Un rezultat de descompunere pentru o clasa de distributii omogene

Ingrid Beltiţă si Anders Melin

Raport pentru contractul CEx-18 MDDS, faza octombrie 2007

Introducere

Consideram operatorii Schrödinger $H_v = -\Delta_v$, unde $v \in L^q_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$, $q > n$. In acest caz, operatorii de unda

$$W_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_v}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}$$

exista si sunt completi completi si se poate defini matricea de scattering. Transformarea de backscattering $v \to Bv$ pe care o consideram este, in afara unui termen neted dat de functiile proprii ale operatorului H_v, transformata Fourier a partii antidiagonale a matricii de scattering (datele de backscattering). Atunci, daca $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, aplicatia $\lambda \to B(\lambda v) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ este intreaga analitica si exista operatorii N-liniari $\mathbb{B}_N$ definiti pe $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ cu valori in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ astfel incat

$$B(\lambda v) = \sum_1^\infty \lambda^N B_N(v),$$

unde $B_N(v) = \mathbb{B}_N(v, \cdot, v)$.

S-a aratat ca $B_N v$ este mult mai regulat decat v in cazul in care N este mare ([M03]). Mai precis, daca $n \geq 3$ este impar, $q > n$, $k \in \mathbb{N}$, atunci exista N_0 suficient de mare, depinzand doar de n, q si k astfel incat daca Ω_1, Ω_2 sunt multimi deschise in $\mathbb{R}^N$, exista $C = C(k, \Omega_1, \Omega_2, q)$ astfel incat

$$\|\Delta^k B_N v\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C^N \|v\|^N_{L^q}/N!,$$

pentru orice $v \in L^q$ cu $\operatorname{supp} v \subset \Omega_2$ si pentru orice $N \geq N_0$.

Ramane deci de studiat ce se intampla cu termenii de ordin N mic, si de asemenea pentru v care nu are neaparat suport compact.

Ne propunem sa stabilim estimari in spatii L^2-Sobolev cu pondere pentru B_N in dimensiuni impare arbitrare, iar dupa cum arata teorema de mai sus, un bun inceput este studiul termenilor de ordin mic. Cazul $N = 2$ face obiectul unui alt articol. Prezentul proiect isi propune obtinerea unor estimari in cazul $N = 3$.

Fie $E(y, z) = 4^{-1}(i\pi)^{1-n}\delta^{(n-2)}(|y|^2 - |z|^2)$ solutia unica a operatorului ultra-hiperbolic $\Delta_y - \Delta_z$ care satisface: $E(y, z) = -E(z, y)$, iar $E(y, z)$ este invarianta la rotatii separat in ambele variabile (a se vedea Corollary 10.2 of [M04]).

Pentru $1 \leq j < k \leq 3$ definim $E_{(j,k)}(x_1, x_2, x_3) = E_2(x_j, x_k) \otimes \delta(x_l)$, unde $\{j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$. Cum $E_2(x, y)$ este suportata pe multimea unde $|x| = |y|$ se vede ca putem defini:

$$E_3 = E_{(1,2)} * (E_{(1,3)} - E_{(2,3)}).$$

Aceasta este o distributie omogena de ordin $-3n + 4$ cu suportul in multimea

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_3| = |x_1| + |x_2|\}.$$

Se poate atunci arata ca

$$(B_3 v)(x) = -\iiint E_3(x_1, x_2, x_3) v(x - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3))$$
$$v(x - \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3)) v(x - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3))\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

cand $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, unde integrala este interpretata in sensul distributiilor.

Prezentul raport prezinta rezultate de teoria distributiilor care sunt utilizate pentru a studia in detaliu distributia E_3. In prima sectiune este introdusa o clasa de distributii pentru care se demonstreaza un rezultat de uniciate care generalizeaza intr-un anumit sens distributiile omogene. Mai precis, daca X este o submultime din $\mathbb{R}^m$ care este o reuniune de subspatii ale lui $\mathbb{R}^m$, este introdusa o conditie de regularitate in raport cu aceasta multime X astfel incat o distribuite definita pe $\mathbb{R}^m \setminus X$ care satisface aceasta conditie se poate extinde in mod unic la $\mathbb{R}^m$. Un caz particular il constituie $X = \{0\}$ si distributiile omogene de ordin $a > -m$.

Al doilea rezultat continut in acest raport este o descompunere a unei clase de distributii omogene intr-o integrala de distributii ale caror suport poate fi controlat cu usurinta. Acesta este un pas tehnic in demonstrarea estimarilor in spatii Sobolev cu pondere, care inlocuieste o buna partitie a unitatii, si care permite controlul cresterilor in timp ce sunt estimate singularitatile.

