $v \in (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma)$, deci există $v' \in \sigma'$ și $w \in \sigma$ cu $v = v' - w$. Rezultă că $v' = v + w \in \sigma \cap \sigma' = \tau$. Pentru a încheia demonstrația, aplicăm următoarea :

Observația 4.2 Fie $\tau \subset \sigma$ o față a unui con poliedral și $v, w \in \tau$ cu $v + w \in \tau$. Atunci $v, w \in \tau$.

□

Observația 4.3 Lema de Separare ne spune că putem găsi un hiperplan care îl conține pe τ și astfel încât conurile σ și σ' să se găsească de o parte și de alta a acestui hiperplan.

Propoziția 4.4 Fie σ și σ' două conuri raționale poliedrale în $N_{\mathbb{R}}$ astfel încât intersecția $\sigma \cap \sigma'$ este o față a fiecăruia. Atunci

$$S_{\sigma \cap \sigma'} = S_{\sigma} + S_{\sigma'}.$$

Demonstrație. Aplicăm Lema de Separare cu observația că, dacă σ și σ' sunt raționale, atunci γ construit în Lemă este de asemenea rațional și putem alege u din intersecția lui M cu interiorul relativ al lui $\check{\gamma}$.

Incluziunea $S_{\sigma \cap \sigma'} \supset S_{\sigma} + S_{\sigma'}$ este evidentă pentru că $\check{\sigma} \subset (\sigma \cap \sigma')^{\vee}$, deci $S_{\sigma} \subset S_{\sigma \cap \sigma'}$ și analog pentru σ' .

Pentru incluziunea inversă, aplicăm Lema 3.31, din care deducem că putem alege $u \in S_{\sigma}$ așa încât $\sigma \cap \sigma' = \sigma \cap u^{\perp}$ și $S_{\tau} = S_{\sigma} + \mathbb{N} \cdot (-u)$; observăm că $\tau^* \subset \check{\gamma}$. Dar $-u \in S_{\sigma'}$, deci $S_{\sigma} + \mathbb{N} \cdot (-u) \subset S_{\sigma} + S_{\sigma'}$. \square

4.2 Varietăți Torice Abstracte.

Ca și în cazul varietăților algebrice abstracte, o varietate torică abstractă este obținută lipind varietăți afine. De data aceasta însă, se va face o lipire de varietăți afine *toric*, în așa fel încât varietatea abstractă să aibă o structură *torică globală*.

Definiția 4.5 Un evantai din $N = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ (sau, mai scurt, un evantai din \mathbb{R}^n , dacă nu există pericol de confuzie), este o mulțime Δ de conuri poliedrale, raționale, ascuțite cu următoarele două proprietăți :

- (1) Orice intersecție a două conuri din Δ este o față comună a ambelor conuri.
- (2) Orice față a unui con din Δ este un con din Δ .

Observația 4.6 Orice con poliedral, rațional, ascuțit definește un evantai ale căror elemente sunt toate fețele sale.

Definiția 4.7 Dimensiunea unui evantai este dimensiunea maximă a conurilor sale.

Definiția 4.8 Un con maximal al unui evantai este un con care nu este conținut în nici un alt con din evantai.

Definiția 4.9 Razele unui evantai sunt conurile sale de dimensiune unu. Mulțimea razelor unui evantai Δ se notează $\Delta(1)$.

Fie Δ un evantai din \mathbb{R}^n . Atunci, dacă σ și σ' sunt două conuri din Δ , varietatea afină $X_{\sigma \cap \sigma'}$ se scufundă în mod natural, ca deschis afin principal atât în X_{σ} cât și în $X_{\sigma'}$. Aplicând procesul de lipire familiei de varietăți afine $(X_{\sigma})_{\sigma \in \Delta}$, după deschișii $X_{\sigma \cap \sigma'}$, cu aplicațiile de lipire $\text{id}_{X_{\sigma \cap \sigma'}}$ (care în mod clar verifică relațiile de compatibilitate), obținem o varietate abstractă, notată X_{Δ} , numită *varietatea torică asociată evantaiului* Δ . Topologia subiacentă fiind numită *topologia Zariski* a lui X_{Δ} .

Observația 4.10 Este suficient să considerăm lipirea familiei $(X_\sigma)_\sigma$ con maximal $\in \Delta$.

Observația 4.11 În practică, se întâmplă adesea ca doi deschiși afini X_σ și $X_{\sigma'}$, care corespund conurilor $\sigma, \sigma' \in \Delta$, să fie izomorfi; atunci, notând cu $\Phi_{\sigma\sigma'} : X_\sigma \xrightarrow{\sim} X_{\sigma'}$ un astfel de morfism, identitatea lui $X_{\sigma \cap \sigma'}$ poate fi înlocuită în procesul de lipire cu $\Phi' := \Phi_{\sigma\sigma'}|_{X_{\sigma \cap \sigma'}} : X_{\sigma \cap \sigma'} \xrightarrow{\sim} \Phi_{\sigma\sigma'}(X_{\sigma \cap \sigma'})$, iar $X_{\sigma'}$ poate fi înlocuit cu X_σ . Vom spune că *lipim două copii ale lui X_σ* prin izomorfismul Φ' . Acest principiu va deveni mai transparent analizând diferite exemple de varietăți torice, începând chiar cu dreapta proiectivă, vezi Exemplitul 4.13 în Secțiunea următoare.

Lema de Separare 4.1 are drept consecință interesantă separabilitatea Hausdorff a varietăților torice :

Teorema 4.12 *Varietatea torică X_Δ asociată unui evantaiului $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ este un spațiu topologic separat Hausdorff în topologia Euclidiană.*

Demonstrație. Fie $x, y \in X_\Delta$ două puncte distincte. Dacă punctele se găsesc într-un același deschis afin X_σ , cu $\sigma \in \Delta$, atunci ele pot fi separate prin bile din topologia Euclidiană pe acel deschis. Presupunem atunci că $x \in X_\sigma, y \in X_{\sigma'}$, cu $\sigma, \sigma' \in \Delta$, iar $y \notin X_\sigma, x \notin X_{\sigma'}$. Notăm $\tau = \sigma \cap \sigma'$. Din Lema de Separare 4.1 există $u \in \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}')$ cu $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$, unde u aparține interiorului relativ al lui $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$. Notăm $f = \chi^u, g = \chi^{-u}$; f și g sunt funcții regulate pe X_σ , respectiv $X_{\sigma'}$, cu $f \cdot g \equiv 1$ pe X_τ . Mai mult, avem $f(x) = 0$ și $g(y) = 0$. Considerăm deschișii din topologia Euclidiană :

$$B_1 := \{z \in X_\sigma, |f(z)| < 1\},$$

$$B_2 := \{z \in X_{\sigma'}, |g(z)| < 1\},$$

care sunt disjunți și separă punctele x și y . □

4.3 Exemple de Varietăți Torice.

Exemplitul 4.13 Considerăm evantaiul de dimensiune unu $\Delta := \{0, \sigma, \sigma'\}$, unde σ este generat de 1 în \mathbb{R} , iar $\sigma' = -\sigma$. Determinăm varietatea torică X_Δ , obținută prin lipirea varietăților afine $X_\sigma, X_{\sigma'}$ după deschisul comun $X_0 = X_{\sigma \cap \sigma'} = \mathbb{C}^*$. Inelele de coordonate afine corespunzătoare sunt

$$A_\sigma = \mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}[X, X^{-1}],$$

respectiv

$$A_{\sigma'} = \mathbb{C}[X^{-1}] \subset \mathbb{C}[X, X^{-1}].$$

Așa cum am precizat mai devreme, vezi Observația 4.11, în cazul în care deschișii afini pe care îi lipim sunt izomorfi, înlocuim identitatea deschisului comun după care se face lipirea cu restricția acestui izomorfism. În cazul nostru, $X_\sigma \xrightarrow{\sim} X_{\sigma'}$ indus de izomorfismul de \mathbb{C} -algebre $\mathbb{C}[X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X^{-1}]$, dat de $X \mapsto X^{-1}$. Prin acest

izomorfism, imaginea lui \mathbb{C}^* coincide cu \mathbb{C}^* . Atunci, varietatea X_Δ este obținută prin lipirea a două copii ale lui \mathbb{C} prin

