CENTRE FRANCOPHONE EN MATHEMATIQUES BUCAREST

Transitions de phase et équations non locales

25 - 27 Avril 2018

Les hamiltoniens effectifs de Peierls-Onsager en tant que OPD magnétiques

Radu Purice

IMAR

basé sur des travaux communs avec

Horia Cornean, Bernard Helffer et Viorel Iftimie

Plan de l'éxposé:

1. Hamiltoniens quantiques périodiques.
2. Le champ magnétique.
3. The main results

Hamiltoniens quantiques périodiques.

Variables dynamiques de base.

- *L'espace des configurations*: un espace afin réel $\mathcal{X} \cong \mathbb{R}^d$ avec le dual $\mathcal{X}^* := \mathbb{R}^d$ *l'espace des moments*, pour un $d \geq 2$, avec *l'application de dualité* $< .,. >: \mathcal{X}^* \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.
- *L'espace des phases*: $\Xi := \mathbb{T}^*\mathcal{X} \cong \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ avec sa *forme symplectique canonique* $\sigma^\circ\big((x,\xi),(y,\eta)\big) :=< \xi, y > - < \eta, x >$.
- L'espace de Hilbert des *états quantiques* $\mathcal{H} := L^2(\mathcal{X})$ avec
  - La C^*-algèbre des opérateurs bornés $\mathbb{B}(\mathcal{H})$;
  - La lattice des projecteurs orthogonaux $\mathcal{P}(\mathcal{H})$;
  - Le groupe des opérateurs unitaires $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Le système de Weyl:

$$\begin{aligned} &\mathcal{X} \ni x \mapsto U(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}), \quad [U(x)f](y) := f(y-x) \\ &\mathcal{X}' \ni \xi \mapsto V(\xi) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}), \quad [V(\xi)f](y) := e^{-i<\xi,y>}f(y) \end{aligned}$$

$$W(x,\xi) := e^{(i/2)<\xi,x>}U(-x)V(\xi).$$

Quantification de Weyl.

- $\forall \Phi \in \mathscr{S}(\Xi)$ on definit

$$[\mathcal{F}_{\Xi}^{-}\Phi](X) := (2\pi)^{-d} \int_{\Xi} e^{i\sigma^{\circ}(X,Y)}\Phi(Y)\, dY,$$
$$\mathfrak{Op}(\Phi) := (2\pi)^{-d} \int_{\Xi}[\mathcal{F}_{\Xi}^{-}\Phi](X)\, W(X)\, dX \ \in \mathbb{B}(\mathcal{H}).$$

- Explicitement, $\forall \psi \in \mathscr{S}(\mathcal{X})$:

$$[\mathfrak{Op}(\Phi)\psi](x) = \int_X dz \int_{X'} d\zeta\; e^{i<\zeta,(x-z)>}\Phi\left(\frac{x+z}{2},\zeta\right)\psi(z).$$

- $\mathfrak{Op}(\Phi)$ a donc le noyau integral $\mathfrak{K}_{\Phi} := \mathtt{W} \circ \big(\mathbf{1} \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{X}^*}\big)\Phi$ avec
  - $\mathtt{W}$ l'opérateur de changement de variables $(u,v) \mapsto \big(u - v/2, u + v/2\big)$,
  - $\big(\mathcal{F}_{\mathcal{X}^*}\psi\big)(x) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathcal{X}^*} d\xi\, e^{-i<\xi,x>}\psi(\xi)$ pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathcal{X}^*)$.
- Pour $F \in \mathscr{S}'(\Xi)$ on peut alors definir $\mathfrak{Op}(F) : \mathscr{S}(\mathcal{X}) \to \mathscr{S}'(\mathcal{X})$ comme l'opérateur continu definit par la distribution tempérée

$$\mathfrak{K}_F := \mathtt{W} \circ \big(\mathbf{1} \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{X}^*}\big)F \ \in \ \mathscr{S}'(\mathcal{X} \times \mathcal{X}).$$

Hamiltoniens quantiques non-bornés.

Pour $m \in \mathbb{R}$ on considère l'espace de symboles de Hörmander $S^m(\mathcal{X}) := S^m_{1,0}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*)$.

