Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles, analyse de Fourier et introduction aux distributions

Cours pour les étudiants de l'ENS de Bucarest
par B. Helffer
à partir de textes établis par Thierry Ramond
Département de Mathématiques
Université Paris-Sud

Version pour la Roumanie de Février 2014

Table des matières

1 Qu'est-ce qu'une EDP ? 13

1.1 Equations différentielles ordinaires 13
1.2 Equations aux Dérivées Partielles 14
1.2.1 Dérivées partielles 15
1.2.2 EDP 16
1.3 Premières EDP 17
1.3.1 Exemple 1 17
1.3.2 Exemple 2 18
1.3.3 Exemple 3 18
1.4 Discussion sur la notion de problème bien posé 19
1.5 Exercices 20
1.5.1 Equations différentielles 20
1.5.2 EDP 20
1.6 Exercices 21

2 EDP linéaires du premier ordre 23

2.1 Différentielle 23
2.1.1 Différentiabilité 23
2.1.2 Différentielle et dérivées partielles 25
2.2 Les équations de transport 27
2.3 Equations à coefficients constants 28
2.3.1 Méthode des caractéristiques 28
2.3.2 Méthode du changement de variables 30
2.4 Equations à coefficients variables 31
2.4.1 Champs de vecteurs 31
2.4.2 Un problème de Cauchy pour l'équation (2.9) 32
2.5 Un exemple d'équation non-linéaire : Equation de Burgers . . 33
2.6 Exercices 36
2.6.1 Différentielles 36
2.6.2 EDP du premier ordre à coefficients constants 36
2.6.3 Courbes intégrales de champs de vecteurs 37

2.6.4 EDP du premier ordre à coefficients non-constants . . . 37

3 L'équation des ondes sur un axe 39

3.1 Le modèle physique : cordes vibrantes . . . 39
3.2 Solutions de l'équation des ondes . . . 40
3.2.1 Solution générale . . . 40
3.2.2 La formule de D'Alembert . . . 41
3.3 Causalité et conservation de l'énergie . . . 43
3.3.1 Vitesse de propagation finie . . . 43
3.3.2 Energie . . . 43
3.4 Exercices . . . 45
3.4.1 Ondes . . . 45

4 Extrema 47

4.1 Fonctions d'une variable . . . 47
4.2 Fonctions de plusieurs variables . . . 49
4.3 Exercices . . . 51

5 L'équation de Laplace 53

5.1 Généralités . . . 53
5.2 Principe du Maximum . . . 53
5.3 Propriétés d'invariance . . . 56
5.4 Le Laplacien en coordonnées polaires . . . 57
5.5 Solutions particulières : séparation des variables . . . 59
5.6 Exercices . . . 61
5.6.1 Fonctions harmoniques . . . 61
5.6.2 Le principe du maximum . . . 61

6 L'équation de la chaleur sur un axe 63

6.1 Le modèle physique : la loi de Fourier . . . 63
6.2 Le principe du maximum . . . 64
6.3 Fonction de Green . . . 68
6.3.1 Invariances de l'équation . . . 68
6.3.2 Une solution particulière . . . 69
6.3.3 La solution et ses propriétés . . . 71
6.4 Exercices . . . 72
6.4.1 Avec le principe du maximum . . . 72
6.4.2 Energie . . . 73
6.4.3 Fonction de Green . . . 73

7 Rappels sur les séries de Fourier **77**
7.1 Séries trigonométriques 77
7.1.1 Applications périodiques 77
7.1.2 Séries trigonométriques 77
7.2 Séries de Fourier 79
7.2.1 Coefficients de Fourier 80
7.2.2 Séries de Fourier. Cas des fonctions régulières 81
7.3 Théorème de convergence simple de Dirichlet 83

8 Notions hilbertiennes **87**
8.1 Espace vectoriel normé 87
8.1.1 Norme 87
8.1.2 Distance 88
8.2 Espaces préhilbertiens 88
8.2.1 Produit scalaire. 88
8.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz. 89
8.2.3 Norme préhilbertienne 89
8.3 Orthogonalité 90
8.3.1 Quelques définitions. 90
8.3.2 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. . . . 90
8.3.3 Expression du produit scalaire dans une base orthonormée. 90
8.4 Espace de Hilbert 91
8.4.1 L'espace ℓ^2 91
8.4.2 Définition d'un espace de Hilbert 91
8.4.3 Convergences 91
8.5 Théorème de la projection orthogonale 92
8.6 Convergence en moyenne quadratique 93
8.7 Théorie hilbertienne 96

9 Transformation de Fourier **99**
9.1 Transformée de Fourier L^1. 99
9.2 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 100
9.2.1 Définitions, exemples 100
9.2.2 Convergence des suites et théorèmes de densité 101
9.3 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 103
9.3.1 Définitions, premières propriétés 103
9.3.2 Gaussiennes (1) 105
9.3.3 Formule d'inversion 106
9.3.4 Formule de Parseval 107
9.3.5 Convolution et transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 108

9.4 Transformée de Fourier L^2 109
9.5 Retour à l'équation de la chaleur 110

10 Distributions tempérées **113**
10.1 Les distributions tempérées 113
10.1.1 Définition, exemples 113
10.1.2 Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 116
10.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 116
10.2.1 Définition 116
10.2.2 Gaussiennes (2) 117

11 Distributions **119**
11.1 Définitions et exemples 119
11.1.1 Définitions 119
11.1.2 Les fonctions localement intégrables définissent des distributions 121
11.1.3 Masse de Dirac 122
11.1.4 Valeur principale de $1/x$ 122
11.2 Ordre d'une distribution 123
11.2.1 Définition, exemples 123
11.2.2 Les distributions positives 125
11.3 Premières opérations sur les distributions 125
11.3.1 Dérivation 126
11.3.2 Produit par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ 128
11.4 Support d'une distribution 131
11.4.1 Définition 131
11.4.2 Propriétés 132
11.4.3 Distributions à support compact 133
11.4.4 Distributions supportées en un point 135
11.5 Suites de distributions 138
11.5.1 Convergence, exemples 138
11.5.2 Propriétés 138
11.6 Distributions périodiques sur $\mathbb{R}$ 139
11.6.1 Définitions 139
11.6.2 Série de Fourier d'une distribution périodique 140

12 Espaces de Sobolev **145**
12.1 Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$ 145
12.1.1 Définitions 145
12.1.2 Densité des fonctions régulières 147
12.1.3 Multiplicateurs de H^s 148

12.1.4 Injections de Sobolev 150
12.1.5 Dualité $H^s(\mathbb{R}^n)/H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ 152
12.1.6 Trace d'un élément de $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 1/2$ 153
12.2 Espaces de Sobolev sur Ω 155
12.2.1 Espaces de Sobolev d'ordre entier sur $\mathbb{R}^n$ 155
12.2.2 Espaces de Sobolev d'ordre entier sur Ω 156
12.2.3 L'inégalité de Poincaré 158
12.2.4 Le problème de Dirichlet 159
12.3 Régularité du problème de Dirichlet 162

Avant-Propos pour la première partie

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. L'étude mathématique des EDP nous a aussi appris à faire preuve d'un peu de modestie : on a découvert l'impossibilité de prévoir à moyen terme certains phénomènes gouvernés par des EDP non-linéaires - pensez au désormais célèbre effet papillon : une petite variation des conditions initiales peut en temps très long conduire à des très grandes variations. D'un autre côté, on a aussi appris à "entendre la forme d'un tambour" : on a démontré mathématiquement que les fréquences émises par un tambour lors de la vibration de la membrane - un phénomène décrit par une EDP, permettent de reconstituer parfaitement la forme du tambour.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisement certaines propriétés de ces solutions.

L'apparition d'ordinateurs extrêmement puissants permet néanmoins aujourd'hui d'obtenir des solutions approchées pour des équations aux dérivées partielles, même très compliquées. C'est ce qui s'est passé par exemple lorsque vous regardez les prévisions météorologiques, ou bien lorsque vous voyez les images animés d'une simulation d'écoulement d'air sur l'aile d'un avion. Le rôle des mathématiciens est alors de construire des schémas d'approximation, et de démontrer la pertinence des simulations en établissant des estimations a priori sur les erreurs commises.

Quand sont apparues les EDP ? Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'electromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDP de la théorie de la relativité.

Cependant l'étude systématique des EDP est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par L. Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est du à L. Hörmander pour la mise au point du calcul pseudodifférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDP reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21ème siècle. D'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géometrie et en analyse.

Venons-en aux objectifs de cette première partie du cours. On souhaite que les étudiants prennent contact avec les EDP et quelques unes des méthodes et des problèmatiques qui s'y rattachent. De ce point de vue relativement élémentaire où l'on se place, les EDP constituent un terrain de jeu (de récréation) extrêmement riche et vaste. Nous espérons revenir à certains aspects plus délicats, une fois définies les distributions en Partie III.

Le contenu de la première partie du cours est très largement inspiré du livre de W.A. Strauss : Partial Differential Equations : An Introduction, John Wiley, 1992.
Une présentation plus détaillée est donnée dans le livre d'Evans.

Cette présentation des EDP est aussi l'occasion de mettre en action certains outils mathématiques : éléments sur les équations différentielles ordinaires, calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables réelles, fonctions définies par des intégrales généralisées, séries de Fourier...

La rédaction a initialement été préparée dans sa première partie pour des élèves de seconde année d'université. Ceci explique que parfois les exercices proposés sont trop simples et que l'on rappelle beaucoup de résultats connus. Les deuxièmes et troisièmes parties sont en général de niveau troisième année, voir de quatrième année. Nous n'avons pas eu le temps dans ce cours de 24 heures de parler de la convolution des distributions.

Part I : Introduction aux EDP

Chapitre 1

Qu'est-ce qu'une EDP ?

1.1 Equations différentielles ordinaires

Pour fixer les idées, on rappelle d'abord quelques notions à propos des équations différentielles ordinaires (EDO). Une équation différentielle est une relation du type

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \ldots, u^{(n)}(x)) = 0\ , \tag{1.1}$$

entre la variable $x \in \mathbb{R}$ et les dérivées de la fonction inconnue u au point x. La fonction F est une fonction de plusieurs variables $(x, y) \mapsto F(x, y)$ où x est dans $\mathbb{R}$ (ou parfois dans un intervalle de $\mathbb{R}$) et $y = (y_0, \ldots, y_n)$ est dans $\mathbb{R}^n$.
L'exemple le plus simple est celui du mouvement d'un corps (identifié) à un point sur la droite. La variable x correspond alors au temps et le mouvement est décrit par l'équation :

$$u''(x) = f(u(x))\ , \tag{1.2}$$

(c'est la célèbre formule $\vec{F} = m\gamma$, où γ est l'accélération).
La fonction F qui intervient est ici la fonction

$$(x, y_0, y_1, y_2) \mapsto F(x, y_0, y_1, y_2) = y_2 - f(y_0)\ .$$

On note que la fonction F ne dépend pas de x et de y_1.

Lorsque $f(y) = -v'(y)$ pour une fonction v continûment dérivable, on peut montrer, en dérivant par rapport à x, la fonction "énergie" :

$$x \mapsto \frac{1}{2}u'(x)^2 + v(u(x))\ ,$$

avec u solution de (1.2), que celle-ci est constante au cours du temps :

$$\frac{1}{2}u'(x)^2 + v(u(x)) = E_0 \ ,$$

où E_0 est calculée par la valeur de l'énergie au temps initial x_0.
On obtient une nouvelle équation (plus facile à résoudre) qui a la forme ci-dessus avec cette fois-ci :

$$F(x, y_0, y_1) := \frac{1}{2}y_1^2 + v(y_0) \ .$$

Un autre exemple classique est celui des EDO linéaires à coefficients constants, qui s'écrivent formellement

$$a_n u^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = f(x), \tag{1.3}$$

où f est une fonction donnée. On parle d'équation linéaire homogène lorsque $f = 0$. L'ordre d'une EDO est le plus grand ordre de dérivation qui apparait dans l'équation - ici n.

Remarque 1.1.1 *On peut bien sûr écrire (1.3) sous la forme (1.1). On vérifiera que la fonction*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \ni (x, y) \mapsto F(x, y_0, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=0}^{n} a_j y_j - f(x)$$

répond à la question.

Résoudre une EDO, c'est trouver un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction u définie sur I, suffisamment dérivable sur cet intervalle, et telle que pour tout $x \in I$, la relation (1.1) a lieu.

On se convainquera rapidement que seule la connaissance de la fonction et de certaines de ses dérivées en un point permettra d'identifier une solution bien précise (problème de l'unicité).

1.2 Equations aux Dérivées Partielles

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables

$$(x, y, \ldots) \mapsto u(x, y, \ldots).$$

Une EDP est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

1.2.1 Dérivées partielles

On se limite pour les énoncés au cas de fonctions de deux variables, mais les notions qui suivent se généralisent facilement aux fonctions de n variables réelles, où n est un entier quelconque (supérieur à 2). Pour le moment, nous n'examinons que les propriétés des applications partielles associées à une telle fonction f.

Définition 1.2.1
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On appelle applications partielles associées à f en (x_0, y_0), les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ obtenues en figeant l'une des variables :

$$f_1 : x \mapsto f_1(x) := f(x, y_0) \text{ et } f_2 : y \mapsto f_2(y) := f(x_0, y)$$

La notion de dérivée partielle de f en un point (x_0, y_0) est alors particulièrement simple : il s'agit des dérivées des applications partielles associées à f en (x_0, y_0).

Définition 1.2.2
Soit $\Omega =]a, b[\times]c, d[$ dans $\mathbb{R}^2$, et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$, et $f_1 :]a, b[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_1(x) = f(x, y_0).$$

On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en (x_0, y_0) lorsque f_1 est dérivable en x_0. On note $\partial_1 f(x_0, y_0)$ ou encore $\partial_x f(x_0, y_0)$ le nombre $f_1'(x_0)$.
De la même manière, si elle existe, on note $\partial_2 f(x_0, y_0)$ la dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0).

On définit ensuite par récurrence les dérivées partielles d'ordre supérieur. Par exemple $\partial^2_{xx} u(x_0, y_0)$ désigne en fait $\partial_x(\partial_x u)(x_0, y_0)$, c'est à dire la dérivée partielle par rapport à la première variable en (x_0, y_0) de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \partial_x u(x, y)$.

Exercice 1.2.3
Calculer $\partial^2_{xx} u(x_0, y_0)$, $\partial^2_{yy} u(x_0, y_0)$, $\partial^2_{xy} u(x_0, y_0)$, $\partial^2_{yx} u(x_0, y_0)$ et $\partial^2_{xyx} u(x_0, y_0)$, pour les trois premières fonctions de l'exercice précédent.

On observe dans l'exercice que $\partial^2_{xy} u = \partial^2_{yx} u$. On donnera plus tard des conditions suffisantes pour que ce soit le cas. Retenons pour l'instant que lorsque la fonction est suffisamment “gentille”(par exemple si toutes les dérivées partielles sont continues) le résultat d'une succession de dérivées partielles ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les fait.

1.2.2 EDP

Dans le cas de deux variables, une EDP d'ordre 1 s'écrit

$$F(x,y,u(x,y),\partial_x u(x,y),\partial_y u(x,y)) = 0. \tag{1.4}$$

et une équation du second ordre'écrit

$$\begin{aligned} F(x,y,u(x,y),\partial_x u(x,y),\partial_y u(x,y),& \\ \partial_x^2 u(x,y),\partial_x\partial_y u(x,y) &= 0\ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Plus généralement, on peut considérer des équations mettant en jeu des dérivées $\partial_x^{m_j}\partial_y^{n_j}u$. L'ordre d'une EDP est alors le plus grand ordre de dérivation m_j+n_j qui apparaît dans l'équation.
Résoudre une EDP dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ (d est le nombre de variables), c'est trouver une fonction suffisamment *différentiable* dans Ω (voir le Chapitre 2), telle que la relation (1.4) soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans Ω.
Voici quelques exemples, très simples a priori, d'EDP à deux variables. Certaines de ces EDP modélisent l'évolution au cours du temps de certains systèmes, et il est d'usage de garder la notation t pour la variable temps.

1. $\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0$ (une équation de transport) ; (Etudier s'il existe des solutions de la forme $g(x-at)$ avec g de classe C^1).
2. $\partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0$ (une équation d'onde de choc) ;
3. $\partial_x\partial_y u(x,y) = 0$ (variante de l'équation des ondes) ;
4. $\partial_{xx}^2 u(x,y) + \partial_{yy}^2 u(x,y) = 0$ (l'équation de Laplace) ;
5. $\partial_{tt}^2 u(t,x) = \partial_{xx}^2 u(t,x)$ (l'équation des ondes ou des cordes vibrantes).

Comme pour les EDO, on parle d'EDP linéaires ou non-linéaires. Dans la liste ci-dessus, seule l'équation 3. est non-linéaire. Pour mieux comprendre de quoi il s'agit, il est commode de parler de l'opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP. Il s'agit de l'application qui à une fonction u associe le membre de gauche de l'EDP. Par exemple l'opérateur associée à l'équation 1. est $P_1 : u \mapsto \partial_x u + \partial_y u$, celui associée à l'équation (3) est $P_3 : u \mapsto \partial_x u + u\partial_y u$. On dit que l'EDP est linéaire lorsque l'opérateur P qui lui est associé l'est, c'est à dire que, pour toutes fonctions u, v "gentilles" et

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, P(\alpha u + \beta v) = \alpha P(u) + \beta P(v)\ . \tag{1.6}$$

C'est bien le cas pour P_1, et il est très simple de vérifier que $P_3(\alpha u) \neq \alpha P_3(u)$ en général.

D'autre part on parle également d'EDP linéaire homogène lorsque la fonction nulle $u = 0$ est solution. En d'autres termes tous les termes de l'équation contiennent la fonction inconnue ou l'une de ses dérivées partielles. Toutes les équations linéaires ci-dessus sont homogènes, alors que l'EDP

$$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u = f(x, y) \tag{1.7}$$

ne l'est pas ! Notons que l'opérateur aux dérivées partielles associé à (1.7) est $P_5 = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ comme pour l'équation 5. ci-dessus.
Comme pour les EDO, les EDP linéaires homogènes ont une propriété particulière, communément appelé principe de superposition : toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution. Enfin lorsque l'on ajoute à une solution d'une EDP linéaire inhomogène une solution quelconque de l'EDP homogène associée, on obtient encore une solution de l'EDP inhomogène.

1.3 Premières EDP

Comme on l'a souligné dans l'avant-propos, il est en général désespéré de vouloir connaître explicitement la ou les solutions d'une EDP. C'est cependant parfois possible dans des cas particuliers : voici trois exemples a priori très simples.

1.3.1 Exemple 1

On veut trouver les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\partial_{xx}^2 u = 0. \tag{1.8}$$

Que faut-il lire ? Rappelons que la notation ∂_{xx}^2 signifie que l'on applique deux fois l'opérateur ∂_x :

$$\partial_{xx}^2 u = \partial_x(\partial_x u).$$

L'équation (1.8) signifie donc que la dérivée partielle par rapport à le première variable, de la dérivée partielle de u par rapport à la première variable est nulle : $\partial_x(\partial_x u) = 0$. Commençons donc par poser $v(x, y) = \partial_x u(x, y)$. On doit avoir, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_x v(x, y) = 0.$$

Pour tout y fixé l'application partielle $x \mapsto v(x, y)$ doit donc être constante. Bien sûr cette constante peut dépendre de y. On voit donc que nécessairement

$$v(x, y) = C(y)$$

pour une certaine fonction C. On est ramené au problème suivant : trouver u telle que

$$\partial_x u(x, y) = C(y).$$

En raisonnant de la même manière, on voit que nécessairement,

$$u(x, y) = C(y)x + D(y)$$

où D est encore une certaine fonction. Il est enfin immédiat de vérifier que n'importe quelle fonction de ce type vérifie l'équation (1.8), pourvu que cette fonctions admette des dérivées partielles. Notons dès à présent qu'il y a énormément de solutions pour l'équation (1.8), puisque aucune condition sur les fonctions C et D n'est apparue dans la démonstration.

1.3.2 Exemple 2

On veut résoudre l'équation

$$u_{xx} + u = 0 \ . \tag{1.9}$$

Figeons la variable y, et posons $v(x) = u(x, y)$. On doit résoudre l'équation différentielle $v'' + v = 0$. Les solutions sont

$$v(x) = A \cos x + B \sin x,$$

et revenant à u on obtient

$$u(x, y) = A(y) \cos x + B(y) \sin x,$$

où A et B sont deux fonctions quelconques.

1.3.3 Exemple 3

On s'intéresse maintenant à l'équation

$$u_{xy} = 0. \tag{1.10}$$

Nous allons voir que l'on peut interpréter de deux manières différentes -et toutes les deux raisonnables- la notation u_{xy} et aboutir à des ensembles de solutions différents. C'est bien entendu très gênant, et l'on verra très vite comment remédier à ce genre d'ambiguïté.
Considérons d'abord que u_{xy} désigne $\partial_x(\partial_y u)$. L'équation (1.10) donne d'abord $\partial_y u(x, y) = C(y)$, où C est une fonction quelconque de y, puis

$$u(x, y) = \int_{y_0}^{y} C(s) ds + D(x).$$

On doit noter que la fonction D est arbitraire, mais que C doit posséder une primitive. En particulier la fonction $u(x,y)$ trouvée est dérivable par rapport à y.
Supposons maintenant que, suivant une autre convention u_{xy} désigne $\partial_y(\partial_x u)$. On trouve alors $\partial_x u(x,y) = E(x)$, puis $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} E(s)ds + F(y)$. Cette fois la fonction trouvée est dérivable par rapport à x, et ne possède aucune propriété particulière par rapport à y. Autrement dit l'ensemble des solutions dépend de l'interprétation de l'équation. On notera que la difficulté disparaît si on se limite à la recherche de solutions assez régulières.

1.4 Discussion sur la notion de problème bien posé

Sur les exemples qui précèdent, on voit que le nombre de solutions d'une EDP peut être très grand. Rappelons le cas des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants. Pour l'équation

$$a_n u^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0 \ , \tag{1.11}$$

on rappellera plus loin que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n : la solution générale dépend de n constantes (n est l'ordre de l'équation). On obtient une solution unique lorsque l'on fixe n conditions supplémentaires du type

$$u(0) = y_0, u'(0) = y_1, \ldots, u^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \tag{1.12}$$

où y_0, y_1, $\ldots y_{n-1}$ sont n réels fixés.
Le problème qui consiste à résoudre l'équation (1.11) sous la condition (1.12) porte le nom de *problème de Cauchy*.
Les trois exemples précédents sont des EDP linéaires homogènes d'ordre 2, et leur solution générale dépend de deux fonctions arbitraires - au lieu de deux constantes pour les EDO. On retiendra seulement que l'ensemble des solutions d'une EDP peut être difficile à décrire.
Cependant lorsque les EDP proviennent de la modélisation d'un phénomène du monde réel, les solutions intéressantes sont celles qui satisfont certaines conditions supplémentaires. Prenons un exemple. On cherche à décrire les vibrations verticales d'une corde de longueur L, tendue entre deux points fixes A et B. On note $u(t,x)$ la hauteur à l'instant t du point de la corde placé à distance x de A. Il est bien clair que les seules fonctions $u(t,x)$ qui nous intéressent sont celles pour lesquelles

$$\forall t \ , \ u(t,A) = u(t,B) = O \ .$$

Ce type de condition est appelé "condition au bord", mais il y a bien d'autres sortes de contraintes que l'on rencontre très souvent, par exemple :

- Des conditions de régularité :
  Les solutions doivent être suffisamment différentiables, au moins pour que l'équation ait un sens. C'est en particulier ce genre de condition qui manque pour que l'équation (1.10) ait un sens précis.
- Des conditions initiales :
  On connaît l'état du système que l'on veut décrire à l'instant $t = 0$ et il s'agit de décrire son évolution dans le temps.
- Des conditions de comportement à l'infini.
- Des conditions de stationarité.

Il est alors possible que le problème considéré "EDP+condition(s) physique(s)" admette une unique solution. Lorsque, de plus, la solution dépend "continûment" des données physiques, dans le sens où une petite erreur sur les données ne change que peu la solution, on parlera de *problème bien posé*. Bien sûr, il faudra définir tout ceci de manière mathématiquement plus précise ! !

1.5 Exercices

1.5.1 Equations différentielles

1. Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer, en les calculant explicitement, que les solutions de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = 0$$

   ne s'annulent jamais, sauf une.

2. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$u' - u^2 = 0.$$

   1. Montrer qu'en dehors de la fonction identiquement nulle, les solutions de cette équation ne s'annulent pas.
   2. Y-a-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

1.5.2 EDP

1. Montrer que les fonctions $u(t, x) = f(t) + g(x)$, où f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sont solutions de l'EDP $\partial_t \partial_x u(t, x) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1$, $u(x,t) = f(x - ct)$ est solution de l'EDP $\partial_t u + c\partial_x u = 0$. Comment faire de cette EDP un problème bien posé ?
3. Résoudre l'EDP $\partial_y^2 u(x,y) = 1$. Comment faire de cette EDP un problème bien posé ?
4. Montrer que $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est solution dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de l'EDP $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
5. Calculer Δu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pour $u = \ln(x^2+y^2)$.
6. Etudier les solutions polynômes de $\Delta u = 0$, dans $\mathbb{R}^2$.
7. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1$, $u(x,t) = f(\frac{x}{t})$ vérifie pour tout $t > 0$ l'équation $t\partial_t u + x\partial_x u = 0$.

1.6 Exercices

1. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle
$$u'(x) - u(x) = x^2 e^x \ .$$
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y' + 2y = e^x, \ y' - 5y = x, \ y' + 3y = x + e^{-2x}, \ y' - 2y = x^2 e^{2x}.$$
3. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y' - xy = x^2, y' - 2xy = x, \quad (\text{sur }]0, +\infty[)\ y' + \frac{1}{x}y = 3\cos(2x).$$
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et k un réel strictement positif.
1. Ecrire la solution générale de l'équation $y' - ky = f$.
2. On suppose que f est bornée. Montrer que l'équation précédente admet une unique solution bornée.

5. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y'' - 4y' - 12y = 0\,,\ y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0\,,\ y'' - 6y' + 9y = e^{3x}\ ,\ y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}.$$
6. Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle
$$y' + a(x)y = 0$$
ne s'annulent jamais, sauf une.
7. Trouver toutes les solutions de
$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

EDP linéaires du premier ordre

2.1 Différentielle

On a rappelé dans le premier chapitre la notion de dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables. Il s'agissait en fait de propriétés de fonctions d'une variable, et l'on doit maintenant regarder la dépendance de toutes les variables prises ensemble. Il nous faut investir un peu de temps pour explorer la notion - plus délicate - de différentielle. Nous ne détaillerons pas cette partie qui est en principe acquise.

2.1.1 Différentiabilité

Il est certainement utile de rappeler quelques points concernant les fonctions d'une variable. On dit que $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ est dérivable en $s_0 \in]a,b[$ lorsqu'il existe un nombre réel ℓ et une fonction ϵ de limite nulle en zéro, tels que

$$f(s) = f(s_0) + \ell(s - s_0) + (s - s_0)\epsilon(s - s_0). \tag{2.1}$$

On parle aussi parfois du taux d'accroissement de f en s_0, défini par

$$\tau_{s_0}(s) = \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0},$$

et f est dérivable en s_0 si et seulement si $\tau_{s_0}(s)$ a une limite ℓ quand $s \to s_0$. Le nombre ℓ est alors appelé nombre dérivé de f en s_0. Lorsque f est dérivable en chaque point de $]a,b[$, la fonction dérivée f' de f est la fonction qui à chaque s de $]a,b[$ associe le nombre dérivée de f en s.
Pour comprendre la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables, il faut retenir l'aspect suivant de la définition précédente. La condition (2.1) signifie que la fonction f est bien approchée par la fonction affine

$T : s \mapsto \ell(s - s_0) + f(s_0)$ lorsque s est proche de s_0. Remarquons également que une fois donnés f et s_0, la fonction affine T est entièrement déterminé par la donnée de ℓ, où , ce qui revient au même, de l'application linéaire $d_{s_0}f : s \mapsto \ell s$. C'est cet objet que l'on appelle différentielle de f en s_0. Avec ces notations (2.1) s'écrit

$$f(s) = f(s_0) + d_{s_0}f(s - s_0) + (s - s_0)\epsilon(s - s_0), \tag{2.2}$$

et c'est cette formulation que l'on va garder.

Définition 2.1.1 *Soit $f :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est différentiable en $(x_0, y_0) \in]a, b[\times]c, d[$ lorsqu'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et une fonction ϵ de limite nulle en zéro, telles que*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + L(x - x_0, y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\|\epsilon(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \tag{2.3}$$

Une fois fixée une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, par exemple la base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, l'application linéaire est décrite dans cette base par une matrice à une ligne et deux colonnes

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

En effet si u est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$, on peut écrire $u = u_1e_1 + u_2e_2$, et puisque L est linéaire $L(u) = u_1L(e_1) + u_2L(e_2)$. Il suffit de connaitre $\alpha = L(e_1)$ et $\beta = L(e_2)$ pour déterminer L :

$$L(u) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \alpha u_1 + \beta u_2.$$

On sait que toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues. Dans le cas d'un espace de dimension infinie (cas des espaces de Banach), il faudrait ajouter la continuité de L dans la définition.

Lemme 2.1.2
Il ne peut exister qu'une seule application linéaire continue vérifiant (2.3).

Preuve :
Suposons que L_1 et L_2 vérifient (2.3). En soustrayant ces deux égalités on obtient, pour tout (x, y) dans $]a, b[\times]c, d[$,

$$0 = L_1(x - x_0, y - y_0) - L_2(x - x_0, y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\|\epsilon(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Notons $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$ les matrices respectives de L_1 et L_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. L'égalité ci-dessus s'écrit alors

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_2)(x - x_0) + (\beta_1 - \beta_2)(y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\|\epsilon(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Prenons en particulier $y = y_0$. On obtient, pour tout $x \in]a, b[$

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_2)(x - x_0) + |x - x_0|\epsilon(|x - x_0|),$$

et, pour $x \neq x_0$,

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{x - x_0}{|x - x_0|} = \epsilon(|x - x_0|).$$

Ceci n'est possible que si $\alpha_1 = \alpha_2$. On montre de la même manière que nécessairement $\beta_1 = \beta_2$. □

Exercice 2.1.3
Montrer que si f est différentiable en (x_0, y_0), alors elle est continue en ce point.

Définition 2.1.4
Lorsque qu'elle existe, l'application linéaire continue L est appelée différentielle de f en (x_0, y_0), et notée $d_{(x_0,y_0)}f$.
Enfin lorsque f est différentiable en chaque point de $]a, b[\times]c, d[$, on note df l'application qui a chaque $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$ associe la différentielle $d_{(x,y)}f$ de f en ce point. Il s'agit donc d'une application de $]a, b[\times]c, d[\subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Exercice 2.1.5 *Montrer que les applications suivantes sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$, et donner leur différentielle.*

$$f(x, y) = x^2 + y^3, \ f(x, y) = x^2y^3, \ f(x, y) = x^2\cos(y)$$

2.1.2 Différentielle et dérivées partielles

Définition 2.1.6 *Soit $f :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ une application, (x_0, y_0) un point de $]a, b[\times]c, d[$ et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On appelle dérivée directionnelle de f en (x_0, y_0) dans la direction de u la dérivée en $s = 0$, si elle existe, de la fonction d'une variable*

$$f_u : s \mapsto f((x_0, y_0) + su).$$

On la note alors $\partial_u f(x_0, y_0)$.

Exemple 2.1.7 *Les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne sont autres que les dérivées directionnelles de f dans les directions des deux vecteurs de la base canonique e_1 et e_2.*

Proposition 2.1.8 *Soit $f :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors f admet des dérivées directionnelles en (x_0,y_0) dans toutes les directions u, et*

$$\partial_u f(x_0,y_0) = d_{(x_0,y_0)} f(u) \ .$$

Cette dernière s'écrit aussi sous la forme :

$$\partial_u f(x_0,y_0) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \ .$$

Attention la réciproque est fausse, comme le montrent les exemples suivants :

Exercice 2.1.9
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ $\partial_u f(0,0)$ existe, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
2. Même question pour l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

En particulier $\partial_x f(x_0,y_0) = d_{(x_0,y_0)} f(e_1)$ et $\partial_y f(x_0,y_0) = d_{(x_0,y_0)} f(e_2)$. Autrement dit la matrice de $d_{(x_0,y_0)} f$ dans la base canonique est simplement

$$d_{(x_0,y_0)} f = \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0,y_0) & \partial_y f(x_0,y_0) \end{pmatrix} .$$

On termine cette section par un critère très simple de différentiabilité, et c'est presque toujours à l'aide de ce critère que l'on discutera de la différentiabilité des fonctions que l'on rencontrera. On admettra la proposition suivante.

Proposition 2.1.10
Soit $f :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$ une application. Si f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ dans $]a,b[\times]c,d[$ et que ces dérivées partielles sont continues, alors f est différentiable dans $]a,b[\times]c,d[$.

Définition 2.1.11
Lorsque f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ continues dans $]a,b[\times]c,d[$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $]a,b[\times]c,d[$.

On peut bien sûr considérer des applications de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

2.2 Les équations de transport

On considère un tube horizontal cylindrique, dans lequel coule de l'eau par exemple, à la vitesse constante c (en m/s). Un polluant (du pétrole) est en suspension dans l'eau. On note $u(t,x)$ la concentration (en gr/m) de polluant à l'instant t et à l'abscisse x.
La fonction u vérifie l'EDP

$$\partial_t u(t,x) + c\,\partial_x u(t,x) = 0. \tag{2.4}$$

En effet, à l'instant t, la quantité de polluant entre les points d'abscisse 0 et x est

$$Q(t) = \int_0^x u(t,y)dy.$$

Entre l'instant t et l'instant $t+h$, le polluant s'est deplacé de ch mètres. La quantité de polluant entre les points d'abscisse ch et $x+ch$ est donc celle qui se trouvait à l'instant t entre 0 et x. On a donc

$$Q(t) = \int_{ch}^{x+ch} u(t+h,y)dy.$$

Nous voulons dériver l'égalité obtenue par rapport à x. Pour ce faire nous effectuons le changement de variable $y' = y - ch$ dans la deuxième intégrale. Nous obtenons

$$Q(t) = \int_0^x u(t+h, y'+ch)dy',$$

et donc

$$u(x,t) = u(t+h, x+ch). \tag{2.5}$$

Nous voulons enfin dériver par rapport à h l'égalité (2.5). On utilisera très souvent le lemme suivant (différentielle d'une fonction composée).

Lemme 2.2.1
Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Soit aussi f_1 et f_2 deux applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = u(f_1(t), f_2(t))$$

est dérivable, et sa dérivée est donnée par

$$F'(t) = d_{(f_1(t),f_2(t))}u(f_1'(t), f_2'(t)),$$

ou encore :

$$F'(t) = f_1'(t)\,\frac{\partial u}{\partial x}(f_1(t), f_2(t)) + f_2'(t)\,\frac{\partial u}{\partial y}(f_1(t), f_2(t))\ .$$

Dérivons maintenant les deux membres de (2.5) par rapport à h. Le membre de gauche est indépendant de h, et la dérivée du membre de droite relève du lemme précédent. On obtient

$$\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0,$$

ce qui est bien l'équation annoncée.

2.3 Equations à coefficients constants

On va résoudre les EDP de la forme (2.4), ou de manière un peu plus générale, les équations

$$a\partial_t u(t,x) + b\partial_x u(t,x) = 0, \tag{2.6}$$

où a et b sont deux constantes réelles, dont l'une au moins n'est pas nulle. Comme on l'a vu dans le premier chapitre, il est important de préciser ce que l'on entend par "résoudre". On cherche ici toutes les fonctions u définies sur $\mathbb{R}^2$ (ou sur une partie plus petite Ω, réunion de boules ouvertes) de classe $\mathcal{C}^1$ et telles que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ l'égalité (2.6) soit vérifiée. Commençons pour fixer les idées par examiner le cas de l'équation ($a = 1$ et $b = 0$)

$$\partial_t u(t,x) = 0.$$

On voit immédiatement que u est solution si et seulement si u ne dépend pas de t. Autrement dit, les solutions sont les fonctions u qui s'écrivent

$$u(t,x) = f(x)$$

pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. La première remarque qui s'impose, c'est qu'il y a beaucoup de solutions !
On fait aussi une remarque d'ordre plus géométrique : les solutions $(t,x) \mapsto u(t,x)$ sont exactement les fonctions qui sont constantes le long des droites horizontales du plan (Otx), c'est-à-dire le long des droites dirigées par le vecteur $(a,b) = (1,0)$. Ce phénomène a également lieu pour toutes les équations (2.6), et c'est que nous allons mettre en évidence.

2.3.1 Méthode des caractéristiques

On reprend l'équation (2.6). Supposons que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, soit solution. En terme de différentielle, (2.6) se traduit par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, d_{(t,x)}u(a,b) = 0. \tag{2.7}$$

Autrement dit la dérivée directionnelle $\partial_{(a,b)}u(t,x)$ de u dans la direction du vecteur (a,b) est nulle en tout point (t,x) de $\mathbb{R}^2$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *Si u est solution de (2.6), alors u est constante le long de chaque droite de direction (a,b).*

Preuve :
Soit (t,x) un point de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$k \mapsto \varphi(k) = u((t,x) + k(a,b)) = u(t+ka, x+kb).$$

La fonction φ donne les valeurs de u en chaque point $(t',x') = (t,x) + k(a,b)$ de la droite $\mathcal{D}$ de direction (a,b) passant par (t,x). Or, en utilisant à nouveau le Lemme 2.2.1, on a

$$\varphi'(k) = d_{((t,x)+k(a,b))}u(a,b) = d_{(t',x')}u(a,b) = 0.$$

Donc φ est constante, et u l'est sur la droite $\mathcal{D}$. □

Définition 2.3.2 *On appelle caractéristiques de l'équation (2.6) les droites de vecteur directeur (a,b). Ce sont toutes les droites $\mathcal{D}_c$ d'équation $bt - ax = c$, où c parcourt l'ensemble des réels.*

Notons maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui a un réel c associe la valeur de u sur la droite $\mathcal{D}_c$. Soit (t_0,x_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Il existe une et une seule caractéristique qui passe par (t_0,x_0) : c'est la droite $\mathcal{D}_{c_0}$, où $c_0 = bt_0 - ax_0$. On a donc

$$u(t_0,x_0) = f(c_0) = f(bt_0 - ax_0).$$

Ce raisonnement étant valable pour tout (t_0,x_0) de $\mathbb{R}^2$, on a finalement

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, u(t,x) = f(bt - ax). \tag{2.8}$$

On remarque au passage que, puisque u est $\mathcal{C}^1$, f l'est aussi.
On a raisonné jusqu'ici par condition nécessaire. Il reste à prouver que toute fonction u de la forme (2.8) avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est bien solution de (2.6). C'est une vérification très simple, grâce encore une fois au Lemme 2.2.1, et qu'on laisse au lecteur. On a alors démontré le résultat suivant.

Théorème 2.3.3 *Les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient l'équation (2.6) sont toutes les fonctions qui s'écrivent*

$$u(t,x) = f(bt - ax)$$

pour une certaine fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

2.3.2 Méthode du changement de variables

Nous allons retrouver le résultat précédent à l'aide d'une autre méthode, qui s'avère être très pratique. Plutôt que d'une méthode totalement différente, il s'agit d'une autre formulation de la même idée. On a vu que les solutions de l'équation (2.6) ne dépendent que de la variable $bt - ax$. On pose donc $t' = bt - ax$ et on chosit une autre coordonnée x' qui soit indépendante. On prend par exemple

$$\begin{cases} t' = bt - ax \\ x' = at + bx. \end{cases}$$

On pose alors $v : (x', t') \mapsto v(t', x') = u(t, x)$, et l'on examine l'équation vérifiée par v lorsque u est solution de (2.6). On calcule d'abord les dérivées partielles de u en fonction de celles de v. Là encore l'ingrédient essentiel est le Lemme 2.2.1. On a

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) & = & \partial_t(v(bt-ax, at+bx)) \\ & = & b(\partial_1 v)(bt-ax, at+bx) + a(\partial_2 v)(bt-ax, at+bx), \\ \partial_x u(t,x) & = & \partial_x(v(bt-ax, at+bx)) \\ & = & -a(\partial_1 v)(bt-ax, at+bx) + b(\partial_2 v)(bt-ax, at+bx). \end{cases}$$

Donc u, de classe $\mathcal{C}^1$, est solution de l'équation (2.6) si et seulement si v vérifie l'équation

$$(a^2 + b^2)(\partial_2 v)(t', x') = 0.$$

Autrement dit, puisque $a^2 + b^2 \neq 0$, u est solution de l'équation (2.6) si et seulement si v ne dépend pas de x' : $v(t', x') = f(t')$ pour une certaine fonction f, de classe $\mathcal{C}^1$ puisque v l'est. Revenant à u, on retrouve le Théorème 2.3.3 :

$$u(t, x) = f(bt - ax).$$

Donnons une approche légèrement différente. Si on fait plus généralement le changement de variables

$$\begin{cases} t' = \alpha' t + \beta' x \\ x' = \gamma' t + b\delta' , \end{cases}$$

où on suppose que $\alpha'\delta' - \gamma'\beta' \neq 0$.
Alors l'équation satisfaite par v est :

$$a'\partial_{t'} v + b'\partial_{x'} v = 0 ,$$

avec

$$\begin{cases} a' = \alpha' a + \beta' b \\ b' = \gamma' a + \delta' b . \end{cases}$$

Le choix proposé précédemment consistait en choisir le changement de variables de telle sorte que $a' = 0$, soit $\alpha' a + \beta' b = 0$. La paire $\alpha' = b$, $\beta' = -a$ convient. On trouve alors $b' = a^2 + b^2$.
Cette méthode est aussi adaptée pour résoudre le problème (équation avec second membre) de trouver u de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} &a\partial_t u + b\partial_x u = f(t,x)\ , \\ &u(0,x) = \varphi(x)\ , \end{aligned}$$

où $a \neq 0$, f est donnée dans C^0, φ est donné dans C^1.

2.4 Equations à coefficients variables

2.4.1 Champs de vecteurs

Considérons par exemple l'équation

$$\partial_x u(x,y) + x\partial_y u(x,y) = 0 \tag{2.9}$$

On cherche à appliquer la méthode des caractéristiques à cette équation. Lisons l'équation : la dérivée directionnelle de u dans la direction du vecteur $X = (1,x)$ doit être nulle :

$$d_{(1,x)}u(x,y) = 0.$$

Evidemment, la difficulté qui apparait est que le vecteur en question dépend du point (x,y) où l'on se trouve. On doit adapter un peu la notion de caractéristique.

Définition 2.4.1 *On appelle champ de vecteur une application (régulière) X de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, considéré comme sous-ensemble des points du plan, dans $\mathbb{R}^2$ considéré comme ensemble des vecteurs du plan (i.e. l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).*

Ici régulière signifie de classe C^0 ou de classe C^1.

Par exemple, l'équation (2.9) amène naturellement à considérer le champ de vecteur $X(x,y) = (1,x)$. Un autre exemple est le champ de vecteurs grad V, où V est une fonction régulière, définie sur Ω :

$$\text{grad V } (x,y) = ((\partial_x V)(x,y), (\partial_y V)(x,y))\ .$$

On peut par exemple prendre $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $V(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$. Le champ de vecteur est appelé central car il est parallèle, au point (x,y) au vecteur (x,y).

Définition 2.4.2
Soit X un champ de vecteurs régulier sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Une courbe intégrale de X est une courbe paramétrée $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)).$$

On appelle caractéristiques de l'équation (2.9) les courbes intégrales du champ de vecteurs $X(x, y) = (1, x)$ (il y a une petite ambiguité ici car les courbes intégrales sont des courbes paramétrées !). Cette définition est motivée par la

Proposition 2.4.3
Si u est une solution de l'équation (2.9), u est constante le long des courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t)$ du champ X :

$$\frac{d}{dt}\,(u(\gamma(t)) = 0\,.$$

Cette proposition généralise ce que l'on a vu dans le cas des équations à coefficients constants : dans ce cas-là, le champ de vecteurs X associé à l'équation est le champ constant $X(x, y) = (a, b)$, dont les courbes intégrales sont les droites de direction (a, b). La preuve est la même, et constitue un excellent **Exercice**.

Remarque 2.4.4 *Plus généralement on peut toujours localement "redresser" un champ de vecteur par un diffeomorphisme local.*

2.4.2 Un problème de Cauchy pour l'équation (2.9)

A titre d'exemple nous allons résoudre un problème de Cauchy associé à l'équation (2.9) :

$$\begin{cases} \partial_x u(x, y) + x\partial_y u(x, y) = 0, \\ u(0, y) = \phi(y), \end{cases} \tag{2.10}$$

où $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ donnée.
On commence en cherchant les courbes caractéristiques de l'équation. Ce sont les courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ du champ de vecteur $X(x, y) = (1, x)$. Par définition on a donc

$$\begin{cases} x'(t) = 1, \\ y'(t) = x(t), \end{cases}$$

ce qui donne $x(t) = t + x_0$ et $y(t) = \frac{t^2}{2} + x_0 t + y_0$, où l'on a noté (x_0, y_0) le point de γ correspondant à $t = 0$. Si l'on préfère une équation cartésienne, on voit que la courbe γ qui passe par (x_0, y_0) (il y en a une et une seule...), a pour équation

$$\gamma : y = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

On veut maintenant déterminer la valeur de la solution du problème de Cauchy (2.10) au point (x_0, y_0). On sait que u est constante le long de la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0). Cette courbe coupe l'axe des ordonnées au point $(x_1 = 0, y_1 = y_0 - \frac{x_0^2}{2})$, et l'on sait que

$$u(x_1, y_1) = u(0, y_1) = \phi(y_1) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2}).$$

On obtient donc, pour n'importe quel (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$,

$$u(x_0, y_0) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2}).$$

En raisonnant par condition nécessaire, on obtient donc $u(x, y) = \phi(y - \frac{x^2}{2})$. Il est très simple de vérifier que cette fonction est effectivement solution de (2.10), et la méthode des caractéristiques nous a encore permis de construire l'unique solution de ce problème.

2.5 Un exemple d'équation non-linéaire : Equation de Burgers

On s'intéresse maintenant à l'EDP du premier ordre non-linéaire

$$\partial_x u(x, y) + u(x, y)\partial_y u(x, y) = 0. \tag{2.11}$$

S'agissant d'une équation du premier ordre, on va encore tenter d'utiliser la méthode des caractéristiques. Cette fois, le champ de vecteur X associé à l'équation

$$X(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ u(x, y) \end{pmatrix}$$

dépend de la solution ! Supposons que celle-ci est connue, et considérons les courbes intégrales du champ de vecteurs X. Ce sont les courbes paramétrées $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ telles que

$$x'(t) = 1, y'(t) = u(x(t), y(t)). \tag{2.12}$$

Sur une telle courbe on a donc

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\left(u(x(t),y(t)\right) &= x'(t)(\partial_x u(x(t),y(t))) + y'(t)(\partial_y u(x(t),y(t))) \\
&= x'(t)(\partial_x u(x(t),y(t))) + u(x(t),y(t))\,(\partial_y u(x(t),y(t))) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Autrement dit, si u est solution, la fonction u est constante le long des courbes intégrales du champ $X = X_u$.

Reprenons alors (2.12) : notant C_γ la valeur (constante !) de u sur la courbe intégrale γ de X_u, on a

$$x'(t) = 1, y'(t) = C_\gamma.$$

Ces courbes intégrales sont donc des droites $y = mx + p$, puisque

$$x(t) = t + x_0, y(t) = C_\gamma t + y_0.$$

Considérons maintenant le problème de Cauchy pour l'équation (2.11)

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) + u(x,y)\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{2.13}$$

où ϕ est une fonction régulière donnée.

On cherche d'abord les caractéristiques. Ce sont des droites d'équation $y = mx + p$ et la pente m est égale à la valeur de u sur cette droite. La caractéristique issue du point $(x_0, 0)$ est donc la droite d'équation

$$y = \phi(x_0)(x - x_0). \tag{2.14}$$

Contrairement au cas des équations linéaires, ces caractéristiques peuvent donc se couper ! Supposons par exemple que deux d'entre elles, issues respectivement de $(x_1, 0)$ et de $(x_2, 0)$, se coupent en $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Si u est définie en ce point on doit avoir

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \phi(x_1) = \phi(x_2),$$

ce qui est absurde sans hypothèse particulière sur ϕ, x_1, x_2.

On peut donc conclure que le problème (2.13) n'admet en général pas de solutions définies dans le plan tout entier, mais seulement dans un domaine $\mathcal{D}_\phi$ du plan dans lequel les droites caractéristiques (2.14) ne se coupent pas.

