Tema: Metode avansate în studiul ecuatiilor diferențiale stocastice; aplicații în matematica financiară și analiza sistemelor.

Obiectiv 3: Reprezentări martingale asociate cu procese stocastice de evoluție și funcționale ponderate

Raport de cercetare

C. Vârsan

Octombrie, 2007

1 Introducere. Formularea problemelor

Procesul continuu pe porțiuni și $\mathcal{F}_t$-adaptat $\{z(t,x) \in \mathbb{R}^n;\ t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ supus analizei este soluția unică a unor ecuații stocastice integrale conținând comutări și salturi. Analiza se bazează pe descompunerea

$$z(t,x) = \hat{z}(t,x) + y(t),\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

unde $\{y(t);\ t \leqslant 0\}$ este un proces $\mathcal{F}_t$-adaptat cu salturi, iar procesul continuu și $\mathcal{F}_t$-adaptat $\{\hat{z}(t,x);\ t \leqslant 0\}$ este soluția unică a unui sistem de ecuații diferențiale stocastice (e.d.s.) conținând comutări

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t\hat{z} = f_0(\hat{z} + y(t); \mu(t))\,\mathrm{d}t + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} f_j(\hat{z} + y(t))\,\mathrm{d}W_j(t),\ t \geqslant 0, \\ \hat{z}(0) = x. \end{cases} \tag{2}$$

Aici câmpurile vectoriale $f_i(z,\mu) \in \mathbb{R}^n$, $(z,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ pot fi neliniare, $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \ldots, w_m(t)) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ este procesul Wiener standard peste campul de probabilitate filtrat $\{\Omega, \{\mathcal{F}_t\} \subset \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$, iar $\lambda(t) := (y(t), \mu(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ este un proces constant pe porțiuni și mărginit. Legătura dintre ”exponent Liapunov” pentru procese cu salturi și inegalități integrale se caracterizează prin următoarea problemă.

Problema (P_1). Să se determine constanta $\gamma < 0$ astfel încât procesul $\mathcal{U}_\gamma := (\exp\gamma t)\varphi(z(t,x))$, $t \geqslant 0$ este superior mărginit de o martingală continuă

$$M_\gamma(t,x) = \|x\|^2 + C_\gamma + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t (\exp\gamma s)\langle \partial_z\varphi(\hat{z}(s,x)), f_j(z(s,x); \mu(s))\rangle\,\mathrm{d}W_j(s),$$

(3)

$t \geqslant 0$, unde $C_\gamma > 0$ este o constantă și $\varphi(z) = \|z\|^2$.

O constanta $\gamma < 0$, soluție pentru problema (P_1) se numește exponent Liapunov și are implicație directă în determinarea stabilității exponențiale în $L_2(\Omega, \mathcal{P})$ a procesului continuu pe porțiuni $\{z_\gamma(t,x) = (\exp\gamma t) z(t,x),\ t \geqslant 0\}$.

Problema (P_2). Să se determine constanta $\gamma < 0$ astfel încât procesul scalar $\mathcal{U}_\gamma(t,x) = (\exp\gamma t)\varphi(z(t,x))$, $t \in [0,T]$ este superior mărginit de o semimartingală continuă

$$S_\gamma(t,x) = \|x\|^2 + C_\gamma + \int_0^t (\exp\gamma s)\langle \partial_z \varphi(\hat{z}(s,x)),\ \mathrm{d}_s \hat{z}(s,x))\rangle,\ t \in [0,T], \quad (4)$$

unde $C_\gamma > 0$ este o constantă, $\varphi(z) = \|z\|^2$) și " $\mathrm{d}_t\hat{z}(t,x)$" reprezintă diferențiala stocastică a procesului continuu $\{\hat{z}(t,x);\ t \geqslant 0\}$ care satisface sistemul de e.d.s. (2).

O constantă $\gamma < 0$, soluție pentru problema (P_2), ne conduce la construcția de strategii admisibile asociate cu funcționale $\psi(z) \leqslant (\exp\gamma T)\|x\|^2 + b$, $b \geqslant 0$, și folosind procesul continuu pe porțiuni $\{z(t,x);\ t \in [0,T]\}$. O proprietate de stabilitate slabă a lui $\{z(t,x);\ t \geqslant 0\}$ (în probabilitate) fără implicarea unui exponent Liapunov își gasește soluția dacă următoarea problemă este soluționată.

