Supersimetrii O21

Dan Radu Grigore [1]

Departmentul de Fizica Teoretica,
Institutul National pentru Fizica si Inginerie Nucleara “Horia Hulubei” (IFIN-HH),
Inst. de Fizica Atomica, Atomistilor 407, Bucuresti-Magurele, MG 6, 077125, România

Abstract

O21: Obtinerea de limitari asupra maselor multipletilor supersimetrici

[1] e-mail: grigore@theory.nipne.ro

O teorie cuantica de cimp trebuie sa descrie: a) spatiul Hilbert al starilor fizice si b) expresia (perturbativa) a matricii de imprastiere. In teoria perturbatiilor spatiul Hilbert este generat prin aplicarea pe starea de vacuum a unor cimpuri libere i.e. este un spatiu Fock. In teoriile care descriu particule de spin superior se considera un spatiu Hilbert extins cu grade de libertate fizice si nefizice si da o procedura de determinare a starilor fizice; aceasta schema pare sa fie singura care poate produce o teorie unitara si renormabila in sensul axiomelor Bogoliubov. In acest caz trebuie sa se verifice ca Lagrangianul de interactie (i.e. primul ordin al matricii S) lasa invariante starile fizice. Daca structura precedenta poate fi construita atunci se poate merge la calculul explicit al unor procese de imprastiere.

Constructia Lagrangianului QCD in abordarea cauzala se incadreaza in schema de mai sus [1], [7]. Spatiul Hilbert al cimpului vectorial de masa nula v_μ este inclus intr-un spatiu Hilbert $\mathcal{H}$ incluzind doua cimpuri fanntoma $u,\ \tilde{u}$ care sint Fermi dar scalare de masa nula. Apoi se introduce *sarcina de etalonare* Q care verifica $Q^2 = 0$ si prin urmare are sens sa consideram spatiul factor $Ker(Q)/Im(Q)$ care este izomorf cu spatiul Hilbert fizic $\mathcal{H}_{phys}$.

Prin definitie cromodinamica cuantica presupune ca avem N copii $v^\mu_j,\ u_j,\ \tilde{u}_j \quad j = 1,\ldots,N$ de tipul de mai sus.

Lagrangianul de interactie $t(x)$ este un polinom Wick din $\mathcal{H}$ verificind urmatoarele conditii: (a) dimensiune canonica $\omega(t) = 4$; (b) numar de fantome nul $gh(t) = 0$; (c) covarianta Lorentz; (d) invarianta la etalonare in sensul:

$$[Q, t(x)] = i\partial_\mu t^\mu(x) \tag{0.1}$$

unde t^μ sint polinoame Wick Lorentz covariante de dimensiune canonica $\omega(t^\mu) = 4$ si numar de fantome $gh(t^\mu) = 1$.

Invarianta la etalonare garanteaza ca dupa integrarea dupa x Lagrangianul de interactie $t(x)$ factorizeaza la spatiul Hilbert fizic $Ker(Q)/Im(Q)$ in limita adiabatica; conditia (0.1) este echivalenta cu conditia uzuala de conservare a curentului. Expresiile (Lorentz covariante) de tipul

$$d_Q b + \partial_\mu t^\mu \tag{0.2}$$

cu

$$\omega(b) = \omega(t^\mu) = 3 \qquad gh(b) = -1 \quad gh(t^\mu) = 0 \tag{0.3}$$

se numesc *Lagrangeeni triviali* deoarece produc interactii nule pe spatiul Hilbert fizic, in limita adiabatica. Se poate dovedi ca aceste conditii determina o forma esentialmente unica pentru t i.e. orice astfel de expresie este echivalenta cu

$$t = f_{jkl}(:v^\mu_j v^\nu_k \partial_\nu v_{l\mu}: - :v^\mu_j u_k \partial_\mu \tilde{u}_l:) \tag{0.4}$$

unde constantele (reale) f_{jkl} sint complet antisimetrice. In al doilea ordin al teoriei perturbatiilor se obtine din invarianta la etalonare identitatea Jacobi. Ne asteptam ca sa obtinem rezultate de acelasi tip si pentru modele mai complexe cum ar fi teoriile supersimetrice.