Etudions le problème (2.13) pour $\phi(x) = x^2$. Partant d'un point (x_0, y_0) tel que $u(x_0, y_0) \neq 0$, on obtient la courbe intégrale :

$$x(t) = x_0 + t \ , \ y(t) = y_0 + u(x_0, y_0)t \ .$$

La courbe intégrale coupe la droite $\{y = 0\}$ au temps $t = -y_0/u(x_0, y_0)$. On a donc

$$u(x_0, y_0) = u(x(t), y(t)) = u(x_0 - \frac{y_0}{u(x_0, y_0)}, 0) = \phi(x_0 - \frac{y_0}{u(x_0, y_0)}) \ .$$

Dans notre cas particulier, on obtient l'équation

$$u(x_0, y_0) = (x_0 - \frac{y_0}{u(x_0, y_0)})^2 \ .$$

Si cette équation détermine un unique u, on aura résolu le problème. Dans tous les autres cas le problème sera mal posé. Notre question devient donc (en posant $\lambda = u(x_0, y_0)$) :

$$f(\lambda) := \lambda^3 - (x_0\lambda - y_0)^2 = 0 \, .$$

Noter qu'on peut toujours supposer $y_0 \neq 0$, puisque u est connue sur $x = 0$. Un cas simple est celui où l'on peut montrer que $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$. Un critère simple est de montrer que la dérivée de f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. On a

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2x_0(x_0\lambda - y_0) \ .$$

Son discriminant est

$$\Delta(x_0, y_0) := 4(x_0^2 - 6x_0y_0) = 4x_0(x_0 - 6y_0) \ .$$

Le problème est que le discriminant est positif pour y_0 petit par rapport à x_0, situation qui n'est pas favorable !!
Le problème est plus simple si on se donne une condition sur $\{x = 0\}$:

$$u(0, y) = y \ .$$

On trouve assez facilement que la solution est déterminée par

$$u(x, y) = y/(1 + x)$$

sur le domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$.

2.6 Exercices

2.6.1 Différentielles

1. Soit α un réel positif, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\alpha}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. On étudie f en (0,0). Pour quelles valeurs de α la fonction f y est-elle :
a. continue par rapport à x ? continue par rapport à y ?
b. continue ?
c. différentiable ?
d. continument différentiable ?
On pourra poser $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ pour l'étude des différentes limites en (0,0), ou bien utiliser l'inégalité $|xy| \leq (x^2+y^2)/2$.

2.6.2 EDP du premier ordre à coefficients constants

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le problème

$$\begin{cases} 4\partial_t u(t,x) - 3\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = x^3 \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le problème

$$\begin{cases} 3\partial_t u(t,x) + 5\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(t,0) = t^2 \end{cases}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le problème

$$\begin{cases} 2\partial_t u(t,x) + 3\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = \sin(x) \end{cases}$$

4. On cherche les solutions $\mathcal{C}^2$ du problème

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u(t,x) - 3\partial^2_{tx} u(t,x) - 4\partial^2_{xx} u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = x^2, \\ \partial_t u(0,x) = 0. \end{cases}$$

a. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$(\partial_t - 4\partial_x)((\partial_t + \partial_x)u)(t,x) = \partial^2_{tt} u(t,x) - 3\partial^2_{tx} u(t,x) - 4\partial^2_{xx} u(t,x).$$

b. Trouver toutes les fonctions $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\partial_t v(t,x) - 4\partial_x v(t,x) = 0. \tag{1}$$

c. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On veut trouver toutes les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = f(4t + x). \tag{2}$$

On pose $t' = -t + x$, $x' = 4t + x$ et l'on note $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $w(t', x') = u(t, x)$.

c1) Quelle équation vérifie w lorsque u est solution de (2) ?

c2) Résoudre cette équation. En déduire les solutions de (2).

d. Conclure.

2.6.3 Courbes intégrales de champs de vecteurs

1. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x, y) = (1, 2xy^2)$.
2. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x, y) = (1 + x^2, 1)$.
3. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ défini par $X(x, y) = (\sqrt{1 - x^2}, 1)$.
4. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x, y) = (y, x)$.
5. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x, y) = (x, y)$.
6. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x, y) = (y, -y)$.
7. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x, y) = (x, 2y)$.

2.6.4 EDP du premier ordre à coefficients non-constants

1. On considère le champ de vecteurs $X(x, y) = (1, -xy)$.

   a. Déterminer et tracer ses courbes intégrales.

   b. Montrer que les solutions (de classe $\mathcal{C}^1$) de l'équation

   $$\partial_x u(x, y) - xy\partial_y u(x, y) = 0$$

   s'écrivent nécessairement $u(x, y) = f(ye^{x^2/2})$ pour une certaine fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

c. Trouver toutes les solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$$

d. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = x^2, \end{cases}$$

a-t-il des solutions ?

Chapitre 3

L'équation des ondes sur un axe

3.1 Le modèle physique : cordes vibrantes

On considère une corde de longueur L, de densité ρ constante, élastique, tendue entre deux points A et B. On s'intéresse aux petites vibrations transversales de la corde. Penser par exemple aux vibrations d'une corde de guitare. On supposera que les effets de la gravité et des autres éventuelles forces extérieures peuvent être négligées. On choisit axe des abscisses la droite (AB), l'origine de l'axe étant le point A, et on note x les abscisses. On désigne alors par $u(t,x)$ le déplacement vertical de la corde au point d'abscisse x et à l'instant t. On va appliquer la loi de Newton à un petit morceau de corde de longueur Δx commençant au point M d'abscisse x et d'extrémité N d'abscisse $x+\Delta x$. Les forces extérieures sont les tensions exercées par le morceau de corde AM au point M, notée $T(M)$, et celle $T(N)$ exercée par le morceau de corde NB au point N. L'hypothèse que la corde est élastique correspond au fait que ces forces de tensions sont dirigées tangentiellement à la corde. Puisque l'on suppose que les déplacements de la corde n'ont lieu que dans la direction verticale, la loi de Newton donne

$$T(M)+T(N)=\rho\Delta x\begin{pmatrix} 0 \\ \partial^2_{tt}u(t,x)\end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer les composantes des vecteurs $T(M)$ et $T(N)$. L'angle entre la tangente à la corde au point d'abscisse x et la direction horizontale est $\alpha(t,x)=\partial_x u(t,x)$. On a donc, notant $\tau(t,x)$ la norme du vecteur $T(t,x)$,

$$T(M)=\begin{pmatrix} -\tau(t,x)\cos(\partial_x u(t,x)) \\ -\tau(t,x)\sin(\partial_x u(t,x))\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \tau(t,x+\Delta x)\cos(\partial_x u(t,x+\Delta x)) \\ \tau(t,x+\Delta x)\sin(\partial_x u(t,x+\Delta x))\end{pmatrix}.$$

On obtient donc le système (plutôt compliqué !)

$$\begin{cases} \tau(t, x+\Delta x)\cos(\partial_x u(t, x+\Delta x)) - \tau(t,x)\cos(\partial_x u(t,x)) = 0 \\ \tau(t, x+\Delta x)\sin(\partial_x u(t, x+\Delta x)) - \tau(t,x)\sin(\partial_x u(t,x)) = \rho\,\partial_{tt}^2 u(t,x) \end{cases}$$

On ne va pas le résoudre "exactement" mais on va faire des approximations.

On utilise maintenant l'hypothèse de petitesse des déplacements, puis on fait tendre Δx vers 0. Dans la première équation on considère que les termes en cosinus valent 1, et dans la seconde on utilise $\sin A \sim A$. On obtient alors $\partial_x \tau(t,x) = 0$ donc $\tau(t,x)$ ne dépend pas de x. On peut aussi montrer que l'hypothèse de déplacement uniquement transverse entraîne que $\tau(t,x)$ ne dépend pas non plus de t ; au total $\tau(t,x) = \tau \in \mathbb{R}$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. On obtient alors l'équation

$$\partial_{tt}^2 u(t,x) = \frac{\tau}{\rho}\partial_{xx}^2 u(t,x).$$

C'est cette équation que l'on appelle communément équation des ondes, et la constante $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, qui ne dépend que du milieu où se déplacent les ondes, est, nous le verrons, la vitesse de propagation dans le milieu en question.

3.2 Solutions de l'équation des ondes

3.2.1 Solution générale

On va résoudre l'équation des ondes

$$c^2 \partial_{xx}^2 u(t,x) = \partial_{tt}^2 u(t,x), \tag{3.1}$$

c'est à dire trouver les fonctions $u(t,x)$, définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient cette égalité. On reprend la méthode du changement de coordonnées. Soit

$$\begin{cases} t' = x + ct \\ x' = x - ct, \end{cases}$$

et $v : (x', t') \mapsto u(t,x)$. On note que :

$$u(t,x) = v(x+ct, x-ct)\ .$$

On vérifie facilement que

$$\partial_t u(t,x) = c\partial_{t'} v(t',x') - c\partial_{x'} v(t',x'), \partial_x u(t,x) = \partial_{t'} v(t',x') + \partial_{x'} v(t',x')$$

puis que

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) = c^2\partial^2_{t't'}v(t',x') + c^2\partial^2_{x'x'}v(t',x') - 2c^2\partial^2_{t'x'}v(t',x') \\ \partial^2_{xx}u(t,x) = \partial^2_{t't'}v(t',x') + \partial^2_{x'x'}v(t',x') + 2\partial^2_{t'x'}v(t',x'). \end{cases}$$

Donc u est solution de l'équation des ondes si et seulement si v vérifie

$$\partial^2_{t'x'}v(t',x') = 0.$$

On a déjà vu cette équation, et les solutions sont toutes les fonctions v qui s'écrivent

$$v(t',x') = f(t') + g(x'),$$

où f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Revenant à u, on obtient que

$$u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct). \tag{3.2}$$

Rappelons que la solution générale d'une équation de transport à coefficients constants est une fonction arbitraire de la variable $x - ct$. On voit ici que la solution est la somme de deux fonctions arbitraires l'une de la variable $x+ct$ et l'autre de la variable $x-ct$. La première décrit une onde arbitraire se déplaçant vers la gauche à la vitesse c, et la seconde une autre onde arbitraire se déplaçant vers la droite à la vitesse c.
On comprend mieux l'analogie avec les équations de transport si l'on remarque que

$$\partial^2_{tt}u(t,x) - c^2\partial^2_{xx}u(t,x) = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u(t,x).$$

Autrement dit pour résoudre l'équation des ondes, on doit chercher u et w telles que

$$\begin{cases} w = \partial_t u + c\partial_x u \\ \partial_t w - c\partial_x w = 0 \end{cases}$$

Exercice 3.2.1
Résoudre ce système et retrouver (3.2).

3.2.2 La formule de D'Alembert

On vient de voir que l'équation des ondes sur l'axe réel a de nombreuses solutions. Notre objectif ici est de montrer le résultat suivant, qui remonte à D'Alembert au milieu du 18ème siècle.

Théorème 3.2.2
Soit ϕ et ψ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec $\phi \in \mathcal{C}^2$ et $\psi \in \mathcal{C}^1$. Alors le problème

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) - c^2\partial^2_{xx}u(t,x) = 0 \ , \\ u(0,x) = \phi(x) \ , \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) \ , \end{cases} \tag{3.3}$$

admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve :
La preuve de l'existence est très simple : il suffit de vérifier que la fonction

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds$$

est une solution du problème.

Bien sûr, le lecteur trouvera que la formule a un côté "parachuté". En fait, on a vu précédemment que les solutions générales de l'équation des ondes sont de la forme :

$$u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct) \ ,$$

avec f et g de classe C^2. On peut alors écrire les conditions initiales qui permettront de déterminer u par :

$$\phi(x) = f(x) + g(x) \ , \ \psi(x) = c\,(f'(x) - g'(x)) \ .$$

Cette deuxième version a l'avantage de donner aussi l'unicité. □

Exercice 3.2.3
Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation des ondes avec $\phi(x) = \sin x$ et $\psi(x) = 0$

Exercice 3.2.4
Résoudre le problème de cauchy pour l'équation des ondes avec $\phi(x) = 0$ et $\psi(x) = \cos x$

Exercice 3.2.5
Résoudre le problème de cauchy pour l'équation des ondes avec $\phi(x) = e^x$ et $\psi(x) = \sin x$

3.3 Causalité et conservation de l'énergie

3.3.1 Vitesse de propagation finie

On vient de voir que l'effet d'une position $\phi(x)$ à l'instant $t=0$ est une paire d'ondes et qui se propagent dans les deux directions à vitesse c. Si l'on a une vitesse $\psi(x)$ à l'instant $t=0$, on obtient une onde qui s'étale dans les deux directions, à une vitesse inférieure ou égale à c. Dans tous les cas rien ne se propage à vitesse plus grande que c. Autrement dit la valeur de la solution u au point (t,x) ne dépend que des valeurs de ϕ en $x-ct$ et en $x+ct$, et des valeurs de ψ sur l'intervalle $[x-ct, x+ct]$. Pour le voir il suffit de reprendre l'expression de la solution donnée dans le théorème de D'Alembert.

Proposition 3.3.1
Soient ϕ et ψ comme dans le Théorème 3.2.2, et u la solution du probème de Cauchy (3.3). Si ϕ et ψ sont nulles en dehors de l'intervalle $-R \leq x \leq R$, alors pour chaque t fixé, $u(t,x)$ est nulle quand $x \notin [-R-c|t|, R+c|t|]$.

Remarque 3.3.2 *On peut aussi suivre comment se propage en fonction du temps la régularité des solutions.*

3.3.2 Energie

Définition 3.3.3
Soit u une solution de l'équation des ondes. On appelle énergie de u la quantité

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(t,x))^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t,x))^2\, dx$$

Il faut noter que, pour ce qui concerne les constantes, nous avons gardé ici la définition physique de l'énergie de la corde vibrante : la première intégrale est la partie énergie cinétique (" $\frac{1}{2}mv^2$"), et la deuxième est la partie énergie potentielle, qui correspond à la tension τ multipliée par l'allongement de la corde élastique ($\sqrt{1+(\partial_x u)^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(\partial_x u)^2$). Là encore l'hypothèse de petitesse des oscillations permet de simplifier considérablement l'étude !
Nous allons démontrer rigoureusement un phénomène très important, particulier aux équations du même type que celle des ondes - les équations hyperboliques : l'énergie est constante au cours du temps.

Théorème 3.3.4
Soit ϕ et ψ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec $\phi \in \mathcal{C}^2$ et $\psi \in \mathcal{C}^1$. On suppose

que ϕ et ψ sont nulles en dehors d'un intervalle borné $|x| \leq R$. Soit u l'unique solution du problème (3.3) :

$$\begin{cases} \tau\partial^2_{xx}u(t,x) - \rho\partial^2_{tt}u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = \phi(x) \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x)\,. \end{cases}$$

La quantité

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(x,t))^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(x,t))^2\, dx$$

est une fonction constante de t.

Pour prouver ce résultat, on va dériver l'expression donnant $E(t)$ par rapport à t, et montrer que l'on obtient 0. Il nous faut donc dériver une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre. Avant de démontrer ce théorème, on donne d'abord une conséquence importante de ce théorème :

Corollaire 3.3.5
Le problème (3.3), où ϕ est une fonction $\mathcal{C}^2$ et ψ une fonction $\mathcal{C}^1$, admet une solution unique.

Preuve :
Soit u_1 et u_2 deux solutions. La fonction $v = u_1 - u_2$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) - c^2\partial^2_{xx}u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \partial_t u(0,x) = 0\,. \end{cases}$$

Puisque l'énergie de v est constante, on a pour tout t,

$$\begin{aligned} E(t) &= \tfrac{\rho}{2}\textstyle\int_{\mathbb{R}}(\partial_t u(x,t))^2 dx + \tfrac{\tau}{2}\int_{\mathbb{R}}(\partial_x u(x,t))^2 dx \\ &= E(0) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Donc $\partial_x v$ et $\partial_t v$ sont toujours nulles, donc v est constante. Puisque $v(0,x) = 0$, v est identiquement nulle et $u_1 = u_2$. □

On est maintenant en mesure de prouver la conservation de l'énergie pour l'équation des ondes.

Preuve du Théorème 3.3.4 :
Posons $f(t,x) = (\partial_t u(x,t))^2$ et

$$A(t) = \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}} f(t,x)dx\,.$$

On doit justifier la dérivation sous le signe somme. Ici le contrôle des supports est important. Notons d'abord que pour tout t fixé, l'intégrale $A(t)$ est convergente puisque la fonction $f(t,x)$, qui est continue, est nulle en dehors de l'intervalle $|x| \leq R + ct$. On obtient ainsi

$$A'(t) = \frac{\rho}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_t f(t,x) dx = \rho \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x,t) \partial^2_{tt} u(x,t) dx,$$

et, puisque u est solution de l'équation des ondes,

$$A'(t) = \tau \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x,t) \partial^2_{xx} u(x,t) dx.$$

Maintenant on intègre par parties cette intégrale, où l'intégrand est nul en dehors d'un intervalle borné :

$$A'(t) = -\tau \int_{\mathbb{R}} \partial^2_{xt} u(x,t) \partial_x u(x,t) dx = -\frac{\tau}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_t (\partial_x u(x,t))^2 dx.$$

Notant alors $B(t) = \dfrac{\tau}{2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(x,t))^2 dx$, on montre de la même manière que

$$B'(t) = \frac{\tau}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_t (\partial_x u(x,t))^2 dx,$$

et puisque $E(t) = A(t) + B(t)$, on a bien $E'(t) = 0$. □

3.4 Exercices

3.4.1 Ondes

1. Montrer que si u est une solution de l'équation des ondes

$$\partial^2_{tt} u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = 0,$$

alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les fonctions $v_\lambda : (t,x) \mapsto u(t, x-\lambda)$ et $w_\lambda : (t,x) \mapsto u(\lambda t, \lambda x)$ sont aussi solutions.

2. On considère l'équation des ondes amorties

$$\partial^2_{tt} u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) - r \partial_t u(x,t), \tag{1}$$

où r est un réel positif ou nul (qui mesure la résistance de l'air). On suppose que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie l'équation (1), et l'on pose

$$\begin{cases} e(t,x) = \frac{1}{2}(\partial_t u(t,x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u(t,x))^2 \\ p(t,x) = \partial_t u(t,x) \partial_x u(t,x). \end{cases}$$

A. **On suppose dans cette partie que** $r = 0$.

a. Montrer que $\partial_t e(t,x) = \partial_x p(t,x)$ et que $\partial_x e(t,x) = \partial_t p(t,x)$. En déduire que e et p sont également solution de (1) (toujours avec $r = 0$).

b. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, $u(t,x)$ et $\partial_t u(t,x)$ sont nulles pour tout $x \notin [-R, R]$.

b1) Rappelez pourquoi, pour chaque t, il existe un réel $R(t)$ telle que $u(t,x)$ est nulle pour tout $x \notin [-R(t), R(t)]$.

b2) Montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t e(t,x)dx = 0.$$

3. Quel théorème du cours évoque ce résultat ?

II. **On suppose maintenant que** $r > 0$.

1. Montrer que $\partial_t e(t,x) = -r(\partial_t u(t,x))^2 + \partial_x p(t,x)$.

2. En supposant encore une fois que $u(t,x)$ est nulle pour tout $x \notin [-R(t), R(t)]$, montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t e(t,x)dx \leq 0.$$

3. Comment interprétez-vous ce résultat ?

Chapitre 4

Extrema

4.1 Fonctions d'une variable

On commence par la formule de Taylor avec reste intégral pour les fonctions d'une variable réelle.

Théorème 4.1.1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Pour tout $k \leq n$ on a

$$f(s) = f(0) + sf'(0) + \frac{s^2}{2}f''(0) + \ldots + \frac{s^k}{k!}f^{(k)}(0) + \int_0^s \frac{(s-u)^k}{k!}f^{(k+1)}(u)du$$

On utilise cette formule également sous la forme

$$f(s) = f(0) + sf'(0) + \ldots + \frac{s^k}{k!}f^{(k)}(0) + \frac{s^{k+1}}{k!}\int_0^1 (1-u)^k f^{(k+1)}(su)du. \quad (4.1)$$

Définition 4.1.2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et s_0 un point de $\mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en s_0 s'il existe un intervalle $]s_0 - \alpha, s_0 + \alpha[$ pour tout s duquel on ait $f(s) \leq f(s_0)$ (resp. $f(s) \geq f(s_0)$).

Voici d'abord une condition nécessaire d'extremum local.

Proposition 4.1.3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en s_0, alors $f'(s_0) = 0$.

Preuve :
On prend $s_0 = 0$ pour simplifier. Puisque f est dérivable, il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que

$$f(s) = f(0) + s(f'(0) + \epsilon(s)).$$

Supposons que $f'(0) \neq 0$, par exemple que $f'(0) > 0$. Puisque ϵ tend vers 0 en 0, il existe un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ pour tout s duquel $f'(0) + \epsilon(s) > 0$. Mais alors $f(s) > f(0)$ pour $\alpha > s > 0$ et $f(s) < f(0)$ pour $-\alpha < s < 0$, ce qui contredit le fait que 0 est un extremum local pour f. □

Remarque 4.1.4
Attention ! Dans le cas où la fonction f est définie sur un intervalle fermé $[a, b]$, le critère ci-dessus ne vaut que pour les extrema de f dans $]a, b[$. On le voit dans la démonstration ci-dessus puisque l'on doit pouvoir calculer $f(s)$ pour des $s < 0$ et des $s > 0$. On peut aussi penser au cas d'une fonction strictement monotone, par exemple $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Cette fonction admet un maximum en $x = 1$, alors que $f'(1) = 1$.

La formule de Taylor permet d'énoncer une condition suffisante pour qu'une fonction (suffisamment régulière) admette un extremum local en s_0.

Proposition 4.1.5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et s_0 un point de $\mathbb{R}$. Si $f'(s_0) = 0$, et si $f''(s_0) \neq 0$, alors la fonction f admet un extremum local en s_0. C'est un maximum si $f''(s_0) < 0$ et un minimum si $f''(s_0) > 0$.

Preuve :
On reprend la formule de Taylor ci-dessus, sachant que $f'(0) = 0$:

$$f(s) - f(0) = \frac{s^2}{2}(f''(0) + \epsilon(s)) ,$$

avec $\epsilon(s) = 2\int_0^1 (1-u)(f''(su) - f''(0))\,du$. L'hypothèse que f est de classe C^2 implique que $\lim_{s\to 0} \epsilon(s) = 0$.
Supposons par exemple que $f''(0) > 0$. Prenant $\alpha > 0$ assez petit, on peut donc affirmer que pour tout $s \in]-\alpha, \alpha[$, on a

$$f''(0) + \epsilon(s) \geq f''(0) - C\alpha > 0 .$$

Donc, pour tout $s \in]-\alpha, \alpha[$, on a $f(s) \geq f(0)$, ce qui montre que f admet un minimum local en 0. Le cas $f''(0) < 0$ se traite de la même manière. □

Remarque 4.1.6
On appelle souvent points critiques de f les points où f' s'annule. On vient de voir que les points critiques où la dérivée seconde de f ne s'annule pas sont des extrema de f. Les points critiques où la dérivée seconde de f s'annule sont dits dégénérés, et on peut par exemple utiliser la formule de Taylor à un ordre plus élevé pour connaitre l'allure du graphe de f au voisinage de ces points.

L'exercice suivant est sans doute utile pour mieux comprendre ultérieurement la démonstration correspondant au principe du Maximum

Exercice 4.1.7
Soit u une solution de classe $C^2([0,1])$ de $-u''(x)+q(x)u(x)=0$ dans $[0,1]$, avec $u(0)=u(1)=0$. On suppose que $q(x)>0$ sur $]0,1[$. Montrer que $u=0$. Pour cela, on montrera que $\pm u \leq 0$ regardera ce qui se passe en un point x_0 où $\pm u$ est maximum.
Une autre approche est de multiplier par u l'équation et d'intégrer sur $[0,1]$. En utilisant une intégration par parties, montrer qu'alors

$$\int_0^1 u'(x)^2 dx + \int_0^1 q(x)u(x)^2 dx = 0\ .$$

En déduire le théorème sous l'hypothèse plus faible $q \geq 0$. Peut-on encore affaiblir cette hypothèse ?

4.2 Fonctions de plusieurs variables

Définition 4.2.1
Soit $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, et (x_0,y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. On dit que F admet un maximum (resp. minimum) local en (x_0,y_0) s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que, pour tout (x,y) vérifant $d((x,y),(x_0,y_0))<\alpha$, on ait $F(x,y)\leq F(x_0,y_0)$ (resp. $F(x,y)\geq F(x_0,y_0)$).

Pour les fonctions de deux (plusieurs) variables, de classe C^1, les extrema sont également des points critiques.

Proposition 4.2.2
Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si F admet un extremum local en (x_0,y_0), alors $d_{(x_0,y_0)}F=0$.