Théorème

Pour $h \in S^m(\mathcal{X})$ un symbole réel et elliptique, avec $m > 0$ $\mathfrak{Op}(h)$ restraint à $\mathscr{S}(\mathcal{X})$ est essentiel auto-adjoint et a comme fermeture H avec le domaine

$$\mathscr{H}^m(\mathcal{X}) := \left\{ u \in L^2(\mathcal{X}) \mid (\mathbf{1} - \Delta)^{m/2} u \in L^2(\mathcal{X}) \right\}$$

qui est borné inferieurement.

Reduction du groupe de symmetries.

Soient:

- $\{e_1, \ldots, e_d\} \subset \mathcal{X}$ une famille lineairement indépendante dans $\mathcal{X}$;
- $\Gamma := \bigoplus_{j=1}^{d} \mathbb{Z} e_j \subset \mathcal{X}$ une lattice associée au sousgroupe normal $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ (en prenant $\{e_1, \ldots, e_d\} \subset \mathcal{X}$ comme base algebrique de $\mathcal{X}$).
- Le groupe quotient $\mathbb{T} := \mathcal{X}/\Gamma$ qui est isomorphe avec $\mathbb{S}^d$ où $\mathbb{S} := \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} \mid |\mathfrak{z}| = 1\}$, avec application quotient:
$$\mathcal{E}\mathrm{xp}_d : \mathcal{X} \ni (x_1, \ldots, x_d) \mapsto \left(e^{2\pi i x_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i x_d}\right) \in \mathbb{T}.$$
- La cellule élémentaire: $E = \left\{y = \sum_{j=1}^{d} t_j e_j \in \mathcal{X} \mid t_j \in [-1/2, 1/2)\right\}$.
- Les objets duaux:
  - $\{e_1^*, \ldots, e_d^*\} \subset \mathcal{X}^*$ satisfaisant $< e_j^*, e_k >= 2\pi\delta_{jk}$.
  - $\Gamma_* := \{\gamma^* \in \mathcal{X}^* \mid < \gamma^*, \gamma > \in (2\pi)\mathbb{Z},\ \forall \gamma \in \Gamma\}$.
  - La cellule de Brillouin: $E_* = \left\{\xi = \sum_{j=1}^{d} t_j e_j^* \in \mathcal{X} \mid t_j \in [-1/2, 1/2)\right\}$.

Le representation de Bloch-Floquet.

Soit $S^m(\mathcal{X})_\Gamma$ le sousespace des symboles Γ-periodiques dans $S^m(\mathcal{X})$ et prenons un symbol réel et elliptique $h \in S^m(\mathcal{X})_\Gamma$ avec un $m > 0$.
Nous definissons l'espace:

$$\mathscr{F} := \left\{ \hat{F} \in L^2_{\text{loc}}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*) \mid \tau_\gamma \hat{F} = \sigma_{-\gamma} \hat{F} \ \forall \gamma \in \Gamma, \tau_{\gamma^*} \hat{F} = \hat{F} \ \forall \gamma^* \in \Gamma^* \right\}$$

$$\sigma_\gamma(\xi) := e^{-i<\xi,x>}, \ [\tau_\gamma f](x,\xi) := f(x+\gamma,\xi), \ [\tau_{\gamma^*} f](x,\xi) := f(x,\xi+\gamma^*)$$

avec la norme hilbertienne $\left\| \hat{F} \right\|^2 := \int_E \int_{E_*} \left| \hat{F}(x,\xi) \right|^2 d\xi \, dx$
et la transformation unitaire de *the Bloch-Floquet*:

$$\mathscr{U}_\Gamma : L^2(\mathcal{X}) \to \mathscr{F}, \quad \left(\mathscr{U}_\Gamma f \right)(x,\xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sigma_\gamma(\xi) f(x+\gamma)$$

ayant comme application inverse:

$$\left(\mathscr{U}_\Gamma^{-1} \hat{F} \right)(x_0 + \gamma) = |\mathbb{T}_*|^{-1} \int_{\mathbb{T}_*} \overline{\sigma_\gamma(\theta)} \hat{F}(x_0,\theta) d\theta.$$

L'integrale directe hilbertienne.