$$(\mathbb{C})_0 = \mathbb{C} \supset \mathbb{C}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C} = (\mathbb{C})_1,$$

$$x \mapsto x^{-1}.$$

Varietatea astfel construită se numește *dreapta proiectivă complexă* și se notează \mathbb{P}^1 . Punctele sale sunt în corespundență bijectivă cu punctele spațiului cât $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^* = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\sim$, unde $(z_0, z_1) \sim (z'_0, z'_1)$ dacă și numai dacă există $\lambda \in \mathbb{C}^*$ așa încât $z'_0 = \lambda z_0$, $z'_1 = \lambda z_1$. O clasă de echivalență se notează $[z_0 : z_1]$. Bijecția se realizează în modul următor : am definit

$$\mathbb{P}^1 = \left((\mathbb{C})_0 \amalg (\mathbb{C})_1 \right) / \sim,$$

unde $x \sim y$ dacă și numai dacă sau $x = y = 0 \in (\mathbb{C})_0$ sau $x = y = 0 \in (\mathbb{C})_1$, sau $x \in \mathbb{C}^* \subset (\mathbb{C})_0$, $y \in \mathbb{C}^* \subset (\mathbb{C})_1$ și $y = x^{-1}$. Definim atunci aplicația :

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*,$$

$$(\mathbb{C})_0 \ni 0 \mapsto [1 : 0],$$

$$(\mathbb{C})_1 \ni 0 \mapsto [0 : 1],$$

$$(\mathbb{C})_0 \supset \mathbb{C}^* \ni x \sim x^{-1} \in \mathbb{C}^* \subset (\mathbb{C})_1 \mapsto [1 : x] = [x^{-1} : 1].$$

Este clar că aplicația definită mai sus este bijectivă, iar imaginile deschișilor $(\mathbb{C})_0$ și $(\mathbb{C})_1$ respectiv sunt mulțimile $\{[z_0 : z_1], z_0 \neq 0\}$ și, respectiv, $\{[z_0 : z_1], z_1 \neq 0\}$, deschisului comun $X_0 = \mathbb{C}^*$ corespunzându-i mulțimea $\{[z_0 : z_1], z_0 \neq 0, z_1 \neq 0\}$.

Observația 4.14 Proiecția canonică $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$ induce o topologie cât a topologiei Zariski pe $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$. Aplicația definită mai sus este un homeomorfism pe dreapta proiectivă (**Exercițiu : Justificați.**)

Observația 4.15 În topologia Euclidiană, dreapta proiectivă este un spațiu topologic compact. Pentru aceasta se observă că topologia Euclidiană coincide cu topologia cât indusă de pe $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ (ca și în cazul topologiei Zariski), iar proiecția canonică

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

factorizează prin

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^3 \rightarrow (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*.$$

Observația 4.16 În \mathbb{R} există numai 4 evenimente posibile : câte unul pentru fiecare din conurile 0 , σ , σ' și evantaiul Δ . De aici, deoarece $X_\sigma \cong X_{\sigma'}$, obținem numai 3 varietăți de dimensiune 1, și anume, \mathbb{C}^* , \mathbb{C} și \mathbb{P}^1 . Dintre acestea, \mathbb{P}^1 este singura compactă.

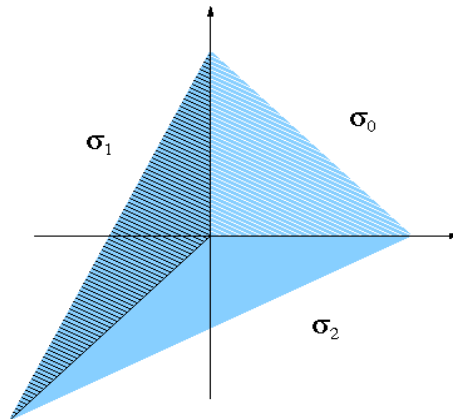


Figura 4.1: Evantaiul din Exemplul 4.17.

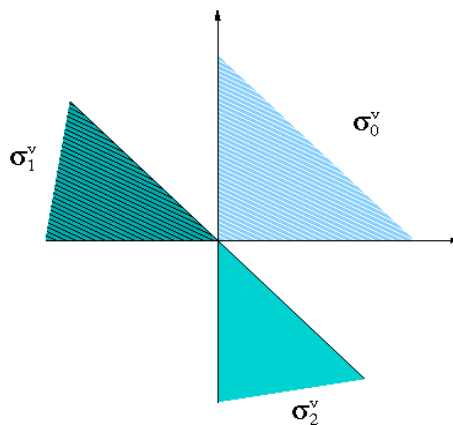


Figura 4.2: Dualele Conurilor Maximale din 4.17.

Exemplul 4.17 Considerăm $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ baza canonică. Fie evantaiul Δ din \mathbb{R}^2 format din 7 conuri, ale cărui conuri maximale sunt definite astfel : $\sigma_0 = \sigma(e_1, e_2)$, $\sigma_1 = \sigma(e_2, -e_1 - e_2)$ și $\sigma_2 = \sigma(e_1, -e_1 - e_2)$.

Conurile duale ale conurilor maximale sunt : $\check{\sigma}_0 = \sigma(\check{e}_1, \check{e}_2)$, $\sigma_1 = \sigma(-\check{e}_1, -\check{e}_1 + \check{e}_2)$ și, respectiv, $\sigma_2 = \sigma(-\check{e}_2, \check{e}_1 - \check{e}_2)$.

Inelele de coordonate ale varietăților torice asociate torurilor maximale $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ sunt următoarele : $A_{\sigma_0} = \mathbb{C}[X_1, X_2]$, $A_{\sigma_1} = \mathbb{C}[X_1^{-1}, X_1^{-1}X_2]$ și respectiv, $A_{\sigma_2} = \mathbb{C}[X_1X_2^{-1}, X_2^{-1}]$.

Exemplul 4.18 Considerăm $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ baza canonică. Fie evantaiul Δ din \mathbb{R}^2 format din 6 conuri, ale cărui conuri maximale sunt următoarele două conuri : $\sigma_0 = \sigma(e_2, e_1 + e_2)$ și $\sigma_1 = \sigma(e_1, e_1 + e_2)$.

Conurile duale sunt următoarele : $\check{\sigma}_0 = \sigma(\check{e}_1, -\check{e}_1 + \check{e}_2)$, respectiv $\check{\sigma}_1 = \sigma(\check{e}_2, \check{e}_1 - \check{e}_2)$.

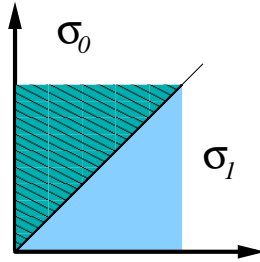


Figura 4.3: Eventaiul din Exemplul 4.18.

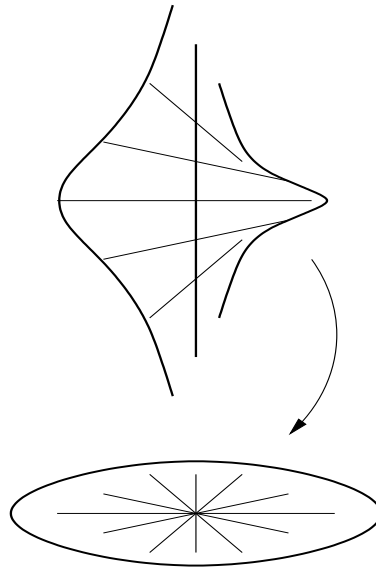


Figura 4.4: Eclatarea lui \mathbb{C}^2 în Origine.

4.4 Acțiunea Torului n -dimensional pe o Varietate Torică.

(PENDING)

4.5 Morfisme Torice.

Fie N, N' două latici, $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ și $\sigma' \subset N'_{\mathbb{R}}$ două conuri poliedrale raționale ascuțite și X_{σ} , respectiv $X_{\sigma'}$, varietățile torice asociate. Știm din teoria generală că un morfism de varietăți $X_{\sigma'} \rightarrow X_{\sigma}$ este indus de un morfism de \mathbb{C} -algebre $\mathbb{C}[S_{\sigma}] \rightarrow \mathbb{C}[S_{\sigma'}]$. Printre aceste morfisme se găsesc acelea induse de morfisme de monoizi : $\varphi : S_{\sigma} \rightarrow S_{\sigma'}$, Lema 3.6.