Preuve :
On prend $(x_0,y_0)=(0,0)$ pour simplifier. Il suffit d'appliquer les résultats de dimension 1 à la fonction $t\mapsto F(tu_1,tu_2)$ où $(u_1,u_2\neq(0,0)$ est fixé. On a ainsi montré que la dérivée de F dans la direction (u_1,u_2) est nulle. $\square$

Remarque 4.2.3
Comme dans le cas des fonctions d'une variable, il est très important de remarquer que, dans la preuve de cette proposition, on utilise de manière cruciale le fait que F soit définie dans un voisinage de $(0,0)$. Lorsque la fonction F est définie sur un domaine avec bord, cette proposition ne vaut donc que pour les extrema qui ne se trouvent pas sur le bord.

On veut maintenant trouver une condition suffisante pour qu'un point $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ soit un extremum local de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On se ramène au cas de $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (0, 0)$ en posant

$$u_1 = x_1 - \tilde{x}_1 \,, u_2 = x_2 - \tilde{x}_2 \,.$$

On suppose que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. En appliquant la formule de Taylor (4.1) à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(s) = F(s(u_1, u_2)),$$

et en prenant $s = 1$, on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2) &= F(0,0) + u_1 \partial_1 F(0,0) + u_2 \partial_2 F(0,0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(u_1^2 \partial_{11}^2 F(0,0) + 2u_1 u_2 \partial_{22}^2 F(0,0) + u_2^2 \partial_{22}^2 F(0,0)) \\ &\quad + \frac{1}{2} s^2 (\epsilon_{11}(u_1,u_2) u_1^2 + 2\epsilon_{12}(u_1,u_2) u_1 u_2 + \epsilon_{22}(u_1,u_2) u_2^2) \,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

avec

$$\epsilon_{ij}(u_1, u_2) := 2 \int_0^1 (1-t) \left(\partial_{ij}^2 F(tu_1, tu_2) - \partial_{ij}^2 F(0,0) \right) dt \,.$$

Pour ce qui concerne le terme de reste, tout ce qui compte, c'est que, F étant de classe $\mathcal{C}^2$, les ϵ_{ij} tendent vers 0 quand (u_1, u_2) tend vers $(0, 0)$.
A la vue du cas des fonctions d'une variable, on comprend donc que le comportement de f au voisinage du point critique $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ ne va dépendre que du signe de la quantité

$$Q(u_1, u_2) = u_1^2 \partial_{11}^2 F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + 2u_1 u_2 \partial_{22}^2 F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + u_2^2 \partial_{22}^2 F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \tag{4.3}$$

pour (u_1, u_2) proche de $(0, 0)$.

Remarque 4.2.4 *On voit apparaître ici la matrice des dérivées secondes de F aussi appelée le Hessien de F. On note que si F est de classe $\mathcal{C}^2$, c'est une matrice symétrique.*

Rappelons qu'une des méthodes les plus simples pour connaitre le signe de cette quantité consiste à l'écrire sous forme d'une somme ou différence de carrés : c'est la méthode de Gauss. On détermine ainsi la *signature de la forme quadratique* Q : c'est le couple (n_+, n_-), où n_+ (resp. n_-) est le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de la matrice associée à Q.

Proposition 4.2.5
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $d_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}f = 0$. Soit Q la forme quadratique associée à F en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ définie par (4.3) qu'on supposera sans valeur propre nulle (= non dégénérée). La fonction F admet un minimum (resp. maximum) local en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ si et seulement si $sgn(Q) = (2, 0)$ (resp. $sgn(Q) = (0, 2)$). Lorsque $sgn(Q) = (1, 1)$, le point critique $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ est un col.

Dans le cas où Q admet une valeur propre nulle, le point critique est dit dégénéré, et une étude plus approfondie est nécessaire.
Nous allons utiliser ce résultat surtout sous la forme (plus faible) suivante. Supposons que F admette un maximum local en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Alors on a

$$\partial_1 F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0 \text{ et } \partial^2_{11} F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leq 0, \partial^2_{22} F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leq 0\ . \tag{4.4}$$

Le premier point découle du fait que $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ est un point critique. Pour le second point, il suffit de regarder les valeurs de F sur la droite $x_2 = \tilde{x}_2$ et sur la droite $x_1 = \tilde{x}_1$ au travers de la formule (4.2). Une autre façon de le voir consiste à réduire (4.3) en somme de carrés : si $\partial^2_{11} F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) > 0$ par exemple, la somme de carrés aura nécessairement l'un de ces coefficients > 0, ce qui est contradictoire avec la présence d'un maximum local en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.

Remarque 4.2.6 *Sans l'hypothèse de non dégénérescence, la condition nécessaire qui reste est que le Hessien de F en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ n'a pas de valeurs propres strictement positives.*
Ceci implique qu'une condition nécessaire est que la trace du Hesssien de F en ce point (qui est la somme des valeurs propres) est négative ou nulle.

4.3 Exercices

1. Déterminer les points critiques de chacune des applications suivantes et donner leur développement limité à l'ordre 2 en chacun de leurs points critiques. Existe-t-il des extrema locaux ? globaux ?
   1. $f(x, y, z) = x^2/2 + xyz - y + z$. 2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$.
   Dans le deuxième cas, montrer que f tend vers $+\infty$ lorsque $\sqrt{x^2 + y^2} \to +\infty$.
2. Etudier les points critiques des fonctions suivantes :

   a) $f_1(x, y) = x^2 - y^3$ b) $f_2(x, y) = x + y + x^2 - xy + y^2 + 1$
   c) $f_3(x, y) = xy + yz + xz + xyz$ d) $f_4(x, y, z) = x^2 + z^2 + x^2 y$
   e) $f_5(x, y) = x^2 + 2y^2 + \pi \cos x \cos y$

3. Soit f_1 et f_2 les deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x,y) = y+2-(x+1)^2$ et $f_2(x,y) = y-2+(x-1)^2$. On pose $f = f_1 f_2$. Déterminer les points critiques de f, et déterminer pour chacun d'eux s'il s'agit d'un extremum. Tracer les courbes $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, et étudier dans le complémentaire le signe de f. Placer les points critiques dans le dessin.
4. Soit $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$. Trouver les extrema locaux de f. Lesquels sont des minima, lesquels sont des maxima ?
5. Soit a un réel positif. Quels sont les extrema locaux de $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$?

Chapitre 5

L'équation de Laplace

5.1 Généralités

On s'intéresse dans ce chapitre à l'équation de Laplace (on se limite au cas de deux variables)

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \tag{5.1}$$

où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$, appelé *Laplacien*, et f est une fonction continue donnée.
Cette équation est très importante à la fois en physique et en mathématiques. Du côté physique, la solution de l'équation (5.1) est par exemple le potentiel électrique engendré dans le plan par la repartition de charges $\rho = -\frac{1}{4\pi} f$. L'équation de la chaleur ou des ondes pour deux variables d'espace s'écrivent

$$\partial_t u = k(\partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u) \quad \text{et} \quad \partial^2_{tt} u = c^2(\partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u).$$

On est donc aussi en présence de l'équation de Laplace lorsque l'on s'intéresse aux phénomènes stationnaires, c'est-à-dire indépendant du temps, pour lesquels $\partial_t u = 0$ et $\partial^2_{tt} u = 0$. On est aussi intéressé par des solutions de la forme $u(t,x,y) = \exp -\lambda t\, \phi(x,y)$ (avec $\lambda > 0$ pour la chaleur) ou $u(t,x,y) = \exp i\lambda t\, \phi(x,y)$ pour l'équation des ondes. Du point de vue des mathématiques, le Laplacien est un objet fondamental aussi bien en analyse qu'en géométrie. Les solutions de (5.1) pour $f = 0$ - qui doivent être des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ - sont par exemple appelées fonctions harmoniques, et l'on va décrire quelques unes de leurs propriétés.

5.2 Principe du Maximum

Théorème 5.2.1
Soit D un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit u fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans

D, continue dans $\bar{D} = D \cup \partial D$. Si u est solution dans D de

$$\Delta u(x, y) = 0.$$

alors le maximum de u dans $\bar{D}$ est atteint sur le bord de D.

Preuve :
Soit u une fonction harmonique, et $v_\epsilon(x, y) = u(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2)$. On a

$$\Delta v_\epsilon(x, y) = \Delta u(x, y) + \epsilon \Delta(x^2 + y^2) = 0 + 4\epsilon > 0.$$

D'un autre côté, si (x_0, y_0) est un maximum pour v_ϵ dans D, on a, par exemple en utilisant la formule de Taylor,

$$\Delta v_\epsilon(x_0, y_0) = \partial^2_{xx} v_\epsilon(x_0, y_0) + \partial^2_{yy} v_\epsilon(x_0, y_0) \leq 0,$$

ce qui est absurde. Or, puisque v_ϵ est continue, elle doit atteindre son maximum sur le compact $\bar{D}$. Elle l'atteint donc en un point (x_0, y_0) du bord ∂D. On a donc, pour tout (x, y),

$$u(x, y) < v_\epsilon(x, y) \leq v_\epsilon(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) + \epsilon(x_0^2 + y_0^2) \leq \max_{\partial D} u + \epsilon r^2,$$

où $r > 0$ est choisi pour que le disque centré à l'origine de rayon r contienne D. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient, pour tout $(x, y) \in \bar{D}$,

$$u(x, y) \leq \max_{(x,y) \in \partial D} u(x, y)\,.$$

□

Encore une fois, ce théorème dit que la fonction harmonique u, supposée aussi continue sur le compact $\bar{D}$, atteint son maximum au moins en un point du bord de D. C'est ce qu'on appelle le Principe du Maximum Fort : u n'a pas d'extremum dans D. On ne démontrera pas ce résultat.

Exercice 5.2.2
Montrer que la fonction $u(x, y) = (1 - x^2 - y^2)/(1 - 2x + x^2 + y^2)$ est harmonique dans le disque $x^2 + y^2 < 1$. Le principe du maximum est-il vérifié dans $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$ pour cette fonction ? Etudier le même problème dans un disque de rayon strictement inférieur à 1, dans une couronne ...

Corrigé :
u n'est pas définie en $(1,0)$, et ne se prolonge pas par continuité en ce point puisque

$$\lim_{x\to 1^-} u(x,0) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{(1-x)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = +\infty.$$

On a

$$\partial_x u(x,y) = 2\frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}, \partial_y u(x,y) = 4\frac{y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2},$$

et donc

$$\partial^2_{xx} u(x,y) = -4\frac{-1+3x-3x^2+3y^2+x^3-3xy^2}{(1-2x+x^2+y^2)^3} = -\partial^2_{yy} u(x,y),$$

ce qui montre que u est harmonique. On peut voir également que u n'a pas de point critique dans D, mais de toutes façons, on a bien

$$u(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial D} u(x,y) = +\infty.$$

Exercice 5.2.3
Enoncer et démontrer un principe du minimum.

Corrigé :
Si u est harmonique dans D et continue sur $\bar{D}$, $v = -u$ aussi. Le Principe du Maximum dit que, pour tout $(x,y) \in \bar{D}$,

$$v(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial D} v(x,y),$$

c'est-à-dire

$$u(x,y) \geq -\max_{(x,y)\in\partial D} -u(x,y) = \min_{(x,y)\in\partial D} u(x,y).$$

On peut déduire du principe du maximum l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour le Laplacien.

Proposition 5.2.4 *Soit D un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction continue sur $\bar{D}$, et g une fonction continue sur ∂D. Le problème de*

Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in D \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial D \end{cases} \tag{5.2}$$

admet au plus une solution $\mathcal{C}^2$.

Preuve :
Si u_1 et u_2 sont solutions de (5.2), $w = u_1 - u_2$ vérifie $\Delta w = 0$ et est nulle sur ∂D. Par le principe du maximum (et celui du minimum) on obtient $w = 0$ sur D. □

5.3 Propriétés d'invariance

Comme pour l'équation de la chaleur, il est très important de noter les propriétés d'invariance de l'équation de Laplace. Nous allons montrer que cette équation est invariante sous l'action des translations et des rotations du plan. De manière plus explicite, il s'agit de montrer le résultat suivant.

Lemme 5.3.1
Si $u(x',y')$ est une solution de $\Delta u = f$ dans un domaine D, alors $v(x,y) = u(\tau(x,y)) = u(x-a, y-b)$ et $w(x,y) = u(\rho(x,y)) = u(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ sont encore solutions, dans $\tau^{-1}(D)$ et $\rho^{-1}(D)$ respectivement.

Preuve :
On n'écrit la preuve que pour w, le cas de v étant beaucoup plus simple (c'est donc un excellent **Exercice**). On pose (anciennes coordonnées en fonction des nouvelles)

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} \partial_x w(x,y) = \cos\theta(\partial_{x'}u)(x',y') + \sin\theta(\partial_{y'}u)(x',y') \\ \partial_y w(x,y) = -\sin\theta(\partial_{x'}u)(x',y') + \cos\theta(\partial_{y'}u)(x',y'), \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \partial^2_{xx} w(x,y) = \cos^2\theta(\partial^2_{x'x'}u)(x',y') + 2\cos\theta\sin\theta\partial^2_{x'y'} + \sin^2\theta(\partial^2_{y'y'}u)(x',y') \\ \partial^2_{yy} w(x,y) = \sin^2\theta(\partial^2_{x'x'}u)(x',y') - 2\cos\theta\sin\theta\partial^2_{x'y'} + \cos^2\theta(\partial^2_{y'y'}u)(x',y'). \end{cases}$$

On a donc bien $(\Delta_{x,y} w)(x,y) = (\Delta_{x',y'} u)(x',y') = 0$. □

5.4 Le Laplacien en coordonnées polaires

Le fait que le Laplacien possède cette invariance par rotation suggère que son expression en coordonnées polaires doit être relativement simple.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, il existe un unique couple (r, θ) dans $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Notant g la fonction définie sur $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ par

$$g(r, \theta) = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

on voit d'abord facilement que

$$\begin{cases} \partial_r g(r, \theta) = \cos\theta\partial_x f(x, y) + \sin\theta\partial_y f(x, y) \\ \partial_\theta g(r, \theta) = -r\sin\theta\partial_x f(x, y) + r\cos\theta\partial_y f(x, y). \end{cases}$$

Ensuite, en formant les combinaisons linéaires adéquates, on obtient

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = \cos\theta\partial_r g(r, \theta) - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta g(r, \theta) \\ \partial_y f(x, y) = \sin\theta\partial_r g(r, \theta) + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta g(r, \theta). \end{cases} \tag{5.3}$$

On peut alors démontrer le résultat suivant.

Lemme 5.4.1
Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a

$$\Delta u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \partial^2_{rr} v(r, \theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v(r, \theta)$$

Preuve :
Posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Soit aussi $w(r, \theta) = \partial_x u(x, y)$. On a d'abord, en utilisant (5.3) pour $f(x, y) = \partial_x u(x, y) = w(r, \theta)$,

$$\partial^2_{xx} u(x, y) = \partial_x(\partial_x u(x, y)) = \cos\theta\partial_r w(r, \theta) - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta w(r, \theta).$$

On a ensuite, en utilisant (5.3) pour $f(x, y) = u(x, y) = v(r, \theta)$,

$$\begin{cases} \partial_r w(r, \theta) = \partial_r(\partial_x u(x, y)) = \partial_r(\cos\theta\partial_r v(r, \theta) - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta v(r, \theta)) \\ \partial_\theta w(r, \theta) = \partial_\theta(\partial_x u(x, y)) = \partial_\theta(\cos\theta\partial_r v(r, \theta) - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta v(r, \theta)), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \partial_r w(r,\theta) = \cos\theta \partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta v(r,\theta)) - \frac{\sin\theta}{r}\partial^2_{r\theta} v(r,\theta) \\ \partial_\theta w(r,\theta) = \\ \quad -\sin\theta \partial_r v(r,\theta) + \cos\theta \partial^2_{r\theta} v(r,\theta) - \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta v(r,\theta)) - \frac{\sin\theta}{r}\partial^2_{\theta\theta} v(r,\theta)). \end{cases}$$

On a donc finalement

$$\partial^2_{xx} u(x,y) = \cos^2\theta \partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v(r,\theta).$$

Un calcul identique donne

$$\partial^2_{yy} u(x,y) = \sin^2\theta \partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{\cos^2\theta}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v(r,\theta),$$

et l'on obtient le lemme en ajoutant ces deux dernières égalités. □

On peut par exemple utiliser cette expression pour déterminer toutes les fonctions harmoniques qui sont invariantes par rotation. Il s'agit des fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\Delta u(x,y) = 0$, et pour lesquelles, notant $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, on a $\partial_\theta v(r,\theta) = 0$ (v ne dépend pas de θ).
Avec le Lemme 5.4.1, on doit alors avoir

$$0 = \Delta u(x,y) = \partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\theta).$$

On peut remarquer que cette équation s'écrit

$$0 = \partial_r(r\partial_r v(r,\theta)),$$

et donc que ses solutions sont

$$v(r,\theta) = C_1 \log(r) + C_2. \tag{5.4}$$

Remarque 5.4.2
On notera que l'on a pas précisé dans quel domaine on cherche de telles solutions invariantes par rotation. Ce domaine doit être lui-même invariant par rotation, et ne pas contenir $(0,0)$.

Exercice 5.4.3
Trouver toutes les fonctions u *telles que* $\Delta u = 1$ *dans la couronne* $a < r < b$ *et qui s'annulent sur* $r = a$ *et sur* $r = b$.

Corrigé :
La réponse est

$$v(r) = \frac{1}{4}(r^2 - a^2) - \frac{1}{4}(b^2 - a^2)\frac{\log r - \log a}{\log b - \log a}.$$

On cherche les solutions invariantes par rotation. Puisque l'on a unicité, si l'on trouve une solution de cette manière, on n'aura rien oublié. On doit résoudre $r = \partial_r(r\partial_r v(r,\theta))$ (attention : pas $1 = \ldots$) , c'est-à-dire $r\partial_r v(r,\theta) = r^2/2 + C_1$, donc $\partial_r v(r,\theta) = r/2 + C_1/r$, d'où $v(r,\theta) = r^2/4 + C_2 + C_1 \log r$...

5.5 Solutions particulières : séparation des variables

On cherche des solutions $v(r,\theta)$ de

$$\partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v(r,\theta) = 0 \tag{5.5}$$

qui sont à variables séparées, c'est-à dire qui s'écrivent

$$v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{5.6}$$

pour certaines fonctions R et Θ.
Pour ce type de fonctions v, l'équation (5.5) s'écrit

$$0 = R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta).$$

On cherche maintenant des solutions du type (5.6) pour lesquelles R et Θ ne s'annulent jamais (on verra plus tard qu'il faut ensuite oublier cette condition trop restrictive). En divisant l'équation ci-dessus par $R(r)/r^2$, on obtient

$$\{r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}\} = -\Theta''(\theta)/\Theta(\theta)\,.$$

Puisque le membre de droite ne dépend pas de r, le membre de gauche non plus : la fonction $r \mapsto r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}$ est constante. Si une telle fonction v est solution, il existe donc un réel λ tel que

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

On s'intéresse à la première de ces équations. Puisque l'on veut que u soit régulière, on cherche les fonctions Θ qui sont périodiques de période 2π. Or les solutions de

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \tag{5.8}$$

sont des combinaisons linéaires d'exponentielles pour $\lambda < 0$: de telles fonctions ne sont pas périodiques, donc nécessairement $\lambda \geq 0$, et dans ce cas les solutions de (5.8) sont

$$\Theta(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Encore une fois la condition $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ne peut être satisfaite que lorsque $\lambda = n^2$ pour un certain entier naturel n. On obtient finalement une famille de solutions

$$\Theta_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta). \tag{5.9}$$

On reprend maintenant la deuxième équation de (5.7), sachant que λ doit être un entier naturel :

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

Cette équation différentielle ordniaire porte le nom d'équation d'Euler, et présente la particularité que ses coefficients possèdent une singularité en $r = 0$. Il faut pour le voir ne pas oublier d'isoler le terme d'ordre le plus élevé, et écrire l'équation sous la forme

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0.$$

On peut étudier ce type d'équations de manière systématique : c'est l'objet de la théorie de Fuchs. On peut se contenter ici de chercher des solutions sous la forme $R(r) = r^\alpha$. On obtient alors *l'équation indicielle*

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda = 0,$$

et donc nécessairement $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$. Dans le cas où $\lambda = n^2 \neq 0$, on obtient deux solutions indépendantes $r \mapsto r^n$ et $r \mapsto r^{-n}$, et la solution générale s'écrit

$$R(r) = C_nr^n + D_nr^{-n}. \tag{5.10}$$

Le cas où $\lambda = 0$ a déjà été vu (cf. (5.4)). Les solutions s'écrivent alors

$$R(r) = C_0\log r + D_0. \tag{5.11}$$

Récapitulons : toutes les fonctions

$$v_n(r,\theta) = (C_nr^n + D_nr^{-n})(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$$

sont solutions de l'équation pour $n \in \mathbb{N}^*$; c'est aussi le cas de

$$v_0(r,\theta) = C_0 \log r + D_0.$$

Revenons au problème initial. Rappelons que l'on cherche des fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ dans tout le disque $\{x^2 + y^2 < \delta\}$, en particulier à l'origine. Parmi les fonctions ci-dessus, on élimine donc toutes celles qui n'ont pas de limite quand $r \to 0$. Il reste les fonctions

$$v_n(r,\theta) = (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))r^n, \tag{5.12}$$

où n est un entier positif ou nul.

5.6 Exercices

5.6.1 Fonctions harmoniques

1. Déterminer toutes les fonctions harmoniques dans un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Prouver le principe du maximum dans ce cadre.
2. Soit k un entier positif.
   1. Montrer que les fonctions $u(x,y) = (x \pm iy)^k$ sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2$.
   2. A quelle condition sur a et b la fonction $u(x,y) = (ax+by)^k$ est-elle harmonique ?

5.6.2 Le principe du maximum

1. Soit Ω un disque du plan, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. On suppose que

$$\begin{cases} \Delta f(x) \geq f(x) - 1 & \text{pour tout } \ x \in \Omega \\ \nabla f(x) \cdot x = 0 & \text{pour tout } \ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

   Montrer que $f \leq 1$ dans $\bar{\Omega}$. On pourra montrer que le maximum de f sur $\bar{\Omega}$ ne peut être strictement supérieur à 1.
2. Etudier dans le cas du carré si on a des fonctions harmoniques de la forme $u(x)v(y)$.

Chapitre 6

L'équation de la chaleur sur un axe

6.1 Le modèle physique : la loi de Fourier

On décrit maintenant le phénomène de la diffusion, par exemple de la chaleur au travers d'un corps, ou bien d'un colorant dans un liquide au repos. Dans les deux cas le principe physique est le même, et porte le nom de Loi de Fourier (ou Loi de Fick) : le flot de chaleur est dirigé de la région chaude à la région froide, et son intensité est proportionnelle au gradient de température. De plus la chaleur ne peut être perdue qu'à travers les éventuelles parois du récipient. On se limite encore une fois à la diffusion de la chaleur le long d'un axe. Notons $u(t,x)$ la température à l'instant t au point d'abscisse x. La quantité totale de chaleur (en joules par exemple) sur l'axe entre les points x_0 et x_1 ($x_0 < x_1$) à l'instant t est

$$H(t) = c\rho \int_{x_0}^{x_1} u(t,x)\, dx\,,$$

où c et ρ sont des constantes physiques : c est la chaleur spécifique du matériau et ρ sa densité.
On suppose que la chaleur décroit de la gauche vers la droite le long de l'axe, au moins au voisinage du segment $[x_0, x_1]$. On sait que la quantité de chaleur $H(t)$ entre x_0 et x_1 ne peut changer au cours du temps qu'à cause d'entrées en x_0 ou de sorties en x_1. Or, d'après la Loi de Fourier, le flot de chaleur entrant en x_0 est $\kappa\,\partial_x u(t,x_0)$ et celui sortant de x_1 est $\kappa\,\partial_x u(t,x_1)$, où κ est une certaine constante positive, appelée conductivité calorifique. On obtient donc

$$H'(t) = \kappa\partial_x u(t,x_1) - \kappa\partial_x u(t,x_0),$$

c'est à dire

$$c\rho \int_{x_0}^{x_1} \partial_t u(t,x)\, dx = \kappa \partial_x u(t,x_1) - \kappa \partial_x u(t,x_0)\ .$$

En dérivant cette égalité par rapport à x_1, et en posant $k = \kappa/c\rho$, on obtient l'équation de la chaleur

$$\partial_t u(t,x) = \ k\, \partial^2_{xx} u(t,x)\,. \tag{6.1}$$

6.2 Le principe du maximum

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et prouver le principal résultat de ce chapitre.

