

Raport Stiintific

Proiect PN-III-P1-1.1-TE-2019-2275

Hiperbolicitate partiala pentru diffeomorfismele polinomiale ale lui \mathbb{C}^2

Perioada de raportare: 01/01/2021 - 31/12/2022

1. Articole si preprinturi

Obiectivele proiectului au fost indeplinite si au rezultat urmatoarele manuscrite/preprinturi:

1. R. Radu, R. Tanase, *Complex Hénon maps with a semi-neutral fixed point*, preprint 2021, in evaluare
2. R. Radu, R. Tanase, *Global models for the Julia set J^+* , preprint 2021, in evaluare
3. C. Benea, Y. Zhai, *Multi-parameter flag Leibniz rules of arbitrary complexity in mixed-norm spaces*, preprint 2021, arXiv:2107.01426, in evaluare (78 pag)
4. T. Firsova, R. Radu, R. Tanase, *Critical locus for Hénon maps in an HOV region*, preprint 2022, arXiv:2211.12430, (49 pag), in evaluare
5. R. Radu, R. Tanase, *Semi-parabolic curves in the parameter space of complex Hénon maps*, preprint 2022, in evaluare
6. R. Radu, R. Tanase, *Horseshoes near semi-parabolic parameters*, in lucru
7. T. Firsova, R. Radu, J. Raissy, R. Tanase, L. Vivas, *Neutral germs of holomorphic diffeomorphisms of $(\mathbb{C}^2, 0)$* , in lucru

2. Prezentari la conferinte si seminarii

Rezultatele stiintifice obtinute in cadrul proiectului au fost diseminate de catre toti membrii proiectului la conferinte si seminarii internationale.

1. Raluca Tanase, *Titlu: The Critical Locus of a Dynamical System*, Women in Mathematics in South-Eastern Europe, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria, 8-9 decembrie 2022
2. Raluca Tanase, *Titlu: On partial hyperbolicity in the Hénon family*, Complex Dynamics in the Tropics - Celebrating Carsten Petersen's 60th birthday, IMPA, Rio de Janeiro, Brazilia, 27 noiembrie - 3 decembrie 2022
3. Raluca Tanase, *Titlu: Varietati critice in sisteme dinamice*, A XXIV-a Conferinta Anuala a Societatii de Stiinte Matematice din Romania, Universitatea Politehnica din Bucuresti, Romania, 28 octombrie 2022

4. Raluca Tanase, *Titlu: Hedgehogs in complex dynamics*, Arithmetic Dynamics International Online Seminar (ADIOS), 12 aprilie 2022; organizat online de York University, Canada si University of Cambridge, Anglia.
5. Remus Radu, *Titlu: Critical points in holomorphic dynamics*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, 11th edition, IMAR, Romania, 20 mai 2022
6. Raluca Tanase, *Titlu: Dynamics of Complex Hénon Maps*, Connections Workshop: Complex Dynamics - from special families to natural generalizations in one and several variables, MSRI, Berkeley, California, SUA, 2-4 februarie 2022
7. Remus Radu, *Titlu: Domenii de rotatie in sisteme dinamice*, Conferinta Cercetarii Stiintifice din Academia Romana (CCSAR-2021), Bucuresti, Romania, 22-23 noiembrie 2021
8. Cristina Benea, *Titlu: The non-resonant bilinear Hilbert-Carleson operator*, Les journées du GdR AFHP 2021, Besançon, Franta, 27-29 septembrie 2021
9. Raluca Tanase, *Titlu: Holomorphic dynamics in higher dimensions*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, 10th edition, Romania, 20 mai 2021
10. Cristina Benea, *Titlu: Despre transformata Hilbert biliniara maximal modulata*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, 10th edition, Romania, 20 mai 2021
11. Remus Radu, *Titlu: Dynamics of germs of diffeomorphisms with semi-neutral behavior*, IMAR Monthly Lectures, IMAR, Romania, 19 mai 2021
12. Remus Radu, *Titlu: Rigidity for complex Hénon maps*, Dynamics and Computations Seminar, Uppsala University, Suedia, 10 mai 2021
13. Raluca Tanase, *Titlu: On hyperbolicity and partial hyperbolicity in the Hénon family*, Dynamics and Computations Seminar, Uppsala University, Suedia, 18 mai 2021

In 2023 R. Tanase si R. Radu au fost invitati sa participe la urmatoarele evenimente, unde vor sustine expuneri pe baza rezultatele obtinute in cadrul proiectului:

14. Workshop *Dynamics of Henon Maps: Real, Complex and Beyond*, BIRS, Banff, Canada, 9-14 aprilie 2023:
<http://www.birs.ca/event/23w5038>
15. Programul de un semestru *Two dimensional maps*, Institut Mittag-Leffler, Stockholm, Suedia, 18 ianuarie - 28 aprilie 2023:
<http://www.mittag-leffler.se/langa-program/two-dimensional-maps>

3. Obiectivele prevazute/realizate

Toate obiectivele proiectului au fost realizate, dupa cum urmeaza:

- [Investigarea multimii critice \(critical locus\)](#). Acest obiectiv a fost indeplinit in articolul T. Firsova, R. Radu, R. Tanase, *Critical Locus in an HOV region*, unde studiem multimea critica pentru o clasa mare de difeomorfisme polinomiale ale lui \mathbb{C}^2 , si rezolvam o coniectura a lui John Hubbard. In articol demonstram mai mult decat a fost prevazut initial in proiect, pentru ca lucram nu doar pentru iacobian mic ci in context non-perturbativ; in plus, am reusit sa descriem si frontiera multimii critice, stabilind o legatura explicita intre aceasta si alte tipuri de multimii critice stabile/instabile din literatura.