Daca dorim sa generalizam schema precedenta la modelele supersimetrice trebuie sa includem toate cimpurile $v_\mu, u, \tilde{u}$ in multipleti supersimetrici. Prin definitie [2] un multiplet supersimetric este un set de cimpuri Bose si Fermi b_j, f_A impreuna cu operatori de supersarcina Q_a

astfel incit comutatorul (resp. anticomutatorul) unui cimp Bose (resp. Fermi) cu supersarcinile este o combinatie liniara de cimpuri Fermi (resp. Bose); coeficientii acestor combinatii liniare sint derivate partiale. Trebuie sa mai presupunem ca supersarcinile fac parte dintr-o extensie a algebrei Poincaré numita algebra supersimetrica; in esenta avem (pentru supersimetria $N = 1$):

$$Q_a \Omega = 0, \quad \bar{Q}_{\bar{a}} \Omega = 0 \quad \bar{Q}_{\bar{a}} = (Q_a)^{\dagger} \tag{0.5}$$

$$\{Q_a, Q_b\} = 0, \quad \{Q_a, \bar{Q}_{\bar{b}}\} - 2\sigma^{\mu}_{a\bar{b}} P_{\mu} = 0 \tag{0.6}$$

si

$$[Q_a, P_{\mu}] = 0, \quad U_{A,0}^{-1} Q_a U_{A,0} = A_a{}^b Q_b. \tag{0.7}$$

Aici $U_{A,a}$ este o reprezentare unitara a grupului Poincaré iar P_{μ} sint generatori infinitezimali ai translatiilor. Se poate arata ca pentru v_{μ} trebuie folosit multipletul vectorial iar pentru cimpurile fantoma multipleti chirali. Trebuie sa impunem apoi ca t sa fie invariant supersimetric. O definitie naturala este:

$$[Q_a, t] = d_Q s_a + \partial_{\mu} t^{\mu}_a \qquad \omega(s_a) = 7/2 \quad gh(s_a) = -1 \qquad \omega(t^{\mu}_a) = 7/2 \quad gh(t^{\mu}_a) = 0 \tag{0.8}$$

ceea ce inseamna ca dupa integrae (i.e. in limta adiabatica) obtinem in spatiul Hilbert fizic o expresie care comuta cu supersarcinile. O conditie mai slaba este

$$< \Psi_1, ([Q_a, t] - d_Q s_a - \partial_{\mu} t^{\mu}_a) \Psi_2 >= 0 \tag{0.9}$$

unde $\Psi_j \in Ker(Q)$ modulo $Im(Q)$.

In studiul teoriilor supersimetrice se presupune de obicei ca multipletii supersimetrici pot fi grupati in superfields i.e. cimpuri care depind de variabile spatio-temporale si de variabile auxiliare Grassmann $\theta_a, \bar{\theta}_{\bar{a}}$. In [2] se arata ca exista o aplicatie canonica $w \mapsto sw \equiv W$ care duce monoame Wick obisnuite $w(x)$ in extesiile lor supersimetrice

$$W(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv \exp\left(i\theta^a Q_a - i\bar{\theta}^{\bar{a}} \bar{Q}_{\bar{a}}\right); \tag{0.10}$$

Mai mult se postuleaza ca Lagrangianul de interactie t trebuie sa fie de forma

$$t(x) \equiv \int d\theta^2 d\bar{\theta}^2 T(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{0.11}$$

unde T este un polinom Wick supersimetric. Am dori ca sa obtinem drept unic Lagrangean de interactie tot expresia (0.4) plus alte monoame in care apar super-parteneri.

Putem apoi incerca sa extindem schema de mai sus si pentru modelele in care apar particule de masa nenula i.e. sa gasim o extensie supersimetrica a modelului standard (Glashow-Salam-Weinberg) al interactiilor electro-slabe.

Prima problema pe care trebuie sa o rezolvam este determinarea multipletilor in care trebuie incadrate diversele cimpuri ale modelului standard: cimpurile Yang-Mills, cimpurile fantoma, cimpul Higgs, cimpurile de materie (cuarci, leptoni, neutrini, fotoni) si legat de aceasta este nevoie si de determinarea structurii de etalonare pentru supermultipletii obtinuti.

Cimpul vectorial v_μ poate fi inclus in asa-numitul multiplet vectorial care este o colectie de cimpuri $C, \phi, v_\mu, d, \chi_a, \lambda_a$ unde C, este un cimp real scalar, ϕ este un cimp complex scalar, v_μ este un cimp real vectorial si χ_a, λ_a sint cimpuri spinoriale de spin $1/2$. Din definitia multipletior supersimetrici de mai sus rezulta usor ca toate aceste cimpuri au aceeasi masa $m \geq 0$.