Definiția 4.19 Un morfism de varietăți torice affine $\Phi : X_{\sigma'} \rightarrow X_{\sigma}$ indus de un morfism de monoizi $\varphi : S_{\sigma} \rightarrow S_{\sigma'}$ se numește morfism toric.

Cu observația că $S_\sigma + (-S_\sigma) = \check{N}$, vezi Exercițiul 3.14, putem demonstra ușor că :

Propoziția 4.20 *Cu notațiile de mai sus, φ induce un morfism de toruri algebrice $f : T_{N'} \rightarrow T_N$ astfel încât g este compatibil cu acțiunile torurilor, i.e. $g(t.x) = f(t).g(x)$, pentru orice $t \in T_{N'}$ și orice $x \in X_{\sigma'}$.*

Din aceeași Observație $S_\sigma + (-S_\sigma) = \check{N}$ și $S_{\sigma'} + (-S_{\sigma'}) = \check{N}'$, deducem că φ poate fi prelungit la un morfism de grupuri $\check{N} \rightarrow \check{N}'$ și, mai departe, la o aplicație liniară $\check{N}_{\mathbb{R}} \rightarrow \check{N}'_{\mathbb{R}}$. Prin dualizare, obținem o aplicație liniară $N'_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ a cărei restricție la N' are imaginea conținută în N și a cărei restricție la σ' are imaginea în σ . Această construcție este în mod evident reversibilă și poate fi extinsă la evantaie :

Definiția 4.21 *Fie N, N' două latici, Δ un evantai în $N_{\mathbb{R}}$ și σ' un evantai în $N'_{\mathbb{R}}$. Un morfism de evantaie este o aplicație liniară $\phi : N'_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ astfel încât $\phi(N') \subset N$ și pentru orice $\sigma' \in \Delta'$ există $\sigma \in \Delta$ cu $\phi(\sigma') \subset \sigma$.*

Definiția de mai sus este coerentă în sensul că dacă $\phi(\sigma') \subset \sigma_1$ și $\phi(\sigma') \subset \sigma_2$, atunci $\phi(\sigma') \subset \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \Delta$.

Un morfism de evantaie determină un morfism între varietățile torice asociate $X_{\Delta'} \rightarrow X_{\Delta}$; un astfel de morfism se numește *morfism toric*. Pe deschiși afini, $X_{\sigma'} \subset X_{\Delta'}$ și $X_{\sigma} \subset X_{\Delta}$ cu $\phi(\sigma') \subset \sigma$ acest morfism este cel discutat în cazul afin.

Propoziția 4.22 *Un morfism toric $\Phi : X_{\Delta'} \rightarrow X_{\Delta}$ induce un morfism de toruri algebrice $T_{N'} \rightarrow T_N$ care este compatibil cu acțiunile torurilor, cu alte cuvinte, avem diagramele comutative :*

$$\begin{array}{ccc} T_{N'} & \longrightarrow & T_N \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\Delta'} & \longrightarrow & X_{\Delta} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_{N'} \times X_{\Delta'} & \longrightarrow & T_N \times X_{\Delta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\Delta'} & \longrightarrow & X_{\Delta} \end{array}$$

Exemplul 4.23 Fie N o latică și $N' \subset N$ o sublatică de același rang ; în particular, avem $N'_{\mathbb{R}} \cong N_{\mathbb{R}}$. Dacă Δ' este un evantai în N' atunci el induce un evantai în N , notat Δ . Practic, cele două evantaie coincid ca mulțimi, doar laticile sunt cele care diferă, iar morfismul identitate $N'_{\mathbb{R}} \cong N_{\mathbb{R}}$, induce un morfism natural de evantaie. Grupul cât N/N' acționează canonic pe varietatea $X_{\Delta'}$, iar câtul său prin această acțiune se identifică cu varietatea X_{Δ} , morfismul de proiecție fiind același cu morfismul toric indus de morfismul inițial de evantaie $\Delta' = \Delta$. (PENDING) de dat mai multe detalii.

4.6 Subgrupuri cu un Parametru, Caractere și Puncte-limită.

Scopul introducerii acestor noțiuni este acela de a putea recupera evantaiul unei varietăți torice din geometria sa. Reamintim că un morfism $X_{\sigma} \rightarrow X_{\sigma'}$ de varietăți

torice afine se numește morfism toric dacă provine dintr-un morfism de monoizi $S_{\sigma'} \rightarrow S_{\sigma}$. Am arătat că un morfism toric induce un morfism de grupuri algebrice între torurile conținute în X_{σ} și, respectiv, $X_{\sigma'}$.

Propoziția 4.24 *Orice morfism $\Phi : T_m \rightarrow T_n$ de grupuri algebrice este un morfism toric.*

Demonstrație. Considerăm $\varphi^{\#} : \mathbb{C}[X_1^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}] \rightarrow \mathbb{C}[Y_1^{\pm}, \dots, Y_m^{\pm}]$ morfismul indus de φ între inelele de coordonate. Fie $u \in \check{\mathbb{Z}}^n \subset \check{\mathbb{R}}^n$ un element arbitrar și

$$\varphi^{\#}(\chi^u) = \sum_{w \in \mathbb{Z}^m} c_w \chi^w.$$

Cum φ este un morfism de grupuri algebrice, avem o diagramă comutativă :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X_1^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}] & \xrightarrow{\varphi^{\#}} & \mathbb{C}[Y_1^{\pm}, \dots, Y_m^{\pm}] \\ \downarrow \chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u & & \downarrow \chi^w \mapsto \chi^w \otimes \chi^w \\ \mathbb{C}[X_1^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_1^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}] & \xrightarrow{\varphi^{\#} \otimes \varphi^{\#}} & \mathbb{C}[Y_1^{\pm}, \dots, Y_m^{\pm}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Y_1^{\pm}, \dots, Y_m^{\pm}] \end{array}$$

Rezultă că

$$\varphi^{\#}(\chi^u) \otimes \varphi^{\#}(\chi^u) = \sum c_w \chi^w \otimes \chi^w,$$

adică

$$\sum c_{w_1} c_{w_2} \chi^{w_1} \otimes \chi^{w_2} = \sum c_w \chi^w \otimes \chi^w.$$

Dar vectorii $(\chi^{w_1} \otimes \chi^{w_2})$ sunt liniar independenți peste \mathbb{C} , de unde rezultă că pentru orice $w_1 \neq w_2$, avem $c_{w_1} = 0$ sau $c_{w_2} = 0$. De aici deducem că există cel mult un coeficient c_w diferit de zero și în plus $c_w^2 = c_w$. Obținem $\varphi^{\#}(\chi^u) = \chi^w$; să remarcăm că χ^u este inversabil, deci $\varphi^{\#}(\chi^u) \neq 0$. Prin asocierea $u \mapsto w$ se obține o aplicație $\Phi : \check{\mathbb{Z}}^m \rightarrow \check{\mathbb{Z}}^n$ cu $\varphi^{\#}(\chi^u) = \chi^{\Phi(u)}$. Cum $\varphi^{\#}$ este un morfism de inele, rezultă că Φ este un morfism de monoizi și deci φ este un morfism toric. \square

Corolarul 4.25 *Fie $\varphi : X_{\sigma} \rightarrow X_{\sigma'}$ un morfism de varietăți torice afine astfel încât φ induce un morfism de toruri algebrice, compatibil cu acțiunile torurilor. Atunci φ este un morfism toric.*

Demonstrație. Folosim $S_{\sigma} + (-S_{\sigma'}) = M$ (REF) și în final $\Phi(S_{\sigma'}) \subset S_{\sigma}$. \square

Cazuri Particulare.

1. A da un morfism $\mathbb{C}^* \rightarrow T_n$ de grupuri algebrice este echivalent cu a preciza un element din $N = \mathbb{Z}^n$. Cu alte cuvinte, avem

$$\text{Hom}_{\text{GrAlg}}(\mathbb{C}^*, T_n) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Un astfel de morfism se numește *subgrup cu un parametru al lui T_n* . Corespondența este dată în mod explicit astfel : dacă $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ atunci obținem morfismul de grupuri algebrice

$$\lambda_v : \mathbb{C}^* \rightarrow T_n, \lambda_v(z) = (z^{a_1}, \dots, z^{a_n})$$

și orice morfism de grupuri algebrice este de această formă, după cum am arătat.