Primul rezultat prezentat mai sus arata ca distribuitia E_3 este o combinatie liniara de forma

$$\vartheta_3^j(|x_1|^{k+1-n}|x_2|^{l+1-n}|x_3|^{-k-l} Y_1(|x_3| - |x_1| - |x_2|) \tag{0.1}$$

unde

$$0 \leq j \leq k + l + (n-1)/2, \quad 0 \leq k, l \leq (n-1)/2$$

$Y_1(s) = s$ cand $s \geq 0$ si $Y_1(s) = 0$ cand $s < 0$, iar $\vartheta_3 = \langle x_3, \partial_{x_3} \rangle$. Descompunerea prezentata in sectiunea 3 permite obtinerea unei forme mai simple pentru partea din $B_3 v$ corespunzatoare fiecarui termen din (0.1).

Cateva notatii. Fie $n \geq 2$ intreg. Notam

$$\dot{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \setminus 0$$

si definim

$$\Omega = \dot{\mathbb{R}}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n.$$

Vom folosi de asemenea notatia $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{3n}$ unde $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, 3$, si $\hat{x} = x/|x|$ cand $x \in \dot{\mathbb{R}}^n$. De asemenea $\vartheta = \langle x, \partial_x \rangle$, iar eventualii indici arata variabila in care este aplicat acest operator.

1 Un rezultat de unicitate pentru distributii

Fie V un spatiu liniar real m-dimensional impreuna cu o submultime $X \neq V$ care este o reuniune finita de subspatii. Vom introduce o conditie pentru $u \in \mathcal{D}'(V)$ astfel incat u este unic determinata de restrictia sa la $V \setminus X$. O situatie tipica este aceea cand $V = \mathbb{R}^m$ si $X = \{0\}$. Atunci, daca u este omogena de grad a, unde a nu este un intreg $\leq -m$, stim ca u este unic determinata de restrictia sa la $V \setminus X$.

Un subspatiu liniar Y continut in X se numeste maximal pentru X daca Y nu este continut strict in nici un alt subspatiu liniar propriu al lui X. in X. Fie $X_1, \ldots, X_N$ subspatiile liniare maximale ale lui V. (Daca X este reuniunea finita ale subspatiilor liniare Y_k atunci subspatiile X_j se gasesc printre Y_k. Aceasta deoarece orice subpatiu liniar Y continut in X satisface $Y = \cup_k(Y \cap Y_k)$ deci Ytrebuie sa fie continut intr-un Y_k pentru un anume k.) Daca L este un camp vectorial pe V, spunem ca L este tangential la X daca $L(v)$ ia valori in X_j ori de cate ori $v \in X_j$. Daca L este neted aceasta conditie nu inseamna altceva decat ca L este tangential, in sensul obisnuit, la orice $v \in V$ pentru care X este o subvarietate neteda a lui V intr-o vecinatate a lui v.

Spatiul $\mathcal{L}(V)$ al aplicatiilor liniare pe V poate fi vazut ca spatiul campurilor vectoriale pe V ale caror coeficienti sunt forme liniare pe V. Daca $A \in \mathcal{L}(V)$ este privit ca operator diferential si $f \in C^\infty(V)$, avem

$$Af(v) = \frac{d}{dt} f(v + tAv)_{|t=0}.$$

Observam ca $A \in \mathcal{L}(V)$ este tangential la X daca si numai daca subspatiile X_j sunt subspatii invariante pentru A. Spatiul acestor $A \in \mathcal{L}(V)$ este notat $\mathcal{L}_X(V)$. Consideram $\mathcal{A}_X(V)$ subalgebra algebrei Weyl $\mathcal{A}(V)$ generata de 1 si $\mathcal{L}_X(V)$.

Fie

$$\Pi_j : V \to V/X_j$$

proiectiile canonice si $\mathcal{D}_j$ imaginea lui $C_0^\infty(V/X_j)$ prin aplicatia $f \mapsto f \circ \Pi_j$. Notam cu $C^\infty_{(X)}(V)$ (sau $\mathcal{D}_X(V)$) subinelul fara unitate al lui $C^\infty(V)$ generat de $\mathcal{D}_j$. Intrucat aplicatiile Π_j sunt liniare, rezulta ca spatiile $\mathcal{D}_j$, si deci si $C_{(X)}(V)$, sunt invariante la dilatari.