Problema (P_3). Se presupune

$$\langle [A_0(\hat{z},t) + A_0^T(\hat{z},t)]\hat{z}, \hat{z}\rangle \leqslant 2\beta\|\hat{z}\|^2,\ \hat{z} \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0, \quad (5)$$

pentru $\beta < 0$ și $A_i(\hat{z},t) := \int_0^1 [\partial_z f_i(\theta\hat{z} + y(t); \mu(t)]\,\mathrm{d}\theta$, $i \in \{0,1,\ldots,m\}$,

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty \text{ există în } L_2(\Omega,\mathcal{P}), \quad (6)$$

$$f_i(\lambda(t)) = 0,\ t \geqslant 0, i \in \{0,1,\ldots,m\}. \quad (7)$$

Să se găsească condiții suficiente asupra lui β astfel încât $\lim_{t\to\infty} z(t,x) = y_\infty$ în $L_2(\Omega,\mathcal{P})$.

Un răspuns pozitiv pentru problemele (P_1), (P_2), (P_3) se sprijină, respectiv, pe soluțiile următoarelor inegalități diferențiale.

$$[\gamma\varphi + L_1(\varphi)](\hat{z};t) \leqslant 2\sum_{i=0}^m \|f_i(\lambda(t))\|^2,\ \hat{z} \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0, \quad (8)$$

$$[\gamma\varphi + L_2(\varphi)](\hat{z};t) \leqslant 2\sum_{i=0}^{m} \|f_i(\lambda(t))\|^2,\ \hat{z}\in\mathbb{R}^n, t\geqslant 0, \tag{9}$$

$$[|\beta|\varphi + L_1(\varphi)](\hat{z};t) \leqslant 0,\ \hat{z}\in\mathbb{R}^n, t\geqslant 0. \tag{10}$$

Aici operatorii diferențiali de ordinul al doilea L_1 și L_2 sunt definiți prin

$$\begin{aligned} L_1(\psi)(\hat{z},t) := \langle \partial_z\psi(\hat{z}), f_0(\hat{z}+y(t);\mu(t))\rangle + \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\langle \partial_z^2\psi(\hat{z}) f_j(\hat{z}+y(t);\mu(t)), f_j(\hat{z}+y(t);\mu(t))\rangle, \end{aligned} \tag{11}$$

$$L_2(\psi)(\hat{z},t) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\langle \partial_z^2\psi(\hat{z}) f_j(\hat{z}+y(t);\mu(t)), f_j(\hat{z}+y(t);\mu(t))\rangle. \tag{12}$$

Rezultatele principale privind problemele (P_1) și (P_3) sunt detaliate în teoremele 1 și 3 pe care le vom expune în continuare.

Există situații în care nu avem acces la starea $x(t,x)\in\mathbb{R}^n$ și se observă numai o variantă redusă $\{h(t,x) := Q^T z(t,x),\ t\geqslant 0\}$ a procesului continuu pe porțiuni. În aceste cazuri, problemele (P_1)–(P_3) se transferă procesului observat $h(t,x) := Q^T z(t,x)$, $t\geqslant 0$, dacă matricea $Q := (b_1, b_2, \ldots, b_k)$, $b_j\in\mathbb{R}^n$, $j\in\{1,2,\ldots,k\}$, împreună cu matricele $A_i(\hat{z},t) := \int_0^1 [\partial_z f_i(\theta\hat{z} + y(t);\mu(t))]\,\mathrm{d}\theta$, $i\in\{0,1,\ldots,m\}$ satisfac condițiile

$$\begin{cases} \text{există matricele mărginite } B_i(\hat{z};t),\ \hat{z}\in\mathbb{R}^n, t\geqslant 0 \text{ astfel încât} \\ Q^T A_i(\hat{z};t) = B_i(\hat{z};t) Q^T,\ i\in\{0,1,\ldots,m\}. \end{cases} \tag{13}$$