2. A da un morfism $T_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ de grupuri algebrice este echivalent cu a da un morfism de monoizi de la \mathbb{Z}^n la \mathbb{Z} , adică a preciza un element din $N = \mathbb{Z}^n$. Deci

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GrAlg}}(T_n, \mathbb{C}^*) \cong \check{\mathbb{Z}}^n = M.$$

Un astfel de morfism se numește *caracter al lui T_n* . Explicit, pentru un element $u \in \check{\mathbb{Z}}^n$, morfismul indus este exact $\chi^u : T_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ ($\chi^u \in \mathcal{O}(T_n)$ este un element inversabil, deci nu se anulează nicăieri) și orice morfism de grupuri algebrice este de această formă. Monoamele sunt deci caractere ale torului n -dimensional.

Observația 4.26 Aplicația biliniară :

$$\mathrm{Hom}(T_n, \mathbb{C}^*) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T_n) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*),$$

definită prin

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta,$$

corespunde aplicației biliniare naturale

$$\langle , \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Cu alte cuvinte, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$, orice $v \in N$ și $u \in M$, avem :

$$(\chi^u \circ \lambda_v)(z) = z^{\langle u, v \rangle}.$$

În cazul general, pentru X_Δ o varietate torică arbitrară, considerăm $T_n \subset X_\Delta$ torul mare. Am văzut că laticile M și N pot fi descrise ca fiind caracterele, respectiv subgrupurile cu un parametru ale lui T_n . Este de așteptat ca evantaiul de definiție Δ să poată fi descris în termeni asemănători.

Convenție. Pentru orice subgrup cu un parametru $\lambda_v : \mathbb{C}^* \rightarrow T_n$, vom nota tot cu $\lambda_v : \mathbb{C}^* \rightarrow X_\Delta$ morfismul indus.

Ideea cheie este să studiem limitele $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$. Această idee devine mult mai transparentă dacă analizăm un caz particular, cel al dreptei proiective.

Exemplul 4.27 (Dreapta proiectivă) Reamintim că \mathbb{P}^1 a fost construit prin lipirea a două copii ale lui \mathbb{C} , Exemplul 4.13 :

$$\mathbb{P}^1 = \left((\mathbb{C})_0 \amalg (\mathbb{C})_1 \right) / \sim, \quad (\mathbb{C})_0 \ni x \sim x^{-1} \in (\mathbb{C})_1.$$

Dacă $v \in \mathbb{Z}$, atunci $\lambda_v(z) = z^v$.

Pentru $v > 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} z^v = 0$ în $(\mathbb{C})_0$.

Dacă $v < 0$, atunci $\lim_{z \rightarrow 0} z^v$ nu există în $(\mathbb{C})_0$, dar există în $(\mathbb{C})_1$ după cum se poate observa înlocuind z cu z^{-1} .

Dacă $v = 0$, atunci $\lim_{z \rightarrow 0} z^v = 1$ există și aparține lui \mathbb{C}^* , iar $1 \in (\mathbb{C})_0$ se identifică cu $1 \in (\mathbb{C})_1$. În concluzie,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^v \text{ există în } \begin{cases} \mathbb{C}^* & \text{dacă } v = 0 \text{ i.e. } v \in S_0 \\ (\mathbb{C})_0 = X_{\sigma_0} & \text{dacă } v \in S_{\sigma_0} \\ (\mathbb{C})_1 = X_{\sigma_1} & \text{dacă } v \in S_{\sigma_1} \end{cases}$$

și

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^v \text{ nu există în } \begin{cases} \mathbb{C}^* & \text{dacă } v \neq 0 \text{ i.e. } v \notin S_0 \\ (\mathbb{C})_0 = X_{\sigma_0} & \text{dacă } v \notin S_{\sigma_0} \\ (\mathbb{C})_1 = X_{\sigma_1} & \text{dacă } v \notin S_{\sigma_1} \end{cases}$$

În cazul general, vom întâlni același fenomen, care se bazează pe observația simplă următoare : dacă $u \in M$ și $v \in N$ sunt două elemente fixate, atunci condiția $\langle u, v \rangle \geq 0$ este echivalentă cu existența limitei $\lim_{z \rightarrow 0} z^{\langle u, v \rangle}$ în \mathbb{C} . În acest caz, limita este :

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{\langle u, v \rangle} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \langle u, v \rangle > 0, \\ 1 & \text{dacă } \langle u, v \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Observația 4.28 Am definit, pentru un con poliedral rațional ascuțit din \mathbb{R}^n , un punct x_σ din varietatea X_σ , numit punctul distins al lui X_σ , care corespunde morfismului de monoizi :

$$S_\sigma \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot), u \mapsto \begin{cases} 1 & \text{dacă } u \in \sigma^\perp, \\ 0 & \text{altminteri,} \end{cases}$$

iar dacă σ, σ' sunt două conuri cu o față comună τ , atunci prin lipirea varietăților X_σ și $X_{\sigma'}$ după deschisul comun X_τ , punctul $x_\tau \in X_\tau \subset X_\sigma$ coincide cu $x_\tau \in X_\tau \subset X_{\sigma'}$, deci avem un punct distins bine definit x_τ în varietatea torică abstractă. În concluzie, pentru orice evantai Δ din \mathbb{R}^n și pentru orice con $\tau \in \Delta$, avem câte un punct distins x_σ , mai mult, toate aceste puncte sunt distincte.

Propoziția 4.29 *Notățiile ca mai sus. Fie $\sigma \in \Delta$ și v în interiorul relativ al lui σ . Atunci $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) = x_\sigma$.*

Demonstrație. Problema fiind de natură locală, ne restrângem la cazul afin. Observăm că $\lambda_v(z) \in X_\sigma$, privit ca morfism de monoizi $S_\sigma \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$, acționează astfel

$$\lambda_v(z)(u) = \chi^u(\lambda_v(z)) = z^{\langle u, v \rangle}, \forall u \in S_\sigma.$$

În acest caz, $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$ există dacă și numai dacă $\lim_{z \rightarrow 0} z^{\langle u, v \rangle}$ există pentru orice $u \in S_\sigma$, ceea ce este echivalent cu $\langle u, v \rangle \geq 0$, pentru orice $u \in S_\sigma$. Această ultimă condiție, împreună cu Teorema de Dualitate și cu raționalitatea conului σ este echivalentă cu $v \in \sigma$. Din relația 4.1, rezultă că limita $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$ coincide cu x_σ . \square

Corolarul 4.30 *Dacă v nu aparține nici unui con din eventaiul Δ , atunci $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$ nu există.*

Concluzia. $\sigma \cap N = \{v, \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) \text{ există}\}$, iar pentru $v \in \sigma \cap N$, $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) = x_\tau$, unde τ este cea mai mică față care conține punctul v .

4.7 Structura Orbitelor.

Așa cum am menționat înainte, pe orice varietate torică n -dimensională X_Δ avem o acțiune naturală a torului T_n în așa fel încât torul poate fi identificat cu una din orbitele acestei acțiuni (orbita punctului distins x_0 pentru precizare). Cum X_Δ este în mod evident reuniunea disjunctă a orbitelor sale, într-un limbaj mai puțin academic putem spune că X_Δ este obținută adăugând "ceva" torului algebric n -dimensional $T_n = (\mathbb{C}^*)^n$. În această Secțiune, vom explicita acest "ceva" suplimentar și vom vedea că este de fapt o reuniune de toruri algebrice de dimensiune inferioară. În fine, vom descrie închiderile tuturor orbitelor acțiunii torului T_n și vom arăta că acestea sunt la rândul lor varietăți torice scufundate invariant în X_Δ .

Pentru edificare, începem cu două exemple familiare.