Pour tout $\theta \in \mathbb{T}_*$ on definit:

$$\mathscr{F}_\theta := \{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X}) \mid \tau_\gamma f = \sigma_{-\gamma}(\theta) f \}$$

avec la norme hilbertienne $\|f\|^2_{\mathscr{F}_\theta} = \int_E |f(x)|^2 dx$. Alors

$$\mathscr{F} \cong \int^{\oplus}_{\mathbb{T}_*} \mathscr{F}_\theta \, d\theta; \quad \mathscr{U}_\Gamma \mathfrak{Op}(h) \mathscr{U}_\Gamma^{-1} = \int^{\oplus}_{\mathbb{T}_*} \mathfrak{Op}(h)|_{\mathscr{F}_\theta} \, d\theta.$$

Théorème

L'opérateur $\mathfrak{Op}(h)|_{\mathscr{F}_\theta}$ est essentielement auto-adjoint et sa fermeture $\hat{H}(\theta)$ est inferieurement borné, et a le domaine d'auto-adjonction:

$$\mathscr{F}^m_\theta := \left\{ f \in \mathscr{F}_\theta \mid (\mathbb{1} - \Delta)^{m/2} f \in \mathscr{F}_\theta \right\}$$

et sa résolvante est opérateur compact.

Structure spectrale de Bloch.

Il existe une famille de fonctions continues

$$\mathbb{T}_* \ni \theta \mapsto \lambda_j(\theta) \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$$

telles que $\lambda_j(\theta) \leq \lambda_{j+1}(\theta)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{T}_*$ et on a

$$\sigma\big(\hat{H}(\theta)\big) = \underset{j\in\mathbb{N}^*}{\cup}\{\lambda_j(\theta)\}.$$

Chaque λ_j est de classe C^∞ sur tout domaine où elle a multiplicité constante.

Il existe une famille de fonctions mesurables

$$\mathbb{T}_* \ni \theta \mapsto \phi_j(\theta) \in \mathscr{F}_\theta, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$$

telles que $\hat{H}(\theta)\phi_j(\theta) = \lambda_j(\theta)\phi_j(\theta)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{T}_*$.

Les bandes spectrales de Bloch.

Hypothèse I

Supposons qu'il existe $(j_0, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que si on dénote par

$$\sigma_0(H) := \bigcup_{1 \leq j \leq N} \{\lambda_{j_0+j}(\mathbb{T}_*)\}$$

on a que: $d_0 := \mathrm{dist}(\sigma_0(H), \sigma(H) \setminus \sigma_0(H)) > 0$.

Notations:

- $\sigma_\infty(H) := \sigma(H) \setminus \sigma_0(H)$.
- $J_0 := \{j_0 + 1, \dots, j_0 + N\}$
- $\mathscr{F}^0_\theta := \mathscr{L}\mathrm{in}_{\mathbb{C}}\{\phi_j(\theta), j \in J_0\}, \quad \mathscr{F}^0 := \int^\oplus_{\mathbb{T}_*} \mathscr{F}^0_\theta d\theta,$
- $\pi_j := \mathscr{U}_\Gamma^{-1} \left(\int^\oplus_{\mathbb{T}_*} |\phi_j(\theta)\rangle\langle\phi_j(\theta)| d\theta \right) \mathscr{U}_\Gamma, \quad \forall j \in J_0.$
- $\Pi_0 := \sum_{j \in J_0} \pi_j = \sum_{j \in J_0} \mathscr{U}_\Gamma^{-1} \left(\int^\oplus_{\mathbb{T}_*} |\phi_j(\theta)\rangle\langle\phi_j(\theta)| d\theta \right) \mathscr{U}_\Gamma.$

La dynamique dans la bande de Bloch.

Les inégalités suivantes sont évidentes:

1. $[H, \Pi_0] = 0$,
2. $HE_{\sigma_0}(H) = H\Pi_0 = \sum_{j \in J_I} \mathfrak{Op}(\lambda_j)\pi_j$

   où chaque λ_j est considéré comme une fonction périodique des moments $\xi \in \mathcal{X}^*$.

Remarquons que même si la fonction

$$\mathbb{T}_* \ni \theta \mapsto \sum_{j \in J_0} |\phi_j(\theta)\rangle\langle\phi_j(\theta)| \ =: \ \hat{\Pi}_0(\theta) \in \mathbb{B}\big(\mathscr{F}_\theta\big)$$

est de classe $C^\infty\big(\mathbb{T}_*\big)$,
chaque terme $j \in J_0$ séparément est une fonction

$$\mathbb{T}_* \ni \theta \mapsto |\phi_j(\theta)\rangle\langle\phi_j(\theta)| \ =: \ \hat{\pi}_j(\theta) \in \mathbb{B}\big(\mathscr{F}_\theta\big)$$

qui peut avoir des singularités.

