Tema: Metode avansate în studiul ecuațiilor diferențiale stocastice; aplicații în matematica financiară și analiza sistemelor.

Obiectiv 4: Inegalități integro-diferențiale și soluții polinomiale cu aplicații în matematica financiară

Raport de cercetare

B. Iftimie, I. Molnar, C. Vârsan

Octombrie, 2007

Considerăm un proces constant pe porțiuni $\lambda(t, \omega_2) : [0, \infty) \times \Omega_2 \to S$, $S \subset \mathbb{R}^n$, pe un câmp de probabilitate complet $\{\Omega_2, \mathcal{F}^2, \mathbb{P}_2\}$, astfel încât

$$\lambda(t, \omega_2) = \lambda_k(\omega_2), \text{ pentru } t \in [t_k(\omega_2), t_{k+1}(\omega_2)), \ k \geqslant 0, \ \omega_2 \in \Omega_2,$$

unde $0 = t_0(\omega_2) < t_1(\omega_2) < \cdots < t_k(\omega_2) < t_{k+1}(\omega_2) < \ldots \leqslant \infty$ este un șir crescător de variabile aleatoare, satisfăcând $t_k(\omega_2) \to \infty$, a.e. ω_2 și λ_k este un vector aleator, pentru $k \geqslant 0$.

Pentru fiecare $\hat{\omega}_2 \in \Omega_2$ arbitrar fixat, notăm $\hat{\lambda}(t) = \lambda(t, \hat{\omega}_2)$, $t \geqslant 0$ și $\hat{t}_k = t_k(\hat{\omega}_2)$, $k \geqslant 0$. Prin definiție, $\hat{\lambda}(t) : [0, \infty) \to S$ este o funcție deterministă constantă pe porțiuni, satisfăcând $\hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda}_k$, pentru $t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$, unde $\hat{\lambda}_k = \lambda_k(\hat{\omega}_2)$.

Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^d \supset \mathbb{R}^n$, fie $\{\hat{y}(t, x); \ t \geqslant 0\}$ unica soluție o sistemului stocastic diferențial

$$\begin{cases} \mathrm{d}y(t) = g_0(y(t); \hat{\lambda}(t))\, \mathrm{d}t + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_j(y(t); \hat{\lambda}(t))\, \mathrm{d}W_j(t), \ t \geqslant 0, \ y \in \mathbb{R}^d, \\ y(0) = x, \end{cases} \tag{1}$$

unde câmpurile de vectori

$$g_i(y; \lambda) = a_i(\lambda) + A_i(\lambda) y, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ \lambda \in S, \ y \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

sunt presupuse continue și mărginite în raport cu $\lambda \in S$.

Câmpul $g_0(y;\lambda)$ nu este presupus liniar, dar satisface o condiție Lipschitz globală în raport cu $y \in \mathbb{R}^d$. Aici $W(t,\omega_1) : [0,\infty) \times \Omega_1 \to \mathbb{R}^m$ este un proces Wiener standard peste spațiul de probabilitate filtrat complet $\{\Omega_1, \mathcal{F}^1, \{\mathcal{F}_t^1\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P}_1\}$ și o soluție a ecuației (1) este construită folosind calculul stocastic Itô.

O problemă de portofoliu (opțiunea de tip american) și strategiile sale admisibile pot fi descrise printr-o funcție valoare de forma

$$V(t,x) = \theta_0(t,x)y_0(t) + \langle \theta(t,x), \hat{y}(t,x)\rangle,\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{3}$$

unde $y_0(t) = \exp(-\gamma t)$ și $\theta_0(t,x) \in \mathbb{R}$, $\theta(t,x) \in \mathbb{R}^d$ sunt procese $\mathcal{F}_t^1$-adaptate, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^d$ fixat.

Notăm prin $\mathcal{P}_p(y;\lambda)$ mulțimea polinoamelor de grad p în raport cu variabilele $(y_1, y_2, \ldots, y_d) = y$, ale căror coeficienți sunt funcții continue și mărginite de $\lambda \in S$. Prin $\mathcal{P}_p(y) \subset \mathcal{P}_p(y;\lambda)$ desemnăm mulțimea polinoamelor cu coeficienți constanți.