Asumând condițiile (13), definim câmpurile vectoriale $g_i(h;\alpha(t))\in\mathbb{R}^k$, liniare în $h\in\mathbb{R}^k$

$$g_i(h;\alpha(t)) := B_i(\hat{z}(t,x);t)h + Q^T f_i(\lambda(t)),\ i\in\{0,1,\ldots,m\}, \tag{14}$$

unde $\alpha(t) := (t, \hat{z}(t,x), \lambda(t))$, $t\geqslant 0$. Ca urmare, ecuațiile integrale care descriu evoluția procesului $\{z(t,x);\ t\geqslant 0$ continuu pe porțiuni se va înlocui cu sistemul de ecuații integrale

$$\begin{aligned} h(t,x) = Q^T x + Q^T y(t) + \int_0^t g_0(h(s,x);\alpha(s))\,\mathrm{d}s + \\ + \sum_{j=1}^{m}\int_0^t g_j(h(s,x);\alpha(s))\,\mathrm{d}W_j(s), \end{aligned} \tag{15}$$

iar descompunerea $h(t,x) = \hat{h}(t,x) + Q^T y(t)$, $t \geqslant 0$, conținând componenta continuă $\{\hat{h}(t,x);\ t \geqslant 0\}$, este adevărată. Aici $\{\hat{h}(t,x);\ t \geqslant 0\}$ va fi soluția unică a sistemului de e.d.s.

$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{h} = g_0(\hat{h} + y_1(t); \alpha(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m} g_j(\hat{h} + y_1(t); \alpha(t))\,\mathrm{d}W_j(t),\ t \geqslant 0 \\ \hat{h}(0) = Q^T x,\ \text{ unde } y_1(t) := Q^T y(t). \end{cases} \tag{16}$$

Sistemul de e.d.s. (16) are aceeași formă cu sistemul original (1) având câmpurile $g_i(h; \alpha(t))$ liniare în $h \in \mathbb{R}^k$.

2 Prezentarea unor rezultate auxiliare și a ipotezelor de lucru

Fie $\{\Omega, \{\mathcal{F}_t\} \subset \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ un spațiu de probabilitate filtrat și $w(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ un proces Wiener standard. Fie dat un proces continuu pe porțiuni și $\mathcal{F}_t$-adaptat $\lambda(t) := (y(t), \mu(t)) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, și definim procesul continuu pe portiuni și $\mathcal{F}_t$-adaptat $\{z(t,x);\ t \geqslant 0$ ca soluție unică a următorului sistem de e.d.s. care conține salturi și comutări,

$$\begin{aligned} z(t,x) = x + y(t) + \int_0^t f_0(z(s,x); \mu(s))\,\mathrm{d}s + \\ + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t f_j(z(s,x); \mu(s))\,\mathrm{d}W_j(s),\ t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Câmpurile vectoriale $f_i(z;\mu) \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{0,1,\ldots,m\}$, sunt funcții continue de $(z,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ și satisfac condițiile

$$\begin{cases} f_i(z;\mu) \text{ este continuu diferențiabilă în } z \in \mathbb{R}^n \text{ și} \\ \|[\partial_z f_i(z;\mu(t))]\| \leqslant C_i,\ (z,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+,\ \text{ unde } C_i > 0 \text{ e o constantă.} \end{cases} \tag{18}$$

Procesul continuu pe porțiuni $\lambda(t) = (y(t), \mu(t))$, $t \geqslant 0$, este $\mathcal{F}_t$-adaptat și satisface următoarea condiție de mărginire,

$$\|y(t)\|^2 \|f_i(\lambda(t))\|^2 \leqslant K \exp \nu t,\ t \geqslant 0,\ i \in \{0,1,\ldots,m\}, \tag{19}$$

unde $K > 0$ și $\nu > 0$ sunt constante. Asumând (18) și (19), din (17) obținem o soluție unică $\{z(t,x);\ t \geqslant 0\}$ care se va descompune sub forma

$$z(t,x) = \hat{z}(t,x) + y(t),\ t \geqslant 0, \tag{20}$$

iar procesul continuu și $\mathcal{F}_t$-adaptat $\{\hat{z}(t,x);\ t \geqslant 0\}$ satisface următorul sistem de e.d.s.,

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t\hat{z} = f_0(\hat{z} + y(t); \mu(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m} f_j(\hat{z} + y(t); \mu(t))\,\mathrm{d}W_j(t),\ t \geqslant 0, \\ \hat{z}(0) = x. \end{cases} \tag{21}$$

Comportarea asimptotică a procesului $\{z(t,x);\ t \geqslant 0\}$ este analizată utilizând inegalități integrale asociate cu funcționale standard $\mathcal{U}_\gamma(t,x) = (\exp\gamma t)\varphi(z(t,x))$, $t \geqslant 0$, $\varphi(z) = \|z\|^2$.