Este principala restrictie asupra maselor modelelor supersimetrice care intra in contradictie cu fenomenologia. Pentru depasirea acestei dificultati este necesar sa se considere modele supersimetrice cu supersimatria rupta spontant. Descrierea matematica a acestor modele nu este inca suficient de clara, asa incit ne vom limita in cele de mai jos la modele cu supersimetrie exacta.

Putem grupa cimpurile de mai sus in supercimpul

$$V = C + \theta\chi + \bar{\theta}\bar{\chi} + \theta^2\ \phi + \bar{\theta}^2\ \phi^\dagger + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\ v_\mu + \theta^2\ \bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}^2\ \theta\lambda + \theta^2\bar{\theta}^2\ d. \tag{0.12}$$

Se poate scrie acum o forma generica pentru actiunea supersarcinilor asupra acestor cimpuri folosind doar definitia de mai sus a supersimetriilor. De asemenea se poate da o forma generica pentru expresia (anti)comutatorilor cauzali. Se poate arata ca aceste conditii conduc in final la o forma unica si care se scrie compact cu ajutorul supercimpului asociat:

$$[Q_a, V(X)] = -i\ D_a V(X) \tag{0.13}$$

unde D_a sint derivatele supersimetrice

$$D_a \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^a} + i\sigma^\mu_{a\bar{b}}\bar{\theta}^{\bar{b}}\partial_\mu \tag{0.14}$$

care actioneaza pe spatii de polinoame in variabilele Grassmann; de asemenea avem:

$$[V(X), V(Y)] = -\frac{1}{2}\ D_2(X;Y) \tag{0.15}$$

unde folosim o notatie din [3] pentru super-distributiile cu suport cauzal.

Se poate argumenta ca trebuie sa includem cimpurile fantoma in multipleti chirali. Formele generice pentru multipletii chirali fantoma si anti-fantoma sint:

$$U(x,\theta,\bar{\theta}) = a(x) + 2i\ \bar{\theta}\bar{\zeta}(x) + i\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\ \partial_\mu a(x) + \bar{\theta}^2\ g(x) + \bar{\theta}^2\ \theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}(x) \tag{0.16}$$

si respectiv

$$\tilde{U}(x,\theta,\bar{\theta}) = \tilde{a}(x) - 2i\ \bar{\theta}\bar{\tilde{\zeta}}(x) + i\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\ \partial_\mu\tilde{a}(x) + \bar{\theta}^2\ \tilde{g}(x) - \bar{\theta}^2\ \theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\tilde{\zeta}}(x) \tag{0.17}$$

unde $a,\ g,\ \tilde{a},\ \tilde{g}$ sint cimpuri Fermi scalare iar $\zeta_a, \tilde{\zeta}_a$ sint cimpuri Bose spinoriale, deci in contradictie cu teorema spin-statistica.

Este convenabil sa lucram cu combinatiile Hermitice (resp. anti-Hermitice)

$$\begin{aligned} u &\equiv a + a^\dagger \qquad & v &\equiv -i(a - a^\dagger) \\ \tilde{u} &\equiv \tilde{a} - \tilde{a}^\dagger \qquad & \tilde{v} &\equiv -i(\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger). \end{aligned} \tag{0.18}$$

Pentru a aplica schema generala de constructie a modelelor cu particule de spin ≥ 1 avem nevoie de expresia sarcinii de etalonare Q. Postulam urmatoarele proprietati naturale:

- Sarcina de etalonare Q precum si conjugata Hermitica a sa invariaza vectorul de vacuum.
- (Anti)comutatorul lui Q cu un cimp Bose (resp. Fermi) este o combinatie liniara de cimpuri Fermi (resp. Bose); coeficientii sint operatori cu derivate partiale.
- (Anti)comutatorul lui Q cu orice cimp creste dimesiunea canonicala cu o unitate;
- (Anti)comutatorul lui Q cu orice cimp creste numarul de fantome cu o unitate;
- Sarcina de etalonare comuta cu actiunea grupului Poincaré deci este indusa o actiune a acestui grup pe spatiul Hilber fizic $\mathcal{H}_{\rm phys} \equiv Ker(Q)/Im(Q)$;
- Sarcina de etalonare anticomuta cu supersarcinile:

$$\{Q, Q_a\} = 0 \tag{0.19}$$

  astfel incit algebra supersimetrica induce o algebra similara pe spatiulHilbert fizic.
- Ca si in cazul Yang-Mills se verifica

$$Q^2 = 0. \tag{0.20}$$

Se poate face un ansatz general pentru Q si dupa rescalari convenabile se obtine o expresie esentialmente unica. In cazul masei nule avem:

$$\begin{aligned} [Q, V] = U - U^\dagger \qquad \{Q, U\} = 0 \\ \{Q, \tilde{U}\} = -\frac{1}{16}\,\mathcal{D}^2\,\bar{\mathcal{D}}^2 V \end{aligned} \tag{0.21}$$