O strategie admisibilă $(\theta_0(t,x), \theta(t,x)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ corespunzătoare funcției valoare $V(t,x)$ depinde de un polinom fixat $\varphi \in \mathcal{P}_p(y;\lambda)$ și trebuie să satisfacă restricțiile

$$\overline{V}(t,x) = \exp(\gamma t)V(t,x) \geqslant \exp(\gamma t)\varphi(\hat{y}(t,x), \hat{\lambda}(t)),\ t \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\overline{V}(t,x) = \overline{V}(\hat{t}_k, x) + \int_{\hat{t}_k}^{t} \exp(\gamma s)\langle \theta(s,x),\, \mathrm{d}_s\, \hat{y}(s,x)\rangle,\ t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1}), \tag{5}$$

pentru fiecare $k \geqslant 0$ și $x \in \mathbb{R}^d$, unde am folosit notația prescurtată

$$\begin{aligned}\langle \theta(s,x),\, \mathrm{d}_s\, \hat{y}(s,x)\rangle = \langle \theta(s,x), g_0(\hat{y}(s,x), \hat{\lambda}(s))\rangle\, \mathrm{d}s + \\ + \sum_{j=1}^{m} \langle \theta(s,x), g_j(\hat{y}(s,x), \hat{\lambda}(s))\rangle\, \mathrm{d}W_j(s).\end{aligned}$$

Pentru a găsi astfel de strategii, este nevoie sa precizăm acele condiții care permit găsirea lor într-o formă ”buclă închisă” (”feedback shape”),

$$\theta(t,x) = \partial_y \varphi(\hat{y}(t,x); \hat{\lambda}(t)),\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d \tag{6}$$

și

$$\theta_0(\hat{t}_k, x) = \exp(\gamma \hat{t}_k)\varphi(0, \hat{\lambda}_k). \tag{7}$$

Remark 1. Din motive de simplitate, pentru calcularea strategiilor admisibile vom include forma ”buclă închisă” ” (6) și (7) în definiția acestor strategii și vom căuta (γ, φ_γ), $\varphi_\gamma \in \mathcal{P}_2(y;\lambda)$ corespunzătoare, astfel încât ecuațiile (4) and (5) să fie îndeplinite. Subliniem că această abordare ne va conduce la o strategie admisibilă $(\theta_0(t,x), \theta(t,x)) \in \mathbb{R}^{d+1}$, în condițiile

(a) $\varphi_\gamma \in \mathcal{P}_2(y;\lambda)$ este o funcție convexă în raport cu $y \in \mathbb{R}^d$;

(b) (γ, φ_γ) este o soluție netrivială a inegalității eliptice

$$\gamma\varphi(y;\lambda) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\langle \partial_y^2\varphi_\gamma(y;\lambda)g_j(y;\lambda), g_j(y;\lambda)\rangle \leqslant 0,\ (y,\lambda) \in \mathbb{R}^d \times S. \quad (8)$$

Forma ”buclă închisă” (6) este în acord cu restricțiile (4) și (5) fără implicarea proprietății de convexitate (a) și analiza poate fi redusă la inegalitatea eliptică (8). Pe de altă parte, ea induce o componentă a procesului continuă pe porțiuni $\{\theta_0(t,x);\ t \geqslant 0\}$, care este măsurată ca o variabilă aleatoare la fiecare moment $t = \hat{t}_k$, $k \geqslant 1$, astfel încât

$$\theta_0(\hat{t}_k, x) + \exp(\gamma\hat{t}_k)\langle \partial_y\varphi_\gamma(\hat{y}(\hat{t}_k, x); \hat{\lambda}_k), \hat{y}(\hat{t}_k, x)\rangle \geqslant \exp(\gamma\hat{t}_k)\varphi_\gamma(\hat{y}(\hat{t}_k, x); \hat{\lambda}_k).$$

Putem obține o simplificare alegând forma ”feedback” (7), cu condiția ca afirmația (a) din remarca 1 să aiba loc.