Definiția 1. O constanta $\gamma < 0$ este exponent Liapunov pentru procesul continuu pe porțiuni $\{z(t,x);\ t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ dacă $\{\mathcal{U}_\gamma(t,x);\ t \geqslant 0\}$ este mărginită superior de o martingală

$$M_\gamma(t,x) := \|x\|^2 + C_\gamma + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t (\exp\gamma s)\langle \partial_z\varphi(\hat{z}(s,x)), f_j(z(s,x); \mu(s))\rangle\,\mathrm{d}W_j(s),$$

i.e. $\mathcal{U}_\gamma(t,x) \leqslant M_\gamma(t,x)$, pentru orice $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, unde $C_\gamma > 0$ este o constantă.

Observația 1. Notăm că $\gamma < 0$ este exponent Liapunov pentru $z(t,x) = \hat{z}(t,x) + y(t)$, $t \geqslant 0$, dacă$\gamma < 0$ este exponent Liapunov pentru componenta continuă $\{\hat{z}(t,x);\ t \geqslant 0\}$ și, în plus, $|\gamma| > \nu$, unde $\nu > 0$ este dată in (19). O constantă $\gamma < 0$ este exponent Liapunov pentru $\{\hat{z}(t,x);\ t \geqslant 0\}$ dacă $\hat{\mathcal{U}}_\gamma(t,x) = (\exp\gamma t)\varphi(\hat{z}(t,x))$, $t \geqslant 0$, este marginită superior de o martingală

$$M_\gamma(t,x) := \|x\|^2 + \hat{C}_\gamma + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t (\exp\gamma s)\langle \partial_z\varphi(\hat{z}(s,x)), f_j(z(s,x); \mu(s))\rangle\,\mathrm{d}W_j(s),$$

i.e. $\hat{\mathcal{U}}_\gamma(t,x) \leqslant \hat{M}_\gamma(t,x)$ pentru orice $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, unde $\hat{C}_\gamma > 0$ este o constantă.

Observația 2. Pentru a obține martingala $\{\hat{M}_\gamma(t,x);\ t \geqslant 0\}$ asociată cu procesul continuu $\hat{\mathcal{U}}_\gamma(t,x) = (\exp\gamma t)\varphi(\hat{z}(t,x))$, $t \geqslant 0$, este necesar să reprezentăm acest proces ca o semimartingală,

$$\hat{\mathcal{U}}_\gamma(t,x) = D_\gamma(t,x) + M_\gamma(t,x),\ t \geqslant 0, \tag{22}$$

în care partea ”drift” $D_\gamma(t,x)$ este marginită superior,

$$D_\gamma(t,x) \leqslant \|x\|^2 + \hat{C}_\gamma,\ t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{23}$$

unde $\hat{C}_\gamma > 0$ este o constantă.

Observaţia 3. Atât martingala $\{M_\gamma(t,x);\ t \geqslant 0\}$ cât şi procesul continuu $\{D_\gamma(t,x);\ t \geqslant 0\}$ care satisfac (22) şi (23) sunt definite explicit în lema care urmează folosind matricele mărginite $A_i(\hat{z};t)$, $i \in \{0,1,\dots,m\}$, (vezi (18)),

$$A_i(\hat{z};t) := \int_0^1 [\partial_z f_i(\theta \hat{z} + y(t);\mu(t))]\,\mathrm{d}\theta,\ \|A_i(\hat{z};t)\| \leqslant C_i. \tag{24}$$

Cu notaţiile de mai sus definim matricea $\hat{A}(z;t)$ şi vectorul $\hat{F}(z;t)$,

$$\begin{cases} \hat{A}(\hat{z};t) = A_0(\hat{z};t) + A_0^T(\hat{z};t) + A(\hat{z};t),\ A(\hat{z};t) = \displaystyle\sum_{j=1}^m A_j^T(\hat{z};t)A_j(\hat{z};t), \\ \hat{F}(\hat{z};t) = A_0^T(\hat{z};t)f_0(\lambda(t)) + F(\hat{z};t),\ F(\hat{z};t) = \displaystyle\sum_{j=1}^m A_j^T(\hat{z};t)f_j(\lambda(t)). \end{cases} \tag{25}$$

Pentru simplitate, considerăm următoarele matrice (ele vor exista ca matrice simetrice şi pozitiv definite),

$$\hat{Q}_\gamma(\hat{z};t) = |\gamma|I_n - \hat{A}(\hat{z};t),\ \hat{P}_\gamma(\hat{z};t) = [\hat{Q}_\gamma(\hat{z};t)]^{\frac{1}{2}},\ \hat{R}_\gamma(\hat{z};t) = [\hat{P}_\gamma(\hat{z};t)]^{-1}. \tag{26}$$

Soluţia problemei (P_1) este o consecinţa a lemei care urmează.

