Projet de recherche

1. Titre : Méthodes effectives dans l'étude des polynômes et des équations diophantiennes

2. Participants : Yann Bugeaud et Maurice Mignotte (Université de Strasbourg, Institut de Recherche Mathématique Avancée – UMR 7501), Nicolae Ciprian Bonciocat et Mihai Cipu (Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine, Bucarest)

3. Description du projet :

Cette proposition se situe en prolongation du Projet LEA Math-Mode intitulé *Analyse diophantienne dans l'étude des polynômes et des équations diophantiennes* qui s'est déroulé en 2010 et 2011. L'activité scientifique déployée dans le cadre de cette coopération s'est concrétisée dans deux directions.

D'une part, nous avons obtenu des critères d'irréductibilité à la Pólya pour les polynômes en plusieurs variables [4] et pour des polynômes du type $f(X) + p^k g(X)$, où f et g sont des polynômes premiers entre eux à coefficients entiers, avec $\deg f < \deg g$, où p est un nombre premier et k est un entier positif [5]. D'autre part, notre étude [6] des suites entières ayant la propriété que le produit de n'importe quels deux termes est le successeur d'un carré parfait donne les meilleures bornes connues pour chacun terme et aussi pour le nombre de telles suites. (Pour des progrès ultérieurs, voir [13].)

Le but du nouveau projet est de valoriser les techniques developpées jusqu'à preésent et l'expérience déjà acquise en étudiant des problèmes similaires portant sur :

- **A.** l'irréductibilité de certaines classes de compositions des polynômes à coefficients entiers,
- **B.** les $D(n)$-suites.

A1. *L'étude de l'irréductibilité de certaines classes de compositions des polynômes à coefficients entiers*

Il y a plusieurs critères d'irréductibilité pour des compositions de polynômes dans la littérature. Certains d'entre eux ont l'origine dans l'œuvre de Schur [7], Flügel [14], Pólya and Szegö [21], Ille [20], A. Brauer, R. Brauer and H. Hopf [8], Dorwart and Ore [11], Wegner [25], et Serres [22], [23] et [24]. Dans une série d'articles plus récents [15] – [18], K. Győry a étudié le problème de Brauer–Hopf dans des situations plus générales. D'autres résultats d'irréductibilité pour des classes spéciales de compositions de polynômes, pour des combinaisons linéaires de polynômes premiers entre eux, et pour des polynômes à coefficients entiers et de coefficient dominant ayant un nombre fixé de facteurs premiers distincts, ont été prouvés en [19].

Plus récemment, des critères d'irréductibilité pour des compositions $f \circ g$ de polynômes à coefficients entiers tels que le coefficient dominant de f ait un facteur premier suffisament grand [1], et pour des compositions de polynômes en plusieurs variables $f \circ g$ sur un corps arbitraire, tels que le coefficient dominant de f ait un facteur irréductible de degré suffisament grand [2], ont été obtenus par A.I. Bonciocat et A. Zaharescu.

Ici, notre premier objectif est d'étudier l'irréductibilité pour certaines classes de compositions des polynômes à coefficients entiers, disons $f \circ g$, avec $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, dont les coefficients sont restreints par quelques inégalités, et avec le coefficient dominant de f ayant un facteur premier suffisament grand, ou un facteur premier qui ne divise pas la norme d'une certaine extension algébrique de $\mathbb{Q}$, obtenue par l'adjonction de certains éléments algébriques qui dependent de f et g. A cet égard, on va étudier la décomposition canonique de cette norme dans le cas où le degré de f est suffisament petit, et le coefficient dominant de g est majoré en valeur absolue par un certain diviseur premier du coefficient dominant de f.

Un deuxième objectif est d'obtenir des conditions d'irréducibilité pour des compositions de polynômes $f \circ g$ dans le cas où au moins un de ces polynômes f et g a des coefficients entiers positifs. Ici on va étudier la localisation des racines de $f \circ g$ par des techniques spécifiques pour les polynômes à coefficients positifs.