Problema A1. Pentru $f \in \mathcal{P}_2(y)$ convex, să se gasească o constantă γ diferită de zero și o funcție convexă $\varphi_\gamma \in \mathcal{P}_2(y;\lambda)$ în raport cu $y \in \mathbb{R}^d$, astfel încât

$$F_k^\gamma(t,x) = \exp(\gamma t)\varphi_\gamma(\hat{y}(t,x);\hat{\lambda}_k) + \int_{\hat{t}_k}^{t}\exp(\gamma s) f(\hat{y}(s,x))\,\mathrm{d}s,\ t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1}) \quad (9)$$

poate fi reprezentată ca

$$F_k^\gamma(t,x) = F_k^\gamma(\hat{t}_k, x) + \int_{\hat{t}_k}^{t}\exp(\gamma s)\langle \partial_y\varphi_\gamma(\hat{y}(s,x);\hat{\lambda}_k),\ \mathrm{d}_s\,\hat{y}(s,x)\rangle,\ k \geqslant 0, \quad (10)$$

unde am folosit notația prescurtată

$$\begin{aligned}\langle \theta_k(s,x),\ \mathrm{d}_s\,\hat{y}(s,x)\rangle &= \langle \theta_k(s,x), g_0(\hat{y}(s,x), \hat{\lambda}(s))\rangle\,\mathrm{d}s + \\ &+ \sum_{j=1}^{m}\langle \theta_k(s,x), g_j(\hat{y}(s,x), \hat{\lambda}(s))\rangle\,\mathrm{d}W_j(s).\end{aligned}$$

Problema B1. Pentru $f \in \mathcal{P}_2(y)$ convex, să se găsească o constantă γ diferită de zero și a funcție convexă $\varphi_\gamma \in \mathcal{P}_2(y;\lambda)$ în raport cu $y \in \mathbb{R}^d$, astfel încât să fie satisfăcută ecuația eliptică

$$\gamma\varphi_\gamma(y;\lambda) + f(y) + \hat{L}(\varphi_\gamma(y;\lambda)) = 0,\ (y,\lambda) \in \mathbb{R}^d \times S, \tag{11}$$

unde $\hat{L} : \mathcal{P}_2(y;\lambda) \to \mathcal{P}_2(y;\lambda)$ este operatorul liniar definit prin

$$\hat{L}(\varphi(y;\lambda)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2}\langle \partial_y^2\varphi(y;\lambda)g_j(y;\lambda), g_j(y;\lambda)\rangle. \tag{12}$$

Remark 2. Fiecare soluție netrivială $(f,\gamma,\varphi_\gamma)$ a problemei B1 este o soluție a problemei A1. În această privința, aplicând regula standard de diferențiere stocastică pentru fiecare $F_k^\gamma(t,x)$, $t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$ definit in (9), obținem reprezentarea integrală dată în (10).

Considerăm funcția test $\mathcal{U}(t,y) = \exp(\gamma t)\varphi_\gamma(y;\hat{\lambda}_k);\ t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$ asociată cu procesul continuu $\{\hat{y}(t,x);\ t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})\}$ satisfăcând sistemul (1). Fie $(f,\gamma,\varphi_\gamma)$ o soluție a peoblemei B1. Atunci, pentru ficare $k \geqslant 0$ rescriem $\mathcal{U}(t,\hat{y}(t,x))$ sub forma