Lema 1. Presupunem îndeplinite condiţiile (18) şi (19). Fie $\gamma < 0$ o constantă verificând

$$|\gamma| > 2C_0 + \sum_{j=1}^m C_j^2,\ |\gamma| > \nu, \tag{27}$$

unde $C_i > 0$ şi $\nu > 0$ sunt date în (18) şi (19).

Atunci matricele $\hat{Q}_\gamma(\hat{z};t)$, $\hat{P}_\gamma(\hat{z};t)$ şi $\hat{R}_\gamma(\hat{z};t)$ definite în (26) sunt strict pozitiv definite şi mărginite pentru orice $(\hat{z};t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. În plus, este satisfăcută următoarea ecuaţie integrală stocastică,

$$\begin{aligned} (\exp\gamma t)\|\hat{z}(t,x)\|^2 &= b_\gamma(t,x) + \\ &+ 2\sum_{j=1}^m \int_0^t (\exp\gamma s)\langle \hat{z}(s,x), f_j(z(s,x);\mu(s))\rangle\,\mathrm{d}W_j(s) - \\ &- \int_0^t (\exp\gamma s) N_\gamma(s,x)\,\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{28}$$

unde $\{b_\gamma(t,x) \geqslant 0;\ t \geqslant 0\}$ și $\{N_\gamma(t,x) \geqslant 0;\ t \geqslant 0\}$ verifică

$$\begin{aligned} 0 \leqslant b_\gamma(t,x) = \|x\|^2 + \int_0^t (\exp\gamma s)[\|\hat{R}_\gamma(\hat{z}(s,x);s)\hat{F}(\hat{z}(s,x);s)\|^2 + \\ + \sum_{j=1}^m \|f_j(\lambda(s))\|^2]\,\mathrm{d}s \leqslant \|x\|^2 + \hat{C}_\gamma,\ t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{29}$$

unde $\hat{C}_\gamma > 0$ este constantă,

$$N_\gamma(t,x) = \|\hat{P}_\gamma(\hat{z}(t,x);t)\hat{z}(t,x) - \hat{R}_\gamma(\hat{z}(t,x);t)\hat{F}(\hat{z}(t,x);t)\|^2,\ t \geqslant 0. \tag{30}$$

Demonstrație. Se aplică regula standard de diferențiere stocastică procesului continuu $\hat{\mathcal{U}}(t,x) = (\exp\gamma t)\varphi(\hat{z}(t,x))$, $t \geqslant 0$, unde $\varphi(z) = \|z\|^2$, $z \in \mathbb{R}^n$. Obținem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_t\hat{\mathcal{U}}(t,x) = (\exp\gamma t)[\gamma\varphi + L(\varphi)](\hat{z}(t,x);t)\,\mathrm{d}t + \\ + 2\sum_{j=1}^m (\exp\gamma t)\langle \hat{z}(t,x), f_j(z(t,x);\mu(t))\rangle\,\mathrm{d}W_j(t),\ t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{31}$$

unde operatorul diferențial de ordinul al doilea L are forma

$$\begin{aligned} L(\varphi)(\hat{z};t) = \langle \partial_z\varphi(\hat{z}), f_0(\hat{z}+y(t);\mu(t))\rangle + \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \langle \partial_z^2\varphi(\hat{z}) f_j(\hat{z}+y(t);\mu(t)), f_j(\hat{z}+y(t);\mu(t))\rangle. \end{aligned} \tag{32}$$

Aici este util să rescriem fiecare câmp $f_i(z;\mu(t))$ sub forma

$$f_i(\hat{z}+y(t);\mu(t)) = f_i(\lambda(t)) + A_i(\hat{z};t)\hat{z},\ i \in \{0,1,\dots,m\}, \tag{33}$$

unde matricele $A_i(\hat{z};t)$ sunt date în (24) și $f_i(\lambda(t)) = f_i(y(t);\mu(t))$ satisfac ipotezele (18) și (19).