Un troisième objectif est d'étudier la relation entre l'irréducibilité des compositions de certains polynômes $f \circ g$ et la décomposition canonique de leurs valeurs en certains arguments entiers, ou la valeur absolue de leur valeurs en certains arguments entiers.

On va aussi essayer d'obtenir des résultats similaires pour des compositions de polynômes en plusieurs variables sur un corps arbitraire, en utilisant des techniques de la théorie des valeurs absolues non-archimédiennes [4], ou de la théorie des séries de Puiseux.

A2. *L'étude de l'irréductibilité de certains classes de combinaisons linéaires des polynômes premiers entre eux à coefficients entiers, et des combinaisons linéaires de polynômes premiers entre eux en plusieurs variables sur un corps arbitraire*

Quelques combinaisons linéaires $n_1 f(X) + n_2 g(X)$ des polynômes premiers entre eux sont irréductibles si la factorisation canonique de n_1 et n_2 a quelques propriétés spécifiques. Par exemple, il y a quelques critères d'irréductibilité récents pour des polynômes $f(X) + pg(X)$, où f et g sont des polynômes premiers entre eux ayant coefficients rationnels, et p est un nombre premier suffisament grand. Dans [9] Cavachi a prouvé que pour tous polynômes premiers entre eux $f(X), g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ avec $\deg f < \deg g$, le polynôme $f(X)+pg(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ pour à peu près tout nombre premier p. Dans [10], ce résultat a été amélioré en donnant une borne inférieure explicite b dépendante de f et g, telle que pour tout nombre premier $p > b$, le polynôme $f(X) + pg(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. La méthode de [10] a été adaptée dans [3] pour obtenir de meilleures bornes b et pour obtenir des bornes supérieures explicites pour le nombre total des facteurs sur $\mathbb{Q}$ des combinaisons linéaires $n_1 f(X) + n_2 g(X)$, où f et g sont des polynômes premiers entre eux avec $\deg f \leq \deg g$, et n_1 et n_2 sont des entiers non nuls tel que $|n_2/n_1|$ dépasse une borne inférieure explicite. Dans [5] nous avons obtenu des critères d'irréductibilité pour des combinaisons linéaires $f(X) + p^k g(X)$, où f et g sont des polynômes premiers entre eux à coefficients entiers, $\deg f < \deg g$, où p est un nombre premier, et k est un entier positif.

Ici notre premier objectif est d'étudier le cas manquant où $\deg f > \deg g$, plus précisément, on va étudier l'irréductibilité d' une combinaison linéaire $f(X) + p^k g(X)$, où f et g sont des polynômes premiers entre eux à coefficients entiers, $\deg f > \deg g$, p est un nombre premier, et k est un entier positif.

Notre second objectif est d'obtenir des critères d'irréductibilité pour des polynômes à plusieurs variables sur un corps arbitraire, ayant la forme $f(X,Y) + p(X)^k g(X,Y)$, où f

et g sont des polynômes premiers entre eux, $p(X)$ est un polynôme irréductible, et k est un entier positif, dans le cas où $\deg p$ est suffisament grand. Ici on va adapter quelques techniques spécifiques pour évaluer les résultants des polynômes en plusieurs variables, ainsi que la localisation des zéros de tels polynômes dans certaines clôtures algébriques de $K(X)$ [2].

B1. *Existence des $D(-1)$-quadruples*

Un $D(-1)$-quadruple est décrit par un système de trois équations de Fermat-Pell généralisées dont la résolution met en œuvre une large variété de techniques d'approximation diophantienne et nécessite également de longs calculs sur ordinateur. Les difficultés sont aussi grandes que les experts sont d'avis qu'en fait il existe aucun $D(-1)$-quadruple. Nous envisageons une approche différente du problème d'existence d'un $D(-1)$-quadruple, basée sur une relation qui n'a pas été considérée dans la littérature. Les premières experimentations laissent entrevoir des progrès remarquables. Leur continuation exige un réseau très puissant d'ordinateurs, et heureusement l'Université de Strasbourg offre la possibilité de poursuivre nos recherches.