Exemplul 4.31 (Dreapta proiectivă) Acțiunea torului 1-dimensional \mathbb{C}^* pe dreapta proiectivă \mathbb{P}^1 este dată de :

$$\lambda \cdot [z_0 : z_1] = [z_0 : \lambda z_1] = [\lambda^{-1} z_0 : z_1].$$

Atunci

- $\lambda \cdot [1 : 0] = [1 : 0]$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
- $\lambda \cdot [0 : 1] = [0 : 1]$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
- orice punct $[z_0 : z_1]$ cu $z_0 z_1 \neq 0$ se află în orbita deschisă a punctului distins $[1 : 1]$. (PENDING: de explicitat punctele distinse ale var cunoscute în secțiunea respectivă)

Remarcăm că numărul de orbite coincide cu numărul de conuri de evantaiul de definiție a dreptei proiective, adică 3.

Exemplul 4.32 (Planul proiectiv) Acțiunea torului 2-dimensional T_2 pe planul proiectiv \mathbb{P}^2 este dată de :

$$(\lambda_1, \lambda_2) \cdot [z_0 : z_1 : z_2] = [z_0 : \lambda_1 z_1 : \lambda_2 z_2].$$

Atunci

- $T_2 \cdot [1 : 0 : 0] = [1 : 0 : 0]$.
- $T_2 \cdot [0 : 1 : 0] = [0 : 1 : 0]$.
- $T_2 \cdot [0 : 0 : 1] = [0 : 0 : 1]$.
- mulțimea $\{[0 : z_1 : z_2], z_1 z_2 \neq 0\}$ este orbita punctului $[0 : 1 : 1]$.
- mulțimea $\{[z_0 : 0 : z_2], z_0 z_2 \neq 0\}$ este orbita punctului $[1 : 0 : 1]$.
- mulțimea $\{[z_0 : z_1 : 0], z_0 z_1 \neq 0\}$ este orbita punctului $[1 : 1 : 0]$.

- orice punct $[z_0 : z_1 : z_2]$ cu $z_0 z_1 z_2 \neq 0$ se află în orbita deschisă a punctului distins $[1 : 1 : 1]$.

Remarcăm că numărul de orbite coincide cu numărul de conuri de evantaiul de definiție a dreptei proiective, adică 7.

Exemplele de mai sus nu scot la iveală nici o coincidență stranie. Vom arăta că întotdeauna numărul de orbite va coincide cu numărul de conuri din evantaiul de definiție.

Fixăm notațiile. Considerăm $N \cong \mathbb{Z}^n$ o latice de dimensiune n , $E = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $M = \check{N} \subset \check{E} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. $\Delta \subset V$ un evantai din N și X_{Δ} varietatea torică asociată evantaiului Δ . Torul n -dimensional $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ se scufundă în X_{Δ} ca orbita punctului distins x_0 .

Reamintim că pentru orice con $\sigma \in \Delta$ avem punctul distins $x_{\sigma} \in X_{\sigma} \subset X_{\Delta}$ care corespunde morfismului de monoizi :

$$S_{\sigma} := \check{\sigma} \cap M \rightarrow \mathbb{C}, u \mapsto \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \in \sigma^{\perp} \\ 0, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Definim O_{σ} ca fiind orbita lui x_{σ} , i.e. $O_{\sigma} := T_N \cdot x_{\sigma}$.

Ca să înțelegem structura orbitei O_{σ} , trebuie să înțelegem structura stabilizatorului lui x_{σ} . Pentru acest scop, definim :

$$N_{\sigma} := \text{sublaticea generată de } \sigma \cap N. \quad (4.2)$$

Atunci $T_{\sigma} := N_{\sigma} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ este un subtor al lui T_N .

Latticea N_{σ} va juca un rol esențial în cele ce urmează. Să punctăm una din proprietățile sale :

Observația 4.33 Latticea duală a lui N_{σ} este $N_{\sigma}^{\vee} \cong M/\sigma^{\perp} \cap M$. (PENDING) de demonstrat.

Propoziția 4.34 T_{σ} coincide cu stabilizatorul punctului x_{σ} .

Demonstrație. Fie $t \in T_N$ un punct care corespunde unui morfism de monoizi $t : M \rightarrow \mathbb{C}^*$. Atunci $t \cdot x_{\sigma} : S_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ este produsul uzual de aplicații, iar $t \cdot x_{\sigma} = x_{\sigma}$ dacă și numai dacă $t(u) = 1$ pentru orice $u \in \sigma^{\perp}$. Stabilizatorul lui x_{σ} va fi grupul :

$$\text{Stab}(x_{\sigma}) := \{t \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \mathbb{C}^*), t(u) = 1, \text{ pentru orice } u \in \sigma^{\perp} \cap M\},$$

deci

$$\text{Stab}(x_{\sigma}) \cong \text{Hom}_{\text{Mon}}(M/\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*).$$

Din Observația 4.33 rezultă că $\text{Stab}(x_{\sigma}) \cong N_{\sigma} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = T_{\sigma}$. □

În continuare, să remarcăm că N_σ este un subgrup saturat în N : dacă $n \in \mathbb{Z}$ și $v \in N$ așa încât $n.v \in N_\sigma$, atunci $v \in N_\sigma$. Aceasta se traduce prin faptul că grupul cât $N(\sigma) := N/N_\sigma$ este fără torsiune și atunci

$$N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = T_N/T_\sigma,$$

ceea ce arată că orbita O_σ , care se identifică în mod natural cu T_N/T_σ , este în fapt izomorfă cu un tor algebric de dimensiune $n - \dim(\sigma)$:

$$O_\sigma \cong T_{N(\sigma)}.$$

Propoziția 4.35 *Orice orbită a acțiunii lui T_N pe X_Δ este de forma O_τ pentru un con $\tau \in \Delta$.*

Demonstrație. Fie $x \in X_\Delta$ un punct arbitrar. Atunci x se găsește într-un deschis afin X_σ , pentru un con $\sigma \in \Delta$. Ca de obicei, privim x ca un morfism de monoizi : $x : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$. Reamintim că orice față a conului dual $\check{\sigma}$ este de forma $\tau^* = \tau^\perp \cap \check{\sigma}$, unde τ este o față a lui σ , Propoziția 2.51. Considerăm τ^* cea mai mică față a lui $\check{\sigma}$ care conține mulțimea $x^{-1}(\mathbb{C}^*)$; τ^* poate fi chiar $\check{\sigma}$. Arătăm că :

$$x^{-1}(\mathbb{C}^*) = \tau^* \cap M.$$

Direct din definiție, rezultă că $x^{-1}(\mathbb{C}^*) \subset \tau^* \cap M$, deci rămâne de arătat că $x^{-1}(\mathbb{C}^*) \supset \tau^* \cap M$.

Să observăm că $x^{-1}(\mathbb{C}^*)$ conține un punct din interiorul relativ al lui τ^* . În caz contrar, $x^{-1}(\mathbb{C}^*)$ ar fi inclus într-o reuniune $\tau_1 \cup \dots \cup \tau_k$ de fațete ale lui σ , din Observația 2.44. Alegem k minimal cu această proprietate (eliminând eventual o parte din fațete) și considerăm, pentru orice $i = 1, \dots, k$, câte un element $u_i \in (x^{-1}(\mathbb{C}^*) \cap \tau_i) \setminus (\cup_{j \neq i} \tau_j)$. Atunci $u_1 + \dots + u_k \in x^{-1}(\mathbb{C}^*) \subset \tau_1 \cup \dots \cup \tau_k$, deci există j pentru care $u_1 + \dots + u_k \in \tau_j$. Din Observația (REF), rezultă că orice u_i aparține lui τ_j în contradicție cu alegerea făcută.

Fie $u_0 \in x^{-1}(\mathbb{C}^*) \cap \text{relint}(\tau)$. Din Teorema 2.45, putem scrie τ ca o intersecție de semi-spații :

$$\tau^* = \bigcap (v_i)_{\geq 0}.$$

Deoarece u_0 este în interiorul relativ al lui τ^* , avem $\langle u_0, v_i \rangle > 0$, pentru orice i .