Ca urmare, operatorul $\gamma\varphi + L(\varphi)$ din (31) se rescrie

$$\begin{aligned} [\gamma\varphi + L(\varphi)](\hat{z}(t,x);t) = -\langle \hat{Q}_\gamma(\hat{z}(t,x);t)\hat{z}(t,x), \hat{z}(t,x)\rangle + \\ + 2\langle \hat{F}(\hat{z}(t,x);t), \hat{z}(t,x)\rangle + \sum_{j=1}^m \|f_j(\lambda(t))\|^2,\ t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{34}$$

unde matricea mărginita și simetrică $\hat{Q}_\gamma$ și vectorul $\hat{F} \in \mathbb{R}^n$ sunt definiți prin relațiile (25). Folosind o matrice ortogonală $\hat{H}(\hat{z};t)$, $(\hat{H}^T(\hat{z};t) = [\hat{H}(\hat{z};t)]^{-1})$, obținem forma diagonală asociată cu $\hat{Q}_\gamma(\hat{z};t) = |\gamma| I_n - \hat{A}(\hat{z};t)$,

$$\hat{Q}_\gamma(\hat{z};t) = \hat{H}(\hat{z};t) D_\gamma(\hat{z};t)[\hat{H}(\hat{z};t)]^{-1}, \tag{35}$$

unde

$$\begin{aligned} &D_\gamma(\hat{z};t) = \operatorname{diag}\left[|\gamma| - \gamma_1(\hat{z};t), |\gamma| - \gamma_2(\hat{z};t), \ldots, |\gamma| - \gamma_n(\hat{z};t)\right], \\ &\hat{H}(\hat{z};t) = [e_1(\hat{z};t), e_2(\hat{z};t), \ldots, e_n(\hat{z};t)], \end{aligned}$$

și

$$\hat{A}(\hat{z};t)e_k(\hat{z};t) = \gamma_k(\hat{z};t)e_k(\hat{z};t),\ \|e_k(\hat{z};t)\| = 1,\ k \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{36}$$

Prin calcul direct, din (36) obținem

$$\begin{cases} \|\hat{A}(\hat{z};t)e_k(\hat{z};t)\| = |\gamma_k(\hat{z};t)|, \\ \|\hat{A}(\hat{z};t)\| = \max\limits_{\|e\|=1} \|\hat{A}(\hat{z};t)e\| \geqslant |\gamma_k(\hat{z};t)|,\ k \in \{1,2,\ldots,n\}, : \end{cases} \tag{37}$$

unde (vezi (25) și (18))

$$\|\hat{A}(\hat{z};t)\| \leqslant 2C_0 + \sum_{j=1}^{m} C_j^2,\ t \geqslant 0, z \in \mathbb{R}^N. \tag{38}$$

Folosind (37),(38) și ipoteza (18) obținem că $|\gamma|$ satisface inegalitatea

$$|\gamma| > 2C_0 + \sum_{j=1}^{m} C_j^2 \geqslant |\gamma_k(\hat{z};t)|,\ k \in \{1,2,\ldots,n\}, \hat{z} \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0. \tag{39}$$

Ca urmare, matricea diagonală din reprezentarea (35) are o inversă mărginită și strict pozitiv definită

$$[\hat{D}_\gamma(\hat{z};t)]^{-1} = \operatorname{diag}\left[(|\gamma| - \gamma_1(\hat{z};t)^{-1}, |\gamma| - \gamma_2(\hat{z};t)^{-1}, \ldots, |\gamma| - \gamma_n(\hat{z};t)^{-1}\right], \tag{40}$$

care va permite să definim atât radicalul de ordinul al doilea, cât și inversul acestuia asociate cu matricea $\hat{Q}_\gamma(\hat{z};t)$. În această privință, definim

$$\begin{cases} \hat{P}_\gamma(\hat{z};t) = [\hat{Q}_\gamma(\hat{z};t)]^{\frac{1}{2}} = \hat{H}(\hat{z};t)[D_\gamma(\hat{z};t)]^{\frac{1}{2}}[\hat{H}(\hat{z};t)]^{-1}, \\ \hat{R}_\gamma(\hat{z};t) = [\hat{P}_\gamma(\hat{z};t)]^{-1} = \hat{H}(\hat{z};t)[D_\gamma(\hat{z};t)]^{-\frac{1}{2}}[\hat{H}(\hat{z};t)]^{-1}, \end{cases} \tag{41}$$