Rezultatele au fost diseminate de R. Tanase la Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), Berkeley, California, SUA, unul dintre cele mai prestigioase centre de cercetare matematica din lume, in cadrul *Connections Workshop*. De asemenea au fost diseminate de R. Tanase la Bulgarian Academy of Sciences, in cadrul conferintei *Women in Mathematics in South-Eastern Europe* si de R. Radu la *Workshop for Young Researchers in Mathematics*, editia a 11-a, IMAR.

- [Studiul unor clase de aplicatii Hénon langa radacina \(cusp\) multimii Mandelbrot. O intelegere mai profunda a sistemelor dinamice olomorfe din \$\mathbb{C}^2\$ si a proprietatilor acestora cum ar fi caracterizare topologica a multimilor Julia.](#) Acest obiectiv a fost tratat in doua articole: R. Radu, R. Tanase, *Global models for the Julia set J^+ si Horseshoes near semi-parabolic parameters*. In primul articol construim modele topologice pentru functiile semi-parabolice cu o valoare proprie λ radacina a unitatii si Jacobian mic. Aceasta este o familie importanta de difeomorfisme polinomiale ale lui \mathbb{C}^2 care sunt global partial hiperbolice, dar nu hiperbolice. In cazul $\lambda = 1$ obtinem modele topologice pentru functiile semi-parabolice perturbate din radacina multimii Mandelbrot. In al doilea articol aratam ca, pentru iacobian suficient de mic, functiile cu dinamica semi-parabolica si multimea Julia conexa sunt in frontiera regiunii de functii cu dinamica hiperbolica si multime Julia total disconexa.

Rezultatele au fost diseminate de R. Radu in cadrul colocviului IMAR Monthly Lectures de la IMAR si de R. Tanase in cadrul conferintei *Complex Dynamics in the Tropics* organizata la Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, cel mai mare centru de cercetare matematica din Brazilia.

- [Identificare de noi potentiali parametri de hiperbolicitate/partial hiperbolicitate; Studiu numeric/experimental al aplicatiilor Hénon pentru obtinerea unei mai bune intelegeri a mecanismelor prin care se naste dinamica nonhiperbolica.](#)

Aceste obiective au fost tratate in articolul R. Radu, R. Tanase, *Semi-parabolic curves in the parameter space of complex Hénon maps*. In acest articol identificam noi potentiali parametri de partial hiperbolicitate si aratam cum pot fi perturbati in mod sistematic pentru a obtine parametrii hiperbolici. Acesti parametri nu au iacobian mic, si nu sunt perturbari singulare de polinoame quadratice. De asemenea studiem un sir de bifurcatii (tangente) ce conduc la formarea bazinelor semi-parabolice. Acesti parametri de bifurcatie nu au dinamica hiperbolica sau macar partial hiperbolica.

Rezultatele au fost diseminate de R. Tanase la conferinta *Complex Dynamics in the Tropics*, IMPA, Brazilia, la Uppsala University, Suedia, in cadrul *Dynamics and Computations Seminar*, si la *Workshop for Young Researchers in Mathematics*, editia a 10-a, Bucuresti.

- [Elaborarea unui manuscris cu rezultatele cunoscute despre dinamica aplicatiilor Henon cu un punct fix semi-neutru si Jacobian mic, centrate in jurul rezultatelor obtinute de membrii echipei.](#) Acest obiectiv a fost realizat in articolul R. Radu, R. Tanase, *Complex Hénon maps with a semi-neutral fixed point*, in care prezentam dinamica locala in jurul punctelor semi-neutre, evidentiind toate cele trei cazuri (semi-parabolic, semi-siegel, semi-neutru) in contextul aplicatiilor Hénon cu iacobian mic. Articolul este centrat in jurul rezultatelor obtinute de R. Radu si R. Tanase ([T], [RT1], [RT2]) si in colaborare cu T. Firsova si M. Lyubich ([FLRT], [LRT]), dar contine si o examinare amanuntita a ultimelor rezultate si progrese in acest domeniu de cercetare, obtinute de Lyubich & Peters [LP], Bedford, Smillie & Ueda [BSU], Gaidashev, Radu & Yampolsky [GRY], Yampolsky & Yang [YY], etc.

Rezultatele au fost diseminate de R. Radu la *Conferinta Cercetarii Stiintifice din Academia Romana* si in cadrul colocviului IMAR Monthly Lectures; si de R. Tanase in *Arithmetic Dynamics International Online Seminar*.

Rezultatele fiecarui articol in parte sunt sumarizate mai jos, impreuna cu o descriere stiintifica si tehnica.

4. Prezentarea rezultatelor obtinute

Pentru a stabili un context matematic comun pentru prezentarea rezultatelor obtinute, introducem aplicatiile Hénon complexe si multimile fractale asociate acestora. In articolul lor din 1989, Friedland si Milnor [FM] au catalogat difeomorfismele polinomiale ale lui \mathbb{C}^2 in trei clase: translatii si scalari, functii elementare (aplicatii cu dinamica decuplata) si aplicatii Hénon (cu dinamica mixta si comportament haotic). Asadar aplicatiile Hénon sunt cea mai reprezentativa clasa de difeomorfisme polinomiale ale lui \mathbb{C}^2 ; ele au o dinamica sofisticata, si putem intalni multe fenomene care nu sunt prezente in dinamica dintr-o singura variabila complexa. Prin dinamica, intelegem comportamentul punctelor sub iterate.