B2. *Etude des $D(n)$-suites*

Les $D(n)$-suites sont des suites de nombres entiers telles que tout produit de deux termes distincts majoré par un entier fixé n est un carré parfait. De tels objets sont obtenus comme solutions pour un système d'équations de Fermat-Pell généralisées, dont le nombre est déterminé de manière précise par la longueur de la suite.

Nous nous proposons d'utiliser les méthodes mises au point jusqu'à présent (voir [6] et aussi les références du site [12]) afin d'étudier les systèmes obtenus pour des $D(n)$-suites avec n fixé et dont les termes dependent d'un ou de plusieurs paramètres. Le volume des calculs est géant et une approche directe ne suffit plus pour avancer, des idées nouvelles sont nécessaires.

Objectifs scientifiques à suivre :

1) développer de nouveaux critères pour reconnaître des polynômes irréductibles,
2) analyser l'existence des $D(-1)$-quadruples,
3) améliorer les bornes pour les termes d'une $D(n)$-suite paramétrisée.

Références

[1] A.I. Bonciocat, A. Zaharescu, *Irreducibility results for compositions of polynomials with integer coefficients*, Monatsh. Math. 149 (1)(2006), 31–41.

[2] A.I. Bonciocat, A. Zaharescu, *Irreducibility results for compositions of polynomials in several variables*, Proc. Indian Academy Cs. (Math. Sci.) 115(2)(2005), 117–126.

[3] N.C. Bonciocat, *Upper bounds for the number of factors for a class of polynomials with rational coefficients*, Acta Arith. 113 (2)(2004), 175–187.

[4] N.C. Bonciocat, Y. Bugeaud, M. Cipu, M. Mignotte, *Some Pólya-Type Irreducibility Criteria for multivariate polynomials*, Comm. Algebra 40 (10)(2012), 3733–3744.

[5] N.C. Bonciocat, Y. Bugeaud, M. Cipu, M. Mignotte, *Irreducibility criteria for sums of two relatively prime polynomials*, preprint 2012.

[6] N.C. Bonciocat, M. Cipu, M. Mignotte, *On $D(-1)$-quadruples*, Publ. Mat. 56 (2012), 279–304.

[7] A. Brauer, R.Brauer, *Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya*, Math. Z. 40 (1935), 242–265.

[8] A. Brauer, R.Brauer, H. Hopf, *Über die Irreduzibilität einiger spezieller Klassen vonPolynomen*, Jahresber Deutsch Math-Verein 35 (1926), 99-112.

[9] M. Cavachi, *On a special case of Hilbert's irreducibility theorem*, J. Number Theory 82 (2000), no. 1, 96–99.

[10] M. Cavachi, M. Vâjâitu, A. Zaharescu, *A class of irreducible polynomials*, J. Ramanujan Math. Soc. 17, no. 3 (2002), 161–172.

[11] H.L. Dorwart, O. Ore, *Criteria for the irreducibility of polynomials*, Ann of Math **34**(2) (1934), 81–94.

[12] http ://web.math.hr/˜duje/

[13] A. Filipin, Y. Fujita, The relative upper bound for the third element of a $D(-1)$–quadruple, *Math. Commun.*, **17**(2012), 13–19.

[14] W. Flügel, *Lösung der Aufgabe 226* Archiv der Math und Phys **15** (1909), 271–272.

[15] K. Győry, *Sur l'irreducibilité d'une classe des polynômes*, I. Publ Math Debrecen **18**(1972), 289–307.

[16] K. Győry, *Sur l'irreducibilité d'une classe des polynômes. II*, Publ Math Debrecen **19**(1973), 293–326.

[17] K. Győry, *On the irreducibility of a class of polynomials*, III. J Number Theory **15**(2)(1982), 164–181.

[18] K. Győry, *On the irreducibility of a class of polynomials. IV*, Acta Arith **62**(4)(1992), 399–405.