Existence des repères pour les bandes de Bloch.

Problème:

Etant donné la fonction $\hat{\Pi}_0 \in C^\infty\big(\mathbb{T}_*; \mathscr{P}(\mathscr{H})\big)$ est ce que'on peut trouver $N := \dim \hat{\Pi}_0(\theta)$ fonctions $\psi_j \in C^\infty\big(\mathbb{T}_*; \Pi_0\mathscr{H}\big)$, $(j \in \{1, \ldots, N\})$ t.q.: $\{\psi_1(\theta), \ldots, \psi_N(\theta)\}$ soit *base ortonormée* de $\hat{\Pi}_0(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}_*$.

Reponses:

OUI

Si $d \leq 3$ et H commute avec la *conjugaison complèxe*.

En general:

On peut trouver $N + [d/2]$ fonctions $\psi_j \in C^\infty\big(\mathbb{T}_*; \Pi_0\mathscr{H}\big)$ formant un système orthonormé t.q.: $\hat{\Pi}_0(\theta) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{C}}\{\psi_1(\theta), \ldots, \psi_N(\theta)\}$.

Les fonctions de Wannier.

Soit donné un repère de dimension $N' \geq N$ pour la bande de Bloch J_0.

On appelle *fonctions de Wannier* de la bande de Bloch J_0:

$$\mathfrak{w}_j := \mathscr{U}_\Gamma^{-1}\left(\int_{\mathbb{T}_*}^{\oplus} \psi_j(\theta)\, d\theta\right) \in \Pi_0\mathscr{H}, \quad \forall j \in \underline{N'} := \{1, \ldots, N'\}.$$

Alors

1. $\{\mathfrak{w}_{\gamma,j} := \tau_{-\gamma}\mathfrak{w}_j\}_{(\gamma,j)\in\Gamma\times\underline{N'}}$ est une base orthonormée pour l'espace de Hilbert $\Pi_0\mathscr{H} := \mathscr{U}_\Gamma^{-1}\mathscr{F}^0$,
2. $\forall m \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in\mathcal{X}} < x - \gamma >^m |\mathfrak{w}_{\gamma,j}(x)| < \infty$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

L'hamiltonien de bande.

Définition

Sous les hypothèse I et avec les notations en dessus
on définit la fonction a valeures matrices $N' \times N'$

$$\mathbb{T}_* \ni \theta \mapsto \mu(\theta) \in \mathscr{M}_{N',N'}(\mathbb{C}), \quad \mu_{jk}(\theta) := \langle \psi_j(\theta), \hat{H}(\theta)\psi_k(\theta)\rangle_{\mathscr{F}_\theta}$$

Les affirmations suivantes sont évidentes:

1. $\langle \mathfrak{w}_{\alpha,j}, H\mathfrak{w}_{\beta,k}\rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \widehat{\mu_{jk}}(\alpha-\beta) := |E_*|^{-1}\int_{\mathbb{T}_*} e^{-i<\theta,\alpha-\beta>}\mu_{jk}(\theta)d\theta,$
2. *L'hamiltonien de bande $HE_I(H)$* est unitairement equivalent avec l'opérateur Γ-invariant à valeures matricielles agissant dans $l^2(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^{N'}$:

$$\big(\mathfrak{M}(h)_{\alpha,\beta}\big)_{jk} := \widehat{\mu_{jk}}(\alpha-\beta).$$

Le champ magnétique.

Le champ magnétique.

- Le champ magnétique est decrit par une 2-forme fermée sur $\mathcal{X}$:

$$B : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^d \wedge \mathbb{R}^d, \qquad dB = 0.$$

- Étant définit sur un espace affin, B est aussi exacte, et donc il existe une 1-forme $A : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^d$ t.q $B = dA$.
- Transformations de jauge: $A \mapsto A' = A + d\Phi$; on a $B = dA = dA'$.
- La jauge transversale::

$$A_j(x) \ := \ - \sum_{1 \leq k \leq d} x_k \int_0^1 B_{jk}(sx) s ds.$$

Notations:

$$\Lambda^A(x,y) := \exp\left(-i \int_{[x,y]} A\right); \qquad \Omega^B(x,y,z) := \exp\left(-i \int_{<x,y,z>} B\right).$$

Les fonctions Wannier magnétiques.