Considerăm $u \in \tau^* \cap M$. Pentru un număr întreg $k \gg 0$, avem $w = ku_0 - u \in \tau^*$ și atunci $u + w = ku_0 \in x^{-1}(\mathbb{C}^*)$, or această apartenență implică $u \in x^{-1}(\mathbb{C}^*)$. Am arătat egalitatea

$$x^{-1}(\mathbb{C}^*) = \tau^* \cap M = \tau^\perp \cap \check{\sigma} \cap M.$$

În continuare, morfismul $x : \check{\sigma} \cap M \rightarrow \mathbb{C}$ induce un morfism $x' : \tau^\perp \cap \check{\sigma} \cap M \rightarrow \mathbb{C}^*$. Deoarece σ este ascuțit, deci $\dim(\check{\sigma}) = n$, rezultă că morfismul x' se extinde la un morfism $x'' : \tau^\perp \rightarrow \mathbb{C}^*$. Se observă că :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tau^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \cong N(\tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong O_\tau.$$

Pentru fața $\tau \subset \sigma$, prin incluziunea $X_\tau \subset X_\sigma$, compunerea de incluziuni $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tau^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \cong O_\tau \subset X_\tau \subset X_\sigma$ identifică punctul x cu punctul x'' , prin urmare, $x \in O_\tau$. \square

4.8 Închiderile orbitelor.

În general orbitele acțiunii torului mare (PENDING: de spus undeva ca vorbim despre T_N ca despre torul mare) pe o varietate torică X_Δ nu sunt subvarietăți închise. De aceea, este interesant de studiat închiderile acestor orbite. Vom arăta ca ele sunt la rândul lor varietăți torice, iar incluziunea este un morfism toric.

Pentru aceasta (și nu numai) avem nevoie de noțiune de *star* a unui con :

Definiția 4.36 Fie N o latice de rang n , $\Delta \subset N_{\mathbb{R}}$ un evantai și $\tau \in \Delta$ un con. Starul lui τ , notat $\text{Star}(\tau)$ este mulțimea conurilor din Δ care conțin τ .

Fixăm τ un con din evantaiul Δ și notăm cu $N_\tau \subset N$ sublatticea generată de $\tau \cap N$. Am arătat (REF) că $N(\tau) := N/N_\tau$ este tot o latice. Starul unui con definește un evantai $\Delta(\tau)$ în spațiul $N(\tau)_{\mathbb{R}}$ în modul următor : pentru orice $\sigma \in \text{Star}(\tau)$ definim

$$\sigma(\tau) := (\sigma + (N_\tau)_{\mathbb{R}})/(N_\tau)_{\mathbb{R}} \subset N(\tau)_{\mathbb{R}}$$

și

$$\Delta(\tau) := \{\sigma(\tau), \sigma \in \text{Star}(\tau)\}.$$

Lema 4.37 Cu notațiile precedente, $\sigma(\tau)$ este un con poliedral rațional ascuțit.

Demonstrație. Faptul că $\sigma(\tau)$ este poliedral, precum și raționalitatea rezultă direct din proprietățile similare ale lui σ . Rămâne de arătat că $\sigma(\tau)$ este ascuțit, ceea ce este echivalent cu incluziunea :

$$(\sigma + (N_\tau)_{\mathbb{R}}) \cap (-\sigma + (N_\tau)_{\mathbb{R}}) \subset (N_\tau)_{\mathbb{R}}.$$

Fie $v \in (\sigma + (N_\tau)_{\mathbb{R}}) \cap (-\sigma + (N_\tau)_{\mathbb{R}})$. Atunci există $v_1, v_2 \in \sigma$ și $w_1, w_2 \in (N_\tau)_{\mathbb{R}}$ astfel încât $v = v_1 + w_1 = -v_2 + w_2$. Deoarece $(N_\tau)_{\mathbb{R}} = \tau + (-\tau)$, există $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \tau$ așa încât $w_1 = a_1 - b_1$ și $w_2 = a_2 - b_2$. Obținem

$$v_1 + a_1 + v_2 + b_2 = a_2 + b_2 \in \tau.$$

Cum τ este o față a lui σ , deducem că $v_1, v_2 \in \tau$. □

Lema 4.38 $\Delta(\tau)$ este un evantai în $N(\tau)_{\mathbb{R}}$.

Demonstrație. Printr-un argument similar celui din demonstrația Lemei anterioare, se arată că dacă $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Star}(\tau)$ și $\gamma = \sigma_1 \cap \sigma_2$, atunci $\gamma(\tau) = \sigma_1(\tau) \cap \sigma_2(\tau)$ (**Exercițiu:** completați detaliile demonstrației). □

Definiția 4.39 Varietatea torică $V(\tau) := X_{\Delta(\tau)}$ se numește închiderea abstractă a orbitei lui x_τ .

Terminologia este justificată de următorul rezultat :

Teorema 4.40 *Cu notațiile precedente, există o scufundare naturală $V(\tau) \hookrightarrow X_\Delta$ ca subvarietate închisă, a cărei imagine coincide cu închiderea orbitei O_τ și astfel încât torul lui $V(\tau)$ să corespundă orbitei O_τ ; în particular, avem*

$$\dim(V(\tau)) = n - \dim(\tau).$$

Demonstrație. Notăm $M = \check{N}$. Vom scufunda $V(\tau)$ în $\cup_{\sigma \in \text{Star}(\tau)} X_\sigma$ și arătăm că această scufundare verifică proprietățile cerute, după care demonstrăm că $V(\tau)$ este închisă în X_Δ .

Considerăm $\sigma \in \text{Star}(\tau)$; deoarece $N(\tau)^\vee = \tau^\perp \cap M$ (REF), rezultă că

$$\sigma(\tau)^\vee \cap M(\tau) = \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M,$$

deci $X_{\sigma(\tau)} = \text{Specm}(\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M])$.

Vrem să construim un morfism toric $X_{\sigma(\tau)} \rightarrow X_\sigma$, sau, echivalent, un morfism de monoizi

$$\pi_\sigma : S_\sigma = \check{\sigma} \cap M \rightarrow S_{\sigma(\tau)} = \check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M.$$

(PENDING) □

Aplicație : Varietăți Torice Compacte.

Definiția 4.41 *Un evantai Δ din \mathbb{R}^n se numește complet dacă $\cup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^n$.*

Lema 4.42 *Dacă Δ este complet și $\tau \in \Delta$, atunci $\Delta(\tau)$ este un evantai complet.*

Demonstrație. (PENDING) □

Teorema 4.43 *O varietate torică X_Δ este compactă dacă și numai dacă evantaiul de definiție Δ este complet.*

Demonstrație. (PENDING) □

Capitolul 5

Varietăți Torice Proiective.

5.1 Subvarietăți Invariante ale Spațiului Proiectiv.

(PENDING)

5.2 Politopuri.

Spre deosebire de teoria conurilor, unde am lucrat cu hiperplane (și subspații) liniare, aici vom lucra cu hiperplane *afine*.

Definiția 5.1 • Un politop K într-un spațiu vectorial real finit dimensional E este acoperirea convexă a unui număr finit de puncte v_0, \dots, v_N i.e.

$$K = \text{conv}(v_0, \dots, v_N) := \left\{ \sum_{i=0}^N \lambda_i v_i, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1 \right\}$$

- Direcția lui K este spațiul director al spațiului afin generat de v_0, \dots, v_N .
- Dimensiunea lui K este dimensiunea direcției sale.
- Un hiperplan suport al lui K este un hiperplan H din E cu $H \cap K \neq \emptyset$ și pentru care există $u \in \check{E}$ și $r \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$H = \{v \in E, \langle u, v \rangle = r\}$$

și

$$\langle u, v \rangle \geq r, \text{ pentru orice } v \in K.$$

- O față a lui K este intersecția lui K cu un hiperplan suport ori mulțimea vidă.
- O fațetă a lui K este o față F cu $\dim(F) = \dim(K) - 1$.
- Un vârf al lui K este o față zero-dimenională (un punct).

Oricărui politop K din E i se poate asocia *conul generat* de $K \times 1$ din $E \times \mathbb{R}$, notat cu $C(K)$ și definit prin :

$$C(K) := \sigma(K \times 1) = \{(v, t) \in E \times \mathbb{R}_+, v \in t.K\}.$$

Conul $C(K)$ este, după cum se poate observa, un con ascuțit. Reciproc, considerând un con poliedral C din $E \times \mathbb{R}$ pentru care intersecția $K = C \cap (E \times 1)$ este nevidă și mărginită (ceea ce implică și C ascuțit), această intersecție va fi un politop. Asocierile $K \mapsto C(K)$, $C \mapsto C \cap (E \times 1)$ sunt bijecții inverse una celeilalte. Toate proprietățile demonstrate pentru conuri poliedrale vor avea un corespondent perfect pentru politopuri, folosind aceste bijecții. Fețele lui K și ale lui $C(K)$ de asemenea corespund.