Théorème 6.2.1
Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u(t,x) = k\, \partial^2_{xx} u(t,x),$$

dans le rectangle $[0,T] \times [0,L]$. Alors u atteint son maximum sur l'un des bords $t=0$, $x=0$ ou $x=L$ du rectangle.

Preuve :
On pose, pour $\epsilon > 0$, $v_\epsilon(t,x) = u(t,x) + \epsilon x^2$.
Supposons que v_ϵ atteigne son maximum en un point (t_0,x_0) situé à l'intérieur du rectangle, donc dans $]0,T[\times]0,L[$. On a $\partial_t v_\epsilon(t_0,x_0) = 0$ et $\partial_{xx} v_\epsilon(t_0,x_0) \leq 0$. Puisque u est solution de l'équation de la chaleur, on obtient

$$\partial_t v_\epsilon(t,x) - k\partial^2_{xx} v_\epsilon(t,x) = \partial_t u(t,x) - k\partial^2_{xx} u(t,x) - 2k\epsilon = -2k\epsilon\,.$$

En particulier, puisque $\partial_t v_\epsilon(t_0,x_0) = \partial_t u(t_0,x_0) = 0$, on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\partial^2_{xx} v_\epsilon(t_0,x_0) > 0\,,$$

ce qui est absurde.
Supposons maintenant que v_ϵ atteigne son maximum en un point (t_0,x_0) situé sur le bord droit du rectangle, i. e. pour $t_0 = T$. On a $\partial_x v_\epsilon(t_0,x_0) = 0$ et $\partial^2_{xx} v_\epsilon(t_0,x_0) \leq 0$. On ne peut plus dire que $\partial_t v_\epsilon(t_0,x_0) = 0$, mais on a quand même $\partial_t v_\epsilon(t_0,x_0) \geq 0$, puisque

$$\partial_t v_\epsilon(t_0,x_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{v_\epsilon(t_0,x_0) - v_\epsilon(t_0-\delta,x_0)}{\delta} \geq 0\,.$$

On aboutit donc à la même contradiction.
La fonction v_ϵ atteint donc son maximum dans $[0,T]\times[0,L]$ en un point de γ, où γ est la réunion des trois côtés du rectangle mentionnés dans le théorème. Or sur γ on a

$$v_\epsilon(t,x) \le M + \epsilon L^2,$$

où M désigne le maximum de u sur γ. Finalement pour tout $(t,x) \in [0,T] \times [0,L]$, on a

$$u(t,x) = v_\epsilon(t,x) - \epsilon x^2 \le M + \epsilon(L^2 - x^2).$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient enfin, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times [0,L]$,

$$u(t,x) \le M.$$

□

Remarque 6.2.2
Dans ce théorème, la fonction u est continue dans le rectangle $[0,T]\times[0,L]$, donc est bornée et atteint sa borne supérieure dans $[0,T]\times[0,L]$. Le théorème affirme qu'il existe un point de l'un des côtés $t = 0$, $x = 0$ ou $x = L$ du rectangle, où ce maximum est atteint. En fait on peut démontrer, mais c'est beaucoup plus difficile un principe du maximum fort : le maximum n'est pas atteint ailleurs que sur l'un de ces côtés.

Remarque 6.2.3
Notons que dans le théorème, on n'utilise que l'inégalité

$$\partial_t u(t,x) \le k\partial^2_{xx} u(t,x)\,,$$

dans la démonstration du théorème.

Exercice 6.2.4
Montrer que la fonction $u(t,x) = -2xt - x^2$ est solution de l'équation $\partial_t u - x\partial^2_{xx} u = 0$. où se trouvent les maxima de u dans le rectangle $[0,1]\times[-2,2]$? Pourquoi le Principe du Maximum ne marche-t-il pas pour cette équation ?

Du Principe du Maximum découle l'unicité de l'éventuelle solution du problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - k\partial^2_{xx} u(t,x) = f(t,x)\,, \\ u(0,x) = \phi(x)\,, \\ u(t,0) = g(t)\,, u(t,L) = h(t)\,. \end{cases} \tag{6.2}$$

Proposition 6.2.5
Soit ϕ, g et h sont trois fonctions régulières. Il existe au plus une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$ qui vérifie (6.2).

Preuve :
Supposons que u_1 et u_2 soient deux fonctions régulières vérifiant (6.2), et notons $w = u_1 - u_2$. La fonction w est régulière et vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) - k\partial_{xx}^2 w(t,x) = 0\,, \\ w(0,x) = 0\,, \\ w(t,0) = 0\,, w(t,L) = 0\,. \end{cases} \tag{6.3}$$

Soit $T > 0$. On sait que le maximum de w sur $[0,T] \times [0,L]$ est atteint sur l'un des côtés $t = 0$, $x = 0$ ou $x = L$. Mais w y est nulle, donc $w(t,x) \leq 0$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times [0,L]$. Le même raisonnement vaut pour $-w$: on a donc aussi $w(t,x) \geq 0$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times [0,L]$, et finalement $w = 0$ sur $[0,T] \times [0,L]$. Ceci étant vrai pour tout T, on a bien $u_1 = u_2$. □

Remarque 6.2.6 *On a juste besoin de u solution dans $\mathcal{C}^2(]0,+\infty[\times]0,L[) \cap \mathcal{C}^0([0,T] \times [0,L])$ pour la démonstration, l'équation aux dérivées partielles étant satisfaite dans le rectangle ouvert. La rédaction est trop floue un peu partout sur ce point. Cette remarque sera utile en fin de chapitre.*

Revenons à l'équation de la chaleur sur toute la droite réelle. Dans ce cas, le résultat d'unicité que nous venons d'obtenir peut s'étendre modulo certaines conditions supplémentaires à l'infini. Par exemple on peut s'intéresser aux solutions qui tendent vers 0, quand $|x| \to \infty$ uniformément par rapport à t.

Proposition 6.2.7
Soit ϕ une fonction régulière. Il existe au plus une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, telle que

$$\sup_{t\in]0,+\infty[} |u(t,x)| \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty\,. \tag{6.4}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - k\partial_{xx}^2 u(t,x) = f(t,x) \\ \lim_{t\to 0^+} u(t,x) = \phi(x)\,, \end{cases} \tag{6.5}$$

soient vérifiées.

Preuve :
Supposons que u_1 et u_2 soient deux fonctions régulières, qui tendent vers 0 à l'infini, et qui vérifient (6.5). On note $w = u_1 - u_2$. La fonction w est

régulière, vérifie (6.4) et (6.5) pour $\phi \equiv 0$ et $f \equiv 0$. Appliquons le Principe du Maximum à w et à $-w$ sur le domaine $[0,T] \times [-L,L]$. On a

$$\min\left(0, \min_{t\in[0,T]} w(t,L), \min_{t\in[0,T]} w(t,-L)\right) \le w(t,x) \le \max\left(\max_{t\in[0,T]} w(t,L), \max_{t\in[0,T]} w(t,-L), 0\right).$$

Puisque $w(t,\pm L)$ tend vers 0 quand $L \to +\infty$ uniformément par rapport à t, on obtient en passant à la limite,

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, w(t,x) = 0\,.$$

□

Remarque 6.2.8 *En fait, on a démontré le résultat sous la condition plus faible et plus facile à vérifier que, pour tout $T > 0$*

$$\sup_{t\in]0,T]} |u(t,x)| \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty\,. \tag{6.6}$$

A titre d'illustration supplémentaire de l'importance du Principe du Maximum, on montre maintenant que le problème de Dirichlet (6.2) est "stable", au sens où des données proches vont donner des solutions proches (cf. la notion de problème bien posé).

Proposition 6.2.9

Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions régulières, et u_1, u_2 les solutions respectives des problèmes

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - k\partial^2_{xx} u(t,x) = f(t,x) \\ u(0,x) = \phi_j(x) \\ u(t,0) = 0, u(t,L) = 0. \end{cases}$$

Pour tout $t > 0$ on a

$$\max_{0\le x\le L} |u_1(t,x) - u_2(t,x)| \le \max_{0\le x\le L} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|.$$

Preuve :
On considère encore $w = u_1 - u_2$. La fonction w est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) - k\partial^2_{xx} w(t,x) = 0\,, \\ w(0,x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)\,, \\ w(t,0) = 0\,, \\ w(t,L) = 0\,. \end{cases}$$

Le Principe du Maximum dit que dans tout le rectangle $[0,T]\times[0,L]$ on a

$$w(t,x) \le \max_{x\in[0,L]} |\phi_1(x)-\phi_2(x)|\,.$$

Le même principe appliqué à $-w$ donne

$$w(t,x) \ge -\max_{x\in[0,L]} |\phi_1(x)-\phi_2(x)|\,,$$

ce qui prouve la proposition. □

6.3 Fonction de Green

On veut résoudre explicitement le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur dans $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$:

$$\partial_t u(t,x) - k\partial^2_{xx}u(t,x) = 0\,, \tag{6.7}$$

avec comme condition initiale

$$u(0,x) = \phi(x)\ , \tag{6.8}$$

c'est à dire établir un résultat parallèle au théorème de D'Alembert pour l'équation des ondes. Les choses sont notablement plus compliquées ici, et l'on va examiner de près les propriétés d'invariance de l'équation, notre objectif étant d'obtenir un maximum de conditions nécessaires pour qu'une fonction u soit solution.

6.3.1 Invariances de l'équation

On regroupe toutes les propriétés dont nous aurons besoin dans la

Proposition 6.3.1
Supposons que la fonction u soit une solution de l'équation de la chaleur (6.7).

1. *N'importe quelle dérivée partielle de u, dès qu'elle existe et est suffisamment régulière, vérifie (6.7).*
2. *Pour tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $u_y : (t,x)\to u(t,x-y)$ vérifie (6.7).*
3. *Si cette intégrale converge et que l'on peut "dériver sous le signe d'intégration", la fonction $U : (t,x)\to \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)u(t,x-y)dy$ vérifie (6.7) pour n'importe quelle fonction ϕ continue par morceaux (disons à support compact, pour ne pas avoir de problème d'intégration).*

4. *Pour tout $a > 0$, la fonction $u_a : (t, x) \to u(at, \sqrt{a}x)$ vérifie (6.7).*

Preuve :
Toutes ces propriétés sont très simples à vérifier. Le point 3 est par exemple un conséquence de la propriété 2 et de la linéarité de l'équation. Pour le point 4, on a $\partial_t u_a(t, x) = a(\partial_t u)(at, \sqrt{a}x)$ et $\partial^2_{xx} u_a(t, x) = a(\partial^2_{xx} u)(at, \sqrt{a}x)$. □

On va d'abord tirer partie de la quatrième propriété vue dans la Proposition 6.3.1. On suppose que le problème (6.7) admet une unique solution u pour ϕ donnée (cf. par exemple la Proposition 6.2.7). Notons

$$\phi_a : x \mapsto \phi_a(x) = \phi(\sqrt{a}x),$$

et u_a l'éventuelle solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - k\partial^2_{xx} u(t, x) = 0\,, \\ u(0, x) = \phi_a(x)\,. \end{cases}$$

Le point 4 de la Proposition 6.3.1 dit que $u_a(t, x) = u(at, \sqrt{a}x)$. Si l'on a maintenant $\phi = \phi_a$ pour tout $a > 0$, alors $u_a = u$ pour tout $a > 0$ par unicité de la solution, c'est à dire

$$\forall a > 0\,,\ \forall t \geq 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,\ u(at, \sqrt{a}x) = u(t, x)\,.$$

En prenant $a = 1/t$ pour $t > 0$ on obtient donc, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(t, x) = u(1, \frac{x}{\sqrt{t}})\,.$$

Autrement dit, dans ces conditions, il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$u(t, x) = f(\frac{x}{\sqrt{t}})\,.$$

6.3.2 Une solution particulière

On va résoudre le problème (6.7) avec comme donnée initiale

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0\,, \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0\,, \\ 0 \text{ si } x < 0\,. \end{cases}$$

Cette fonction ϕ est souvent appelée fonction de Heaviside [1] et notée H. On notera qu'elle n'est pas continue à l'origine. L'intérêt immédiat de cette

1. avec une définition différente pour $x = 0$

donnée initiale particulière est qu'elle vérifie la propriété $\phi_a = \phi$ pour tout $a > 0$. Sous réserve d'unicité, la solution de (6.7) doit donc s'écrire

$$u(t,x) = f(\frac{x}{\sqrt{4kt}}) \tag{6.9}$$

pour une certaine fonction f. Par rapport à la discussion précédente, on a changé de fonction f pour faire apparaître le facteur $\sqrt{4k}$ et faciliter les calculs qui vont suivre. En calculant ses dérivées partielles, on voit que la fonction u donnée par (6.9) est solution de l'équation de la chaleur si et seulement si

$$-\frac{1}{2}\frac{4kx}{(4kt)^{3/2}}f'(\frac{x}{\sqrt{4kt}}) - k\frac{1}{4kt}f''(\frac{x}{\sqrt{4kt}}) = 0.$$

On multiplie cette équation par $4t$, on pose $z = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$ et on obtient

$$2zf'(z) + f''(z) = 0.$$

Les solutions de l'équation différentielle ordinaire $y' + 2zy = 0$ sont les fonctions

$$y(z) = C\exp(-z^2),$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, ce qui donne

$$f(z) = C_1 \int_0^z e^{-s^2} ds + C_2\,,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles. Revenant à la fonction u on a donc nécessairement

$$u(t,x) = C_1 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-s^2} ds + C_2\,.$$

On détermine les constantes C_1 et C_2 en faisant tendre $t \to 0$ dans l'expression ci-dessus. En prenant $x > 0$ puis $x < 0$, et en supposant que la solution est continue par rapport à $t \in [0, +\infty[$, on obtient

$$\begin{cases} C_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 1\,, \\ -C_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 0\,. \end{cases}$$

On a finalement obtenu comme solution la fonction

$$S(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-s^2} ds + \frac{1}{2}\,. \tag{6.10}$$

Remarque 6.3.2

Il faut noter que l'on n'a aucun résultat à notre disposition permettant d'affirmer que cette fonction est la seule solution du problème...

6.3.3 La solution et ses propriétés

La solution $S(t,x)$ que nous venons d'obtenir est $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de $t = 0$. Conformément à la propriété 1 de la Proposition 6.3.1, la fonction $G(t,x) = \partial_x S(t,x)$ est encore une solution de l'équation de la chaleur pour $t > 0$. Il est d'ailleurs intéressant de se demander pour quelle condition initiale... ce qui ne pourra être fait que dans le cadre de la théorie des distributions.

Définition 6.3.3
La fonction

$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-x^2/4kt}$$

est appelée fonction de Green pour l'équation de la chaleur.

On peut maintenant prouver le

Théorème 6.3.4
Soit ϕ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. La fonction u définie sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ par

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,x-y)\phi(y)dy$$

est solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur (6.7). C'est la seule solution vérifiant pour tout $T > 0$ (6.6).

Preuve :
On sait déjà qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution de ce type : c'est la Proposition 6.2.7. Le point 3 de la Proposition 6.3.1 dit ensuite que l'on a bien $\partial_t u(t,x) = k\partial^2_{xx} u(t,x)$ dans $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On vérifie maintenant que $u(t,x)$ tend vers $\phi(x)$ quand $t \to 0$. On intègre par parties (dans l'intégrale ci-dessous) en se souvenant que $G(t,x) = \partial_x S(t,x)$. On obtient

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x S(t,x-y)\phi(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} -\partial_y (S(t,x-y))\phi(y)dy,$$

et donc

$$u(t,x) = [-S(t,x-y)\phi(y)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} S(t,x-y)\phi'(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t,x-y)\phi'(y)dy,$$

puisque ϕ est identiquement nulle en dehors d'un intervalle compact. On peut maintenant faire tendre $t \to 0$ dans cette intégrale, et on obtient (ce n'est pas si simple!! le changement de variable donné ci-dessous en (6.11) donne la clef pour faire une démonstration rigoureuse)

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x-y)\phi'(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \phi'(y)dy = \phi(x).$$

Regardons maintenant les propriétés quand $|x| \to +\infty$.
Pour $t > 0$, on a

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/4kt}\phi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-A}^{A} e^{-(x-y)^2/4kt}\phi(y)dy,$$

où l'on a choisit A suffisamment grand pour que le support de ϕ soit contenu dans $[-A, A]$. Posons alors

$$z = (y-x)\sqrt{4kt}\,. \tag{6.11}$$

L'intégrale ci-dessus s'écrit

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-(A+x)\sqrt{4kt}}^{(A-x)/\sqrt{4kt}} e^{-z^2}\phi(x+\sqrt{4kt}z)dz.$$

Pour $|x|$ assez grand, l'intervalle $[-(A+x)/\sqrt{4kt}, (A-x)/\sqrt{4kt}]$ ne contient pas 0. Prenons par exemple le cas $x \to +\infty$. Pour x assez grand (on peut par exemple considérer $x \geq 2A$), sur cet intervalle on a $e^{-z^2} \leq e^{-(A-x)^2/4kt}$. De plus ϕ est bornée par un réel $M > 0$ puisque continue et à support compact. On a donc

$$|u(t,x)| \leq \frac{2AM}{\sqrt{4kt}} e^{-(A-x)^2/4kt} \leq \frac{2AM}{x-A}\left(\sup_{u>0}(u\exp -u^2)\right),$$

qui donne le résultat. □

6.4 Exercices

6.4.1 Avec le principe du maximum

1. Montrer que $u(t,x) = 1 - x^2 - kt$ est solution de l'équation de la chaleur. où se trouvent ses maxima et minima dans le rectangle $[0,T] \times [0,L]$?
2. Soit u une solution de l'équation de la chaleur, et $M(T)$ (resp. $m(T)$) le maximum (resp. le minimum) de u dans le rectangle $[0,T] \times [0,L]$. La fonction M (resp. m) est-elle croissante ou décroissante ?

6.4.2 Energie

1. Soit u une solution de

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - k\partial^2_{xx} u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = \phi(x), \\ u(t,0) = 0, u(t,L) = 0. \end{cases}$$

   a. En multipliant l'équation par u, et en intégrant sur le segment $[0,L]$, montrer que

$$\frac{1}{2}\int_0^L \partial_t(u^2(t,x))dx + k\int_0^L (\partial_x u(t,x))^2 dx = 0$$

   b. En déduire que l'énergie $E(t) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^L u^2(t,x)dx$ est une fonction décroissante.

   c. Montrer l'unicité pour le problème de Dirichlet.

2. On considère le problème de Dirichlet suivant pour l'équation de la chaleur sur $R^+ \times [0,1]$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - k\partial^2_{xx} u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = 4x(1-x), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0. \end{cases}$$

   a. Montrer que $u(t,x) \in]0,1[$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in]0,1[$.

   b. Montrer que $u(t,x) = u(t,1-x)$ pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in [0,1]$.

   c. Montrer que $E(t) = \int_0^1 u(t,x)^2 dx$ est une fonction strictement décroissante.

6.4.3 Fonction de Green

1. Calculer une solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur lorsque la donnée initiale est $\phi(x) = e^{-x}$. Discuter de l'unicité.

2. On veut calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2} dz$.

   a) Calculer la solution u donnée par la fonction de Green, du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur lorsque la donnée initiale est $\phi(x) = x^2$.

   b) Montrer que $\partial^3_{xxx} u$ est solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale nulle. En déduire que u est un polynôme du second degré en x. Déterminer ces coefficients.

   c) Donner la valeur de I.

3. Résoudre l'équation de la chaleur avec dissipation :

$$\partial_t u(t,x) - k\partial^2_{xx} u(t,x) - bu(t,x) = 0,$$

   où b est un réel positif. On pourra poser $u(t,x) = e^{-bt}v(t,x)$.

4. Soit $u(t,x) = G(x,t+1)$, et $\phi(x) = G(x,1)$, de sorte que u est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = k\partial^2_{xx} u, \\ u(0,x) = \phi(x). \end{cases}$$

   Que peut-on dire de u quand $t \to -1$? Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur est-il bien posé pour les temps négatifs ?

Part II : Analyse de Fourier

Chapitre 7

Rappels sur les séries de Fourier

On rappelle principalement la théorie hilbertienne.

7.1 Séries trigonométriques

7.1.1 Applications périodiques

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}$ (on dit aussi T-périodique) si pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$. Il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{P}(T)$ des fonctions T-périodiques est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π-périodiques ; la fonction $x \mapsto e^{ix/T}$ est $(2\pi/T)$-périodique. Une fonction définie sur un intervalle de longueur T peut bien sur être identifiée à une fonction T-périodique.
On utilisera constamment la propriété élémentaire suivante.

Proposition 7.1.1 *Soit f une application T-périodique. Si f est continue par morceaux sur $[0,T]$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est continue par morceaux sur $[x_0, x_0+T]$ et l'on a*

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

7.1.2 Séries trigonométriques

Une série de fonctions de terme général $f_n(t)$ est appelée série trigonométrique lorsque la fonction f_0 est constante et qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 1}$

et $(b_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels telles que pour tout $n \geq 1$ et tout t on ait

$$f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

On pose alors $a_0 = 2f_0(t)$ et l'on écrit

$$\sum_{n\geq 0} f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Nous utiliserons plutôt la notation exponentielle pour les séries trigonométriques. Posant en effet $c_0 = a_0/2$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad \text{et} \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

on obtient la relation

$$\sum_{n\geq 0} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

Réciproquement il est clair qu'une série de fonctions du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est une série trigonométrique, avec $a_0 = 2c_0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Le lecteur devra pourtant prendre garde à cette notation. On dira en effet que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ converge lorsque la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ correspondante converge, ce qui conduit à la

Définition 7.1.2 *On appelle p-ième somme partielle de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$S_p(t) = \sum_{n=-p}^{n=p} c_n e^{int}$$

On dira que la série est convergente (simplement, normalement) lorsque la suite de fonctions (S_p) converge (simplement, normalement).

Lorsque les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, on voit immédiatement que la série trigonométrique correspondante converge normalement, la fonction somme étant alors une fonction continue et 2π-périodique.

Proposition 7.1.3 *L'ensemble $\mathcal{D}$ des points où la série trigonométrique converge simplement est invariant sous l'effet de la translation $t \mapsto t + 2\pi$, et la fonction somme S est 2π-périodique. Si la série converge normalement sur un intervalle I de $\mathcal{D}$, la fonction S est continue sur I. C'est notament le cas lorsque les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes.*

Lorsque la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est normalement convergente sur $[0,2\pi]$ (donc sur $\mathbb{R}$), il existe une relation simple entre les coefficients c_n et la fonction somme de cette série.

Proposition 7.1.4 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\ e^{int}$ une série trigonométrique normalement convergente sur $[-\pi,\pi]$ et S sa fonction somme. Alors la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-int}dt$$

Si de plus la série trigonométrique $\sum inc_n e^{int}$ des dérivées est normalement convergente, de somme S_1, la fonction S est dérivable avec $S' = S_1$.

Preuve : La fonction somme S est continue par la théorie générale et 2π-périodique. De plus on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-ipt}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t}dt$$

On utilise alors le lemme suivant dont la preuve est un **Exercice** facile.

Lemme 7.1.5 *Soit k un entier relatif et $I(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt$. On a*

$$I(k) = \begin{cases} 0 & si\ k\neq 0 \\ 2\pi & si\ k=0 \end{cases}$$

La dérivabilité de S est directement donnée par le théorème de dérivabilité des séries de fonctions. □

7.2 Séries de Fourier

Pour alléger les notations, nous travaillerons avec des fonctions 2π-périodiques. L'ensemble des définitions et résultats de ce chapitre s'applique cependant aux fonctions T-périodiques, à condition de remplacer à chaque fois les fonctions 2π-périodiques $t\mapsto\cos(nt)$, $t\mapsto\sin(nt)$ et $t\mapsto e^{int}$ respectivement par les fonctions $t\mapsto\cos(2\pi nt/T)$, $t\mapsto\sin(2\pi nt/T)$ et $t\mapsto e^{2i\pi nt/T}$ qui sont T-périodiques. On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux sur chaque période.

7.2.1 Coefficients de Fourier

Définition 7.2.1 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. On appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les nombres complexes c_n définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont définis par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Exercice 7.2.2 *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x^2$.*

Exercice 7.2.3 *Soit f une fonction de $\mathcal{E}$ et g la fonction de $\mathcal{E}$ définie par $g(t) = f(t + a)$ où a est un réel fixé. Calculer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f.*

Remarque 7.2.4 *Si S est la somme d'une série trigonométrique $\sum c_n e^{int}$ normalement convergente, les coefficients de Fourier trigonométriques de S sont les c_n (cf. la Proposition 7.1.4).*

Voici d'abord quelques propriétés très simples de ces coefficients de Fourier.