Lema 1.1. *Exista $f \in C^\infty_{(X)}(V)$ and $\operatorname{supp}(g) \subset V \setminus X$ astfel incat $1 = f + g$. Mai mult,*

$$\mathcal{A}_X(V) C^\infty_{(X)}(V) \subset C^\infty_{(X)}(V).$$

Dem. Alegem $\chi_j \in C_0^\infty(V/X_j)$ astfel incat $\chi_j = 1$ intr-o vecinatate a lui 0 si definim $f_j = \chi_j \circ \Pi_j$, $g_j = 1 - f_j$. Atunci

$$1 = \prod_1^N (f_j + g_j) = f + g,$$

unde $f \in C^\infty_{(X)}(V)$ iar $g = \prod g_j$ are suport in complementara multimii X. Aceasta demonstreaza prima parte a lemei.

Consideram $A \in \mathcal{L}_X(V)$. Daca $A_j : V/X_j \to V/X_j$ este aplicatia indusa de A, atunci $\Pi_j A = A_j \Pi_j$, iar daca A si A_j sunt priviti ca operatori diferenţiali, rezulta ca $A(\varphi \circ \Pi_j) = (A_j \varphi) \circ \Pi_j$ cand $\varphi \in C_0^\infty(V/X_j)$. Aceasta demonstreaza ca spaţiile $\mathcal{D}_j$ sunt invariante la $\mathcal{L}_X(V)$, deci la $\mathcal{A}_X(V)$. Aplicari repetate ale formulei lui Leibniz arata atunci ca $\mathcal{D}_X(V)$ este invariant la $\mathcal{A}_X(V)$. $\square$

Definitie. O distributie $u \in \mathcal{D}'(V)$ se numeste X-regulata (in origine) daca pentru orie $f \in \mathcal{D}_X(V)$ avem ca $f(v/\varepsilon)u \to 0$ in $\mathcal{D}'(V)$ cand $\varepsilon \to 0$.

Lema 1.2. *Daca $u \in \mathcal{D}'(V)$ este X-regulata in origine, atunci Qu este de asemenea X regulata in origine pentru orice $Q \in \mathcal{A}_X(V)$. In plus, daca $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(V)$, atunci u este X-regulata in origine.*

Dem. Notam $f_\varepsilon(v) = f(v/\varepsilon)$ pentru $f \in C^\infty(V)$ si observam ca $(Af)_\varepsilon = Af_\varepsilon$, unde $A \in \mathcal{L}(V)$ este din nou privit ca operator diferential. Presupunem ca $f \in \mathcal{D}_{(X)}(V)$, $A \in \mathcal{L}_X(V)$ si scriem

$$f_\varepsilon(Au) = A(f_\varepsilon u) - (Af)_\varepsilon u,$$

unde $u \in \mathcal{D}'(V)$ este X-regulata in origine. Intrucat $Af \in \mathcal{D}_{(X)}(V)$, din lema 1.1 rezulta ca termenul din partea dreapta a egalitatii de mai sus tinde la 0 in $\mathcal{D}'(V)$ cand $\varepsilon \to 0$. Deci Au este X-regulata in origine. Cum $\mathcal{A}_X(V)$ este generata de $\mathcal{L}_X(V)$, am demonstrat prima afirmatie din teorema. Cea de-a doua afirmatie rezulta din teorema Lebesgue de convergenta dominata, intrucat din $f \in \mathcal{D}_X(V)$ rezulta ca f este marginita si $f(v/\varepsilon) \to 0$ *a.p.t* cand $\varepsilon \to 0$. □

Este usor de verificat ca daca $X = \{0\}$ iar $u \in \mathcal{D}'(V)$ este omogena de grad $a > -m$, atunci u este X-regulata in origine.

Pentru distributiile X-regulate putem demostra urmatorul rezultat de uniciate.

Propozitie 1.3. *Presupunem ca $u \in \mathcal{D}'(V)$ este X-regulata in origine si ca suportul sau este continut in X. Atunci $u = 0$.*

Dem. Vom folosi notatia din demostratia lemei precedente. Din lema 1.1 rezulta ca putem scrie $1 = f + g$ unde $f \in \mathcal{D}_X(V)$ si $\mathrm{supp}(g) \subset V \setminus X$. Atunci $g_\varepsilon u = 0$, deci

$$u = \lim_{\varepsilon \to 0}(f_\varepsilon u + g_\varepsilon u) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon u = 0,$$

ceea ce incheie demonstratia. □

2 O clasa de distributii omogene

Consideram

$$X = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;\ |x_1|\,|x_2|\,|x_3| = 0\}. \tag{2.1}$$

Atunci X este reuniunea subspatiilor $X_j = \{x_j = 0\}$, $j = 1, 2, 3$, care sunt subspatii maximale in X. Cu aceasta notatie avem $\Omega = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus X$.