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t,\hat{y}(t,x)) = {} & \exp(\gamma\hat{t}_k)\varphi_\gamma(\hat{y}(\hat{t}_k,x);\hat{\lambda}_k) + \\ & + \int_{\hat{t}_k}^{t} \exp(\gamma s)[\gamma\varphi_\gamma + L(\varphi_\gamma)(\hat{y}(s,x);\hat{\lambda}_k)]\,\mathrm{d}s + \\ & + \sum_{j=1}^{m}\int_{\hat{t}_k}^{t} \exp(\gamma s)\langle \partial_y\varphi_\gamma(\hat{y}(s,x);\hat{\lambda}_k), g_j(\hat{y}(s,x);\hat{\lambda}_k)\rangle\,\mathrm{d}W_j(s),\end{aligned}$$

pentru orice $t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$ și $k \geqslant 0$, unde $L : \mathcal{P}_2(y;\lambda) \to \mathcal{P}_2(y;\lambda)$ este operatorul liniar definit prin

$$L(\varphi(y;\lambda)) = \langle \partial_y\varphi(y,\lambda), g_0(y;\lambda)\rangle + \frac{1}{2}\langle \partial_y^2\varphi(y;\lambda)g_j(y;\lambda), g_j(y;\lambda)\rangle.$$

L poate fi rescris sub forma

$$L(\varphi(y;\lambda)) = \langle \partial_y\varphi(y,\lambda), g_0(y;\lambda)\rangle + \hat{L}(\varphi(y;\lambda)),$$

unde operatorul $\hat{L}$ este dat în formula (12). Atunci

$$F_k^\gamma(t,x) = \mathcal{U}(t,\hat{y}(t,x)) + \int_{\hat{t}_k}^{t} \exp(\gamma s) f(\hat{y}(s,x))\,\mathrm{d}s,\ t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$$

sau echivalent

$$\begin{aligned} F_k^\gamma(t,x) =& \exp(\gamma t)\varphi_\gamma(\hat{y}(\hat{t}_k,x);\hat{\lambda}_k) + \\ &+ \int_{\hat{t}_k}^t \exp(\gamma s)\langle \partial_y \varphi_\gamma(\hat{y}(s,x);\hat{\lambda}_k),\, \mathrm{d}s\hat{y}(s,x)\rangle + \\ &+ \int_{\hat{t}_k}^t \exp(\gamma s)[\gamma\varphi_\gamma + f + \hat{L}(\varphi_\gamma)](\hat{y}(s,x);\hat{\lambda}_k)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{13}$$

Observăm ca dacă $(f,\gamma,\varphi_\gamma)$ este o soluție a problemei B1, atunci ultimul termen integral din (13) se anulează și equația integrală (10) este astfel stabilită.

Atunci când definim strategii admisibile $(\theta_0(t,x),\theta(t,x)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ astfel încât restricțiile (4), (5) și (6) sunt satisfăcute, putem folosi reprezentarea integrală dată în problema A1 fără a impune o proprietate de convexitate pentru funcția $\varphi_\gamma \in \mathcal{P}_2(y;\lambda)$. Pentru a obține un sir de valori deterministe $\{\theta_0(\hat{t}_k,x);\ k \geqslant 0\}$, astfel încât

$$\begin{aligned} \overline{V}(\hat{t}_k,x) =& \theta_0(\hat{t}_k,x) + \exp(\gamma\hat{t}_k)\langle \partial_y\varphi_\gamma(\hat{y}(\hat{t}_k,x);\hat{\lambda}_k), \hat{y}(\hat{t}_k,x)\rangle \geqslant \\ &\geqslant \exp(\gamma\hat{t}_k)\varphi_\gamma(\hat{y}(\hat{t}_k,x);\hat{\lambda}_k) = F_k^\gamma(\hat{t}_k,x), \end{aligned} \tag{14}$$

este nevoie să presupunem că φ_γ este o funcție convexă în raport cu $y \in \mathbb{R}^d$ și

$$\theta_0(\hat{t}_k,x) = \exp(\gamma\hat{t}_k)\varphi_\gamma(0;\hat{\lambda}_k) \tag{15}$$

satisface (14).