1. On a $b_0 = 0$, et $a_0/2$ est la valeur moyenne de f sur une période
2. Dans chacune des définitions ci-dessus, l'intervalle $[-\pi, \pi]$ peut être remplacée par n'importe quel intervalle de longueur 2π.
3. Si f est une fonction à valeurs réelles, a_n et b_n sont réels et $\bar{c}_n = c_{-n}$ pour tout n
4. Si f est une fonction paire, tous les b_n sont nuls. De même si f est impaire, tous les a_n sont nuls
5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les relations $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et $c_n = (a_n - ib_n)/2$, $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$
6. Les coefficients de Fourier d'une combinaison linéaire de fonctions sont les combinaisons linéaires correspondantes des coefficients de Fourier de chacune d'elles : $c_n(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.c_n(f) + \mu.c_n(g)$
7. $$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)| dt \; .$$

8.

$$|c_n(f)| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} .$$

La propriété suivante porte le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.

Proposition 7.2.5 *Soit f une fonction de $\mathcal{E}$. Les suites $(a_n(f))$, $(b_n(f))$, $(c_n(f))$ et $(c_{-n}(f))$ des coefficients de Fourier de f sont convergentes et ont pour limite 0.*

Preuve
Il est clair qu'il suffit de prouver la proposition pour les suites (c_n) et (c_{-n}) $(n \in \mathbb{N})$. De plus puisque $\overline{c}_n(f) = c_{-n}(\bar{f})$, on voit qu'il suffit de prouver la proposition pour la suite (c_{-n}). Pour les fonctions $f = \sum_{j=0}^{N} K_j \mathbb{1}_{[x_j, x_{j+1}]}$ en escaliers, on a

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K_j e^{int} dt = \frac{1}{2in\pi} \sum_{j=0}^{N} K_j (e^{inx_{j+1}} - e^{inx_j}),$$

et donc la majoration

$$|c_{-n}| \leq \frac{1}{n\pi} \sum_{j=0}^{N} |K_j| \, .$$

Pour une fonction continue par morceaux f sur $[-\pi, +\pi]$ quelconque, la proposition découle alors du fait qu'il existe (exercice) une suite (ϕ_k) de fonctions en escaliers telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \phi_k(x)| dx \to 0$ quand $n \to +\infty$. □

Deux fonctions distinctes peuvent-elles avoir les mêmes coefficients de Fourier ? En appliquant le résultat suivant à leur différence, on voit qu'il n'en est rien si ces fonctions diffèrent en un point où elles sont toutes deux continues :

Proposition 7.2.6 *Soit f une fonction continue par morceaux périodique. S'il existe un point $c \in [-\pi, \pi]$ tel que $f(c) \neq 0$ et f soit continue en c, alors les coefficients de Fourier de f ne sont pas identiquement nuls.*

7.2.2 Séries de Fourier. Cas des fonctions régulières

Nous venons de définir les coefficients de Fourier d'une fonction périodique f dont nous avons seulement supposé qu'elle était continue par morceaux. Nous nous intéressons maintenant à la série trigonométrique dont les coefficients sont précisément les $c_n(f)$ et que l'on appelle *série de Fourier de f*. La question naturelle est de savoir si cette série trigonométrique converge et dans ce cas si sa fonction somme est f. La réponse est très délicate dans le cas où l'on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur la fonction f. Par contre, et c'est l'objet de ce paragraphe, on peut voir assez facilement que c'est bien le cas pour les fonctions périodiques qui sont suffisamment régulières, c'est à dire plusieurs fois dérivables. L'ensemble des résultats qui suivent repose sur la

Proposition 7.2.7 *Soit k un entier strictement positif, f une fonction 2π-périodique, $(c_n(f))$ la suite des coefficients de Fourier exponentiels de f. Si f est k fois continument dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe un réel $M > 0$ tel que pour, tout $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, on ait*

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^k}$$

Preuve : Supposons que f est continument dérivable. En intégrant par parties et puisque $f(2\pi) = f(0)$ on obtient

$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt$$

et donc

$$|c_n(f)| \leq \frac{2\pi}{n}\sup\{|f'(t)|, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Dans le cas d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k > 1$, il suffit de montrer par récurrence de la même manière que

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^k}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt.$$

□

Corollaire 7.2.8 *Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \geq 2$, alors la série de Fourier de f est normalement convergente et sa somme est f.*

Preuve : Puisque l'on a $|c_n(f)| \leq M/n^2$, la série trigonométrique $\sum c_n(f)e^{int}$ est normalement convergente. On a vu que les coefficients de Fourier de la fonction somme S sont alors égaux à ceux de la fonction f. Puisque f et S sont continues, la proposition 7.2.6 entraîne l'égalité $f = S$. □

7.3 Théorème de convergence simple de Dirichlet

Nous abordons maintenant le problème difficile de la convergence des séries de Fourier de fonctions peu régulières. Dans ce cas la convergence uniforme n'a pas toujours lieu et nous devrons nous contenter d'un théorème de convergence simple dû à G. Dirichlet.
On dira qu'une fonction continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ est continument dérivable par morceaux (on dit aussi $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une partition de $[0, 2\pi]$ constituée d'un nombre fini d'intervalles $[a, b]$ tels que

1. f est continue sur $]a, b[$; de plus f possède une limite à droite en a et une limite à gauche en b,
2. f est dérivable sur $]a, b[$ et f' est continue par morceaux sur cet intervalle.

Proposition 7.3.1 (Théorème de Dirichlet) *Soit f une fonction 2π-périodique continument dérivable par morceaux et $x_0 \in [0, 2\pi]$. Alors la série de Fourier de f converge simplement en x_0 et sa somme est*

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

où $f(x_0+)$ et $f(x_0-)$ sont les limites à droite et à gauche de f en x_0. Si de plus f est continue en x_0, sa série de Fourier converge vers $f(x_0)$.

La preuve de ce théorème utilise le

Lemme 7.3.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a :*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{1}{2} \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]}.$$

Preuve
On remarque que $\sum_{k=1}^{n} \cos[ku] = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} e^{iku}$. Or

$$\sum_{k=1}^{n} e^{iku} = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k = e^{iu} \frac{1 - e^{inu}}{1 - e^{iu}} = e^{iu/2} e^{inu/2} \frac{e^{-inu/2} - e^{inu/2}}{e^{-iu/2} - e^{iu/2}} = e^{i(n+1)u/2} \frac{\sin(nu/2)}{\sin(u/2)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{\cos[(n+1)u/2] \sin(nu/2)}{\sin(u/2)} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \tfrac{\sin[(n+1/2)u] + \sin[-u/2]}{\sin(u/2)} \\ &= \tfrac{1}{2} \tfrac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

$\square$

En fait, on va démontrer le résultat un peu plus général suivant.

Proposition 7.3.3 *Soit f une fonction 2π-périodique, intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$. Si*

1. *la fonction f admet une limite à droite et une limite à gauche au point x, notées respectivement $f(x+0)$ et $f(x-0)$;*
2. *la fonction $u \mapsto \frac{1}{u}(f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0))$ est bornée au voisinage de 0,*

alors, la série de Fourier de f converge (simplement) au point x vers $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Preuve
Soit $S_n(x)$ la $n-$ième somme partielle de la série de Fourier de f :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

En utilisant les définition des a_k et des b_k, on a

$$\begin{array}{ll} S_n(x) & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\cos(kt)\cos(kx)+\sin(kt)\sin(kx)]dt \\ & = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)]dt \\ & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]}{\sin[\frac{t-x}{2}]}dt, \end{array} \tag{7.2}$$

où la dernière égalité découle du Lemme 7.3.2. En posant $u = t-x$, et en utilisant la périodicité de l'intégrant, on obtient

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u)du.$$

On découpe l'intégrale en deux et on change de variable dans le premier morceau :

$$\begin{array}{ll} S_n(x) & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u)du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u)du \\ & = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x-u)du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u)du. \end{array} \tag{7.3}$$

On a donc la "formule de Dirichlet" :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}du.$$

Au passage, on note que pour $f_0 = 1$, on a $a_0(f_0) = 1$, $a_n(f_0) = b_n(f_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et la formule de Dirichlet donne

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} du.$$

Notons alors $\alpha = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot$ On a

$$\begin{aligned} S_n(x) - \alpha &= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tfrac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} \tfrac{f(x+u)+f(x-u)}{2} du - \alpha \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tfrac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} du \\ &= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tfrac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]} [\tfrac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \alpha] du \\ &= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(u) \sin[(n+\tfrac{1}{2})u)] du. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Dans cette expression,

$$\phi(u) = \frac{u}{\sin[\frac{u}{2}]} \, \frac{1}{u} [\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \alpha]$$

est une fonction bornée au voisinage de 0, et intégrable sur tout intervalle de la forme $[\epsilon, 2\pi]$, $\epsilon > 0$, par hypothèse. Par conséquent ϕ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, et le Lemme de Riemann-Lebesgue permet d'affirmer que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) - \alpha = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(u) \sin[(n + \frac{1}{2})u)] du = 0 \, ,$$

ce qui termine la preuve du théorème de Dirichlet. □

Chapitre 8

Notions Hilbertiennes et applications aux séries de Fourier

8.1 Espace vectoriel normé

8.1.1 Norme

Définition 8.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E une application $x \mapsto ||x||$ de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $||x|| \geq 0$, $\forall x$;
2. $||x|| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$;
3. $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$;
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Définition 8.1.2 *Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.*

Comme Exemple, $\mathbb{R}^m$ peut-être muni de différentes normes. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on peut introduire la norme :

$$\mathbb{R}^m \ni x \mapsto |x|_p = (\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Le lecteur pourra facilement le vérifier pour $p = 1$ et verra plus tard une démonstration du cas $p = 2$.

De même, on peut introduire :

$$\mathbb{R}^m \ni x \mapsto |x|_\infty = \sup_i |x_i| \ .$$

Sur l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ $C^0([a,b])$, les applications $f \mapsto \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$, $f \mapsto \int_a^b |f(t)|dt$ définissent une norme.

8.1.2 Distance

Tout sous-ensemble Ω d'un espace vectoriel normé E est canoniquement muni d'une distance associée :

$$d(x,y) = ||x-y||$$

c'est à dire d'une application d qui vérifie :

Définition 8.1.3

1. *$d(x,y) > 0$, $\forall x,y$ avec $x \neq y$;*
2. *$d(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;*
3. *$d(x,y) = d(y,x)$;*
4. *$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.*

On peut alors définir la notion de limite d'une suite dans Ω. On dira qu'une suite (x_n) de points de Ω converge vers une limite ℓ dans Ω, si la suite $d(x_n,\ell)$ tend vers 0. On dira qu'une suite de x_n est de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall p \geq N, \text{on ait } d(x_n,x_p) \leq \epsilon \ .$$

Comme dans le cas de $\mathbb{R}$, on dit que Ω est complet si toute suite de Cauchy dans Ω converge dans Ω. $\mathbb{R}^m$ est complet pour n'importe laquelle des distances définies ci-dessus. Un intervalle ouvert $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas complet. On peut, par exemple, voir que la suite de terme général $(a + \frac{b-a}{2n})n \in \mathbb{N}^*$ est de Cauchy, car convergente dans $\mathbb{R}$ vers a mais n'est pas convergente dans $]a,b[$ car la limite mentionnée n'est pas dans l'intervalle $]a,b[$. Par contre, un intervalle fermé $[a,b]$ est complet. Le disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas complet. On donnera plus tard des exemples plus subtiles dans des espaces de dimension infinie.

8.2 Espaces préhilbertiens

8.2.1 Produit scalaire.

Définition 8.2.1 *Un produit scalaire sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ est défini par une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$: $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ telle que*

1. *$x \mapsto \langle x, y\rangle$ est une application linéaire, pour tout $y \in E$ fixé.*
2. *$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;*
3. *$\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$;*
4. *$\langle x, x\rangle \geq 0$.*

Définition 8.2.2 *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Exemple 8.2.3 *Sur $E = \mathbb{C}^m$, $(z, z') \mapsto \sum_j z_j \cdot \overline{z'_j}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^m$. On parle d'espace hermitien. Sur $E = \mathbb{R}^m$, $(x, x') \mapsto \sum_j x_j \cdot x'_j$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$. On parle d'espace euclidien.*

Exemple 8.2.4 *Sur $E = C^0([a, b]; \mathbb{C})$, l'application $(f, g) \mapsto (\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt)$ définit un produit scalaire.*
Notons que, si on remplace $C^0([a, b]; \mathbb{C})$, par l'espace des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{C}$, ce n'est plus un produit scalaire. Si en effet une fonction f est nulle sauf en un nombre fini de points où elle est non-nulle. Le produit scalaire $\langle f, f\rangle$ est nul sans que la fonction soit identiquement nulle.
Le plus sage sera, pour beaucoup de problèmes, de considérer que ces fonctions telles que $\langle f, f\rangle$ sont "nulles" (comme on l'a vu dans le cas des séries de Fourier) mais c'est une autre histoire que l'on racontera (un peu mais) plus tard.

8.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

L'inégalité suivante, appelée inégalité de Cauchy-Schwarz, joue un rôle très important dans l'analyse hilbertienne.

Proposition 8.2.5 *Dans un espace préhilbertien on a :*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}\ .$$

8.2.3 Norme préhilbertienne

Un espace préhilbertien est automatiquement muni d'une norme définie par :

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\ .$$

La vérification que c'est une norme est une conséquence immédiate de Cauchy-Schwarz. On vérifie en effet que :

$$\sqrt{\langle (x + y), (x + y)\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\ ,$$

en élevant au carré.

Remarque 8.2.6 *On peut retrouver, dans le cas d'une norme associée à un produit scalaire, le produit scalaire à partir de la norme. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il suffit en effet de remarquer l'identité :*

$$\sqrt{\langle (x+y),(x+y)\rangle} - \sqrt{\langle (x-y),(x-y)\rangle} = 4\langle x,y\rangle \ ,$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) \ .$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il faut jouer avec $x+y$, $x-y$, $x+iy$ et $x-iy$.

Exemple 8.2.7 *L'application $f \mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)$ définit une norme sur $C^0([a,b];\mathbb{C})$. On parle de norme L^2.*

8.3 Orthogonalité

8.3.1 Quelques définitions.

On dit que x et y sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Plus généralement, deux espaces vectoriels M et N sont orthogonaux si pour tout $x \in M$ et $y \in N$, on a $\langle x,y\rangle = 0$.

8.3.2 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Théorème 8.3.1 *Dans un espace préhilbertien $\mathcal{H}$ de dimension finie, on peut toujours construire une base orthonormée.*

Cela se fait par le procédé de Gram-Schmidt.

8.3.3 Expression du produit scalaire dans une base orthonormée.

Si $x \in E$ et $y \in E$, avec $x = \sum x_i e_i$ et $y = \sum_j y_j e_j$, on a :

$$\sum_i x_i \cdot \overline{y_i} = \langle x,y\rangle \ .$$

8.4 Espace de Hilbert

8.4.1 L'espace ℓ^2

Jusqu'à maintenant, la plupart des exemples traités sont de dimension finie. Voilà un exemple de base en dimension infinie.
On désigne par $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ (on peut aussi considérer $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$) le sous ensemble des suites $(x_n)_{n\in N}$ telles que :

$$\sum_n |x_n|^2 < +\infty \ .$$

Proposition 8.4.1 *L'ensemble ℓ^2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'une structure préhilbertienne par le produit scalaire :*

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \overline{y_i} \ .$$

8.4.2 Définition d'un espace de Hilbert

Définition 8.4.2 *On dit qu'un espace préhilbertien est un espace de Hilbert s'il est complet, c'est-à-dire, si toute suite de Cauchy converge.*

Exemple 8.4.3 *ℓ^2 est complet. Soit en effet (X_n) $(n \in \mathbb{N})$ une suite de Cauchy dans ℓ^2 (attention, c'est une suite de suites). En désignant par X_{np} le terme général d'ordre p de X_n, on en déduit d'abord que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite X_{np} $(n \in \mathbb{N})$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet. Il existe donc X_p^∞ dans $\mathbb{C}$ tel que :*

$$X_p^\infty = \lim_{n\to+\infty} X_{np} \ .$$

On montre ensuite (exercice), en se rappelant que X_n est une suite de Cauchy, que la suite de terme général X_p^∞ $(p \in \mathbb{N})$ est dans ℓ^2 et que la suite X_n de ℓ^2 converge vers X^∞ dans ℓ^2 :

$$\lim_{n\to+\infty} ||X^\infty - X_n||_{\ell^2} = 0 \ .$$

8.4.3 Convergences

On discute ici les liens entre convergence faible et convergence forte.

Définition 8.4.4 *On dit qu'une suite x_n dans un espace préhilbertien $\mathcal{H}$ converge faiblement, si pour tout $y \in \mathcal{H}$, la suite $\langle x_n, y\rangle$ est convergente.*

On vérifie facilement, que si x_n converge fortement vers une limite x^∞, c'est à dire si $d(x^\infty, x_n) = ||x^\infty - x_n||$ tend vers 0, alors x_n converge faiblement vers x^∞. On a en effet :

$$|\langle x_n, y\rangle - \langle x^\infty, y\rangle| \leq ||x_n - x^\infty|| \cdot ||y|| \; .$$

Proposition 8.4.5 *Dans un Hilbert $\mathcal{H}$, si x_n est une suite faiblement convergente, alors il existe x^∞ dans $\mathcal{H}$, tel que : $\langle x_n, y\rangle$ tende vers $\langle x^\infty, y\rangle$ pour tout y.*

Démonstration : admise.

8.5 Théorème de la projection orthogonale

Définition 8.5.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $x_0 \in F$ est la meilleure approximation de x dans F si :*

$$||x - x_0|| \leq ||x - y|| \; , \; \forall y \in F \; . \tag{8.1}$$

L'exemple type est dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien, le cas où F est une droite passant par l'origine.

Théorème 8.5.2 .

1. *x_0 est la meilleure approximation de x dans F si et seulement si $(x - x_0)$ est orthogonal à F.*
2. *x_0 s'il existe est unique.*
3. *Si F est de dimension finie m, x_0 existe. Il est donné, si (e_i) est une base orthonormée de F $(i = 1, \cdots, m)$ par :*

$$x_0 = \sum_i \langle x \, , \, e_i\rangle e_i \; .$$

Le point x_0 est aussi appelé la projection orthogonale de x sur F. On peut montrer que l'application qui associe à x sa projection orthogonale x_0 est linéaire. Elle est notée Π_F.
On notera que :

$$||x||^2 = ||\Pi_F x||^2 + ||x - \Pi_F x||^2 \; . \tag{8.2}$$

Comme corollaire, nous obtenons l'inégalité de Bessel.

Proposition 8.5.3 *Si (e_i) est un système orthonormé, alors*

$$\sum_i |x_i|^2 \leq ||x||^2 \ ,$$

avec $x_i = \langle x \, , \, e_i \rangle$.

Le cas où le système est infini ($i \in \mathbb{N}^*$) peut aussi être traité en montrant d'abord, pour tout N, l'inégalité pour $i = 1, \cdots, N$.
Notons que l'on peut considérer plus généralement ce problème de la meilleure approximation dans le cas où , à la place de F, on considère des ensembles plus généraux Ω convexes, complets.

Exercice 8.5.4 *On peut reprendre la démonstration du procédé de Gram-Schmidt en utilisant la notion de projecteur orthogonal. On considère la projection de y_n sur l'espace $E^{(n-1)}$:*

$$\Pi_{E^{(n-1)}} y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_n \ , \ x_k \rangle x_k \ .$$

On observe que le vecteur $y_n - \Pi_{E^{(n-1)}} y_n$ est orthogonal à $E^{(n-1)}$ d'après le théorème de la projection orthogonale. Multipliant par un scalaire a_{nn} on obtient x_n.

Exercice 8.5.5 *On considére l'espace préhilbertien $C^0([0,1];\mathbb{C})$ muni de la norme $f \mapsto \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt}$. On peut prendre comme $F^{(m)}$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à m. Dans un premier temps, on peut appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base : $(1, t, t^2, \cdots, t^m)$ pour construire une base orthonormale de $F^{(m)}$.*

Etudier le projecteur $\Pi_{F^{(m)}}$.

8.6 Convergence en moyenne quadratique

Nous nous intéressons maintenant à l'approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques. Le résultat principal dans ce domaine est que pour une notion naturelle de distance entre les fonctions de $\mathcal{E}$, le polynôme trigonométrique de degré n fixé le plus proche d'une fonction f est précisément la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f.

Nous introduisons donc d'abord une notion adéquate de "distance" entre les fonctions de $\mathcal{E}$ périodique et continues par morceaux sur une période, qui a l'avantage par rapport à la distance habituelle

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - g(x)|$$

(associée à la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$) de n'être pas sensible à d'éventuelles discontinuités isolées. On pose en effet, pour deux fonctions f et g de $\mathcal{E}$,

$$d_2(f,g) = (\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt)^{1/2}$$

et on appelle ce nombre écart quadratique moyen entre f et g. Il s'agit de la "distance" associée à la "norme" préhilbertienne introduite comme exemple dans un paragraphe précédent. L'introduction des guillemets est due au fait que l'écart quadratique moyen entre deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points est nul alors que les fonctions sont distinctes.

Proposition 8.6.1 *Si une suite de fonction (f_n) de $\mathcal{E}$ converge vers une fonction f de $\mathcal{E}$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$, alors cette suite converge vers f en écart quadratique moyen, c'est à dire*

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(f,f_n) = 0$$

Preuve : L'hypothèse de convergence de la suite (f_n) s'écrit

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Or on a

$$d_2(f,f_n) \le \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| (\int_0^{2\pi} dt)^{1/2}$$

ce qui montre la proposition. □

Proposition 8.6.2 *Soit f une fonction périodique de période 2π, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Parmi tous les polynômes trigonométriques $Q(x)$ de degré inférieur à n, le polynôme de Fourier de degré n est le seul pour lequel l'écart quadratique moyen $d_2(f,Q)$ atteint sa plus petite valeur, et l'on a*

$$d_2(f,P_n) = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \tag{8.3}$$

Preuve : C'est juste (dans le cas où f est continue) une application du théorème de la projection orthogonale. On prend comme espace préhilbertien $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions continues périodiques et comme espace F l'espace de dimension $m = 2n + 1$ des polynômes trigonométriques d'ordre inférieur ou égal à n.
Dans le cas général, il y a une petite difficulté liée au fait que la distance d_2 n'est pas tout à fait une distance.
l'Inégalité de Bessel prend la forme suivante :

Corollaire 8.6.3 *Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ est convergente et l'on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Voici enfin la célèbre formule de Parseval qui en termes physiques montre que l'énergie d'un signal est égal à la somme des énergies des harmoniques qui le composent.

Corollaire 8.6.4 *Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^2. On a l'égalité*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \tag{8.4}$$

Preuve : On a vu que la série de Fourier des fonctions 2π-périodiques de classe $\mathcal{C}^2$ était normalement convergente. Avec la proposition 8.6.1 on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(f, P_n) = 0$$

où P_n désigne le n-ième polynôme de Fourier de f. Il suffit alors de passer à la limite dans l'identité (8.3) de la proposition précédente. □

La preuve de ce corollaire montre que la formule de Parseval est vraie dès que la série de Fourier de f converge normalement, par exemple pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux qui sont continues. On peut aussi montrer (mais c'est beaucoup plus difficile !) que la formule de Parseval est vraie même pour les fonctions qui sont seulement continues par morceaux. Ceci sera expliqué brièvement dans la section suivante.

8.7 Théorie hilbertienne

On suppose ici que le lecteur est familier avec l'intégrale de Lebesgue (allez-voir le Rudin). On aurait dû mentionner auparavant que $\mathcal{C}^0_{per}$ ou $\mathcal{E}$ (même quotienté par les "fonctions "nulles") n'est pas un espace complet quand on choisit comme norme la norme L^2. On ne peut donc pas utiliser toute la puissance de l'analyse Hilbertienne pour ces espaces. On définit facilement $L^2(\mathbb{T}^1)$ (autre notation $L^2(S^1)$) des (classes de) fonctions L^2 sur le tore en l'identifiant à $L^2(]0,2\pi[)$ muni de sa norme canonique. Pas de problème car le point enlevé sur le cercle est de mesure (de Lebesgue) nulle.
On sait par la théorie de Lebesgue que cet espace muni de la norme L^2 est complet.
Comme $\mathcal{C}_0^\infty(]0,2\pi[)$, qu'on peut identifier à un sous-espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (2π)-périodiques, est dense dans $L^2(]0,2\pi[)$ muni de sa norme naturelle (c'est la méthode de troncature et régularisation), on en déduit que $\mathcal{C}^\infty_{per}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T}^1)$.