[19] K. Győry, *On the irreducibility of neighbouring polynomials*, Acta Arith **67**(3)(1994), 283–294.

[20] H. Ille, it Einige Bemerkungen zu einem von G. Pólya herrührenden Irreduzibilitätskriterium, Jahresber Deutsch Math -Verein **35**(1926), 204–208.

[21] G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Band II*, (1964), 3rd edn Berlin : Springer.

[22] I. Seres, *Lösung und Verallgemeinerung eines Schurschen Irreduzibilitätsproblems für Polynome*, Acta Math Acad Sci Hung **7**(1956), 151–157.

[23] I. Seres, *Über die Irreduzibilität gewisser Polynome*, Acta Arith **8**(1963), 321–341.

[24] I. Seres, *Irreducibility of polynomials*, J Algebra **2**(1965), 283–286.

[25] U. Wegner, *Über die Irreduzibilität einer Klasse von ganzen rationalen Funktionen*, Jahresber Deutsch Math -Verein **40** (1931), 239–241.

4. Visites envisagées :

Côté Roumanie : à Strasbourg–2 semaines en 2013 (deux visites), 2 semaines en 2014 (deux visites) et 2 semaines en 2015 (deux visites).

Côté France : à Bucarest–1 semaine en 2013 (une visite), 1 semaine en 2014 (une visite) et 1 semaine en 2015 (une visite).

5. Financement demandé au Laboratoire Européen Associé CNRS Franco-Roumain :

Frais d'hébergement et perdiem pour 9 semaines de séjour, 6 semaines en France et 3 semaines en Roumanie.

Frais de voyage pour 6 voyages aller-retour Bucarest-Strasbourg et 3 voyages aller-retour Strasbourg-Bucarest.

6. Notice individuelle Yann Bugeaud :

Poste détenu actuellement : Professeur en mathématique, classe exceptionnelle, Université de Strasbourg.

Formation :

1993 Agrégation de mathématiques, Ecole Normale Supérieure de Lyon

1996 Thèse d'Etat en Mathématiques, 'Formes linéaires de logarithmes et applications', Université Louis Pasteur de Strasbourg

1997 Maître de conférence, Université Louis Pasteur de Strasbourg

2000 Habilitation à Diriger des Recherches, 'Approximations diophantienne effective'

2001 Professeur en Mathématique, Université Louis Pasteur de Strasbourg

2006 Professeur première classe

2008 Membre junior de l'Institut Universitaire de France

Stages scientifiques, invitations et collaborations à l'étranger : Universités de Debrecen (Hongrie), Vilnius (Lituanie), York et Edimbourg (Royaume Uni), Aarhus (Danemark), Thesssaloniki (Grèce), Science University de Tokyo (Japon), Morelia (Mexic), Beer Sheva (Israël), Moscou (Russie), Université Technique de Vienne, de Graz et Institut Schrödinger Vienne (Autriche), Institut Mathématique de Bucarest (Roumanie), Prague (République Tchèque), Hanoi (Vietnam), Institut Max Planck à Bonn (Allemagne), I. M. P. A. de Rio de Janeiro (Brésil) et Sydney (Australie).

Activités de recherche : Approximation diophantienne, en particulier formes linéaires de logarithmes et leurs applications à la résolution de certaines équations diophantiennes, et théorie des nombres transcendants. Equirépartition modulo 1. Polynômes.

7. Notice individuelle Maurice Mignotte :

Poste détenu actuellement : Professeur en mathématique, classe exceptionnelle, Université de Strasbourg.