Lemma 1. *Fie $(f,\gamma,\varphi_\gamma)$ o soluție netrivială a problemei B1, și presupunem că $f(y) \geqslant 0$, pentru orice $y \in \mathbb{R}^d$. Definim*

$$\theta(t,x) = \partial_y\varphi_\gamma(\hat{y}(t,x);\hat{\lambda}(t)),\ t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d, \tag{16}$$

și fie $\{\theta_0(t,x);\ t \geqslant 0\}$ procesul continuu pe porțiuni satisfăcând ecuația integrală (5)*, unde $\theta_0(\hat{t}_k,x)$ este definit în* (15)*. Atunci $(\theta_0(t,x),\theta(t,x)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ este o strategie admisibilă (vezi formulele* (4) *și* (5)*) satisfăcând forma "feedback"* (6) *și* (7)*.*

Proof. Prin ipoteză, condițiile din remarca 2 sunt îndeplinite și $(f, \gamma, \varphi_\gamma)$ este o soluție netrivială a problemei A1. Obținem

$$\begin{aligned}\exp(\gamma t)\varphi_\gamma(\hat{y}(t,x);\hat{\lambda}_k) &= \exp(\gamma\hat{t}_k)\varphi_\gamma(\hat{y}(\hat{t}_k,x);\hat{\lambda}_k) + \\ &+ \int_{\hat{t}_k}^{t} \exp(\gamma s)\langle \partial_y\varphi_\gamma(\hat{y}(s,x);\hat{\lambda}_k),\, \mathrm{d}s\,\hat{y}(s,x)\rangle - \\ &- \int_{\hat{t}_k}^{t} \exp(\gamma s) f(\hat{y}(s,x))\,\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{17}$$

pentru fiecare $t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$ și $k \geqslant 0$.

Pe de altă parte, funcția valoare

$$\overline{V}(t,x) = \theta_0(t,x) + \exp(\gamma t)\langle \partial_y\varphi_\gamma(\hat{y}(t,x);\hat{\lambda}_k), \hat{y}(t,x)\rangle,\ t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$$

satisface

$$\overline{V}(t,x) \geqslant \exp(\gamma t)\varphi_\gamma(\hat{y}(t,x);\hat{\lambda}_k),\ t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1}).$$

Punând $\theta_0(\hat{t}_k, x) = \exp(\gamma\hat{t}_k)\varphi(0;\hat{\lambda}_k)$, pentru fiecare $k \geqslant 0$, restricțiile (14) sunt indeplinite, în virtutea faptului ca gradientul $\partial_y\varphi_\gamma(y;\lambda)$ unei funcții convexe satisface inegalitatea

$$\langle \partial_y\varphi_\gamma(y_2;\lambda) - \partial_y\varphi_\gamma(y_1;\lambda), y_2 - y_1\rangle \geqslant 0,\ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d, \lambda \in S. \tag{18}$$

Definim acum $\{\theta_0(t,x);\ t \in [\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})\}$ ca soluție a ecuației integrale (5), unde

$$\theta_0(\hat{t}_k, x) = \exp(\gamma\hat{t}_k)\varphi_\gamma(0;\hat{\lambda}_k)$$

este fixat. Ca o consecintă, folosind ecuația (17) obținem ultima parte a concluziei din lemă. □

Remark 3. Analiza conținută în lema 1 arată că o strategie admisibilă cu o formă "buclă închisă" poate fi construită folosind o soluție netrivială $(f, \gamma, \varphi_\gamma)$ a problemei B1. Pentru $f \in \mathcal{P}_2(y)$ fixat, o soluție (γ, φ_γ) a ecuației eliptice (11) se construiește folosind seriile

$$\varphi_\gamma(y;\lambda) = \frac{1}{|\gamma|}[\sum_{k=0}^{\infty} \hat{L}^k_{|\gamma|}(f)(y;\lambda)],\ \text{for } \gamma < 0,\ \hat{L}_{|\gamma|} := \frac{1}{|\gamma|}\hat{L}, \tag{19}$$

unde $\hat{L} : \mathcal{P}_2(y;\lambda) \to \mathcal{P}_2(y;\lambda)$ este operatorul liniar definit în problema B1.

In măsura în care operatorul liniar $\hat{L}_{|\gamma|}$ acționează pe $\mathbb{P}_2(y;\lambda)$, pentru simplitate vom presupune că $f(y) = (\langle q, y\rangle)^2$, unde $q \neq 0$ este un vector propriu comun matricelor $A_j(\lambda)$, astfel încât $A_j^*(\lambda)q = \mu_j(\lambda)q$ și $\mu_j : S \to \mathbb{R}$ este continuu și marginit, pentru orice $1 \leqslant j \leqslant m$.