Pour $j \in J_0$ et $\alpha \in \Gamma$ définissons *les fonctions Wannier magnétiques*:

$$w^A_{\alpha,j} := \Lambda^A(Q,\alpha) w_{\alpha,j} = \Lambda^A(Q,\alpha)\big(\tau_{-\alpha} w_j\big).$$

Proposition

Si $B_{jk} = \epsilon B_{\epsilon,jk}$ avec $B_{\epsilon,jk} \in BC^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ uniformement pour $\epsilon \in [0,\epsilon_0]$ avec certain $\epsilon_0 > 0$, alors

$$\langle w^A_{\alpha,j}, w^A_{\beta,k}\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{jk} + \big[\mathbb{X}^B_{\alpha\beta}\big]_{jk}$$

et pour tout $M \in \mathbb{N}$ il existe $C_M(B,h) > 0$ uniformement bornée en $\epsilon \in [0,\epsilon_0]$ t.q.:

$$\left\|\mathbb{X}^B_{\alpha\beta}\right\|_{\mathbb{B}(\mathbb{C}^{N'})} \leq C_M(B,h)\epsilon < \alpha - \beta >^{-M}.$$

Hypothesis on the magnetic field

Hypothesis IV

We consider a magnetic field of the form $B_\epsilon := \epsilon \overset{\circ}{B}_\epsilon$ with $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ for some small enough $\epsilon_0 > 0$ and with a family of magnetic fields $\{\overset{\circ}{B}_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,\epsilon_0]}$ having components in a bounded subset of $BC^\infty(\mathcal{X})$
(we implicitly assume that $d\overset{\circ}{B}_\epsilon = 0$ for any $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$).

We shall fix a family of vector potentials $\{\overset{\circ}{A}_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,\epsilon_0]}$ having components in a bounded subset of $C^\infty_{\text{pol}}(\mathcal{X})$ such that $\overset{\circ}{B}_\epsilon = d\overset{\circ}{A}_\epsilon$;
then $B_\epsilon = dA_\epsilon$ for $A_\epsilon := \epsilon \overset{\circ}{A}_\epsilon$.
We emphasize that all our constructions will be explicitly gauge covariant.

The magnetic Pseudodifferential Calculus

Definition

For any Schwartz test function $\Phi \in \mathscr{S}(\Xi)$ the following oscillating integral defines a continuous linear operator in $\mathscr{S}(\mathcal{X})$:

$$\big(\mathfrak{Op}^A(\Phi)f\big)(x) := (2\pi)^{-n/2}\int_\Xi e^{i<\eta,x-y>}\Lambda^A(x,y)\Phi\big(\frac{x+y}{2},\eta\big)f(y)dy\,d\eta$$

$\Lambda^A(x,y) := \exp\big\{-i\int_{[x,y]}A\big\}$.

Gauge covariance

$$A' = A + d\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{Op}^{A'}(f) = e^{i\varphi(Q)}\mathfrak{Op}^A(f)e^{-i\varphi(Q)}.$$

Note that

1. $\Lambda^A(x,y)\Lambda^A(y,z) = \Lambda^A(x,z)\exp\left\{-i\int_{<x,y,z>}B\right\} \equiv \Lambda^A(x,z)\Omega^B(x,y,z)$,
2. $|\Omega^B(x,y,z)-1| \leq C\|B\|_\infty|(y-x)\mathscr{W}edge((z-x)|$.

The magnetic Pseudodifferential Calculus - 2

Proposition. MP04

The map $\mathfrak{Op}^A : \mathscr{S}(\Xi) \to \mathbb{B}\big(\mathscr{S}(\mathcal{X})\big)$
is an isomorphism of linear topological spaces that extends to an isomorphism $\mathfrak{Op}^A : \mathscr{S}'(\Xi) \to \mathbb{B}\big(\mathscr{S}(\mathcal{X}); \mathscr{S}'(\mathcal{X})\big)$.