Pentru a_1, a_2, a_3 intregi si $1 \le p \le \infty$, notam prin $H^p_{a_1,a_2,a_3}$ spatiul tuturor functiilor $f(x_1, x_2, x_3)$ definite pe Ω astfel incat f este omogena de grad a_j in variabila x_j, $j = 1, 2, 3$, si $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Pentru μ intreg definim

$$Y_+^{(\mu)}(x) = \begin{cases} Y_+(x)x^{-\mu}/(-\mu)! & \text{daca } \mu \le 0 \\ \delta^{(\mu-1)}(x) & \text{daca } \mu \ge 1 \end{cases}$$

si consideram

$$u(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) Y_+^{(\mu)}(|x_3| - |x_1| - |x_2|) \tag{2.2}$$

unde $f \in H^p_{a_1,a_2,a_3}$. In coordonate polare r_j, ω_j pentru x_j distributia u are forma

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) r_1^{a_1+n-1} r_2^{a_2+n-1} r_3^{a_3+n-1} Y_+^{(\mu)}(r_3 - r_1 - r_2),$$

deci putem privi u ca si produsul tensorial al unei distributii in variabilele r_j cu o distributie in variabilele ω_j. Astfel u este bine definita pe Ω.

Lema 2.1. *Presupunem ca*

$$a_1 + n > 0, \ a_2 + n > 0, \ a_1 + a_2 + a_3 + 3n > \mu. \tag{2.3}$$

Atunci u se extinde in mod unic la o distributie X-regulata in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Dem. Unicitatea rezulta din propozitia 1.3.

Presupunem intai ca $\mu \leq 0$. Intrucat

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{0 \leq r_1, r_2 \leq r_3 \leq R} r_1^{a_1+n-1} r_2^{a_2+n-1} r_3^{a_3+n-1} (r_3 - r_1 - r_2)^{-\mu} \, dr_1 dr_2 dr_3 \\
&\leq C_1 \iiint\limits_{0 \leq r_1, r_2 \leq r_3 \leq R} r_1^{a_1+n-1} r_2^{a_2+n-1} r_3^{a_3+n-1-\mu} \, dr_1 dr_2 dr_3 \\
&\leq C_2 \int_0^R r_3^{a_1+a_2+a_3+3n-1-\mu} \, dr_3 \leq C_3 R^{a_1+a_2+a_3+3n-\mu}
\end{aligned}$$

cand $R > 0$, introducand coordonate polare si folosind omogeneitatea lui f, deducem ca u se extinde la o fuunctie local integrabila pe $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si deci la o distributie X-regulata.

Pentru $\mu \geq 0$ rationam prin inductie. Presupunem ca $\mu \geq 1$ si ca lema a fost demonstrata pentru valori mai mici ale lui μ. Scriem

$$u = (\vartheta_3 + 1 - a_3) w,$$

unde

$$w(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) Y_+^{(\mu-1)}(|x_3| - |x_1| - |x_2|),$$

si $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)/|x_3|$ satisface aceleasi conditii de omogenitate ca si f cu a_3 si μ inlocuite de $a_3 - 1$ si $\mu - 1$. Din ipoteza de inductie rezulta ca w se extinde la o distribuite X-regulata $\widetilde{w}$ definita pe tot spatiul si ca $\widetilde{u} = (\vartheta_3 + 1 - c)\widetilde{w}$ este extensia corespunzatoare a lui u. Aceasta extensie este X-regulata conform lemei 1.2. $\square$

In ceea ce urmeaza, daca $f \in H^p_{a_1, a_2, a_3}$ si (2.3) este satisfacuta, vom nota

$$f(x_1, x_2, x_3) Y_+^{(\mu)}(|x_3| - |x_1| - |x_2|)$$

si extensia X-regulata a distributiei definita initial doar pe Ω.

Definitie. Fie $1 \leq p \leq \infty$ si μ, a_1, a_2, a_3 intregi astfel incat are loc (2.3). Spatiul $\mathcal{H}^{p,\mu}_{a_1, a_2, a_3}$ consta din toate distributiile in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de forma

$$f(x_1, x_2, x_3) Y_+^{(\mu)}(|x_3| - |x_1| - |x_2|)$$

unde $f \in H^p_{a_1, a_2, a_3}$.