Propoziția 5.2 *Dacă $\tau \subset C(K)$ este o față a lui $C(K)$, atunci $F := \tau \cap (E \times 1)$ este o față a lui K cu $\dim(F) = \dim(\tau) - 1$. Această asociere stabilește o corespondență bijectivă și crescătoare față de relația de incluziune între fețele lui $C(K)$ și fețele lui K , a cărui inversă este $F \mapsto C(F)$.*

Demonstrație. O față a lui K este de forma

$$F := K \cap \{v \in E, \langle u, v \rangle = r\},$$

unde $r \in \mathbb{R}$, și $u \in \check{E}$, cu $\langle u, v \rangle \geq r$ pentru orice $v \in K$. Atunci pentru orice $(v, t) \in C(K)$, avem $\langle u, v \rangle - rt \geq 0$, adică $(u, -r) \in C(K)$. Conul $\tau = C(F)$ este egal cu

$$\tau = \sigma \cap \{(v, t), \langle u, v \rangle = rt\} = (u, -r)^\perp,$$

deci este o față nenulă a lui $C(K)$ și $C(F) \cap (E \times 1) = F$.

Reciproc, fie τ o față nenulă a lui $C(K)$, atunci $\tau = C(K) \cap (u, s)^\perp$, unde $(u, s) \in C(K)^\vee$. Cu alte cuvinte, avem :

$$\langle u, v \rangle + st \geq 0, \text{ pentru orice } (v, t) \in C(K)$$

și

$$\tau = \{(v, t) \in C(K), \langle u, v \rangle + st = 0\}.$$

Notăm $F = \tau \cap (E \times 1) \neq \emptyset$. Atunci avem $\langle u, v \rangle \geq -s$ pentru orice $v \in K$ și

$$F = \{v \in K, \langle u, v \rangle = -s\}.$$

□

Observația 5.3 Fațetele lui K sunt în corespondență bijectivă cu fațetele lui $C(K)$, iar fețe nule a lui $C(K)$ îi corespunde fața vidă a lui K .

Observația 5.4 Deoarece orice con poliedral ascuțit este o intersecție de semi-spații, din Teorema 2.45 rezultă că orice politop este o intersecție de semi-spații afine, adică există $a_i \in \mathbb{R}$ și $u_i \in \check{E}$, $i = 1, \dots, s$, așa încât

$$K = \bigcap_{i=1}^s \{v, \langle u_i, v \rangle \geq -a_i\}.$$

O intersecție finită de semi-spații afine se numește *poliedru convex*. Politopurile sunt deci poliedre convexe mărginite.

Următoarea propoziție rezultă direct din proprietățile analoage pentru conuri.

Propoziția 5.5 Fie $K \subset E$ un politop convex. Atunci :

1. Orice față a lui K este un politop convex.
2. O intersecție de fețe a lui K este o față a lui K .
3. O față a unei fețe a lui K este o față a lui K .
4. Orice față a lui K diferită de K este conținută într-o fațetă.
5. Orice față a lui K este intersecția fațetelor ce o conțin.
6. În cazul în care K este de dimensiune maximă, frontiera topologică a lui K coincide cu reuniunea fețelor (sau fațetelor) lui K .

Folosind faptul că orice con ascuțit este generat de razele sale, Propoziția 2.60, obținem :

Propoziția 5.6 K este acoperirea convexă a mulțimii vârfurilor sale.

Definiția 5.7 Fie K un politop convex și fie F o față a lui K . Definim conul barieră a lui K la F ca fiind conul C_F generat de diferențele : $v - w$ cu $v \in K$ și $w \in F$.

Propoziția 5.8 Conul C_F este un con convex poliedral și $C_F \cap (-C_F)$ coincide cu direcția lui F . În particular, C_F este ascuțit dacă și numai dacă F este un vârf al lui K .

Demonstrație. (PENDING) □

În ceea ce privește teoria de dualitate, se definește mulțimea polară K° a unui politop convex K din spațiul E prin :

$$K^\circ := \{u \in \check{E}, \langle u, v \rangle \geq -1, \text{ pentru orice } v \in K\}.$$

Observația 5.9 Înlocuind -1 cu un alt număr negativ $-a$ în definiția de mai sus a mulțimii polare, diferența între definițiile este de o omotetie.

Propoziția 5.10 Presupunem că $\dim(K) = \dim(E)$ și că originea lui E se află în interiorul lui K . Atunci K° este un politop.

Demonstrație. Considerăm $C(K) \subset E \times \mathbb{R}$ și dualul său $C(K)^\vee \subset \check{E} \times \mathbb{R}$:

$$C(K)^\vee := \{(u, s), \langle u, v \rangle + st \geq 0 \text{ pentru orice } (v, t) \in C(K)\}.$$

Atunci

$$C(K)^\vee \cap (\check{E} \times 1) = K^\circ.$$

Deoarece $C(K)^\vee$ este un con ascuțit, rămâne doar de arătat că mulțimea K° este mărginită. Or, mărginirea mulțimii polare este echivalentă cu condiția $0 \in \text{Int}(K)$. (PENDING) □

Observația 5.11 În general, mulțimea polară a unui politop este un poliedru convex.

Teorema 5.12 (Teorema de Dualitate) Presupunem $\dim(K) = \dim(E)$ și $0 \in \text{Int}(K)$. Atunci $(K^\circ)^\circ = K$.

Demonstrație. Este suficient să arătăm egalitatea $C(K) = C(K^\circ)^\vee$. Din definiția conului dual, avem :

$$C(K)^\vee = \left\{ (u, s), \left\langle u, \frac{1}{t}v \right\rangle + s \geq 0 \text{ pentru orice } \frac{1}{t}v \in K \right\} \cup \{0\}.$$

În egalitatea de mai sus, faptul că $0 \in K$ implică $s \geq 0$. Pe de altă parte, avem :

$$C(K^\circ) = \{(u, s) \in \check{E} \times \mathbb{R}_+^*, \langle u, v \rangle + s \geq 0 \text{ pentru orice } v \in K\} \cup \{0\},$$

deci $C(K)^\vee = C(K^\circ)$. Din Teorema de Dualitate pentru conuri avem $C(K)^\vee{}^\vee = C(K)$. \square

Pentru construcția practică a politopurilor polare se folosește egalitatea menționată anterior

$$K^\circ = C(K)^\vee \cap (\check{E} \times 1)$$

și procedeul practic de construcție a conurilor duale.

Exemplul 5.13 Fie $K = \text{conv}(0, e_1, e_2) \subset \mathbb{R}^2$, unde $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ este baza canonică. Atunci $K^\circ = \{(u_1, u_2), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$ nu este un politop.

Exemplul 5.14 Ca în exemplul precedent, fie $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ și $\{\check{e}_1, \check{e}_2\} \subset \check{\mathbb{R}}^2$ baza canonică. Considerăm politopul $K = \text{conv}(2e_1 - e_2, -e_1 + 2e_2, -e_1 - e_2) \subset \mathbb{R}^2$. Atunci $K^\circ = \text{conv}(\check{e}_1, \check{e}_2, -\check{e}_1 - \check{e}_2)$.

Exemplul 5.15 Pentru

$$K = \text{conv}(\pm e_1, \pm e_2) := \text{conv}(e_1, -e_1, e_2, -e_2) \subset \mathbb{R}^2$$

avem : $K^\circ = \text{conv}(\pm \check{e}_1 \pm \check{e}_2)$.

Exemplul 5.16 Analog exemplului precedent, pentru

$$K = \text{conv}(\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3) := \text{conv}(e_1, -e_1, e_2, -e_2, e_3, -e_3) \subset \mathbb{R}^3$$

avem : $K^\circ = \text{conv}(\pm \check{e}_1 \pm \check{e}_2 \pm \check{e}_3)$.

