Supersimetrii O22

Dan Radu Grigore [1]

Departmentul de Fizica Teoretica,
Institutul National pentru Fizica si Inginerie Nucleara "Horia Hulubei" (IFIN-HH),
Inst. de Fizica Atomica, Atomistilor 407, Bucuresti-Magurele, MG 6, 077125, România

Abstract

O22: Studiu cu privire la posibilitatea de a construi un Lagrangian de interctie realist folosind supercimpuri

[1] e-mail: grigore@theory.nipne.ro

O teorie cuantica de cimp trebuie sa descrie: a) spatiul Hilbert al starilor fizice si b) expresia (perturbativa) a matricii de imprastiere. In teoria perturbatiilor spatiul Hilbert este generat prin aplicarea pe starea de vacuum a unor cimpuri libere i.e. este un spatiu Fock. In teoriile care descriu particule de spin superior se considera un spatiu Hilbert extins cu grade de libertate fizice si nefizice si da o procedura de determinare a starilor fizice; aceasta schema pare sa fie singura care poate produce o teorie unitara si renormabila in sensul axiomelor Bogoliubov. In acest caz trebuie sa se verifice ca Lagrangianul de interactie (i.e. primul ordin al matricii S) lasa invariante starile fizice. Daca structura precedenta poate fi construita atunci se poate merge la calculul explicit al unor procese de imprastiere.

Constructia extensiei minimale supersimetrice a Lagrangianului cromodinamicii cuantice se incadreaza in aceasta schema. Prin definitie [2] un multiplet supersimetric este un set de cimpuri Bose si Fermi b_j, f_A impreuna cu operatori de supersarcina Q_a astfel incit comutatorul (resp. anticomutatorul) unui cimp Bose (resp. Fermi) cu supersarcinile este o combinatie liniara de cimpuri Fermi (resp. Bose); coeficientii acestor combinatii liniare sint derivate partiale. Trebuie sa mai presupunem ca supersarcinile fac parte dintr-o extensie a algebrei Poincaré numita algebra supersimetrica; in esenta avem (pentru supersimetria $N = 1$):

$$Q_a\Omega = 0, \quad \bar{Q}_{\bar{a}}\Omega = 0 \quad \bar{Q}_{\bar{a}} = (Q_a)^\dagger \tag{0.1}$$

$$\{Q_a, Q_b\} = 0, \quad \{Q_a, \bar{Q}_{\bar{b}}\} - 2\sigma^\mu_{a\bar{b}} P_\mu = 0 \tag{0.2}$$

si

$$[Q_a, P_\mu] = 0, \quad U^{-1}_{A,0} Q_a U_{A,0} = A_a{}^b Q_b. \tag{0.3}$$

Aici $U_{A,a}$ este o reprezentare unitara a grupului Poincaré iar P_μ sint generatori infinitezimali ai translatiilor.

In studiul teoriilor supersimetrice se presupune de obicei ca multipletii supersimetrici pot fi grupati in superfields i.e. cimpuri care depind de variabile spatio-temporale si de variabile auxiliare Grassmann $\theta_a, \bar{\theta}_{\bar{a}}$. In [2] se arata ca exista o aplicatie canonica $w \mapsto sw \equiv W$ care duce monoame Wick obisnuite $w(x)$ in extesiile lor supersimetrice

$$W(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv \exp\left(i\theta^a Q_a - i\bar{\theta}^{\bar{a}} \bar{Q}_{\bar{a}}\right); \tag{0.4}$$

Mai mult se postuleaza ca Lagrangianul de interactie t trebuie sa fie de forma

$$t(x) \equiv \int d\theta^2 d\bar{\theta}^2 T(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{0.5}$$

unde T este un polinom Wick supersimetric.

Determinarea multipletilor in care trebuie incadrate diversele cimpuri ale modelului standard: cimpurile Yang-Mills, cimpurile fantoma, cimpul Higgs, cimpurile de materie (cuarci, leptoni, neutrini, fotoni) precum si a structurii de etalonare pentru supermultipletii obtinuti este o procedura standard.

Cimpul vectorial v_μ poate fi inclus in asa-numitul multiplet vectorial care este o colectie de cimpuri $C, \phi, v_\mu, d, \chi_a, \lambda_a$ unde C, este un cimp real scalar, ϕ este un cimp complex scalar, v_μ

este un cimp real vectorial si χ_a, λ_a sint cimpuri spinoriale de spin $1/2$. Din definitia multipletior supersimetrici de mai sus rezulta usor ca toate aceste cimpuri au aceeasi masa $m \geq 0$.