Proposition. IMP07

Under our Hypothesis IV, for any symbol $F \in S^0_0(\mathcal{X})_\Gamma$ we have that $\mathfrak{Op}^A(F) \in \mathbb{B}\big(L^2(\mathcal{X})\big)$
and there exist two constants $C > 0$ and $p \in \mathbb{N}^*$, depending only on the dimension $d \geq 2$ of the configuration space, such that:

$$\|\mathfrak{Op}^A(F)\|_{\mathbb{B}(L^2(\mathcal{X}))} \leq C \sup_{(x,\xi)\in\Xi} \sup_{|a|\leq p} \sup_{|b|\leq p} \big|\big(\partial_x^a \partial_\xi^b F\big)(x,\xi)\big|.$$

.

The magnetic Pseudodifferential Calculus - 3

Definition. MP04

On $\mathscr{S}(\Xi)$ we define the following separately continuous bilinear form, that is gauge independent:

$$\mathscr{S}(\Xi)\times\mathscr{S}(\Xi) \ni (f,g) \mapsto f\sharp^B g \in \mathscr{S}(\Xi), \quad \mathfrak{Op}^A(f\sharp^B g) := \mathfrak{Op}^A(f)\mathfrak{Op}^A(g).$$

We have the explicit formula:

$$(f\sharp^B g)(X) = (2\pi)^{-2d}\int_\Xi\int_\Xi e^{-2i\sigma^\circ(Y,Z)}e^{-i\int_{T(x,y,z)}B}f(X-Y)g(X-Z)dYdZ,$$

with $T(x,y,z)$ having the vertices $x-y-z, x+y-z, x-y+z$.

The magnetic Integral Kernels Calculus (Cornean, Nenciu)

For any symbol $F \in \mathscr{S}'(\Xi)$ the Weyl operator $\mathfrak{Op}(F)$ has as distribution kernel $K_F \in \mathscr{S}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ given by

$$K_F(x,y) = \big(\mathfrak{W}F\big)(x,y) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathcal{X}^*} e^{i<\xi,(x-y)>} F\big((x+y)/2, \xi\big) d\xi.$$

Proposition

The operator $\mathfrak{Op}^A(F)$ has the distribution kernel:

$$K_F^A(x,y) = \Lambda^A(x,y)\big(\mathfrak{W}F\big)(x,y) = \Lambda^A(x,y) K_F(x,y).$$

The magnetic Pseudodifferential Calculus - 4

Theorem. IMP07

Under Hypothesis I and IV, $\mathfrak{Op}^A(h)$ is essentially self-adjoint and its closure H^A is lower semi-bounded and has domain

$$\mathscr{H}^A(\mathcal{X}) := \left\{ u \in L^2(\mathcal{X}) \mid (-i\partial - A)^a u \in L^2(\mathcal{X}), \forall a \in \mathbb{N}^d, |a| \leq m \right\}.$$

Remark. MP04

For $h_0(x, \xi) := \xi^2 + V(x)$, we have

$$\mathfrak{Op}^A(h_0) = \sum_{1 \leq j \leq d} \big(- i\partial_j - A_j(x) \big)^2 + V(Q) \equiv -\Delta_A^2 + V(Q).$$

Theorem. IMP10

Under Hypothesis I and IV, if $\mathfrak{z} \ni \sigma(H^A)$, the resolvent in $\mathfrak{z}$ is given by $\left(H^A - \mathfrak{z}\right)^{-1} = \mathfrak{Op}^A(r^B_{\mathfrak{z}}(h))$ with $r^B_{\mathfrak{z}}(h) \in S^{-m}_1(\mathcal{X})$ depending on the magnetic field but not on the choice of gauge.