Presupunem ca μ, a_j, b_j, $j = 1, 2, 3$ sunt intregi si ca μ, b_1, b_2, b_3 satisfac (2.3). Presupunem in plus ca

$$a_1 + b_1 + n > 0, \ a_2 + b_2 + n > 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + 3n > \mu.$$

Fie $1 \leq p, q \leq \infty$ astfel incat $1/p + 1/q = 1/r \leq 1$. Consideram

$$u = g(x_1, x_2, x_3)Y_+^{(\mu)}(|x_3| - |x_1| - |x_2|)$$

unde $g \in H^q_{b_1,b_2,b_3}$. Daca $f \in H^p_{a_1,a_2,a_3}$ vom nota cu fu unica distributie X-regulata care este egala cu $f(x_1, x_2, x_3)g(x_1, x_2, x_3)Y_+(|x_3| - |x_1| - |x_2|)$ pe Ω. In acest mod obtinem o aplicatie biliniara

$$H^p_{a_1,a_2,a_3} \times \mathcal{H}^{q,\mu}_{b_1,b_2,b_3} \to \mathcal{H}^{r,\mu}_{a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3}. \tag{2.4}$$

Avem de asemenea si aplicatiile liniare

$$\vartheta_k - a_k : \mathcal{H}^{p,\mu}_{a_1,a_2,a_3} \to \mathcal{H}^{p,\mu+1}_{b_1,b_2,b_3}, \quad b_j = a_j + \delta_{jk}. \tag{2.5}$$

3 Tehnici de descompunere pentru distributii din $\mathcal{H}^{p,\mu}_{a_1,a_2,a_3}$

Lema 3.1. *Exista* $0 \leq \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *astfel incat* $1/2 \leq |x_j| \leq 2$ *pe suportul acestei functii,* $\Psi(x_1, x_2)$ *este invarianta la rotatii separat in* x_1 *si* x_2 *si*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}_+ \times (0,1)} \Psi(\frac{x_1}{t\theta}, \frac{x_2}{t(1-\theta)}) \, \frac{dt}{t} \, \frac{d\theta}{\theta(1-\theta)} = 1 \quad \textit{cand } x_1, x_2 \neq 0. \tag{3.1}$$

Dem. Observam mai intai ca

$$(|x_1| + |x_2|)/2 \leq t \leq 2(|x_1| + |x_2|),$$

si

$$\frac{|x_1|}{4(|x_1| + |x_2|)} \leq \theta \leq 1 - \frac{|x_2|}{4(|x_1| + |x_2|)}$$

pe suportul integrandului din (3.1). Deci pentru orice multime compacta K din $\dot{\mathbb{R}}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n$ exista o multime compacta $K' \subset \mathbb{R}_+ \times (0, 1)$ astfel incat suportul integrandului din (3.1) este continut in K' cand $(x_1, x_2) \in K$.

Alegem o functie $0 \leq \Psi_0$ in $C_0^\infty(\dot{\mathbb{R}}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n)$, $\Psi_0 \not\equiv 0$, cu suportul continut in multimea pe care $1/2 \leq |x_j| \leq 2$ si asftel incat Ψ_0 depinde doar de $|x_1|$ si $|x_2|$. Definim

$$\Phi(x_1, x_2) = \int_0^\infty t^{-1}\Psi_0(x_1/t, x_2/t) \, dt.$$

Atunci $\Phi \in C^\infty((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus 0)$ este omogena de grad 0 and $|x_1|/4 \leq |x_2| \leq 4|x_1|$ pe suportul acesteia. Astfel $\Phi(x_1, x_2) = h(|x_1|/|x_2|)$ cand $x_2 \neq 0$, unde $0 \leq h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ este suportata in intervalul $(1/4, 4)$. Presupunem acum ca x_1, $x_2 \neq 0$ si punem $\rho = |x_1|/|x_2|$. Atunci

$$\iint\limits_{\mathbb{R}_+ \times (0,1)} \Psi_0(\frac{x_1}{t\theta}, \frac{x_2}{t(1-\theta)}) \, \frac{dt}{t} \, \frac{d\theta}{\theta(1-\theta)}$$

$$= \int_0^1 h(\rho\frac{1-\theta}{\theta}) \, \frac{d\theta}{\theta(1-\theta)} = \int_0^1 h(\rho(1/\theta - 1)) \, \frac{1}{1/\theta - 1} \, d(1 - 1/\theta)$$

$$= \int_0^\infty h(\rho s) \, \frac{ds}{s} = \int_0^\infty h(s) \, \frac{ds}{s} = c > 0.$$

Astfel (3.1) este adevarata pentru $\Psi = \Psi_0/c$. □

Presupunem

$$a_1 + n > 0,\ a_2 + n > 0,\ a_1 + a_2 + a_3 + 3n > \mu, \tag{3.2}$$

unde a_1, a_2, a_3 si μ sunt intregi. Consideram

$$u \in \cup_{p>1} \mathcal{H}^{p,\mu}_{a_1,a_2,a_3} \tag{3.3}$$

si fie $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ o functie ca in lema precedenta. Definim

$$\tilde{u}_{t,\theta}(x_1, x_2, x_3) = t^{-1}\theta^{-1}(1-\theta)^{-1}\Psi(\frac{x_1}{t\theta}, \frac{x_2}{t(1-\theta)})u(x_1, x_2, x_3) \tag{3.4}$$

cand $t > 0$ si $0 < \theta < 1$.