și, folosind (41), rescriem (34) după cum urmează

$$\begin{aligned}[\gamma\varphi + L(\varphi)](\hat{z}(t,x);t) = \|\hat{R}_\gamma(\hat{z}(t,x);t)\hat{F}(\hat{z}(t,x);t)\|^2 - \\ - \|\hat{P}_\gamma(\hat{z}(t,x);t)\hat{z}(t,x) - \hat{R}_\gamma(\hat{z}(t,x);t)\hat{F}(\hat{z}(t,x);t)\|^2 + \\ + \sum_{j=1}^{m} \|f_j(y(t);\mu(t))\|^2,\ t \geqslant 0.\end{aligned} \tag{42}$$

Introducând (42) în ecuația (31) obținem ecuația integrală

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}(t,x) = b_\gamma(t,x) - \int_0^t (\exp\gamma s) N_\gamma(s;x)\,\mathrm{d}s + \\ + 2\sum_{j=1}^{m}\int_0^t (\exp\gamma s)\langle \hat{z}(s,x), f_j(z(s,x);\mu(s))\rangle\,\mathrm{d}W_j(s),\ t \geqslant 0,\end{aligned} \tag{43}$$

unde $b_\gamma(t,x) \geqslant 0$ satisface (29), iar $N_\gamma(t,x) \geqslant 0$ este definit prin relația (30). Demostrația este completă

Observația 4. Există o situație particulară în care comportarea asimptotică a procesului continuu $\{\hat{z}(t,x);\ t \geqslant 0\}$ poate fi descrisă fără a face apel la un exponent Liapunov $\gamma < 0$. În acest caz este necesar ca să impunem condiții suplimentare asupra câmpului f_0, precum și asupra procesului continuu pe porțiuni de referință.

În continuare vom admite următoarea ipoteză,

$$\begin{cases} \text{(a)} & \text{Condiția (18) este satisfăcută,} \\ \text{(b)} & f_i(y(t);\mu(t)) = 0,\ i \in \{0,1,\ldots,m\}, t \geqslant 0, \\ \text{(c)} & \langle [A_0(\hat{z};t) + A_0^T(\hat{z};t)]\hat{z},\hat{z}\rangle \leqslant 2\beta\|\hat{z}\|^2,\ t \geqslant 0, \hat{z} \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{44}$$

unde $\beta < 0$ este o constantă, iar matricele A_i, $i \in \{0,1,\ldots,m\}$ sunt definite în (24).

Cu aceleași notații ca în Lema 1, vom proba

Lema 2. Fie condițiile (44) îndeplinite, unde constanta $\beta < 0$ satisface

$$|\beta| > \sum_{j=1}^{m} C_j^2, \tag{45}$$

iar $C_j > 0$, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, sunt date în (18).

Atunci procesul continuu $\{\hat{z}(t,x);\ t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ satisface ecuația integrală stocastică

$$\begin{aligned}\|\hat{z}(t,x)\|^2 = \|x\|^2 + \beta \int_0^t \|\hat{z}(s,x)\|^2\,\mathrm{d}s - \int_0^t N_\beta(s,x)\,\mathrm{d}s +\\ + 2\sum_{j=1}^m \int_0^t \langle \hat{z}(s,x), f_j(z(s,x);\mu(s))\rangle\,\mathrm{d}W_j(s),\ t \geqslant 0,\end{aligned} \tag{46}$$

unde

$$\begin{cases} N_\beta(t,x) := \langle (Q_\beta(t,x) + 2\beta I_n - (A_0^T + A_0)(\hat{z}(t,x);t))\hat{z}(t,x), \hat{z}(t,x)\rangle \geqslant 0,\\ Q_\beta(t,x) := |\beta| I_n - A(\hat{z}(t,x);t) \geqslant 0,\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\end{cases} \tag{47}$$

matricele A_i și A fiind definite în (24) și (25).

Demonstrație. Folosind funcția test $\varphi(z) = \|z\|^2$ și aplicând regula standard de diferențiere stocastică asociată cu procesul scalar continuu $\varphi(\hat{z}(t,x))$, $t \geqslant 0$, obținem ecuația stocastică