The magnetic Pseudodifferential Calculus - 5

Development of the magnetic product

If $f \in S^{m_1}_\rho(\mathcal{X})$ and $g \in S^{m_2}_\rho(\mathcal{X})$,
then for any $n \in \mathbb{N}^*$ there exist the family of symbols
$C^\epsilon_k(f,g) \in S^{m_1+m_2-2k\rho}_\rho(\mathcal{X})$, for $(k,\epsilon) \in \mathbb{N} \times [0,\epsilon_0]$ and
$R^\epsilon_n(f,g) \in S^{m_1+m_2-2n\rho}_\rho(\mathcal{X})$, for $(n,\epsilon) \in \mathbb{N}$,
uniformly with respect to $\epsilon \in [0,\epsilon_0]$, such that

$$f\sharp^\epsilon g = f\sharp^0 g + \sum_{1\leq k\leq n-1} \epsilon^k C^\epsilon_k(f,g) + \epsilon^n R^\epsilon_n(f,g).$$

The magnetic Pseudodifferential Calculus - 6

Development of the magnetic resolvent

1. [IP15, CP12, CP15]There exists $\epsilon_0 > 0$ small enough such that the bounded interval $I \subset \mathbb{R}$ in Hypothesis II satisfies the two conditions in the Hypothesis for H^ϵ with $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$.
2. For any compact set $K \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ there exists $\epsilon_0 > 0$ such that $K \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(H^\epsilon)$ for $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ and the function

$$K \ni \mathfrak{z} \mapsto r^\epsilon_\mathfrak{z}(h) \in S^{-m}_1(\mathcal{X})$$

is continuous for the Fréchet topology uniformly for $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$. Moreover we have the following development

$$r^\epsilon_\mathfrak{z}(h) = r^0_\mathfrak{z}(h) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \epsilon^k r_k(h; \epsilon, \mathfrak{z}),$$

with $r_k(h; \epsilon, \mathfrak{z}) \in S^{-(m+2n)}_1(\mathcal{X})$ uniformly for $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ and the series converging in the topology induced from $\mathbb{B}\big(L^2(\mathcal{X})\big)$ by the map $\mathfrak{Op}^\epsilon$ for any $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$.

The main results

Theorem A

Under Hypothesis I, II and IV, there exists $\epsilon_0 > 0$ small enough such that for any $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ and for any $n \in \mathbb{N}^*$ we have that:

1. $H^\epsilon E_I(H^\epsilon) = \mathfrak{Op}^\epsilon(h_I) + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \epsilon^k \mathfrak{Op}^\epsilon(v_k^\epsilon) + \epsilon^n \mathfrak{Op}^\epsilon(R_I^\epsilon(h; n))$ with:
   1. $h_I(x, \xi) :=$
   $$\frac{(2\pi)^d}{|E_*|} \int_{\mathcal{X}} e^{-i<\xi, y>} \left[\int_{\mathbb{T}_*} \left(\sum_{j \in JI} \lambda_j(\theta) \phi_j(x + y/2, \theta) \overline{\phi_j(x - y/2, \theta)} \right) d\theta \right] dy,$$
   2. $v_k^\epsilon := -(2\pi i)^{-1} \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{z} r_k(h; \epsilon, \mathfrak{z}) d\mathfrak{z}$,
   3. $R_I^\epsilon(h; n) := -(2\pi i)^{-1} \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{z} \left(\sum_{k \geq n} \epsilon^k r_k(h; \epsilon, \mathfrak{z}) \right) d\mathfrak{z}$.
2. there exists an orthogonal projection $P_{I,n}^\epsilon$ in $L^2(\mathcal{X})$ such that
   1. $\| E_I(H^\epsilon) - P_{I,n}^\epsilon \| \leq C_n \epsilon^n, \quad \| H^\epsilon [E_I(H^\epsilon) - P_{I,n}^\epsilon] \| \leq C_n(h) \epsilon^n$,
   2. $\| [H^\epsilon, P_{I,n}^\epsilon] \| \leq C_n(h) \epsilon^n$,
   3. for $P_{I,n}^\epsilon$ we have a development in powers of $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ similar to the one of $H^\epsilon E_I(H^\epsilon)$ at point 1.

Corollary

For a N-fold degenerated isolated spectral band $\lambda : \mathbb{T}_* \to \mathbb{R}$ we have that

$$H^\epsilon E_I(H^\epsilon) = \mathfrak{Op}^\epsilon(\lambda) E_I(H^\epsilon) + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \epsilon^k \mathfrak{Op}^\epsilon\big(v_k^\epsilon\big) + \epsilon^n \mathfrak{Op}^\epsilon\Big(R_I^\epsilon(h; n)\Big).$$

Theorem B

Under Hypothesis I, II, III and IV, there exists an orthonormal *magnetic Wannier* basis $\{\mathcal{W}^{\epsilon}_{\gamma,j}\}_{(\gamma,j)\in\Gamma\times J_I}$ such that:

1. $E_I(H^{\epsilon}) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{j\in J_I} |\mathcal{W}^{\epsilon}_{\gamma,j}\rangle\langle\mathcal{W}^{\epsilon}_{\gamma,j}|,$
2. $\sup_{x\in\mathcal{X}} < x-\gamma >^m |\mathcal{W}^{\epsilon}_{\gamma,j}| < \infty,\ \forall(\gamma,j)\in\Gamma\times J_I,$
3. $\langle\mathcal{W}^{\epsilon}_{\alpha,j}, H^{\epsilon}\mathcal{W}^{\epsilon}_{\beta,k}\rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \Lambda^{\epsilon}(\alpha,\beta)\mathcal{W} idehat \mu_{jk}(\alpha-\beta) + C\epsilon$

for any $(\alpha,\beta)\in\Gamma\times\Gamma$, $(j,k)\in J_I\times J_I$ and $\epsilon\in[0,\epsilon_0]$.

The case of constant magnetic field I.

- We consider satisfied Hypothesis I and II and a constant magnetic field B.
- We define the unitary mapping $\mathfrak{R}_\Gamma : L^2(\mathcal{X}) \to l^2\big(\Gamma; L^2(E)\big) \cong l^2(\Gamma) \otimes L^2(E)$

  given by the formula $\big(\mathfrak{R}_\Gamma f\big)_\gamma(\hat{x}) := f(\gamma + \hat{x})$.
- We denote by $\overset{\circ}{\tau} : \Gamma \to \mathbb{B}\big(l^2(\Gamma)\big)$ the restriction of the translations to $l^2(\Gamma)$.
- We consider the unitary transformation in $L^2(\mathcal{X})$ defined by $\big(\Upsilon^A f\big)(x) := \Lambda^A([x], x) f(x)$.

The case of constant magnetic field I.

Theorem I

Under the above assumptions we have that

$$H^A E_I(H^A) = \left(\Upsilon^A \mathfrak{R}_\Gamma\right)^{-1} \mathfrak{M}^B(h) \left(\Upsilon^A \mathfrak{R}_\Gamma\right)$$

with

$$\mathfrak{M}^B(h)_{\alpha,\beta} := \Lambda^A(\alpha,\beta) \mathfrak{H}_I^B(\alpha - \beta)$$

where $\mathfrak{H}_I^B(\gamma) \in \mathbb{B}\big(L^2(E)\big)$ is defined by the following integral kernel:

$$k^B_{h,I}(\gamma, \hat{x}, \hat{y}) := \Phi^B_\gamma(\hat{x}, \hat{y}) k_{h,I}(\gamma, \hat{x}, \hat{y})$$

$$\Phi^B_\gamma(\hat{x}, \hat{y}) \;=\; \exp\left\{(-i/2)\big(\langle B, \gamma \mathscr{W}edge(\hat{x} + \hat{y})\rangle + \langle B, \hat{x} \mathscr{W}edge \hat{y}\rangle\big)\right\},$$

$$k_{h,I}(\gamma, \hat{x}, \hat{y}) := \int_{\mathbb{T}_*} e^{-i<\theta,\gamma>} \left(\sum_{j \in J_I} \lambda_j(\theta) \phi_j(\hat{x} + \hat{y}/2, \theta) \overline{\phi_j(\hat{x} - \hat{y}/2, \theta)} \right) d\theta.$$

The case of constant magnetic field II.

Theorem II

Under the above assumptions in the transverse gauge representation, we have the following convolution form for the matrix of the band Hamiltonian in the modified magnetic Wannier basis:

$$\left\langle \mathcal{W}^{\epsilon}_{\alpha,l}, H^{\epsilon}\mathcal{W}^{\epsilon}_{\beta,m}\right\rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \Lambda^{\epsilon}(\alpha,\beta)\left\langle \mathcal{W}^{\epsilon}_{\alpha-\beta,l}, H^{\epsilon}\mathcal{W}^{\epsilon}_{0,m}\right\rangle_{L^2(\mathcal{X})} \equiv \mathcal{W}idetilde\Lambda^{\epsilon}(\alpha,\beta)\hat{\mathfrak{H}}^{\epsilon}_{lm}(\alpha-\beta).$$

Thank you !