Formation :

1970 Assistant en mathématiques, Université Paris XIII

1973 Maîtrise d'Informatique, Université Paris VI

1974 Thèse d'Etat ("Sur quelques problèmes d'effectivité en théorie des nombres", directeur : Georges Poitou), Université Paris XIII

1974 Professeur en informatique, Strasbourg

1988 Professeur en mathématique, Strasbourg

1978–80 Secrétaire de la "Société Mathématique de France"

1990–1995 Directeur de l'Institut de mathématique et informatique, Université Louis Pasteur, Strasbourg

1992–2009 Responsable du DESS de mathématiques discrètes

Chevalier et Officier des Palmes Académiques

Stages scientifiques, invitations et collaborations à l'étranger : Nombreuses invitations dans des universités étrangères dont Universités de Debrecen (Hongrie), Dakar (Sénégal), Thesssaloniki (Grèce), Morelia (Mexique), Moscou (Russie), Cagliari, Pise, Turin (Italie), Tunis (Tunisie), Fès (Maroc), Ouagadougou (Burkina Faso), Bamako (Mali), Niamey (Niger) et d'Abidjan (Côte d'Ivoire), Institut Mathématique de Bucarest (Roumanie), Prague (République Tchèque), Budapest (Hongrie), I. M. P. A. de Rio de Janeiro (Brésil).

Activités de recherche : Inégalités sur les polynômes en une variable : majorations pour les racines, bornes pour les facteurs, séparation des racines, répartition des arguments des racines. Etude des polynômes "aléatoires" sur les corps finis et à coefficients complexes, applications aux algorithmes. Equations diophantiennes : algorithme de résolution automatique de certaines équations diophantiennes exponentielles, résolution complète de certaines équations particulières ainsi que de plusieurs familles d'équations de Thue, progrès pour l'équation de Catalan, minorations de formes linéaires de logarithmes et applications. Récurrences linéaires : étude arithmétique, applications des récurrences linéaires en calcul formel. Quelques remarques sur l'élimination des quantificateurs. Notes en cryptographie.

8. Notice individuelle Nicolae Ciprian Bonciocat :

Poste détenu actuellement : Directeur de recherche de troisième classe à l'Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine

Formation :

1990 – Diplôme d'ingénieur Institut Polytechnique de Bucarest

1997 – Diplôme d'Etudes Supérieures en Mathématiques (licence) Faculté de Mathématiques et Informatique de l'Université de Bucarest

1998 – Diplôme de Spécialisation en Algèbre (équivalent DEA) Faculté de Mathématiques et Informatique de l'Université de Bucarest

2003 – Doctorat ès Sciences Mathématiques (spécialisation algèbre) Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine

Stage scientifique, invitations et collaborations à l'étranger : Université de Osnabrück (Allemagne).

Activités de recherche : Factorisation et irréductibilité des polynômes en une ou plusieurs variables. Théorie des groupes.

9. Notice individuelle Mihai Cipu :

Poste détenu actuellement : Directeur de recherche de première classe à l'Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine

Formation : 1978 – Diplôme d'Etudes Supérieures en Mathématiques (licence) Faculté de Mathématiques et Mécanique de l'Université de Bucarest

1979 – Diplôme de Spécialisation en Algèbre (équivalent DEA) Faculté de Mathématiques et Mécanique de l'Université de Bucarest

1991 – Doctorat ès Sciences Mathématiques (spécialisation algèbre) Faculté de Mathématiques et Mécanique de l'Université de Bucarest

Bourse postdoctorale NATO, Université de Cologne (Allemagne) apr.–juill. 1994

Bourse postdoctorale I.C.T.P. Trieste (Italie) mars–août 1995

Bourse postdoctorale C.I.C.M.A., Montréal (Canada) août 1996–juill. 1997

Bourse SHE EGIDE Université de Strasbourg novembre 2010

Stages scientifiques, invitations et collaborations à l'étranger : Professeur invité à l'Université de Ferrara (Italie), Mathematical Mechanization Research Center, Chinese Academy of Sciences Beijing (R. P. Chine), Université de Strasbourg. Stages aux Universités de Trieste et Ferrara (Italie), Essen (Allemagne), U.I.A. Anvers (Belgique), Lund, Stockholm et Linköping (Suède).

Activités de recherche : Anneaux avec la propriété d'approximation. Modules de Buchsbaum et de Cohen-Macaulay généralisés. Résolution des systèmes d'équations polynômiales. Equations diophantiennes exponentielles et de Fermat-Pell.