Lema 3.2. *Presupunem ca* (3.2) *si*(3.3) *sunt adevarate. Atunci exista* $p \in (1, \infty)$ *si* L, N *nenegative astfel incat*

$$\tilde{u}_{t,\theta} = \sum_{0\le j\le L} \vartheta_3^j \tilde{u}_{t,\theta,j}, \quad 0 < t,\ 0 < \theta < 1,$$

unde $\langle x_3\rangle^{-N}\tilde{u}_{t,\theta,j} \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *si*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}_+\times(0,1)} \|\langle x_3\rangle^{-N}\tilde{u}_{t,\theta,j}\|_{L^p}\, dt\, d\theta < \infty, \quad 0 \le j \le L. \tag{3.5}$$

Mai mult $|x_1| + |x_2| \le |x_3|$ *pe suportul lui* $\tilde{u}_{t,\theta,j}$.

Dem. Avem

$$u(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)Y_+^{(\mu)}(|x_3| - |x_1| - |x_2|)$$

unde $f \in H^p_{a_1,a_2,a_3}$. Putem presupune p suficient de aproape de 1 pentru a garanta ca

$$n + pa_1 > 0,\ n + pa_2 > 0,\ 3n + p(a_1 + a_2 + a_3) > \mu. \tag{3.6}$$

Vom folosi aceeasi litera C pentru a nota diferite constante care depind numai de u.

Presupunem intai ca $\mu = 0$. Atunci, eventual inlocuind p cu un numar mai mic, daca este necesar, putem presupune ca $pa_3 + n \ne 0$. Atunci $\tilde{u}_{t,\theta}$ este o functie local integrabila astfel incat

$$|\tilde{u}_{t,\theta}(x_1, x_2, x_3)| \le Ct^{-1}\theta^{-1}(1-\theta)^{-1}$$
$$\chi(\frac{x_1}{t\theta})\chi(\frac{x_2}{t(1-\theta)})|f(x_1, x_2, x_3)|Y_+(|x_3| - |x_1| - |x_2|),$$

unde χ desemneaza functia caracteristica a inelului $1/2 \le |x| \le 2$. Alegem $N > 0$ astfel incat

$$N > a_3 + n,\ N > 3n + a_1 + a_2 + a_3. \tag{3.7}$$

Cum $|x_3| \ge t/2$ pe suportul lui $\tilde{u}_{t,\theta}$, rezulta ca

$$\|\langle x_3\rangle^{-N}\tilde{u}_{t,\theta}\|^p_{L^p}$$
$$\le Ct^{-p}\theta^{-p}(1-\theta)^{-p}\gamma^p(t,\theta) \int\limits_{|x_3|>t/2} |x_3|^{pa_3}\langle x_3\rangle^{-pN}\, dx_3, \tag{3.8}$$

unde

$$\begin{aligned}\gamma^p(t,\theta) &= \iint |x_1|^{pa_1}|x_2|^{pa_2}\chi(\frac{x_1}{t\theta})\chi(\frac{x_2}{t(1-\theta)})\,dx_1dx_2 \\ &\le C(t\theta)^{n+pa_1}(t(1-\theta))^{n+pa_2}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Daca $t > 1$, din (3.7) rezulta ca

$$\int_{|x_3|>t/2} |x_3|^{pa_3}\langle x_3\rangle^{-pN}\,dx_3 \le Ct^{p(a_3-N)+n}, \tag{3.10}$$

in timp ce daca $t < 1$ atunci

$$\int_{|x_3|>t/2} \langle x_3\rangle^{-pN}|x_3|^{pa_3}\,dx_3 \le C(1+t^{pa_3+n}). \tag{3.11}$$

Din (3.8)–(3.10) se deduce ca

$$\begin{gathered}\|\langle x_3\rangle^{-N}\tilde{u}_{t,\theta}\|_{L^p} \\ \le Ct^{-1}\theta^{-1}(1-\theta)^{-1}(t\theta)^{n/p+a_1}(t(1-\theta))^{n/p+a_2}t^{a_3-N+n/p}\end{gathered}$$