Aplicatiile Hénon complexe de gradul doi sunt functii de forma:

$$H_{c,a}(x, y) = (x^2 + c - ay, x), \quad a \neq 0$$

unde c si a sunt parametri din planul complex. Pentru fiecare difeomorfism definim urmatoarele multimi invariante: multimile K^+ si K^- de puncte care nu scapa la infinit sub iterate pozitive, respectiv negative ale difeomorfismului, complementele lor $U^\pm = \mathbb{C}^2 \setminus K^\pm$, intersectia lor $K = K^+ \cap K^-$, multimile fractale Julia $J^+ = \partial K^+$, $J^- = \partial K^-$ si $J = J^+ \cap J^-$. In context disipativ (i.e. $|a| < 1$), K^- nu are interior si $J^- = K^-$. Remarcam ca J^+ si J^- sunt frontierele topologice ale multimilor U^+ si U^- si sunt multimi fractale conexe, nemarginite in \mathbb{C}^2 [BS1].

Dupa cum a observat si Milnor [B], aplicatia Hénon este unic determinata de valorile proprii λ si μ ale derivatei sale la un punct fix. De aceea este uneori convenabil sa notam functia Hénon cu $H_{\lambda,\mu}$ pentru a evidenta aceasta dependentă. Fara a pierde din generalitate, putem presupune ca functia Hénon are un punct fix la origine, i.e. $H_{\lambda,\mu}(0) = 0$. Un punct fix se numeste *semi-neutru* daca derivata functiei in punctul respectiv are o singura valoare proprie de modul unu. Prin conventie λ este *valoare proprie neutra* ($|\lambda| = 1$), iar μ este *valoare proprie disipativa* ($|\mu| < 1$). Un punct fix se numeste *semi-parabolic* daca derivata functiei in punctul respectiv are o valoare proprie $\lambda = e^{2\pi ip/q}$, o radacina a unitatii, si o valoare proprie disipativa μ . Presupunem acum ca iacobianul functiei $H_{\lambda,\mu}$ la punctul fix are o valoare proprie neutra $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, si o valoare proprie disipativa μ . Fie $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^2$ o injectie olomorfa pentru care $H_{\lambda,\mu} \circ \phi = \phi \circ L$, unde $L : x \mapsto \lambda x$ este o rotatie irationala. Domeniul maxim $\phi(\mathbb{D}) = \Delta$ se numeste disc Siegel (sau domeniu de rotatie de tip Siegel), iar punctul fix se numeste *semi-Siegel*. Frontiera discului Siegel este o multime fractala invarianta, continuta in multimea Julia J . Un punct fix semi-neutru care nu este semi-parabolic sau semi-Siegel se numeste *semi-Cremer*. Asadar, daca aplicatia Hénon nu este liniarizabila pe o vecinatate a unui punct fix semi-neutru, atunci acel punct este semi-Cremer.

4.1. Complex Hénon maps with a semi-neutral fixed point.

In cadrul proiectului TE, R. Radu si R. Tanase au colaborat pe articolul *Complex Hénon maps with a semi-neutral fixed point* in care se analizeaza sistematic o clasa de aplicatii Hénon non-hiperbolice. Dinamica acestor functii variaza foarte mult in functie de proprietatile aritmetice ale valorii proprii neutre (de modul unu) si putem avea urmatoarele cazuri: semi-parabolic, semi-Siegel, sau semi-Cremer. In toate aceste cazuri tehnicile de analiza sunt foarte diferite

si aparent nelegate intre ele. In articol tratam unitar dinamica locala si globala a aplicatiilor Hénon cu puncte fixe semi-neutre, facem conexiuni intre tehnicile de analiza, prezentam rezultatele care s-au obtinut recent in domeniu (atat de autori cat si de alti cercetatori), si incercam sa oferim o perspectiva pentru viitoarele directii de cercetare. Acest articol sumarizeaza intr-o oarecare masura si starea de fapt a cercetarii aplicatiilor Hénon complexe care nu sunt hiperbolice.

4.2. Global models for the Julia set J^+ .

In cadrul proiectului TE, R. Radu a lucrat pe articolul *Global models for the Julia set J^+* , in special pe partea de analiza complexa si dinamica globala. In acest articol construim modele toplogice concrete pentru multimea Julia J^+ (un obiect fractal 3-dimensional, nemarginit, din \mathbb{C}^2) a unei familii de aplicatii Hénon complexe cu un punct fix semi-parabolic. In [RT1] am aratat ca aceasta clasa de functii este global partial hiperbolica, fara a fi hiperbolica. In [RT1] si [RT2] am caracterizat multimea J^+ folosind tehnica de limita inductiva intrudusa de Hubbard & Oberste-Vorth in [HOV1] si [HOV2]. Cu toate ca descrierea lui J^+ folosind limite inductive este utila, pentru ca ne permite sa deducem unele proprietati importante ale multimii Julia (cum ar fi laminaritatea), acesta este un obiect abstract, greu de vizualizat. In articolul de mai sus am adoptat o abordare complet noua care ne-a permis sa demonstram ca multimea Julia J^+ este homeomorfa cu $(\mathbb{S}^3 - \Sigma)/\sim$, unde \mathbb{S}^3 este sfera unitate din \mathbb{R}^3 , Σ un solenoid diadic, iar \sim o relatie de echivalenta. Multimea de parametri $(c, a) \in \mathbb{C}^2$ pentru care functia Hénon $H_{c,a}$ are un punct fix semi-parabolic cu o valoare proprie neutra egala cu 1 este o curba de ecuatie $c = (1 + a)^2/4$ care intersecteaza planul $a = 0$ in punctul $c = 1/4$ (radacina multimii Mandelbrot). Pentru aceasta familie speciala demonstram ca J^+ este homeomorfa cu o sfera 3-dimensionala din care scoatem un solenoid. Relatia de echivalenta este triviala in acest caz, iar acest model este similar cu cel descris de Bonnot in [Bo] pentru perturbarile polinoamelor din interiorul cardioidul principal al multimii Mandelbrot.