Lemma 2. *Fie $f \in \mathcal{P}_2(y)$ și $g_j(y;\lambda) = A_j(\lambda)y + a_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, m$, dat ca mai sus. Fie $\gamma < 0$ astfel încât $\frac{\|\mu\|}{|\gamma|} \leqslant 1$, unde $\mu(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j^2(\lambda)$ și $\|\mu\| = \sup_{\lambda\in S} \mu(\lambda)$. Atunci funcția*

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(y;\lambda) &= \frac{1}{|\gamma|}\sum_{k=0}^{\infty} \hat{L}_{|\gamma|}^k(f)(y;\lambda) = \\ &= \frac{1}{|\gamma| - \mu(\lambda)}[f(y) + \frac{b(\lambda)}{|\gamma|}\langle q, y\rangle + \frac{a(\lambda)}{|\gamma|}],\ y \in \mathbb{R}^d, \lambda \in S \end{aligned} \tag{20}$$

este o soluție a ecuației eliptice (11)*, unde $b(\lambda) = 2\sum_{j=1}^{m} \mu_j(\lambda)\langle q, a_j(\lambda)\rangle$ și $a(\lambda) = \sum_{j=1}^{m}(\langle q, a_j(\lambda)\rangle)^2$.*

Proof. Prin ipoteză, este ușor de vazut că

$$\begin{aligned} \hat{L}(f)(y;\lambda) &= \sum_{j=1}^{m}[A_j(\lambda)y + a_j(\lambda)]^* q\, q^*[A_j(\lambda)y + a_j(\lambda)] = \\ &= \sum_{j=1}^{m}\langle q, A_j(\lambda)y + a_j(\lambda)\rangle)^2 = \\ &= \mu(\lambda)f(y) + b(\lambda)\langle q, y\rangle + a(\lambda). \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\hat{L}_{|\gamma|}(f)(y;\lambda) = \frac{\mu(\lambda)}{|\gamma|}f(y) + \frac{b(\lambda)}{|\gamma|}\langle q, y\rangle + \frac{a(\lambda)}{|\gamma|}.$$

Un argument de inducție ne conduce la

$$\begin{aligned} \hat{L}_{|\gamma|}^k(f)(y;\lambda) =& \left(\frac{\mu(\lambda)}{|\gamma|}\right)^k f(y) + \left(\frac{\mu(\lambda)}{|\gamma|}\right)^{k-1}\frac{b(\lambda)}{|\gamma|}\langle q, y\rangle + \\ &+ \left(\frac{\mu(\lambda)}{|\gamma|}\right)^{k-1}\frac{a(\lambda)}{|\gamma|},\ \text{for any } k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Notăm $\rho_\gamma(\lambda) = \frac{\mu(\lambda)}{|\gamma|}$ și

$$S(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} [\rho_\gamma(\lambda)]^k = \frac{|\gamma|}{|\gamma| - \mu(\lambda)},$$

unde se ține seama ca $\rho_\gamma(\lambda) < 1$, pentru orice $\lambda \in S$ (vezi $\frac{\|\mu\|}{|\gamma|} \leqslant 1$). Introducând formula (21) în (20), obținem

$$\varphi_\gamma(y;\lambda) = \frac{1}{|\gamma|} S(\lambda) f(y) + \frac{1}{|\gamma|} S(\lambda) \frac{b(\lambda)}{|\gamma|} \langle q, y \rangle + \frac{1}{|\gamma|} S(\lambda) \frac{a(\lambda)}{|\gamma|},$$

și înlocuind $S(\lambda) = \frac{|\gamma|}{|\gamma| - \mu(\lambda)}$ obținem îndeplinirea concluziei. $\square$