Aceasta inegalitate, impreuna cu (3.6) si (3.7), arata ca

$$\iint_{(1,\infty)\times(0,1)} \|\langle x_3\rangle^{-N}\tilde{u}_{t,\theta}\|_{L^p}\,dt\,d\theta < \infty.$$

Daca $t < 1$ din (3.8), (3.9) si (3.11) rezulta ca

$$\begin{gathered}\|\langle x_3\rangle^{-N}\tilde{u}_{t,\theta}\|_{L^p} \\ \le Ct^{-1}\theta^{-1}(1-\theta)^{-1}(t\theta)^{n/p+a_1}(t(1-\theta))^{n/p+a_2}(1+t^{a_3+n/p}),\end{gathered}$$

iar atunci (3.6) implica

$$\iint_{(0,1)\times(0,1)} \|\langle x_3\rangle^{-N}\tilde{u}_{t,\theta}\|_{L^p}\,dt\,d\theta < \infty.$$

Aceasta demonstreaza lema in cazul $\mu = 0$.

Daca $\mu < 0$, u se poate scrie ca o combinatie liniara de distributii de forma

$$u_{j,k,l} = f_{j,k,l}(x_1,x_2,x_3)Y_+(|x_3|-|x_1|-|x_2|)$$

unde

$$f_{j,k,l}(x_1,x_2,x_3) = |x_1|^j|x_2|^k|x_3|^l f(x_1,x_2,x_3)$$

iar j, k, l sunt intregi nenegativi satisfacand $j+k+l=-\mu$. Atunci

$$u_{j,k,l} \in \mathcal{H}^{p,0}_{a_1+j,a_2+k,a_3+l},$$

unde p poate fi ales arbitrar de aproape de 1. Intrucat

$$a_1+j+n>0,\ a_2+k+n>0,\ a_1+a_2+a_3+j+k+l+3n>0$$

din prima parte a demonstratiei rezulta ca $\tilde{u}_{t,\theta}$ satisface (3.5) daca N este destul de mare.

In final, consideram cazul $\mu > 0$. Observam ca

$$\begin{aligned} &f(x_1,x_2,x_3)Y_+(|x_3|-|x_1|-|x_2|) \\ &= (\vartheta_3+1-a_3)|x_3|^{-1}f(x_1,x_2,x_3)Y_+^{(\mu-1)}(|x_3|-|x_1|-|x_2|) \end{aligned}$$

daca $f \in H^p_{a_1,a_2,a_3}$ si $\mu > 0$. Aici am folosit faptul ca distributiile din ambii membrii ai egalitatii de mai sus sunt X-regulate. Avem asftel

$$\mathcal{H}^{p,\mu}_{a_1,a_2,a_3} \subset \vartheta_3\mathcal{H}^{p,\mu-1}_{a_1,a_2,a_3-1} + \mathcal{H}^{p,\mu-1}_{a_1,a_2,a_3-1}.$$

Cazul $\mu > 0$ se reduce la cazul $\mu = 0$ prin iterarea incluziunii de mai sus. □

Teorema 3.3. *Presupunem ca* (3.2), (3.3) *sunt satisfacute si definim* $\tilde{u}_{t,\theta}$ *prin* (3.4), *unde* Ψ *satisface conditiile lemei 3.1. Atunci*

$$\langle\varphi,u\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}_+\times(0,1)} \langle\varphi,\tilde{u}_{t,\theta}\rangle\,dt\,d\theta, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n). \tag{3.12}$$

Dem. Din lemm 3.2 rezulta ca integrala din partea dreapta a egalitatii (3.12) este o integrala convergenta si defineste o distributie U actionand pe ϕ. Din aceeasi lema este de asemenea clar ca putem scrie $U = \sum_{0\le k\le L}\vartheta_3^k U_k$, unde U_k sunt functii local integrabile. Rezulta (din lemma 1.2) ca U este X-regulata. Intrucat u este de asemena X-regulata, conform lemei 2.1, este suficiet sa demonstram ca $\langle\varphi,U\rangle = \langle\varphi,u\rangle$ pentru φ suportata in Ω. Insa pentru astfel de φ avem

$$\langle\varphi,U\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}_+\times(0,1)} \langle\tilde{\varphi}_{t,\theta},u\rangle\,dt\,d\theta,$$

unde

$$\tilde{\varphi}_{t,\theta}(x_1,x_2,x_3) = t^{-1}\theta^{-1}(1-\theta)^{-1}\Psi(\frac{x_1}{t\theta},\frac{x_2}{t(1-\theta)})\varphi(x_1,x_2,x_3).$$

Ca o simpla consecinta a observatiilor de la inceputul demonstratiei lemei 3.1 vedem ca in integrala de mai sus putem integra intai in raport cu t si θ, iar apoi aplica distributia u. Teorema rezulta imediat tinand cont si de (3.1) □

Daca $t > 0$ vom folosi notatia $\varphi_t(y) = \varphi(ty)$, cand $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^M)$, pentru un $M > 0$.