Putem grupa cimpurile de mai sus in supercimpul

$$V = C + \theta\chi + \bar{\theta}\bar{\chi} + \theta^2\ \phi + \bar{\theta}^2\ \phi^\dagger + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\ v_\mu + \theta^2\ \bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}^2\ \theta\lambda + \theta^2\bar{\theta}^2\ d. \tag{0.6}$$

Se poate scrie acum o forma generica pentru actiunea supersarcinilor asupra acestor cimpuri folosind doar definitia de mai sus a supersimetriilor. De asemenea se poate da o forma generica pentru expresia (anti)comutatorilor cauzali. Se poate arata ca aceste conditii conduc in final la o forma unica si care se scrie compact cu ajutorul supercimpului asociat.

Se poate argumenta ca trebuie sa includem cimpurile fantoma in multipleti chirali. Formele generice pentru multipletii chirali fantoma si anti-fantoma sint:

$$U(x,\theta,\bar{\theta}) = a(x) + 2i\ \bar{\theta}\bar{\zeta}(x) + i\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\ \partial_\mu a(x) + \bar{\theta}^2\ g(x) + \bar{\theta}^2\ \theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}(x) \tag{0.7}$$

si respectiv

$$\tilde{U}(x,\theta,\bar{\theta}) = \tilde{a}(x) - 2i\ \bar{\theta}\bar{\tilde{\zeta}}(x) + i\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\ \partial_\mu\tilde{a}(x) + \bar{\theta}^2\ \tilde{g}(x) - \bar{\theta}^2\ \theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\tilde{\zeta}}(x) \tag{0.8}$$

unde $a,\ g,\ \tilde{a},\ \tilde{g}$ sint cimpuri Fermi scalare iar $\zeta_a, \tilde{\zeta}_a$ sint cimpuri Bose spinoriale, deci in contradictie cu teorema spin-statistica.

Este convenabil sa lucram cu combinatiile Hermitice (resp. anti-Hermitice)

$$\begin{aligned} u &\equiv a + a^\dagger \qquad & v &\equiv -i(a - a^\dagger) \\ \tilde{u} &\equiv \tilde{a} - \tilde{a}^\dagger \qquad & \tilde{v} &\equiv -i(\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger). \end{aligned} \tag{0.9}$$

Se poate face un ansatz general pentru Q si dupa rescalari convenabile se obtine o expresie esentialmente unica. In cazul masei nule avem:

$$\begin{aligned} [Q, V] = U - U^\dagger \qquad \{Q, U\} = 0 \\ \{Q, \tilde{U}\} = -\frac{1}{16}\ \mathcal{D}^2\ \bar{\mathcal{D}}^2 V \end{aligned} \tag{0.10}$$

Este usor de aratat ca spatiul Hilbert uni-particula contine spectrul de particule la care ne asteptam din motive fizice. Se pot gasi de asemenea (anti)comutatorii cauzali ai cimpurilor fantoma compatibili cu relatiile de mai sus.

Este un fapt remarcabil ca din conditia de invarianta la etalonare

$$[Q, t(x)] = i\partial_\mu t^\mu(x) \tag{0.11}$$

se poate gasi din nou o forma unica pentru Lagrangianul de interactie:

$$t = f_{jkl}[v_j^\mu v_k^\nu \partial_\nu v_{l\mu} - i(\lambda'_j\sigma_\mu\bar{\lambda}'_k)v_l^\mu - v_j^\mu u_k \partial_\mu \tilde{u}_l + 2\ (\lambda'_j\tilde{\zeta}_k)u_l + 2\ (\bar{\lambda}'_k\bar{\tilde{\zeta}}_j)u_l]. \tag{0.12}$$