Remark 4. Soluția problemei B1 construită în lema 2 face uz de o funcție convexă specială $f(y) = (\langle q, y \rangle)^2$, cu $q \in \mathbb{R}^d$ ca un vector propriu comun matricelor $A_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Presupunând că exista mai mulți vectori proprii $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$, $s \leqslant d$, astfel încât

$$Q^* A_j(\lambda) = \mu_j(\lambda) Q^*, \mu_j(\lambda) \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, m, \tag{22}$$

atunci $f(y) = \langle Q^* y, Q^* y \rangle$ este în acord cu concluzia lemei 2 și calculul funției convexe $\varphi_\gamma \in \mathcal{P}_2(y)$ urmează aceeași procedură.

În plus, pentru $y_0 \in \mathbb{R}^d$ arbitrar fixat, putem considera o funcție convexă

$$f(y) = \langle Q^*(y - y_0), Q^*(y - y_0) \rangle,$$

unde $\hat{z}(t, x) = \hat{y}(t, x) - y_0$, $t \geqslant 0$, satisface sistemul liniar

$$\begin{cases} \mathrm{d}z(t) = h_0(z(t);\lambda)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m} h_j(z(t);\lambda)\,\mathrm{d}W_j(t),\ t \geqslant 0, \\ z(0) = x - y_0. \end{cases} \tag{23}$$

Aici $h_i(z;\lambda) = A_i(\lambda) z + d_i(\lambda)$, $d_i(\lambda) = a_i(\lambda) + A_i(\lambda) y_0$, $i = 0, 1, \ldots, m$ înlocuiește câmpul de vectori original $g_i(y;\lambda$ din sistemul (1) și funcția $f(z) = \langle Q^* z, Q^* z \rangle$ satisface (22).

În concluzia analizei de mai sus enunțăm teorema care urmează.

Theorem 1. *Fie $g_j(y;\lambda) = A_j(\lambda)y + a_j(\lambda)$ dat astfel încât $(d \times d)$ matricele $A_j(\lambda)$ și vectorii $a_j(\lambda) \in \mathbb{R}^d$ sunt continui si marginiți în raport cu $\lambda \in S \subset \mathbb{R}^n$, pentru $j = 1, 2, \ldots, m$ și $d \leqslant n$. Considerăm un câmp vectorial $g_0(y;\lambda) \in \mathbb{R}^d$ care este global Lipschitz continuu în raport cu $y \in \mathbb{R}^d$, uniform în $\lambda \in S$. Definim o funcție convexă $f \in \mathbb{P}_2(y)$ prin*

$$f(y) = \langle Q^*(y - y_0), Q^*(y - y_0)\rangle, \tag{24}$$

unde $y_0 \in \mathbb{R}^d$ este arbitrar fixat și $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$, $q_i \in \mathbb{R}^d$, $s \leqslant d$, sunt vectori proprii satisfăcând relațiile

$$Q^* A_j(\lambda) = \mu_j(\lambda) Q^*,\ \mu_j(\lambda) \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{25}$$

Fie $\gamma < 0$ astfel încât $\frac{\|\hat{\mu}\|}{|\gamma|} < 1$, unde $\|\hat{\mu}\| = \sup\limits_{k \geqslant 0} \mu(\hat{\lambda}_k)$, $\mu(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j^2(\lambda)$. Atunci

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma(y;\lambda) =& \frac{1}{|\gamma|} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{L}^k_{|\gamma|}(f)(y;\lambda) = \frac{1}{|\gamma| - \mu(\lambda)} \times \\ & \times \left[f(y) + \langle \frac{b(\lambda)}{|\gamma|}, Q^*(y - y_0)\rangle + \frac{a(\lambda)}{|\gamma|} \right],\ y \in \mathbb{R}^d,\ \lambda \in \hat{S} \subset S,\end{aligned} \tag{26}$$

este o soluție a ecuației elliptice (11), unde $b(\lambda) = 2\sum_{j=1}^{m} \mu_j(\lambda) Q^* d_j(\lambda)$, $a(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \|Q^* d_j(\lambda)\|^2$, $d_j(\lambda) = a_j(\lambda) + A_j(\lambda) y_0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, și $\hat{S} = \{\hat{\lambda}_k;\ k \geqslant 0\} \subset S$.