Corolar 3.4. *Fie* a_1, a_2, a_3 *si* μ *intregi satisfacand* (3.2). *Consideram*

$$u(x_1,x_2,x_3) = f(x_1,x_2,x_3)Y_+^{(\mu)}(|x_3|-|x_1|-|x_2|)$$

unde $f \in H^p_{a_1,a_2,a_3}$ *pentru un* $p \in (1,\infty]$. *Atunci exista o functie* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ *cu suportul in multimea unde* $1/2 \le |x_j| \le 2$, $j = 1,2$, *si astfel incat*

$$\langle\varphi,u\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}_+\times(0,1)} t^{3n-\mu+a_1+a_2+a_3-1}\theta^{n+a_1-1}(1-\theta)^{n+a_2-1}\langle\varphi_t,u(\theta)\rangle\,d\theta\,dt \tag{3.13}$$

pentru $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. *Aici* $u(\theta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ *este definita prin*

$$\begin{aligned} \langle\varphi,u(\theta)\rangle = \iiint Y_+^{(\mu)}(|x_3|-\theta|x_1|-(1-\theta)|x_2|)|x_3|^{a_3}\psi(x_1,x_2) \\ f(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)\varphi(\theta x_1,(1-\theta)x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Integrala din (3.14) *trebuie considerata in sensul distributiilor .*

Dem. Corolarul rezulta imediat din teorema precedenta. Intr-adevar, pentru $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ scriem

$$\langle \varphi, \tilde{u}_{t,\theta} \rangle = \langle \varphi, \tilde{u}_{t,\theta} \circ T_{t,\theta} \circ T_{t,\theta}^{-1} \rangle,$$

unde $T_{t,\theta}(x_1, x_2, x_3) = (t\theta x_1, t(1-\theta)x_2, tx_3)$. Astfel

$$\langle \varphi, \tilde{u}_{t,\theta} \rangle = \theta^n (1-\theta)^n t^{3n} \langle \varphi \circ T_{t,\theta}, \tilde{u}_{t,\theta} \circ T_{t,\theta} \rangle. \tag{3.15}$$

Observam intai ca

$$(\varphi \circ T_{t,\theta})(x_1, x_2, x_3) = \varphi_t(\theta x_1, (1-\theta)x_2, x_3).$$

Din omogeneitatea lui f si $Y_+^{(\mu)}$ rezulta ca

$$(\tilde{u}_{t,\theta} \circ T_{t,\theta})(x_1, x_2, x_3) = \theta^{a_1 - 1}(1-\theta)^{a_2 - 1} t^{a_1 + a_2 + a_3 - \mu - 1} \psi(x_1, x - 2)|x_3|^{a_3}$$
$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) Y_+^{(\mu)}(|x_3| - \theta|x_1| - (1-\theta)|x_2|),$$

unde $\psi(x_1, x_2) = |x_1|^{a_1}|x_2|^{a_2}\Psi(x_1, x_2)$, iar Ψ este o functie ca in lema 3.1.

Am obtinut astfel ca

$$\langle \varphi, \tilde{u}_{t,\theta} \rangle = t^{3n - \mu + a_1 + a_2 + a_3 - 1} \theta^{n + a_1 - 1} (1-\theta)^{n + a_2 - 1} \langle \varphi_t, u(\theta) \rangle,$$

cu $u(\theta)$ ca (3.14). Aceasta incheie demonstratia corolarului. $\square$

References

[BM] I. Beltita, A. Melin, Multilinear integral singular operators in backscattering. In *Proceedings of the Conference on Mathematical Modelling of Wave Phenomena 2005, Växjö*, AIP Conference Proceedings **834**, pp. 225-233, 2006.

[H1] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1083-1985.

[M04] A. Melin, Some transforms in potential scattering in odd dimension. *Contemporary Mathematics* **344**, 2004, 103–134.

[M03] A. Melin, Smoothness of higher order terms in backscattering. In *Wave phenomena and asymptotic analysis,* RIMS Kokyuroku 1315 (2003), 43–51.