4.3. Critical locus for Hénon maps in an HOV region.

In acest articol am studiat multimea critica (critical locus) pentru difeomorfismele polinomiale in doua variabile complexe. Dezvoltam tehnici non-perturbative, studiem multimea critica pentru o clasa mare de aplicatii Hénon hiperbolice in regiuni parametrice de tipul HOV (cf. [OV]), dam un model topologic explicit si raspundem la o conjectura a lui John Hubbard. Regiunile HOV sunt domenii din spatiul parametric din \mathbb{C}^2 in care multimea Julia J a unei aplicatii Hénon este de tip horseshoe (total disconexa). In articol au fost studiate si alte proprietati ale multimii critice cum ar fi: dimensiune pura, monodromie, singularitati, frontiera accesibila, relatia cu multimea critica stabila si cu cea instabila introduse de Bedford si Smillie [BS5].

Starile de echilibru sau punctele critice (locul unde derivata functiei model se anuleaza) joaca un rol esential in studiul calitativ al sistemelor de ecuatii diferentiale ordinare, permit intelegerea traiectoriilor din vecinatatea lor, si sunt indispensabile pentru studiul dinamicii globale a sistemului. Deasemenea, dinamica polinoamelor intr-o variabila complexa este dictata intr-o mare masura de comportamentul punctelor critice. Difeomorfismele nu au puncte critice in sensul clasic, si atunci multimea critica \mathcal{C} este definita ca multimea tangentelor dintre doua foliatii analitice, a multimilor U^+ si U^- de puncte ce nu scapa la infinit sub iterate pozitive, respectiv negative. Pentru orice aplicatie Hénon, multimea critica este o submultime analitica inchisa nevida (ce poate avea singularitati) a multimii $U^+ \cap U^-$. In literatura de specialitate sunt doar cateva cazuri in care multimea critica este descrisa complet, toate in context perturbativ (Lyubich & Robertson [LR] au descris multimea critica pentru aplicatii Hénon care sunt perturbari din polinoame hiperbolice cu multimea Julia conexa, iar acelasi model tine si

pentru perturbari din polinoame parabolice [T], in timp ce Firsova [F] a descris multimea critica pentru aplicatii Hénon care sunt perturbari din polinoame hiperbolice cu multimea Julia disconexa).

Pentru a enunta rezultatele obtinute mai riguros, definim urmatoarele regiuni din spatiul parametric

$$HOV_\beta = \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 : |c| > \beta(1 + |a|)^2\}$$

indexate dupa $\beta \geq 2$. Aceste regiuni sunt de tipul HOV si sunt incluse in multimea horseshoe complexa (in aceasta regiune functia Hénon $H_{c,a}$ este hiperbolica pe multimea sa Julia $J_{c,a}$, iar $J_{c,a}$ este o multime Cantor). Am demonstrat urmatoarele teoreme:

- Exista $\beta \geq 2$ astfel incat pentru orice pereche $(c, a) \in HOV_\beta$, multimea critica a aplicatiei Hénon $H_{c,a}$ este o varietate analitica ireductibila, fara singularitati, de dimensiune pura egala cu unu.
- Pentru orice pereche $(c, a) \in HOV_\beta$, multimea critica a aplicatiei Hénon $H_{c,a}$ este homeomorfa cu o suprafata Riemann de gen infinit ce consta dintr-o multime numarabila de sfere trunchiate $(\mathcal{S}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (din fiecare emisfera a lui \mathcal{S}_k indepartam cate o multime Cantor) conectate intre ele printr-un numar variabil, dar finit de manere.
- In regiunea HOV_β , frontiera multimii critice este egala cu reuniunea celor doua multimi Julia $J^+ \cup J^-$. In acelasi timp frontiera accesibila a multimii critice este mult mai mica, si consta din $\mathcal{C}^s \cup \mathcal{C}^u$. In cazul hiperbolic, multimile J^+ si J^- sunt laminate de varietatile stabile, respectiv instabile ale punctelor din multimea Julia J , iar \mathcal{C}^s si \mathcal{C}^u reprezinta multimile punctelor critice stabile (tangente dintre foliatia lui U^- si laminatia lui J^+), respectiv instabile (tangente dintre foliatia lui U^- si laminatia lui J^-) studiate de Bedford si Smillie.

Aceste multimi \mathcal{C}^s si \mathcal{C}^u sunt foarte relevante pentru ca sunt legate de proprietati topologice si dinamice importante ale functiei Hénon, precum conectivitatea multimii Julia $J = J^+ \cup J^-$ si exponentii Lyapunov. Pentru o aplicatie Hénon generala, se stia (cf. [BS5]) doar ca inchiderea multimii critice intersecteaza atat multimea Julia J^+ cat si multimea Julia J^- .

4.4. Semi-parabolic curves in the parameter space of complex Hénon maps.

Am studiat hiperbolicitatea partiala, proprietatile dinamice si bifurcatiile unei familii de aplicatii Hénon complexe cu unul sau doua bazine parabolice, si am descris succesiunea tangentelor heteroclinice ce duc la formarea celui de-al doilea bazin parabolic. Am evidentiat mecanisme noi de detectare a partial hiperbolicitatii si apoi a hiperbolicitatii bazate pe intersectii de curbe semi-parabolice. Clasa de functii Hénon cu doua bazine parabolice nu contine mici perturbari de polinoame, iar studiul acestor sisteme dinamice este o directie noua de cercetare. Clasa de functii Hénon cu un bazin parabolic, obtinuta prin perturbari singulare de polinoame parabolice, este bine inteleasa din munca noastra anterioara [RT1] si [RT2] unde am demonstrat ca este o familie de aplicatii partial hiperbolice, care se afla in frontiera regiunii de hiperbolicitate.