Este usor de aratat ca spatiul Hilbert uni-particula contine urmatoarele tipuri de particule: a) de masa nula si helicitate 1 (fotonul); b) de masa nula si helicitate 1/2 (fotino); c) stari fantoma generate de cimpul $\tilde{g}$ care trebuie eliminate impunind conditia suplimentara ca starile sa aiba numarnul de fantome. Doar gradele de libertate transversale din v_μ si λ'_a produc stari fizice.

Se pot gasi de asemenea (anti)comutatorii cauzali ai cimpurilor fantoma compatibili cu relatiile de mai sus.

Este un fapt remarcabil ca din considerentele de mai sus se poate gasi din nou o forma unica pentru Lagrangianul de interactie, anume:

$$t = f_{jkl}[v^\mu_j v^\nu_k \partial_\nu v_{l\mu} - i(\lambda'_j \sigma_\mu \bar{\lambda}'_k) v^\mu_l - v^\mu_j u_k \partial_\mu \tilde{u}_l + 2\,(\lambda'_j \tilde{\zeta}_k) u_l + 2\,(\bar{\lambda}'_k \bar{\tilde{\zeta}}_j) u_l]. \tag{0.22}$$

In cazul masei pozitive mai trebuie sa introducem un supercimp scalar Bose B ca in cazul Yang-Mills obisnuit. Apar modificari minime in expresia sarcinii de etalonare:

$$\begin{aligned} [Q, V] = U - U^\dagger \qquad \{Q, U\} = 0 \\ \{Q, \tilde{U}\} = -\frac{1}{16}\,\mathcal{D}^2\,\bar{\mathcal{D}}^2 V - imB \qquad [Q, B] = imU. \end{aligned} \tag{0.23}$$

Conditia de invarianta la etalonare conduce la o expresie de tipul (0.22) pentru Lagrangianul de interactie la care se mai adauga termeni depinzind de masele multipletilor. Din pacate invarianta la etalonare conduce de asemenea la relata de masa

$$f_{jkl} = 0 \qquad \text{for} \qquad m_k \neq 0 \quad m_l = 0 \tag{0.24}$$

care este in contradictie cu fenomenologia.

In cele de mai sus am rezolvat urmatoarele probleme:

1. Determinarea multipletilor in care trebuie incadrate diversele cimpuri ale modelului standard: cimpurile Yang-Mills, cimpurile fantoma, cimpul Higgs, cimpurile de materie (cuarci, leptoni, neutrini, fotoni) precum si a relatiilor de (anti)comutare cauzale.

2. Determinarea structurii de etalonare pentru supermultipletii obtinuti.

3. Determinarea Lagrangeanului de interactie (primul ordin al teoriei perturbatiilor) din considerente de invarianta la etalonare si invarianta supersimetrica. Se obtin relatii de masa care sint in contradictie cu fenomenologia. Din acest motiv este interesant sa se considere doar cazul maselor nule i.e. o generalizare supersimetrica a cromodinamicii cuantice.

Bibliografie

[1] D. R. Grigore, Journ. Phys. **A 33** (2000) 8443-8476

[2] D. R. Grigore, G. Scharf, Annalen der Physik (Leipzig) **12** (2003) 5-36

[3] D. R. Grigore, G. Scharf, Annalen der Physik (Leipzig) **12** (2003) 643-683

[4] D. R. Grigore, G. Scharf, Annalen der Physik (Leipzig) **13** (2004) 511-531

[5] D. R. Grigore, M. Gut, G. Scharf, Annalen der Physik (Leipzig) **14** (2005) 520-532

[6] D. R. Grigore, G. Scharf, "*Against Supersymmetry*", hep-th/0606029, trimis spre publicare

[7] G. Scharf, "*Quantum Gauge Theories: A True Ghost Story*", Wiley, 2001