Acest Lagrangian se poate obtine cu ajutorul supercimpurilor. Expresia sugerate de teoria clasica a cimpurilor este:

$$\begin{aligned} t_{\rm classical} \equiv -\frac{i}{8}\int d\theta^2 d\bar{\theta}^2\ f_{jkl}\ [V_j\mathcal{D}^a V_k\ \bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_a V_l - H.c.] \\ +2i\ \int d\theta^2 d\bar{\theta}^2\ f_{jkl}\ V_j(U_k + U_k^\dagger)\ (\tilde{U}_l + \tilde{U}_l^\dagger) \end{aligned} \tag{0.13}$$

dar pentru a obtine expresia t demai sus trebuie sa folosim asa-numita etalonare Wess-Zumino: putem scrie supercimpul V sub forma:

$$V = A + A^\dagger + V' \tag{0.14}$$

unde:

$$V' = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\ v_\mu + \theta^2\ \bar{\theta}\bar{\lambda}' + \bar{\theta}^2\ \theta\lambda' + \theta^2\bar{\theta}^2\ d' \tag{0.15}$$

si

$$A = \frac{1}{2}\ C + \bar{\theta}\bar{\chi} + \bar{\theta}^2\ \phi^\dagger + \frac{i}{2}\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\ \partial_\mu C - \frac{i}{2}\ \bar{\theta}^2\ (\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}). \tag{0.16}$$

si facem in (0.13) substitutia $V \to V'$.

Constructia de mai sus este din pacate incompatibila cu invarianta la etalonare in ordinul al doilea al teoriei perturbatiilor. Relatia (0.11) este valabila cu:

$$t^\mu = f_{jkl}\left[\frac{1}{2}u_j v_{k\nu}(\partial^\nu v_l^\mu - \partial^\mu v_l^\nu) - \frac{1}{2}u_j u_k \partial^\mu \tilde{u}_l - i(\lambda'_j\sigma^\mu\bar{\lambda}'_k)u_l\right]. \tag{0.17}$$

Din (0.11) obtinem:

$$d_Q\ [t(x), t(y)] = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\ [t^\mu(x), t(y)] + i\frac{\partial}{\partial y^\mu}\ [t(x), t^\mu(y)] \tag{0.18}$$

Anomaliile se obtin in urma procesului de decupare cauzala a acestei identitati; avem in general:

$$d_Q T(t(x), t(y)) = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\ T(t^\mu(x), t(y)) + i\frac{\partial}{\partial y^\mu}\ T(t(x), t^\mu(y)) + A(x,y) \tag{0.19}$$

unde $T(a(x), b(y))$ este produsul cronologic asociat monoamelor Wick a si b iar $A(x,y)$ este anomalia care distruge invarianta la etalonare in ordinul al doilea. Se gaseste

$$A(x,y) = A^{\rm YM}(x,y) + A^{\rm susy}(x,y) \tag{0.20}$$

unde primul termen apare deja in teoriile Yang-Mills si poate fi eliminat (fiind un co-bord plus o divergenta totala) daca si numai daca se impune identitatea Jacobi asupra constantelor: f_{jkl}. Al doilea termen al anomalii este pur supersmetric:

$$A^{\rm susy}(x,y) = a^{\rm susy}(x)\ \delta(x-y) \tag{0.21}$$

cu

$$a^{\rm susy} = f_{jkl}\ f_{mnl}\left[-\frac{i}{2}u_j v_k^\mu(\lambda'_m\sigma_\mu\bar{\lambda}'_n) + 2u_j u_k(\lambda'_m\tilde{\zeta}_n) + 2u_j u_k(\bar{\lambda}'_m\bar{\tilde{\zeta}}_n)\right]. \tag{0.22}$$

si nu poate fi scris ca un co-bord plus o divergenta totala.

In cele de mai sus am rezolvat urmatoarele probleme:

1. Determinarea legaturii cu formalismul traditional al supercimpurilor.

2. Determinarea anomaliilor din ordinul al doilea al teoriei perturbatiilor. Din pacate rezultatul este negativ, adica se obtin anomalii netriviale. Rezulta ca modelele supersimetrice pot fi considerate doar ca teorii neperturbative. Costructia riguroasa a acestui tip de modele este problematica.

Bibliografie

[1] D. R. Grigore, Journ. Phys. **A 33** (2000) 8443-8476

[2] D. R. Grigore, G. Scharf, Annalen der Physik (Leipzig) **12** (2003) 5-36

[3] D. R. Grigore, G. Scharf, Annalen der Physik (Leipzig) **12** (2003) 643-683

[4] D. R. Grigore, G. Scharf, Annalen der Physik (Leipzig) **13** (2004) 511-531

[5] D. R. Grigore, M. Gut, G. Scharf, Annalen der Physik (Leipzig) **14** (2005) 520-532

[6] D. R. Grigore, G. Scharf, "*Against Supersymmetry*", hep-th/0606029, trimis spre publicare

[7] G. Scharf, "*Quantum Gauge Theories: A True Ghost Story*", Wiley, 2001