Intr-un articol din Experimental Mathematics, Milnor [M] a scos in evidenta un fenomen nou (denumit “Milnor swallows”) din spatiul parametric al aplicatiilor Hénon. In acelasi spirit ne dorim sa abordam si fenomenele din acest articol. Acesta directie de cercetare este motivata si de intrebarile lui J. Hubbard si M. Lyubich: exista aplicatii Hénon complexe care sunt hiperbolice sau partial hiperbolice si nu provin din perturbari de polinoame?

Partial hiperbolicitatea reprezinta o relaxare a notiunii de hiperbolicitate si este o proprietate geometrica importanta a sistemelor dinamice. O aplicatie in \mathbb{C}^2 este partial hiperbolica daca contracta puternic intr-o directie “verticala”, si poate expanda, prezenta comportament

neutru, sau chiar contracta in directia complementara “orizontala”, dar la o rata mai mica. Aplicatiile partial hiperbolice sunt echivalentul doi-dimensional al functiilor dintr-o variabila complexa ce nu au puncte critice in multimea lor Julia.

Extinzand rezultatele lui Pujals si Sambarino din spatiul real, Lyubich & Peters [LP] au aratat ca multimea Fatou a unei aplicatii Hénon complexe partial hiperbolice pe multimea Julia consta dintr-un numar finit de bazine atractive sau parabolice. In contrast cu dinamica polinoamelor de o variabila complexa, numarul punctelor periodice atractive ale unei functii Hénon nu este marginit de gradul functiei. Este binecunoscut fenomenul Newhouse [N], [PT], ce consta in existenta functiilor Hénon cu un numar infinit de puncte periodice atractive, ale caror bazine de atractie sunt domenii Fatou-Bieberbach (biolomorfe cu \mathbb{C}^2 , inasa fara a fi egale cu \mathbb{C}^2).

Impreuna cu R. Radu am dezvoltat o strategie prin care putem detecta in mod sistematic aplicatii Hénon cu doua bazine parabolice prin intersectii de curbe semi-parabolice in spatiul parametric din \mathbb{C}^2 . Exemplele noastre sunt *exemple explicite* cu doua bazine parabolice. Am reusit sa calculam explicit spatiile parametrice ale aplicatiilor Hénon complexe cu o orbita de perioada 3 (acesta este dat de un polinom de gradul 6 ca functie de iacobianul aplicatiei Hénon) si cu o orbita de perioada 4. Acest lucru ne permite sa gasim si alte aplicatii cu doua bazine parabolice de perioade mai mari. De asemenea, am scris niste programe in Python, Wolfram Mathematica si FractalStream (un program dezvoltat de J. Hubbard [HP]) pentru studiul numeric si experimental al acestor aplicatii; programele fiind utile in cercetarea teoretica.

Un punct periodic x de perioada n al unei functii H se numeste semi-parabolic daca valorile proprii ale matricii iacobiene dH_x^n sunt de forma $\lambda = e^{2\pi ip/q}$, unde $p, q \in \mathbb{Z}$ si $|\mu| < 1$. Fixand $\lambda = e^{2\pi ip/q}$ o radacina a unitatii si perturband μ obtinem curbele parametrice

$$\text{Per}_\lambda^n = \text{curba algebraica in } \mathbb{C}^2 \text{ de parametrii } (c, a) \text{ pentru care functia Hénon } H_{c,a} \text{ are un punct periodic de perioada } n \text{ cu o valoare proprie } \lambda.$$

Aratam ca intersectand Per_1^3 cu $\text{Per}_{-1}^{2^n}$ putem obtine aplicatii Hénon cu un ciclu semi-parabolic de perioada 3 si un ciclu semi-parabolic de perioada 2^n . Pentru $\epsilon > 0$ suficient de mic, intersectand curbele $\text{Per}_{1+\epsilon}^3$ si $\text{Per}_{-1}^{2^n}$ putem obtine aplicatii Hénon cu un bazin semi-parabolic si o orbita atractiva de tip “sink” de perioada 3. Aceasta corespunde unei miscari quasiconforme a unei componentei satelit a multimii fractale Mandelbrot in spatiul parametric doi dimensional al functiilor Hénon. Reamintim ca multimea Mandelbrot este definita ca multimea parametrilor c pentru care multimea Julia J_c a polinomului $z \mapsto z^2 + c$ este conexa. Pentru ϵ si t parametri reali suficient de mici, intersectand curbele $\text{Per}_{1+\epsilon}^3$ si $\text{Per}_{-(1+t)}^{2^n}$ putem obtine candidati de aplicatii Hénon hiperbolice pe multimea Julia J . Aceasta noua tehnica de *detectare a hiperbolicitatii* se bazeaza pe tehnicile dezvoltate de noi [RT2] in context perturbativ.

De exemplu, parametrul $(c, a) = (-9(2 - \sqrt{3})/2, 2 - \sqrt{3})$ corespunzator intersectiei curbei Per_3^1 cu Per_{-1}^1 este un exemplu concret de functie Hénon $H_{c,a}$ cu doua cicluri semi-parabolice, de perioada 1 si de perioada 3. Am studiat din punct de vedere experimental si teoretic proprietatile dinamice ale acestei aplicatii si putem formula urmatoarele concluzii:

- 1) Functia $H_{c,a}$ are multimea Julia conexa, si este partial hiperbolica (dar nu hiperbolica) pe aceasta.
- 2) Exista $(c', a') \in \mathbb{C}^2$ oricat de aproape de (c, a) astfel incat aplicatia Hénon $H_{c',a'}$ este hiperbolica pe multimea sa Julia si $H_{c',a'}$ pe $J_{c',a'}$ este conjugat topologic cu $H_{c,a}$ pe $J_{c,a}$.