Proof. Folosind aplicația liniară $z = y - y_0$, rescriem

$$f(y) = \hat{f}(z) = \langle Q^* z, Q^* z\rangle,$$

și soluția $\{\hat{y}(t,x);\ t \geqslant 0\}$ satisfăcând (1) este schimbată în $\hat{z}(t,x) = \hat{y}(t,x) - y_0$, care satisface sistemul (23). Aici $h_j(z;\lambda) = A_j(z;\lambda)z + d_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ and $h_0(z;\lambda) = g_0(z + y_0;\lambda)$.

Procedura folosită în demostrația lemei 2 este applicabilă aici și funcția convexa $\varphi_\gamma \in \mathcal{P}_2(y;\lambda)$ data în (26) satisface ecuația (11). $\square$

Theorem 2. *Presupunem ca câmpurile vectoriale $g_i(y;\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ și $\gamma < 0$ satisfac ipotezele teoremei 1*[1]*. Fie $(f, \gamma, \varphi_\gamma)$ soluția netrivială a problemei B1, astfel încât relațiile* (24), (25), (26) *sunt îndeplinite. Definim*

$$\theta(t,x) = \partial_y \varphi_\gamma(\hat{y}(t,x); \hat{\lambda}(t)),\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{27}$$

[1] enunțată în precedentul raport

și fie $\{\theta_0(t,x);\ t \geqslant 0\}$ *procesul continuu pe porțiuni satisfăcând ecuațiile integrale* (5)*, unde*

$$\theta_0(\hat{t}_k, x) = \exp(\gamma \hat{t}_k)\, \partial_y \varphi_\gamma(y_0; \hat{\lambda}_k),\ k \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{28}$$

și y_0 *vine din formula* (24)*. Atunci* $(\theta_0(t,x), \theta(t,x)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *este o strategie admisibilă corespunzătoare funcției valoare*

$$V(t,x) = \theta_0(t,x) y_0(t) + \langle \theta(t,x), \hat{y}(t,x) - y_0 \rangle,\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Proof. Prin ipoteză, soluția netrivială $(f, \gamma, \varphi_\gamma)$ a problemei B1 construita în teorema 2 îndeplinește condițiile din lema 1. Forma "feedback" recomandată de ecuațiile (15) și (16) folosește valorile deterministe $\theta_0(\hat{t}_k, x) = \exp(\gamma \hat{t}_k) \varphi_\gamma(0; \hat{\lambda}_k)$, pentru $k \geqslant 0$, care nu sunt corelate cu forma specială pe care am obținut-o aici pentru funcțiile convexe $f \in \mathcal{P}_2(y)$, $\varphi_\gamma \in \mathcal{P}_2(y; \lambda)$.

Conform cu expresia functiei φ_γ dată în formula (26), cele mai simple valori sunt obținute pentru $y = y_0 \in \mathbb{R}^d$, i.e.

$$\varphi_\gamma(y_0, \hat{\lambda}_k) = \frac{1}{|\gamma| - \mu(\hat{\lambda}_k)} \frac{a(\hat{\lambda}_k)}{|\gamma|},\ k \geqslant 0.$$

Aceasta este o ușoară schimbare în definiția formei "feedback" (vezi formulele (6) și (7)) și este în acord cu aplicația liniară $z = y - y_0$ folosită în demonstrația teoremei 1, pentru care $z = 0$ corespunde formei speciale "feedback" dată în (15) și (16).

Ca o consecință, $(\theta_0(t,x), \theta(t,x)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ definită în (27) și (28) este o strategie admisibilă corespunzătoare funcției valoare

$$V(t,x) = \theta_0(t,x) y_0(t) + \langle \theta(t,x), \hat{y}(t,x) - y_0 \rangle,\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$

și $\hat{z}(t,x) = \hat{y}(t,x) - y_0$, $t \geqslant 0$, este soluția sistemului (23). $\square$