Par ailleurs, on a vu que les fonctions $t \mapsto e_n(t) := e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z})$ forment un système orthonormé dans $L^2(\mathbb{T}^1)$.
Les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont également bien définis comme

$$c_n(f) = \langle f\,,\, e_n\rangle_{L^2}\,.$$

D'après (8.4), on a, pour f dans C^∞_{per}

$$\sum_n |c_n(f)|^2 = ||f||^2_{L^2}\,.$$

Cette identité se prolonge par continuité à $f \in L^2$.
Il est alors facile de vérifier, que la famille e_n $(n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^1)$ et il résulte alors de la théorie Hilbertienne que $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définit une isométrie de $L^2(\mathbb{T}^1)$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Espaces de Sobolev sur le cercle.

On commence par travailler sur $\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$. On pose $\mathfrak{h}^0(\mathbb{Z}) = \ell^2(\mathbb{Z})$ puis on définit par récurrence pour $k \geq 1$

$$\mathfrak{h}^k(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{h}^{k-1}(\mathbb{Z})\,,\, (na_n) \in \mathfrak{h}^{k-1}(\mathbb{Z})\}\,,$$

muni de la norme hilbertienne naturelle associée à la définition :

$$||(a_n)||^2_{\mathfrak{h}^k} := ||(a_n)||^2_{\mathfrak{h}^{k-1}} + ||(na_n)||^2_{\mathfrak{h}^{k-1}}$$

On vient de définir une isométrie de $L^2(\mathbb{T}^1)$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Grâce à cette isométrie, on peut définir des sous-espaces naturels de $L^2(\mathbb{T}^1)$, notés $H^k(\mathbb{T}^1)$, correspondant à $\mathfrak{h}_k$. Si on observe que $\mathfrak{h}^1$ est inclus dans l'espace des séries absolument convergentes, qui est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_n |a_n| = |a_0| + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\,(n|a_n|) \leq |a_0| + ||na_n||_{\ell^2} \sqrt{\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}}\,,$$

on peut inclure $H^1(\mathbb{T}^1)$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1)$, c'est à dire que si $u \in H^1(\mathbb{T}^1)$, il existe une fonction continue périodique dans la classe de fonctions de u (considérée comme élément de $L^2(\mathbb{T}^1)$). Elle est simplement définie comme :

$$\sum_n c_n(u)e^{int}\,,$$

où $c_n(u)$ est le coefficient de Fourier de u.

Exercice 8.7.1 *Montrer que* $\cap_{k\in\mathbb{N}}\mathfrak{h}^k := \mathfrak{s}(\mathbb{Z})$ *correspond dans l'isomorphisme canonique aux fonctions* C^∞ *sur* $\mathbb{T}^1$ *(ou encore aux fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ (2π)*-périodiques sur* $\mathbb{R}$*).*

Chapitre 9

Transformation de Fourier

9.1 Transformée de Fourier L^1.

La transformation de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est la fonction $\mathcal{F}(f) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx\,. \tag{9.1}$$

Par la théorie de l'intégration, on observe que $\mathcal{F}f$ est en fait continue et que l'on a :

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}\,. \tag{9.2}$$

Un résultat un peu plus délicat est le lemme de Riemann-Lebesgue :

Lemme 9.1.1 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0\,.$$

La preuve est en deux temps.
On montre d'abord que c'est vrai pour f dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^b)$ en utilisant que

$$(-\Delta + 1)e^{-ix\cdot\xi} = (1 + |\xi|^2)e^{-ix\cdot\xi}\,.$$

On peut alors écrire que

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{F}f)(\xi) & = (1+|\xi|^2)^{-1} \int (-\Delta+1)e^{-ix\cdot\xi}\ f(x)dx \\ & = (1+|\xi|^2)^{-1} \int (e^{-ix\cdot\xi}\ (-\Delta+1)f(x)dx \\ & = (1+|\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}((-\Delta+1)f)\,. \end{array}$$

On peut alors appliquer (9.2) à $(-\Delta + 1)f$.

Dans une deuxième étape, on utilise la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et la continuité de la transformée de Fourier de L^1 dans L^∞. $\square$

Le rôle majeur que joue la transformation de Fourier dans l'étude des EDP est lié au fait que, lorsque ces objets sont bien définis,

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ transforme l'action d'un opérateur différentiel à coefficients constants en produit par un polynôme. Ce fait n'aurait aucun intérêt sans une formule d'inversion permettant de retrouver la fonction f connaissant $\mathcal{F}(f)$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi\,.$$

Malheureusement, cette formule n'a de sens que lorsque $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et ce n'est en général pas le cas pour $f \in L^1$. On commence donc par introduire une (suffisamment grande) classe de fonctions qui est stable par $\mathcal{F}$, et pour lesquelles les deux propriétés ci-dessus sont vraies.

Notons finalement la proposition

Proposition 9.1.2 *Pour f et g dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, la (classe de) fonction dans L^1 définie (via Fubini) par*

$$(f \star g)(x) = \int f(x-y) g(y) dy \ p.p.$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et admet comme transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi)\ (\mathcal{F}g)(\xi)\,. \tag{9.3}$$

On notera parfois pour simplifier la fonction $\xi \mapsto (\mathcal{F}f)(\xi)$ par $\hat{f}(\xi)$.

9.2 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

9.2.1 Définitions, exemples

Définition 9.2.1 *On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0,\ \ t.\ q.\ \sup_x |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq C_{\alpha,\beta}.$$

Ici, on rappelle que $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ and $\partial^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}$.

Exemples 9.2.2

1. *$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$, la fonction $\varphi(x) = e^{-z|x|^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*
3. *Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

On dit souvent qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ et φ ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, entendant par là que leur produit par un polynôme quelconque est borné. La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui nous intéresse est celle donnée par la famille de semi-norme N_p (en fait ce sont des normes) définies par

$$N_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq p} \sup |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|.$$

Par exemple pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a l'équivalence

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, N_p(\varphi) < +\infty.$$

Proposition 9.2.3 *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\partial^\beta \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $P(x)\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour n'importe quel polynôme P.*

Preuve
Il suffit de remarquer que

$$N_p(x^\alpha \partial^\beta \varphi) = \sum_{|\lambda|+|\mu|\leq p} \sup |x^\lambda \partial^\mu (x^\alpha \partial^\beta \varphi(x))| \leq N_{p+q}(\varphi) \tag{9.4}$$

dès que $|\alpha| + |\beta| \leq q$. □

9.2.2 Convergence des suites et théorèmes de densité

Définition 9.2.4 *Soit (φ_j) une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On dit que (φ_j) converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lorsque pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$N_p(\varphi_j - \varphi) \to 0 \text{ quand } j \to +\infty.$$

Remarque 9.2.5 *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Si (φ_j) converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $(x^\alpha \varphi_j)$ converge vers $x^\alpha \varphi$ et $(\partial^\alpha \varphi_j)$ converge vers $(\partial^\alpha \varphi)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, la multiplication par x^α et la dérivation sont des opérations continues dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cela découle immédiatement de l'inégalité (9.4).*

Proposition 9.2.6 *Pour tout $q \in [1, +\infty]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$. On a même, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^q} \leq C_q N_p(\varphi)^{1-1/q} N_{p+n+1}(\varphi)^{1/q} \text{ pour } |\alpha| + |\beta| \leq p.$$

Preuve.
On démontre directement l'inégalité : dans le cas $\alpha = \beta = 0$, elle donne $\mathcal{S} \subset L^q$. On pose $g(x) = x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$.

$$\begin{aligned} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^q}^q &= \int |g(x)|^q dx \leq \sup |g(x)|^{q-1} \int |g(x)| dx \\ &\leq \sup |g(x)|^{q-1} \sup (1+|x|)^{n+1} |g(x)| \int \tfrac{1}{(1+|x|)^{n+1}} dx \\ &\leq C_n N_0(g)^{q-1} N_{n+1}(g) \\ &= C_n N_p(\varphi)^{q-1} N_{p+n+1}(\varphi). \end{aligned} \tag{9.5}$$

□

Puisque $N_p(\varphi) \leq N_{p+n+1}(\varphi)$, on a bien sûr,

$$\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^q} \leq C_q N_{p+n+1}(\varphi). \tag{9.6}$$

On notera que dans le cas $q = 1$, la Proposition 9.2.6 et (9.6) donnent la même majoration

$$\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^1} \leq C N_{p+n+1}(\varphi), \tag{9.7}$$

alors que pour $q = \infty$, la Proposition 9.2.6 est meilleure que (9.6) et donne

$$\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty} \leq C N_p(\varphi), \tag{9.8}$$

ce qui découle aussi directement de la définition de N_p.
Puisque $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans les $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $p \in [1, +\infty[$, on en déduit le

Corollaire 9.2.7 *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans tous les $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $p \in [1, +\infty[$.*

On a aussi la

Proposition 9.2.8 *$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite (φ_j) de fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction qui vaut 1 sur $B(0,1)$. On pose $\varphi_j(x) = \varphi(x)\chi(x/j)$. Les fonctions φ_j sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, et valent φ dans la boule $B(0, j)$. La formule de Leibniz donne

$$\partial^\beta(\varphi - \varphi_j)(x) = \partial^\beta \varphi(x)(1 - \chi(x/j)) + \sum_{|\gamma| \geq 1, \gamma \leq \beta} C_\beta^\gamma \frac{1}{j^{|\gamma|}} \partial^{\beta-\gamma} \varphi(x) (\partial^\gamma \chi)(\frac{x}{j}).$$

Donc, quand $j \to +\infty$,

$$\|x^\alpha \partial^\beta (\varphi - \varphi_j)(x)\|_\infty \le \sup_{|x|\ge j} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| + \frac{C}{j} \sum_{\gamma \le \beta} \|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} \varphi\|_\infty \to 0.$$

Ici on rappelle que $\gamma \le \beta$ signifie (par convention) que $\gamma_1 \le \beta_1$,...., $\gamma_n \le \beta_n$. En effet

$$\sup_{|x|\ge j} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le \frac{1}{j^2} \sup ||x|^2 x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le \frac{1}{j^2} N_{p+2}(\varphi).$$

□

9.3 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

9.3.1 Définitions, premières propriétés

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathcal{F}(\varphi)$ est bien défini et appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Définition 9.3.1 *Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on note $\hat{\varphi}$, $\mathcal{F}(\varphi)$ ou encore $\mathcal{F}_{x\to\xi}(\varphi(x))$ la fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(\varphi(x)) = \int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx.$$

L'application linéaire $\varphi \mapsto \mathcal{F}(\varphi)$ est appelée transformation de Fourier.

On rassemble dans la proposition qui suit quelques propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 9.3.2 *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

1. *La fonction $\mathcal{F}(\varphi)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\partial_j \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(-ix_j \varphi(x))$.*
2. *Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $\mathcal{F}(\partial_j \varphi)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$.*
3. *Pour $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_{x\to\xi}(\varphi(x-a)) = e^{-ia\cdot\xi} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$.*
4. *Pour $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{ia\cdot x} \varphi(x)) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi - a)$.*

Preuve
i) La fonction $(x, \xi) \mapsto e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et

$$|\partial_{\xi_j}(e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x))| = |-ix_j e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)| = |x_j \varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Donc le théorème de dérivation sous le signe somme dit que $\mathcal{F}(\varphi)$ est $\mathcal{C}^1$, et que

$$\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int -ix_j e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x) = \mathcal{F}(-ix_j\varphi(x)).$$

ii) On écrit la preuve pour $j = 1$. En intégrant par parties

$$\int \partial_1\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx_1 = i\xi_1 \int \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx_1$$

On intègre les deux membres de cette égalité par rapport à x'. Par Fubini, puisque $\varphi, \partial_1\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\int \partial_1\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx = i\xi_1 \int \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

Pour (iv), il suffit d'écrire

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{ia\cdot x}\varphi(x)) = \int e^{-ix\cdot\xi}e^{ia\cdot x}\varphi(x)dx = \int e^{-i(x-a)\cdot\xi}\varphi(x)dx = \mathcal{F}(\varphi)(\xi - a).$$

On a enfin, en changeant de variable,

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(\varphi(x-a)) = \int e^{ix\cdot\xi}\varphi(x-a)dx = \int e^{i(x+a)\cdot\xi}\varphi(x)dx = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}(\varphi)(\xi),$$

c'est à dire (iii). □

En raison de la présence de $i = \sqrt{-1}$ dans les formules (i) et (ii), on introduit la notation

$$D_j = \frac{1}{i}\partial_j.$$

Par exemple (ii) devient $\mathcal{F}(D_j\varphi) = \xi_j\mathcal{F}(\varphi)$, et (i) s'écrit $D_j\mathcal{F}(\varphi) = -\mathcal{F}(x_j\varphi)$. On pourra retenir ces relations sous la forme

$$\begin{cases} \widehat{D_j\varphi} = \xi_j\widehat{\varphi}, \\ \widehat{x_j\varphi} = -D_j\widehat{\varphi}. \end{cases}$$

On remarque aussi, en utilisant (i), que $\mathcal{F}(\varphi)$ est $\mathcal{C}^\infty$ puisque $x^\alpha\varphi \in \mathcal{S}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

9.3.2 Gaussiennes (1)

Proposition 9.3.3 *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que* $\operatorname{Re} z > 0$*, on a*

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{-z|x|^2}) = (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}})^n e^{-|\xi|^2/4z},$$

où $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln(z)}$*, et* $\ln z$ *désigne la détermination principale du logarithme dans* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Preuve
On remarque d'abord que

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{-z|x|^2}) = \int e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+\ldots+x_n\xi_n)}e^{-z(x_1^2+\ldots x_n^2)}dx_1\ldots dx_n = \prod_{j=1}^n \int e^{-ix_j\xi_j}e^{-zx_j^2}dx_j$$

Il suffit donc d'établir le résultat en dimension 1. On suppose d'abord que $z \in]0,+\infty[$. Soit $\varphi_z(x) = e^{-zx^2}$. On a vu que

$$\partial_\xi\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix\xi}(-ix)e^{-zx^2}dx$$

Donc, en intégrant par parties,

$$\partial_\xi\hat{\varphi}(\xi) = \frac{i}{2z}\int e^{-ix\xi}\varphi'(x)dx = -\frac{i}{2z}\int(-i\xi)e^{-ix\xi}\varphi(x)dx = -\frac{\xi}{2z}\hat{\varphi}(\xi).$$

Ainsi $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2/4z}\hat{\varphi}(0)$. Or

$$\hat{\varphi}(0) = \int e^{-zx^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}},$$

d'où le résultat dans ce cas.
Soit alors $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixé, on note $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\varphi(z) = \int e^{-ix\cdot\xi}e^{-z|x|^2}dx.$$

φ est une fonction holomorphe sur Ω. En effet
– $z \mapsto e^{-ix\cdot\xi}e^{-z|x|^2}$ est holomorphe pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
– Si $K \subset \Omega$ est compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\operatorname{Re} z > \varepsilon$ pour tout $z \in K$, et

$$|e^{-ix\cdot\xi}e^{-z|x|^2}| \leq e^{-\varepsilon|x|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Or on sait que pour $z \in]0,+\infty[$,

$$\varphi(z) = (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}})^n e^{-|\xi|^2/4z}.$$

Comme le membre de droite est également holomorphe dans Ω, cette égalité reste vraie pour tout z dans Ω. □

9.3.3 Formule d'inversion

Proposition 9.3.4 *La transformation de Fourier est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Son inverse $\mathcal{F}^{-1}$ est donné par*

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\widecheck{\mathcal{F}(\varphi)}(x).$$

De plus $\mathcal{F}$ est une application linéaire bicontinue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, au sens où , pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que

$$N_p(\mathcal{F}(\varphi)) + N_p(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)) \leq C_p N_{p+n+1}(\varphi).$$

Preuve
a) On montre d'abord que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $p \in \mathbb{N}$, et $|\alpha| + |\beta| \leq p$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a vu que

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}_{x\to\xi}(\partial^\alpha(x^\beta\varphi(x))).$$

Or la formule de Leibniz donne

$$\partial^\alpha(x^\beta\varphi) = \sum_{\gamma\leq\alpha} C_\alpha^\gamma \partial^\gamma(x^\beta)\partial^{\alpha-\gamma}\varphi,$$

donc $\partial^\alpha(x^\beta\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi $\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta\varphi)) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
On a d'ailleurs :

$$\begin{aligned}|\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| &\leq \|\mathcal{F}_{x\to\xi}(\partial^\alpha(x^\beta\varphi(x)))\|_{L^\infty} \\ &\leq \|\partial^\alpha(x^\beta\varphi(x))\|_{L^1} \\ &\lesssim N_{n+1}(\partial^\alpha(x^\beta\varphi)) \\ &\lesssim N_{n+1+p}(\varphi)\end{aligned} \tag{9.9}$$

d'après la Proposition 9.2.6.
Donc $N_p(\mathcal{F}(\varphi)) \leq CN_{n+1+p}(\varphi)$.
b) On montre maintenant que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

Or

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \int e^{ix\cdot\xi}(\int e^{-iy\cdot\xi}\varphi(y)dy)d\xi,$$

mais la fonction $g : (y,\xi) \mapsto e^{ix\cdot\xi}e^{-iy\cdot\xi}\varphi(y)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$, puisque $|g(y,\xi)| = |\varphi(y)|$, et on ne peut pas intervertir l'ordre des intégrations. Cependant, par le théorème de convergence dominée,

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int e^{ix\cdot\xi}e^{-\varepsilon|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)d\xi,$$

et

$$\int e^{ix\cdot\xi}e^{-\varepsilon|\xi|^2}(\int e^{-iy\cdot\xi}\varphi(y)dy)d\xi = \int(\int e^{i(x-y)\cdot\xi}e^{-\varepsilon|\xi|^2}d\xi)\varphi(y)dy.$$

Donc, grâce à la proposition 9.3.3,

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}})^n\int e^{-|x-y|^2/4\varepsilon}\varphi(y)dy.$$

On effectue enfin le changement de variable $u = (x-y)/2\sqrt{\varepsilon}$, et on obtient

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2\sqrt{\pi})^n\int e^{-|u|^2}\varphi(x-2\sqrt{\varepsilon}u)du.$$

Le théorème de convergence dominée, donne alors

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = (2\sqrt{\pi})^n\varphi(x)\int e^{-|u|^2}du = (2\pi)^n\varphi(x).$$

c) Le reste de la proposition découle du fait que $\mathcal{F}^{-1}(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\widetilde{\mathcal{F}(\varphi)}$. □

9.3.4 Formule de Parseval

Proposition 9.3.5 *(Lemme des chapeaux) Soit φ et ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a*

1. $\int \hat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx = \int \varphi(y)\hat{\psi}(y)\,dy.$
2. $\int \varphi(y)\overline{\psi}(y)\,dy = (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}(x)\overline{\hat{\psi}}(x)\,dx$

Preuve
(i) On a, par Fubini,

$$\begin{aligned}\int \hat{\varphi}(x)\psi(x)dx &= \int(\int e^{-ix\cdot y}\varphi(y)dy)\psi(x)dx\\ &= \int(\int e^{-ix\cdot y}\psi(x)dx)\varphi(y)dy\\ &= \int \varphi(y)\hat{\psi}(y)\,dy\,.\end{aligned}$$

(ii) Il suffit d'appliquer (i) à φ et $\omega = (2\pi)^{-n}\overline{\hat{\psi}}$. En effet

$$\widehat{\omega}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\cdot\xi}\overline{\hat{\psi}(x)}dx = \overline{\mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi})(\xi)} = \overline{\psi(x)}\,,$$

donc

$$\int \hat{\varphi}\omega = (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}} = \int \varphi\overline{\psi}\,.$$

□

En terme du produit scalaire hermitien dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, la relation (ii) s'écrit

$$(\varphi, \psi)_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n}(\hat{\varphi}, \hat{\psi})_{L^2}.$$

En particulier pour $\psi = \varphi$, on obtient la formule de Parseval :

Corollaire 9.3.6 *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a*

$$\|\varphi\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}\|\hat{\varphi}\|_{L^2}. \tag{9.10}$$

Exercice 9.3.7 *Montrer que $\mathcal{F}(\bar{\varphi}) = \overline{\overbrace{\mathcal{F}(\varphi)}}$.*

9.3.5 Convolution et transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 9.3.8 *Soit φ et ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a*

1. *$\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\,\hat{\psi}$.*
2. *$\widehat{\varphi\,\psi} = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}$.*

Preuve
On commence par le point (i). On sait que $\varphi * \psi \in L^1$ puisque $\varphi, \psi \in L^1$. Soit $p \in \mathbb{N}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| + |\beta| \leq p$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$x^\alpha\partial^\beta(\varphi * \psi)(x) = x^\alpha\partial_x^\beta\int \varphi(x-y)\psi(y)dy.$$

Comme la fonction $y \mapsto \partial_x^\beta\varphi(x-y)\psi(y)$ est intégrable pour tout x, et dominée par $\sup|\partial^\beta\varphi|\ |\psi(y)| \in L^1$, on a

$$\begin{aligned} x^\alpha\partial^\beta(\varphi * \psi)(x) &= \int x^\alpha\partial_x^\beta\varphi(x-y)\psi(y)dy \\ &= \int (x-y+y)^\alpha\partial_x^\beta\varphi(x-y)\psi(y)dy \\ &= \sum_{\gamma\leq\alpha} C_\gamma^\alpha\int (x-y)^\gamma y^{\alpha-\gamma}\partial_x^\beta\varphi(x-y)\psi(y)dy \\ &= \sum_{\gamma\leq\alpha} C_\gamma^\alpha\int (x-y)^\gamma(\partial^\beta\varphi)(x-y)y^{\alpha-\gamma}\psi(y)dy \\ &= \sum_{\gamma\leq\alpha} C_\gamma^\alpha(y^\gamma\partial^\beta\varphi) * (y^{\alpha-\gamma}\psi)(x). \end{aligned} \tag{9.11}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young,

$$\|x^\alpha \partial^\beta(\varphi * \psi)\|_{L^\infty} \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} C_\gamma^\alpha \|y^\gamma \partial^\beta \varphi\|_{L^1} \; \|y^{\alpha-\gamma}\psi\|_{L^\infty}.$$

La proposition 9.2.6, en particulier (9.7) et (9.8), donne alors

$$N_p(\varphi * \psi) \leq C N_{p+n+1}(\varphi) N_p(\psi), \tag{9.12}$$

ce qui montre que $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
On a enfin, par Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\varphi * \psi)(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi} \varphi * \psi(x) dx = \int e^{-ix\cdot\xi} (\int \varphi(x-y)\psi(y)dy) dx \\
&= \int \psi(y) (\int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x-y)\psi(y) dx) dy \\
&= \int \psi(y) (\int e^{-i(y+z)\cdot\xi} \varphi(z) dz) dy \\
&= \int e^{-iy\cdot\xi}\psi(y) dy \int e^{-iz\cdot\xi}\varphi(z) dz = \hat{\varphi}(\xi)\hat{\psi}(\xi).
\end{aligned} \tag{9.13}$$

On montre maintenant (ii). Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $u = \mathcal{F}^{-1}(\varphi), v = \mathcal{F}^{-1}(\psi)$. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi\psi}(\xi) &= \mathcal{F}(\hat{u}\hat{v})(\xi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(u * v))(\xi) = (2\pi)^n \widetilde{u * v}(\xi) \\
&= (2\pi)^n \int u(-\xi-\eta) v(\eta) d\eta = (2\pi)^n \int \breve{u}(\xi+\eta) v(\eta) d\eta \\
&= (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(\xi+\eta) \check{\hat{\psi}}(\eta) d\eta \\
&= (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(\xi-\eta) \hat{\psi}(\eta) d\eta \\
&= (2\pi)^{-n} \left(\hat{\varphi} * \hat{\psi}\right)(\xi).
\end{aligned} \tag{9.14}$$

□

9.4 Transformée de Fourier L^2

Nous avons construit une application inversible de $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dont l'inverse est aussi continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
De plus ces deux applications sont continues pour $\mathcal{S}$ muni de la norme L^2.
On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il existe alors par un théorème classique d'analyse fonctionnelle, une unique application linéaire continue de L^2 dans L^2 qui prolonge $\mathcal{F}$ défini sur $\mathcal{S}$. C'est ainsi qu'on définit la transformée de Fourier L^2.
Rappelons la construction. Si $f \in L^2$, soit f_j une suites de fonctions dans $\mathcal{S}$ sui tend vers f dans L^2. La suite f_j est donc une suite de Cauchy pour la norme L^2. Par l'identité de Parseval, la suite $\hat{f}_j$ est une suite de Cauchy dans

L^2 et on appelle $\hat{f}_\infty$ sa limite (L^2 est complet !).
On vérifie que $\hat{f}_\infty$ ne dépend pas de la suite f_j et on appelle donc $\hat{f}_\infty$ la transformée de Fourier (au sens L^2) de f. On note qu'elle n'est pas définie par une intégrale mais comme une limite.
Toutefois, si $f \in L^2 \cap L^1$, la transformée de Fourier au sens L^1 et au sens L^2 coïncident dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

On récupère de l'identité de Parseval le fait que $\mathcal{F}$ est (à multiplication par $(2\pi)^{-n}$ près) une isométrie de L^2 sur L^2. L'identité de Parseval (9.10) démontrée pour $f \in \mathcal{S}$ s'étend à L^2. Le prolongement de $\mathcal{F}^{-1}$ à L^2 fournit l'inverse de la transformée de Fourier L^2.