Mentionam aici si un rezultat recent al lui Bedford si Dujardin [BD] care spune ca hiperbolicitatea este un invariant topologic, in sensul urmatoar: daca doua functii Hénon sunt conjugate topologic pe o vecinatate deschisa a multimilor lor Julia, si una dintre ele este hiperbolica, atunci si cealalta este hiperbolica. Asadar conjugarea topologica enuntata mai sus intre $H_{c',a'}$

pe $J_{c',a'}$ si $H_{c,a}$ pe $J_{c,a}$ este rigida si nu poate fi extinsa continuu la nici-o vecinatate a multimilor Julia, intrucat doar $H_{c',a'}$ este hiperbolica pe $J_{c',a'}$, pe cand $H_{c,a}$ este partial hiperbolica, dar nu hiperbolica pe $J_{c,a}$.

In continuare am studiat bifurcatiile in curba algebrica Per_{-1}^1 de la iacobian 0 la iacobian $2 - \sqrt{3}$, ce duc la formarea punctului periodic semi-parabolic secundar de perioada 3.

- 1) Exista o cascada de bifurcatii in interiorul curbei Per_{-1}^1 constand in tangente heteroclinice intre varietatea stabila a punctului fix semi-parabolic cu o valoare proprie -1 si varietatea instabila a celuilalt punct fix de tip "saddle". Acest tip de tangente pastreaza conectivitatea multimii Julia.
- 2) Sirul acestor tangente heteroclinice creeaza o quasi-periodicitate locala, responsabila in limita de crearea punctului periodic semi-parabolic secundar de perioada 3.

4.5. Horseshoes near semi-parabolic parameters.

In acest articol aratam ca functiile Hénon cu iacobian mic si un punct periodic semi-parabolic se afla in frontiera multimii de parametri de tip horseshoe din spatiul complex doi dimensional. Multimea horseshoe consta din parametrul $(c, a) \in \mathbb{C}^2$ pentru care aplicatia Hénon $H_{c,a}$ este hiperbolica pe multimea sa Julia $J_{c,a}$, aceasta fiind o multime de tip Cantor (total disconexa). Studiem si alte proprietati cum ar fi dimensiunea Hausdorff a multimilor K^+ si K^- si generalizam niste rezultate ale lui Fornæss si Sibony [FS].

Dujardin si Lyubich [DL] au aratat ca o functie Hénon moderat disipativa (cu iacobian $|a| < 1/4$) ce are un punct periodic semi-parabolic poate fi aproximata cu aplicatii Hénon ce au o tangenta homoclinica. Pe de alta parte, din [RT1], [RT2] avem o caracterizare completa a functiilor Hénon cu iacobian mic si un punct periodic semi-parabolic. Am aratat ca ele se afla in frontiera multimii parametrilor (c, a) din \mathbb{C}^2 pentru care functia Hénon $H_{c,a}$ are multimea Julia $J_{c,a}$ conexa. Echivalentul acestei multimii parametrice pentru familia Hénon este multimea Mandelbrot dintr-o variabila complexa. De fapt, am obtinut un rezultat ceva mai tare, anume ca acesti parametri semi-parabolici cu iacobian sufficient de mic se afla in frontiera multimii parametrilor (c, a) din \mathbb{C}^2 pentru care functia Hénon $H_{c,a}$ este hiperbolica si are multimea Julia $J_{c,a}$ conexa. Acest lucru ne-a permis sa aratam ca exista directii parametrice in care multimea Julia hiperbolica converge in topologia Hausdorff la multimea Julia semi-parabolica. Intr-o directie complementara, Bedford, Smillie, Ueda [BSU] au descoperit o regiune parametrica (BSU region) in care avem fenomenul de implozie parabolica: o discontinuitate a multimii Julia in raport cu parametrul in \mathbb{C}^2 . In acest articol ne propunem sa completam poza de implozie semi-parabolica si sa studiem mai bine BSU region.

4.6. Neutral germs of holomorphic diffeomorphisms of $(\mathbb{C}^2, 0)$.

In acest proiect ne-am propus sa intelegem structura locala a germenilor de difeomorfisme olomorfe ale lui \mathbb{C}^2 cu un punct fix neutru la origine. Este un proiect ambitios in colaborare cu J. Raissy (Université de Bordeaux), T. Firsova (Kansas State University) si L. Vivas (Ohio State University). Un punct fix se numeste neutru daca derivata la acel punct are doua valori proprii neutre (de modul unu). Se numeste semi-neutru daca derivata are o valoare proprie neutra si o valoare proprie disipativa (de modul mai mica decat unu). Structura locala in jurul punctului fix semi-neutru este bine-inteleasa din colaborarile noastre anterioare, [FLRT] si [LRT]. Reamintim ca un difeomorfism al lui \mathbb{C}^2 este partial hiperbolic pe o vecinatate a punctului semi-neutru, insa structura geometrica de partial hiperbolicitate locala se pierde pe masura ce valoarea proprie disipativa tinde sa devina neutra. Écalle [E] si Hakim [Ha] au studiat germenii tangenti la identitate cu doua valori proprii egale cu unu. Vrem sa generalizam

rezultatele lor pentru valori proprii neutre arbitrare, sa studiem dinamica acestor difeomorfisme locale, si sa investigam aplicabilitatea rezultatelor la familia de aplicatii Hénon complexe.