Propoziția 5.17 Presupunem că $\dim(K) = \dim(E)$ și $0 \in \text{Int}(K)$, iar F este o față a lui K . Atunci

$$F^* := \{u \in K^\circ, \langle u, v \rangle = -1, \text{ pentru orice } v \in F\},$$

este o față a lui K° , iar corespondența :

$$F \mapsto F^*$$

este o aplicație bijectivă, descrescătoare față de relația de incluziune între fețele lui K și cele ale lui K° , cu

$$\dim(F) + \dim(F^*) = \dim(E) - 1.$$

5.3 Varietatea Torică Asociată unui Politop Laticial.

În geometria torică vom lucra cu politopuri dintr-un spațiu de tipul $E = N_{\mathbb{R}}$, unde N este o latică (sau în spațiul dual $\check{N}_{\mathbb{R}}$).

Definiția 5.18 Un politop din $N_{\mathbb{R}}$ se numește laticial, respectiv rațional dacă vârfurile sale fac parte din latică N , respectiv din spațiul $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Observația 5.19 Un politop $K \subset N_{\mathbb{R}}$ este rațional dacă și numai dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k.K$ să fie laticial. În plus, K rațional implică K° este de asemenea rațional.

Observația 5.20 Polarul unui politop laticial nu este neapărat laticial. De exemplu, considerăm $K = \text{conv}(-1, 2) \subset \mathbb{R}$, atunci $K^{\circ} = \text{conv}(-\frac{1}{2}, 1) \subset \mathbb{R}$.

Pornind de la un politop laticial K din $N_{\mathbb{R}}$ care conține 0 în interiorul său, putem defini un evantai complet din $N_{\mathbb{R}}$ ale cărui conuri sunt conurile generate de fețele lui K . Totuși, în practică va fi mai convenabil să pornim de la un politop laticial P din spațiul dual $M_{\mathbb{R}} = \check{N}_{\mathbb{R}}$ cu $\dim(P) = \dim(M_{\mathbb{R}})$ și să construim un evantai Δ_P în $N_{\mathbb{R}}$ (va trebui să arătăm totuși că Δ_P este într-adevăr un evantai, vezi Propoziția 5.21) ale cărui conuri să fie dualele conurilor barieră :

$$\Delta_P := \{\check{C}_Q\}_{Q \subset P \text{ față}}.$$

Pentru orice față Q a lui P vom avea deci un con $\sigma_Q = \check{C}_Q$ în mulțimea Δ_P , numit *conul normal la Q* și descris prin :

$$\sigma_Q := \{v \in N_{\mathbb{R}}, \langle u, v \rangle \leq \langle u', v \rangle, \text{ pentru orice } u \in Q, u' \in P\}.$$

Avantajul acestei abordări este faptul că mulțimea $\{\check{C}_Q\}_{Q \subset P \text{ față}}$ nu se schimbă dacă înlocuim P cu un multiplu al său $k.P$ sau chiar cu un traslatat al său $P + a$ cu $a \in M_{\mathbb{R}}$, deoarece conurile barieră rămân aceleași.

Propoziția 5.21 Mulțimea Δ_P este un evantai complet din $N_{\mathbb{R}}$. În plus, dacă $0 \in \text{Int}(P)$, atunci Δ_P coincide cu evantaiul format din conurile generate de fețele politopului polar K° .

Demonstrație. Am văzut că pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ și orice $u \in M$ avem egalitatea $\Delta_P = \Delta_{k.P+u}$. Putem presupune atunci că $0 \in \text{Int}(P)$ și arătăm că Δ_P este format din conurile generate de fețele lui P . Considerăm $Q \subsetneq P$ o față proprie (cazul $Q = P$ este trivial, deoarece avem $\sigma_Q = \{0\}$) și

$$Q^* := \{v \in P^{\circ}, \langle u, v \rangle = -1, \text{ pentru orice } u \in Q\}.$$

Știm (REF) că

$$\dim(Q) + \dim(Q^*) = \dim(N_{\mathbb{R}}) - 1.$$

Arătăm că σ_Q coincide cu conul $\sigma(Q^*)$ generat de Q^* .

Deoarece $Q^* \subset \sigma_Q$ din definiție, rezultă incluziunea $\sigma(Q^*) \subset \sigma_Q$. Pentru a arăta incluziunea reciprocă, alegem $v \in \sigma_Q \setminus \{0\}$, atunci $\langle u', v \rangle \leq \langle u, v \rangle$ pentru orice $u \in Q$ și $u' \in P$. De aici deducem că $\langle \cdot, v \rangle$ este constantă pe Q , pe care o notăm cu c . Am presupus $0 \in \text{Int}(P)$ ceea ce implică $c < 0$, deci $-\frac{1}{c}v \in Q^*$, ceea ce arată că $v \in \sigma(Q^*)$.

Completitudinea reiese din condiția $0 \in \text{Int}(P^{\circ})$. □

În concluzie, unui politop laticial $P \subset M_{\mathbb{R}}$ i se asociază o varietate torică compactă, notată X_P . În plus, avem $X_{k \cdot P + u} = X_P$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ și orice $u \in M$. Vom arăta în Secțiunea următoare că varietatea X_P este proiectivă.

Exemplul 5.22 Considerăm $P = \text{conv}(0, \check{e}_1, \dots, \check{e}_n) \subset \check{\mathbb{R}}^n$, unde $\{\check{e}_1, \dots, \check{e}_n\} \subset \check{\mathbb{R}}^n$ este duala bazei canonice din \mathbb{R}^n . Atunci $X_P = \mathbb{P}^n$.

Observația 5.23 Dacă laticia inițială M se descompune într-o sumă de două sublatice: $M_1 \oplus M_2$, iar P este un produs de două politopuri laticiale $P = P_1 \times P_2$, atunci $X_P = X_{P_1} \times X_{P_2}$. De exemplu, cu notațiile uzuale, dacă $P = \text{conv}(\pm \check{e}_1 \pm \dots \pm \check{e}_n) \subset \check{\mathbb{R}}^n$, atunci $P = [-1, 1]^n$, deci $X_P = \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$, produs de n factori.

Propoziția 5.24 *Varietatea X_P este netedă dacă și numai dacă pentru orice vârf $Q \in P$, conul barieră C_Q este generat de o bază a lui M peste \mathbb{Z}*

Demonstrație. Folosim criteriul de netezime (Teorema (REF)) și faptul că regularitatea conurilor este o proprietate auto-duală. □

5.4 Morfisme Asociate Politopurilor Laticiale.

5.5 Aplicația Moment.

5.6 Topologia Varietăților Netede și Proiective.

Scopul acestei Secțiuni este de a studia topologia varietăților netede asociate politopurilor raționale. Vom porni de la o latică N , considerăm laticia duală $M = \check{N}$ și $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politop rațional cu $\dim(P) = \text{rang}(M)$ și considerăm X_P varietatea proiectivă asociată.

5.7 Polinomul Ehrhart.

Bibliografie

- [AM69] M. F. Atiyah, I. G. Macdonalds, *Commutative Algebra*. Addison-Wesley, 1969
- [BBBC00] G. Barthel, L. Bonvero, M. Brion, D. Cox, *Geometry of Toric Varieties*. Lecture Series, Summer School on the Geometry of Toric Varieties, Grenoble 2000.
- [Bo04] L. Bonavero, *Sur le nombre de sommets des polytopes entiers*. C.N.R.S. 2004, 33–40.
- [Da78] V. I. Danilov, *The Geometry of Toric Varieties*. Russian Math. Surveys **33**:2 (1978), 97–154.
- [Ew96] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Grad. Texts Math. **168**, Springer Verlag 1996.
- [Fu93] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*. Ann. Math. Studies **131**, Princeton Univ. Press 1993.
- [Ha77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Grad. Texts Math. **52**, Springer Verlag 1977.
- [Hu74] Th. W. Hungerford, *Algebra*. Grad. Texts Math. **73**, Springer Verlag 1974.
- [Mu04] M. Mustața, *Lectures on Toric Varieties*, Michigan 2004.
- [Od85] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Erg. Math. Grenzgeb. **15**, Springer Verlag 1985.
- [Ro70] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton 1970.
- [Se55] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*. Ann. Math **61**:2 (1955), 197–278.
- [Sa76] I. R. Șafarevici, *Bazele Geometriei Algebrice*. Ed. Șt. Ped., București 1976.