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_t[\varphi(\hat{z}(t,x))] = L_1(\varphi)(\hat{z}(t,x);t)\,\mathrm{d}t +\\ + \sum_{j=1}^m \langle \partial_z\varphi(\hat{z}(t,x)), f_j(z(t,x);\mu(t))\rangle\,\mathrm{d}W_j(t),\ t \geqslant 0,\end{aligned} \tag{48}$$

unde operatorul diferențial de ordinul al doilea

$$\begin{aligned}L_1(\varphi)(\hat{z};t) := \langle \partial_z\varphi(\hat{z}), f_0(\hat{z} + y(t);\mu(t))\rangle +\\ + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \langle \partial_z^2\varphi(\hat{z}) f_j(\hat{z} + y(t);\mu(t)), f_j(\hat{z} + y(t);\mu(t))\rangle\end{aligned} \tag{49}$$

satisface ecuația

$$L_1(\varphi)(\hat{z};t) = \langle \hat{A}(\hat{z};t)\hat{z}, \hat{z}\rangle + 2\langle \hat{F}(\hat{z};t), \hat{z}\rangle + \sum_{j=1}^m \|f_j(\lambda(t))\|^2. \tag{50}$$

Aici matricea simetrică $\hat{A}$ și câmpul vectorial $\hat{F}(\hat{z};t) \in \mathbb{R}^n$ sunt definite în (25). Folosind condițiile (b) și (c) din ipoteza (44), rescriem operatorul $L_1(\varphi)$ din (50) sub forma

$$\begin{aligned}L_1(\varphi)(\hat{z};t) = \langle \hat{A}(\hat{z};t)\hat{z}, \hat{z}\rangle =\\ = \beta\varphi(\hat{z}) - \langle Q_\beta(t;\hat{z})\hat{z}, \hat{z}\rangle - \langle (2\beta I_n - (A_0^T + A_0)(\hat{z};t))\hat{z}, \hat{z}\rangle.\end{aligned} \tag{51}$$

Aici matricele simetrice $Q_\beta(t;\hat{z})$ și $\hat{A}(\hat{z};t)$ sunt definite prin

$$\begin{cases} \hat{A}(\hat{z};t) = (A_0^T + A_0)(\hat{z};t) + A(\hat{z};t),\ A(\hat{z},t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_j^T(\hat{z};t)A_j(\hat{z};t), \\ Q_\beta(t;\hat{z}) = |beta|I_n - A(\hat{z};t). \end{cases} \tag{52}$$

Folosind o matrice ortogonală $H(\hat{z};t)$, $(H^T = H^{-1})$, se deduce forma diagonală a matricei simetrice $A(\hat{z};t)$,

$$\begin{cases} A(\hat{z};t) = H(\hat{z};t)D(\hat{z};t)H^{-1}(\hat{z};t), \\ D(\hat{z};t) = \operatorname{diag}\left(\gamma_1(\hat{z};t), \gamma_2(\hat{z};t), \ldots, \gamma_n(\hat{z};t)\right),\ \gamma_k(\hat{z};t) \geqslant 0, \end{cases} \tag{53}$$

unde $H(\hat{z};t) = [e_1(\hat{z};t), e_2(\hat{z};t), \ldots, e_n(\hat{z};t)]$ și

$$A(\hat{z};t)e_k(\hat{z};t) = \gamma_k(\hat{z};t)e_k(\hat{z};t),\ k \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{54}$$

Folosind (54), ca și în Lema 1, se obține ușor că

$$0 \leqslant \gamma_k(\hat{z};t) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|A_j(\hat{z};t)\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} C_j^2,\ \hat{z} \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0, \tag{55}$$

dacă condiția (a) din ipoteza (44) este îndeplinită. Cu aceste precizări, alegând $\beta < 0$ astfel încât (45) se satisface, atunci matricea $Q_\beta(\hat{z};t)$ din (52) va fi pozitiv definită, $Q_\beta(t,\hat{z}) \geqslant 0$, pentru orice $\hat{z} \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, iar ecuația diferențială stocastică (48) se rescrie

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t\varphi(\hat{z};t)) = \beta\varphi(\hat{z}(t,x))\,\mathrm{d}t - N_\beta(t,x)\,\mathrm{d}_t + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \langle \partial_z\varphi(\hat{z}(t,x), f_j(z(t,x);\mu(t)))\rangle\,\mathrm{d}W_j(t), \\ \varphi(\hat{z}(0,x)) = \|x\|^2. \end{cases} \tag{56}$$

Aici $N_\beta(t,x) \geqslant 0$ este definit în (47) și prin integrare din (56) se obține ecuația integrală (46). Demonstrația este completă.

Bibliografie

[1] B. Iftimie, C. Vârsan, "Asymptotic behaviour and admissible strategies associated with piecewise continuous solutions of s.d.e.", presented at Int. Conf. AMAMEF, Vienna, September, 2007.