4.7. Masura armonica.

Intr-o alta directie de cercetare ne-am propus sa intelegem mai bine geometria discului Siegel, o colaborare intre toti membrii echipei proiectului TE. Intr-o dimensiune complexa, M. Herman [H] a demonstrat ca suportul masurii armonice este egal cu frontiera discului Siegel pentru polinoame complexe. Demonstratia dintr-o dimensiune foloseste analiza complexa si spatii Hardy, dar evita teorema de uniformizare a lui Riemann. Am discutat o strategie despre generalizarea teoremei lui Herman la dimensiuni superioare, in context general, pentru germeni de difeomorfisme olomorfe ale lui $(\mathbb{C}^n, 0)$ cu domenii de rotatie de tip Siegel. In articolul C. Benea, Y. Zhai, *Multi-parameter flag Leibniz rules of arbitrary complexity in mixed-norm spaces*, C. Benea multumeste grantului TE. Rezultatele din articol au aplicabilitate in studiul ecuatiilor diferentiale ordinare sau cu derivate partiale. Articolul este tangential legat de tematica grantului TE, insa foloseste estimate pe spatii L^p , de functii p -sumabile, ceea ce ar putea fi de folos in rezolvarea primei conjecturi de mai jos, in contextul in care, pentru $1 \leq p \leq \infty$, spatiile Hardy H^p sunt subspatii ale spatiilor L^p si sunt folosite mai mult in sisteme dinamice olomorfe.

4.8. Probleme deschise.

Impreuna cu R. Radu si C. Benea am identificat urmatoarea problema deschisa:

Conjectura 1. Pentru o aplicatie Hénon complexa frontiera discului Siegel este in inchiderea multimii punctelor de tip saddle. Intr-o formulare echivalenta, suportul masurii armonice induse pe frontiera discului Siegel este egal cu frontiera acestuia.

Pentru aplicatii Hénon este demonstrata in unele cazuri de mici perturbari de [GRY], folosind rezultatele din [D], si in unele cazuri generale de [LRT].

Intr-o dimensiune complexa, conectivitatea multimii Julia este strans legata de comportamentul punctelor critice. Pentru aplicatii Hénon nu avem puncte critice in sens obisnuit, insa exista o multime critica care ar putea influenta conectivitatea multimii Julia asociata functiei Hénon. Impreuna cu T. Firsova si R. Radu am identificat urmatoarea problema deschisa:

Conjectura 2. Consideram familia standard de aplicatii Hénon complexe de grad doi, disipative si partial hiperbolice pe multimea Julia. Atunci multimea Julia J este conexa daca si numai daca multimea critica este disconexa.

Aceasta problema este sustinuta de rezultatele obtinute de [F], [LR], [T] in caz perturbativ si de [FRT] in caz mai general, neperturbativ. Aceste probleme deschise continua in mod natural tematica proiectului, dar nu sunt parte din proiect.

5. Impactul estimat al rezultatelor obtinute, cu sublinierea celui mai semnificativ rezultat obtinut

Unul din cele mai importante rezultate ale proiectului este descrierea multimii critice pentru o clasa larga de difeomorfisme polinomiale ale lui \mathbb{C}^2 . Acest proiect a fost inceput in anul intai de proiect si finalizat in anul doi. Este singurul rezultat din literatura in care se descrie complet multimea critica intr-un context neperturbativ si contribuie la dezvoltarea domeniului modern de Sisteme Dinamice in mai multe Variabile Complexe. Am dezvoltat tehnici noi care pot fi de folos si pentru alte domenii si am rezolvat o conjectura a lui John Hubbard. Rezultatele din articol au fost diseminate la unele dintre cele mai prestigioase centre de cercetare din lume:

de R. Tanase la MSRI, Berkeley, California, SUA, in 2022, de Tanya Firsova la IMPA, Rio de Janeiro, Brazilia, in 2022 si va fi diseminat de R. Radu la Institutul Mittag-Leffler, Stockholm, Suedia si la BIRS, Banff, Canada, in 2023.

Un alt rezultat important al proiectului este evidentierea unui mecanism nou de bifurcatii in \mathbb{C}^2 ce permite crearea aplicatiilor Hénon cu doua bazine parabolice si multimea Julia conexa, printr-o cascada de tangente heteroclinice. El a fost diseminat de R. Tanase la IMPA, Rio de Janeiro, Brazilia, in 2022.

6. Alte rezultate

6.1. Conferinte organizate.

R. Radu a fost co-organizator pentru *Workshop for Young Researchers in Mathematics*

- editia a 10-a, organizat online, 19-20 mai 2021
<https://fmi.univ-ovidius.ro/cercetare/wyrm2021/>
- editia a 11-a, IMAR, Bucuresti, Romania, 19-20 mai 2022
<https://fmi.univ-ovidius.ro/cercetare/wyrm2022/>

Scopul acestui workshop este de a conecta tinerii cercetatori, de a schimba idei si de a prezenta noi directii de cercetare. Toti membrii echipei au diseminat rezultate in cadrul workshopului.

6.2. Vizite stiintifice.

R. Radu si R. Tanase au efectuat vizite stiintifice de o luna (31 ianuarie - 27 februarie 2022) la Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), Berkeley, California, SUA si au participat in programul de un semestru *Complex Dynamics: from special families to natural generalizations in one and several variables* de la MSRI: <https://www.msri.org/programs/331>

In cadrul programului de sisteme dinamice de la MSRI am format un grup de cercetare (*SCV Working Group*) de sisteme dinamice in mai multe variabile complexe care a organizat un seminar saptamanal. R. Radu si R. Tanase au avut numeroase intalniri de cercetare online cu membrii SCV Working Group unde am discutat teme relevante pentru proiect si am identificat noi directii de cercetare.

6.3. Participari la conferinte.

R. Tanase si R. Radu au participat la urmatoarele conferinte:

- *Transcendental dynamics and beyond: Topics in Complex Dynamics*, Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Barcelona, Spania, 19-23 aprilie 2021, in cadrul programului de un semestru de *Low Dimensional Dynamical Systems and Applications*
- *Advancing Bridges in Complex Dynamics*, Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), Luminy, Franta, 20-24 septembrie 2021
- *On geometric complexity of Julia sets - III*, Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences (IMPAN), Bedlewo, Polonia, 26 septembrie - 1 octombrie 2021
- *Introductory Workshop*, MSRI, Berkeley, California, SUA, 8-17 februarie 2022

Temele de cercetare discutate in cadrul acestor conferinte au fost despre ultimele progrese in sisteme dinamice in dimensiuni superioare: “wandering domains” (domenii ratacitoare) pentru unele difeomorfisme polinomiale ale lui \mathbb{C}^n si functii transcedentale, topologia multimilor Julia, formalism termodinamic, etc.

7. Pagina web

Am creat si actualizat pagina web a proiectului:

<http://imar.ro/~rtanase/TE138.html>

Bibliografie

- [B] B. Bielefeld (ed.), *Conformal Dynamics Problem List*, IMS at Stony Brook Preprint 1990/1
- [BD] E. Bedford, R. Dujardin, *Topological and geometric hyperbolicity criteria for polynomial automorphisms of \mathbb{C}^2* , *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 42(7) (2022), 2151-2171
- [Bo] S. Bonnot, *Topological model for a class of complex Hénon mappings*, *Comment. Math. Helv.* 81 (2006), 827-857
- [BS1] E. Bedford, J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity*, *Inventiones mathematicae* 103.1 (1991): 69-100
- [BS5] E. Bedford, J. Smillie, *Polynomial diffeomorphism of \mathbb{C}^2 . V: Critical points and Lyapunov exponents*, *J. Geom. Anal.* 8(3) (1998), 349-383
- [BSU] E. Bedford, J. Smillie, T. Ueda, *Semi-parabolic Bifurcations in Complex Dimension Two*, *Commun. Math. Phys.* 350 (2017), 1-29
- [D] R. Dujardin, *A closing lemma for polynomial automorphisms of \mathbb{C}^2* , *Astérisque* 415, 2020, 35-43
- [DL] R. Dujardin, M. Lyubich, *Stability and bifurcations for dissipative polynomial automorphisms of \mathbb{C}^2* , *Invent. Math.* 200 (2015), no. 2, 439-511
- [E] J. Écalle, *Les fonctions résurgentes. Tome III. L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux*. Publications Mathématiques d'Orsay, 85-5. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985
- [F] T. Firsova, *Critical locus for Complex Hénon maps*, *Indiana Math Journal*, 61 (2012), 1603-1641
- [FLRT] T. Firsova, M. Lyubich, R. Radu, R. Tanase, *Hedgehogs for neutral dissipative germs of holomorphic diffeomorphisms of $(\mathbb{C}^2, 0)$* , *Astérisque* 416 (2020), 193-211
- [FM] S. Friedland, J. Milnor, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 9 (1989)
- [FRT] T. Firsova, R. Radu, R. Tanase, *Critical locus for Hénon maps in an HOV region*, arXiv:2211.12430 [math.DS]
- [FS] J.-E. Fornæss and N. Sibony, *Complex Hénon mappings in \mathbb{C}^2 and Fatou-Bieberbach domains*, *Duke Math. J.* 65 (1992), no. 2, 345-380.
- [GRY] D. Gaidashev, R. Radu, M. Yampolsky, *Renormalization and Siegel disks for complex Hénon maps*, *J. Eur. Math. Soc.* 23 (2021), 1053-1073
- [Ha] M. Hakim, *Analytic transformations of $(\mathbb{C}^p, 0)$ tangent to the identity*, *Duke Math. J.* 92:2 (1998), 403-428

- [H] M. R. Herman, *Are there critical points on the boundaries of singular domains?*, Commun. Math. Phys. 99, 593-612 (1985)
- [HOV1] J. H. Hubbard, R.W. Oberste-Vorth, *Hénon mappings in the complex domain I: The global topology of dynamical space*, Pub. Math. IHES 79 (1994), 5-46
- [HOV2] J.H. Hubbard, R.W. Oberste-Vorth, *Hénon mappings in the complex domain II: Projective and inductive limits of polynomials*, in *Real and Complex Dynamical Systems*, Branner and Hjorth, eds., Kluwer Academic Publishers (1995), 89-132
- [HP] J. H. Hubbard, K. Papadantonakis, *Exploring the parameter space of complex Hénon mappings*, Manuscript 2000.
- [LP] M. Lyubich, H. Peters, *Structure of partially hyperbolic Hénon maps*, J. Eur. Math. Soc. 23 (2021), 3075-3128
- [LR] M. Lyubich, J. Robertson, *The Critical Locus and Rigidity of Foliations of Complex Hénon Maps*, arXiv:2101.12148
- [LRT] M. Lyubich, R. Radu, R. Tanase, *Hedgehogs in higher dimensions and their applications*, Astérisque 416 (2020), 213-251
- [M] J. Milnor, *Remarks on iterated cubic maps*, Experimental Mathematics, 1(1):5-24, 1992
- [N] S. Newhouse, *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*, Topology 13 (1974), 9-18
- [OV] R. W. Oberste-Vorth, *Complex horseshoes*, Ph.D. Thesis, Cornell University, 1987
- [PT] J. Palis, F. Takens, *Hyperbolicity and Sensitive-Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*, Cambridge University Press, 1993
- [RT1] R. Radu, R. Tanase, *A structure theorem for semi-parabolic Hénon maps*, Adv. Math. 350 (2019), 1000-1058
- [RT2] R. Radu, R. Tanase, *Semi-parabolic tools for hyperbolic Hénon maps and continuity of Julia sets in \mathbb{C}^2* , Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018), 3949-3996
- [T] R. Tanase, *Complex Hénon maps and discrete groups*, Adv. Math. 295 (2016), 53-89
- [YY] M. Yampolsky, J. Yang, *Structural instability of semi-Siegel Hénon maps*, Adv. Math. 389 (2021), 107900