9.5 Retour à l'équation de la chaleur

On reprend la question étudiée au chapitre 6 (voir (6.7) et (6.8)) avec une condition initiale ϕ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$. On prend la transformée partielle par rapport à la variable x. On doit résoudre

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi) = -k\xi^2 \hat{u}(t,\xi)$$

et

$$\hat{u}(0,\xi) = \hat{\phi}(\xi)\,.$$

On trouve comme solution

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{\phi}(\xi) \exp -kt|\xi|^2\,.$$

Reprenant la transformée de Fourier inverse et utilisant notre résultat sur la transformée de Fourier d'une gaussienne, on retrouve (beaucoup plus simplement la solution donnée par le Théorème 6.3.4.
On note qu'on peut plus généralement prendre une condition intiale ϕ dans L^2.

Part III Introduction aux distributions

Ce document reprend partiellement les notes du cours de T. Ramond "Distributions et EDP" enseigné à partir de 2010/2011 à l'Université Paris Sud, dans le cadre de la 1ère année du Master MFA et qui indique dans son introduction :
Il ne contient pratiquement aucun matériel original, et seul le choix des sujets présentés ainsi que l'ordre dans lequel ils sont exposés relèvent de l'auteur de ses notes. Pour ce qui est du contenu mathématique, on s'est essentiellement inspiré, souvent très largement, des références suivantes :

[Bo] Jean-Michel Bony, Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier, Editions de l'Ecole Polytechnique, Ellipses, 2010.

[Zu] Claude Zuily : Introduction aux distributions et équations aux dérivées partielles, Collection Sciences Sup, Dunod, 2002.

Dans la mesure où je n'avais que 12 heures sur ce sujet j'ai été beaucoup moins loin que ces auteurs. Un grand merci à T. Ramond pour la transmission de son cours et des documents sources.

Chapitre 10

Transformée de Fourier des distributions tempérées

10.1 Les distributions tempérées

10.1.1 Définition, exemples

Définition 10.1.1 *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées.*

Si T est une distribution tempérée, le choix de la topologie sur $\mathcal{S}$ implique qu'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$|T(\varphi)| \leq C N_p(\varphi).$$

On notera que $\mathcal{C}_0^\infty$ étant dense dans $\mathcal{S}$, il suffit de connaître la restriction de T à $\mathcal{C}_0^\infty$. On utilise aussi la notation

$$T(\phi) = \langle T\,,\,\phi\rangle\,,$$

le crochet marquant la dualité entre $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}$.

Exemple 10.1.2 *Pour $p \in [1, +\infty]$, on a $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En effet, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on pose, pour $\phi \in \mathcal{S}$,*

$$T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)\,dx$$

T_f est une distribution tempérée et l'application qui à f associe T_f est linéaire, continue[1] *et injective.*

1. Ceci sera expliqué plus loin.

Plus précisément, pour $q \in [1, +\infty]$ tel que $1/p + 1/q = 1$, on a

$$|T_f(\varphi)| \leq |\int f(x)\varphi(x)dx| \leq \|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}N_{n+1}(\varphi),$$

grâce à (9.6).
Compte tenu du Corollaire 9.2.7, on a en particulier $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 10.1.3
Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, telle que $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^p$ pour une constante $C > 0$ et un entier $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{array}{ll} |T_f(\varphi)| & \leq C\int(1+|x|)^p|\varphi(x)|dx \\ & \leq C\int(1+|x|)^{p+n+1}|\varphi(x)|\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}dx \\ & \leq CN_{p+n+1}(\varphi)\int\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}dx \\ & \leq C_nN_{p+n+1}(\varphi). \end{array} \tag{10.1}$$

Donc $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En particulier les polynômes définissent des distributions tempérées, et $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Un autre cas particulier est la fonction de Heaviside.

Exemple 10.1.4
La masse de Dirac δ_0 définie par la formule

$$\delta_0(\phi) = \phi(0)\,,\ \forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

est une distribution tempérée.

Opérations sur les distributions tempérées : multiplication, dérivation

On cherche à prolonger des opérations bien connues sur $\mathcal{S}$ à $\mathcal{S}'$. La stratégie est toujours la même.
Considérons la multiplication par un monôme x^α.
Si f est dans $\mathcal{S}$, on observe que pour tout $\phi \in \mathcal{S}$, on a :

$$\int(x^\alpha f(x))\phi(x)dx = \int f(x)(x^\alpha\phi(x))dx\,,$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$T_{x^\alpha f}(\phi) = T_f(x^\alpha\phi)\,.$$

Il est alors naturel pour une distribution tempérée T de définir $x^\alpha T$ par :

$$(x^\alpha T)(\phi) = T(x^\alpha\phi)\,.$$

De même, considérons l'action de ∂^β.
Si f est dans $\mathcal{S}$, on observe que pour tout $\phi \in \mathcal{S}$, on a, par intégration par parties,

$$\int (\partial_x^\beta f(x))\phi(x)dx = (-1)^{|\beta|}\int f(x)(\partial_x^\beta \phi(x))dx\,,$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$T_{\partial_x^\beta f}(\phi) = (-1)^{|\beta|}T_f(\partial_x^\beta \phi)\,.$$

Il est alors naturel pour une distribution tempérée T de définir $\partial_x^\beta T$ par :

$$(\partial_x^\beta T)(\phi) = (-1)^{|\beta|}T(\partial_x^\beta \phi)\,.$$

Proposition 10.1.5 *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $x^\alpha\partial^\beta T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.*

Preuve Il suffit de vérifier que $\phi \mapsto (-1)^{|\beta|}\partial^\beta(x^\alpha\phi)$ est linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. □

Exercice 10.1.6 *Montrer que la fonction $x \mapsto e^x e^{ie^x}$ n'est pas majorée par un polynôme, mais qu'elle appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On pourra montrer que c'est la dérivée d'une distribution tempérée.*

Exercice 10.1.7 *Calculer la dérivée de la fonction d'Heaviside.*

Exercice 10.1.8 *Montrer que $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ est dans L^1_{loc} et qu'on peut lui associer une distribution tempérée T. Calculer $-\Delta T$.*

Définition 10.1.9 *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à croissance modérée lorsque pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\beta > 0$ et $m_\beta \in \mathbb{N}$ tel que*

$$|\partial^\beta f(x)| \leq C_\beta(1 + |x|)^{m_\beta}.$$

On note $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

Proposition 10.1.10 *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$, alors $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. La formule de Leibniz donne

$$|x^\alpha\partial^\beta(f\varphi)| \leq \sum_{\gamma\leq\alpha} C_\gamma^\beta |x^\alpha\partial^\gamma f|\,|\partial^{\beta-\gamma}\varphi| \leq C_\gamma \sum_{\gamma\leq\alpha} C_\gamma^\beta(1 + |x|)^{m_\gamma}|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\varphi|.$$

On a donc

$$N_p(f\varphi) \leq C N_{p+M}(\varphi),$$

avec $M = \max_{|\gamma|\leq p} m_\gamma$.
On a

$$|fT(\varphi)| = |T(f\varphi)| \leq C N_p(f\varphi) \leq C' N_{p+M}(\varphi),$$

ce qui montre que fT est une distribution tempérée. □

Localisation
Une fonction χ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dans $\mathcal{O}_M$, on peut donc localiser T en considérant χT.

Exercice 10.1.11 *Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $N_p(\tau_a\varphi) \leq C(1+|a|)^p$. En déduire que $(x \mapsto e^x) \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

10.1.2 Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 10.1.12 *Soit (T_j) une suite de distributions tempérées. On dit que (T_j) tend vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ lorsque pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $T_j(\varphi) \to T(\varphi)$.*

Cette notion de convergence faible entraîne automatiquement une convergence plus forte dont nous ne parlerons pas ici. On admet la

Proposition 10.1.13 *Si, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la suite $T_j(\varphi)$ converge, alors il existe une distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que T_j tend faiblement vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 10.1.14 *Si $(f_j) \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j) \to f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $fT_j \to fT$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour tout $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$.*

10.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

10.2.1 Définition

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\varphi \mapsto T(\hat{\varphi})$ est une distribution tempérée puisqu'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$|T(\hat{\varphi})| \leq C N_p(\hat{\varphi}) \leq C' N_{p+n+1}(\varphi),$$

grâce à la Proposition 9.3.4.

Définition 10.2.1 *Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on note $\widehat{T} = \mathcal{F}(T)$ la distribution tempérée définie par*

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})\,, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 10.2.2

1. *Pour $f \in L^1$, on a, grâce au lemme des chapeaux (Proposition 9.3.5),*

$$\widehat{T_f}(\varphi) = \int f(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \int \widehat{f}(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

donc $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$ et notre définition de la transformée de Fourier est raisonnable.

2. *Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\delta_0}(\varphi) = \int \varphi(x)dx$, donc $\widehat{\delta_0} = 1$.*

Proposition 10.2.3 *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Son inverse est $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\check{\mathcal{F}}$. De plus $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont continues sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, dans le sens où si $T_j \to T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}(T_j) \to \mathcal{F}(T)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Enfin si $T \in L^2$, la transformée de Fourier au sens de $\mathcal{S}'$ s'identifie à la transformée de Fourier L^2.*

La preuve de cette proposition est immédiate, compte tenu de la définition ci-dessus et de la Proposition 9.3.4. Dans le même registre, du transport à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on notera les relations

$$\mathcal{F}(D_jT) = \xi_j\hat{T},\ \mathcal{F}(x_jT) = -D_j\hat{T},\ \text{et}\ \mathcal{F}\circ\mathcal{F}(T) = (2\pi)^n\,\check{T}.$$

Exemple 10.2.4 $\widehat{1} = \mathcal{F}\circ\mathcal{F}(\delta_0) = (2\pi)^n\check{\delta_0} = (2\pi)^n\delta_0$.

10.2.2 Gaussiennes (2)

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $\mathrm{Re}\,z = 0$, la fonction $x \mapsto e^{-z|x|^2}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Par contre elle est bornée, donc définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dont on peut calculer la transformée de Fourier.

Proposition 10.2.5 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $T = e^{i\lambda|x|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On a*

$$\widehat{T} = \mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{i\lambda|x|^2}) = \Big(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)^n e^{in\pi\mathrm{sign}\,(\lambda)/4}e^{-i|\xi|^2/4\lambda}.$$

Preuve Soit (z_j) une suite de $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ telle que $z_j \to -i\lambda$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, le théorème de convergence dominée donne, quand $j \to +\infty$,

$$\begin{array}{l} \int e^{-z_j|x|^2}\varphi(x)dx \to \int e^{i\lambda|x|^2}\varphi(x)dx, \\ \int e^{-|\xi|^2/4z_j}\varphi(\xi)d\xi \to \int e^{-i\lambda|\xi|^2/4\lambda}\varphi(\xi)d\xi. \end{array} \tag{10.2}$$

On en déduit que, notant $T_j = e^{-z_j|x|^2}$, on a $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Par continuité de la transformation de Fourier, on a aussi $\mathcal{F}(T_j) \to \mathcal{F}(T)$. Or on a vu que

$$\mathcal{F}(T_j) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z_j}}\right)^n e^{-|\xi|^2/4z_j},$$

où $\sqrt{z_j} = \sqrt{|z_j|}\; e^{i\pi \operatorname{sign}(z_j)/4} \to \sqrt{|\lambda|}\; e^{-i\pi \operatorname{sign}(\lambda)/4}$. Donc, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}(T_j) \to \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda|}}\right)^n e^{in\pi \operatorname{sign}(\lambda)/4} e^{-i|\xi|^2/4\lambda} = \mathcal{F}(T).$$

$\square$

Chapitre 11

Distributions

Au chapitre précédent, nous avons introduit la notion de distribution tempérée. On a aussi besoin d'une notion plus "locale". Dans ce chapitre, on définit les distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et l'on passe en revue quelques unes des distributions les plus courantes. On voit tout de suite qu'une très grande classe de fonctions s'identifie à des distributions, et l'un des aspects essentiels de la théorie est que toutes les notions que nous verrons sur les distributions coïncident avec la notion correspondante pour les fonctions lorsque celle-ci existe. On présentera aussi deux des principales opérations sur les distributions : la dérivation et le produit par une fonction régulière.

11.1 Définitions et exemples

11.1.1 Définitions

Définition 11.1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et T une forme linéaire T sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que T est une distribution lorsque*

$$\forall K \subset \Omega, \exists C > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega), |T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|.$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω, et parfois $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$, le crochet utilisé signifiant la dualité entre $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$.

Proposition 11.1.2 *Une forme linéaire T sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est une distribution si et seulement si $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$ pour toute suite (φ_j) de fonctions $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ qui converge dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.*

Autrement dit, une distribution n'est rien d'autre qu'une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, continue pour la topologie associée à la famille de seminormes

apparaissant ci-dessus (famille paramétrée par K et k). Voir ci-dessous dans la preuve.
Preuve :
Dans un sens, supposons que la forme linéaire T soit une distribution sur Ω. On peut définir la topologie dans $C_0^\infty(\Omega)$ (plus exactement la notion de suite convergente) ainsi. On dit que (φ_j) une suite de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ converge vers φ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ et si, pour tout k, ϕ_j tend vers ϕ dans C^k. Or il existe $C = C_K > 0$ et $k = k_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega), |T(\psi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \psi|.$$

En particulier, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$|T(\varphi_j) - T(\varphi)| = |T(\varphi_j - \varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi|.$$

Puisque le membre de gauche tend vers 0 quand $j \to +\infty$, on a bien $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$.
Réciproquement, on suppose maintenant que pour toute suite (φ_j) de fonctions $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $T(\varphi_j)$ converge vers $T(\varphi)$.
On raisonne par l'absurde en supposant aussi que

$$\exists K \subset \Omega, \forall C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega) \text{ telle que } |T(\varphi)| > C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|.$$

En particulier pour tout $j \in \mathbb{N}$, prenant $C = k = j$, il existe alors $\varphi_j \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ telle que

$$|T(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |\partial^\alpha \varphi_j|.$$

Soit $\psi_j \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ définie par $\psi_j = \varphi_j / |T(\varphi_j)|$. On a bien sûr $|T(\psi_j)| = 1$ pour tout j, et la suite (ψ_j) converge vers 0 dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, puisque pour tout $j \geq |\alpha|$,

$$\sup |\partial^\alpha \psi_j| \leq \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |\partial^\alpha \psi_j| \leq \frac{1}{j} |T(\psi_j)| \leq \frac{1}{j} \cdot$$

Mais ceci est absurde, puisque l'on devrait alors avoir $T(\psi_j) \to 0$. □

Remarque 11.1.3 *Une distribution tempérée définit par restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une distribution. Avec cette remarque, on comprend mieux le nom de "Distribution Tempérée" donné par Laurent Schwartz.*

11.1.2 Les fonctions localement intégrables définissent des distributions

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, la fonction $f\varphi$ est intégrable pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, et $T_f : \varphi \to \int f\varphi$ est une forme linéaire. De plus si $K \subset \Omega$ est compact, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$, on a

$$|T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L^1(K)} \sup |\varphi|,$$

ce qui montre que T_f est une distribution.
On peut identifier l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$, autrement dit identifier f et T_f, puisque l'application $f \mapsto T_f$ est injective :

Proposition 11.1.4 *Soient f et g deux fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$. Si $T_f = T_g$, alors $f = g$.*

Preuve :
Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Supposons que $\langle T_f, \varphi\rangle = \int f\varphi = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Soit (K_j) une suite d'exhaustion[1] de Ω (K_j est une suite croissante de compacts de Ω tels que $K_j \subset \mathrm{Int}(K_{j+1})$ (ou $\mathrm{Int}\, K$ désigne l'intérieur de K, c'est à dire le plus grand ouvert contenu dans K) et tout compact K de Ω est contenu dans un K_j), et $\psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\psi_j = 1$ sur K_j et $\operatorname{supp} \psi_j \subset \mathrm{Int}(K_{j+1})$. Soit enfin $(\chi_\varepsilon)_\varepsilon$ une approximation de l'identité, c'est à dire une famille

$$\chi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\chi_1(x/\epsilon) \tag{11.1}$$

avec $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\int \chi_1(x)\, dx = 1$.
Pour chaque j fixé, la fonction $\psi_j f$ est dans $L^1(\Omega)$, et la famille $\psi_j f * \chi_\varepsilon$ est bien définie pour $\epsilon \in]0, \epsilon_j]$ (avec ϵ_j assez petit) dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et converge[2] quand $\epsilon \to 0$ vers $\psi_j f$ dans L^1. Or

$$\psi_j f * \chi_\varepsilon(x) = \int f(y)\psi_j(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy = 0,$$

puisque $y \mapsto \psi_j(y)\chi_\varepsilon(x-y)$ est une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Donc $\|\psi_j f\|_{L^1} = 0$. Ceci étant vrai pour tout j, on obtient $f = 0$ dans $L^1(\Omega)$. □

1. On peut montrer qu'une telle suite existe toujours
2. Le lecteur est invité à regarder les propriétés dans un cours standard d'intégration.

11.1.3 Masse de Dirac

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On note $\delta_{x_0} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0).$$

Pour $K \subset \mathbb{R}^n$ compact, et toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty$, on a

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| \leq \sup\ |\varphi|,$$

donc δ_{x_0} est une distribution sur $\mathbb{R}^n$, que l'on appelle masse de Dirac en x_0. Cette distribution n'est pas de la forme T_f avec $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Supposons en effet le contraire. On aurait, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $x_0 \notin \operatorname{supp} \varphi$,

$$\varphi(x_0) = 0 = \int f(x)\varphi(x)dx.$$

Donc $f = 0$ p.p. Mais c'est absurde puisqu'alors, pour ψ fonction plateau valant 1 près de x_0, on aurait

$$1 = \psi(x_0) = \langle T_f, \psi \rangle = \int f\psi = 0.$$

11.1.4 Valeur principale de $1/x$

On considère maintenant la forme linéaire $T : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Cette limite existe pour chaque fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Pour une telle fonction, un peut trouver un réel $A > 0$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)\,, \ \text{ avec } \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)dt\,,$$

et on peut écrire

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon<|x|<A} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon<|x|<A} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon<|x|<A} \psi(x)dx.$$

Puisque la fonction $x \mapsto \varphi(0)/x$ est impaire, la première intégrale est nulle. De plus, par exemple à l'aide du théorème de convergence dominée, on a

$$\int_{\varepsilon<|x|<A} \psi(x)dx \to \int_{-A}^{A} \psi(x)dx \text{ quand } \varepsilon \to 0^+.$$

On montre maintenant que la forme linéaire T est une distribution. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact. On peut sans perte de généralité supposer que $K = [-A, A]$ pour un réel $A > 0$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{[-A,A]}(\mathbb{R})$, on a vu que

$$T(\varphi) = \int_{[-A,A]} \psi(x) dx \,.$$

On a donc

$$|T(\varphi)| \leq 2A \sup_{x\in[-A,A]} |\psi(x)| \leq 2A \sup_{x\in[-A,A]} |\varphi'(x)| \leq 2A \sum_{0\leq j\leq 1} \sup |\varphi^{(j)}(x)|, \tag{11.2}$$

ce qui montre que T est bien une distribution. On notera que, comme attendu, la constante C vaut ici $2A$, et dépend du compact K choisi au départ. Cette distribution porte le nom de valeur principale de $1/x$, et on note

$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Exercice 11.1.5 *Montrer que* $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ *est dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

11.2 Ordre d'une distribution

Dans les trois exemples ci-dessus, le nombre k dont l'existence est demandée par la définition ne dépend pas du compact pris au départ. Ce n'est pas toujours le cas, et le fait est suffisamment remarquable pour qu'on utilise un vocabulaire spécifique.

11.2.1 Définition, exemples

Définition 11.2.1 *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *On dit que* T *est d'ordre fini* $k_0 \in \mathbb{N}$ *lorsque*

$$\forall K \subset \Omega, \exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(\Omega), |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k_0} \sup |\partial^\alpha \varphi|.$$

On note $\mathcal{D}'_{(k)}(\Omega)$ *l'ensemble des distributions d'ordre* k.

Remarque 11.2.2 *Noter que une distribution est toujours localement d'ordre fini. Ce qui est spécifique ci-dessus est que* k_0 *ne dépend pas du compact* K.

Lorsqu'une distribution est d'ordre k, elle est d'ordre k' pour tout $k' \geq k$. On vu que si $T = T_f$ pour une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors T est d'ordre 0. De même, la masse de Dirac δ_{x_0} est d'ordre 0. Enfin (11.2) montre que la distribution $\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est d'ordre 1.

Exercice 11.2.3 *Montrer que que* $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ *n'est pas d'ordre 0.*

Solution de l'exercice. Supposons le contraire. Pour tout $A > 0$, il existe $C_A > 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{[-A,A]}$ telle que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_A \sup |\varphi|.$$

La distribution $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est donné par une fonction L^1_{loc} en dehors de 0 : précisément, si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \mathbb{R}^*$, on a

$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \int \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

dont le module peut être majoré par $C \sup |\varphi|$ avec $C = \int_{\mathrm{supp}\,\varphi} |\frac{1}{x}| dx$. On va donc choisir une suite (φ_n) dont le support se rapproche de 0. On prend $A = 2$, et l'on choisit $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty_{[-2,2]}$ telle que $\varphi_n \geq 0$ et

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \in [\frac{1}{n}, 1], \\ 0 \text{ pour } x \notin [\frac{1}{2n}, 2]. \end{cases}$$

Il existe $C = C_2 > 0$ tel que $|\langle T, \varphi_n \rangle| \leq C \sup \varphi_n \leq C$, puisque $\sup |\varphi_n| = 1$. Or on peut estimer

$$\langle T, \varphi_n \rangle = \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x} dx \geq \ln n.$$

On devrait donc avoir $\ln n \leq C$ pour tout n, ce qui est absurde. $\square$

Exercice 11.2.4 *Soit* $T : \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *la forme linéaire définie par*

$$T(\varphi) = \sum_{j \geq 0} \varphi^{(j)}(j).$$

Montrer que T *est une distribution, et qu'elle n'est pas d'ordre fini.*

11.2.2 Les distributions positives

Définition 11.2.5 *On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution positive lorsque $\langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{R}^+$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.*

Proposition 11.2.6 *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est positive, alors elle est d'ordre 0.*

Preuve :
Soit $K \subset \Omega$ un compact, et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de K. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles, on a

$$\forall x \in \Omega,\ -\chi \sup|\varphi| \leq \varphi(x) \leq \chi \sup|\varphi|,$$

donc

$$\langle T, \varphi + \chi \sup|\varphi|\rangle \geq 0 \text{ et } \langle T, \chi \sup|\varphi| - \varphi\rangle \geq 0,$$

ce qui donne

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq |\langle T, \chi\rangle| \sup|\varphi|.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ à valeurs complexes, on peut écrire $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ avec φ_1, φ_2 à valeurs réelles, et, en utilisant ce qui précède pour φ_1 et φ_2,

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \varphi_1 + i\varphi_2\rangle| \leq |\langle T, \varphi_1\rangle| + |\langle T, \varphi_2\rangle| \leq C \sup|\varphi_1| + C \sup|\varphi_2| \leq C \sup|\varphi|.$$

□

Les distributions positives sont donc des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}^0(\Omega)$, autrement dit des mesures de Radon positives (voir par exemple Rudin pour une définition).

11.3 Premières opérations sur les distributions

Il n'y a pas beaucoup de différence avec ce qui a été fait pour les distributions tempérées. C'est plutôt plus facile.

Comme ensemble de formes linéaires continues, $\mathcal{D}'(\Omega)$ est bien sûr un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$: si $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, alors $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ est la distribution définie par

$$\langle \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \varphi\rangle = \lambda_1\langle T_1, \varphi\rangle + \lambda_2\langle T_2, \varphi\rangle.$$

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on note aussi parfois $\bar{T}$ ou T^* la distribution définie par

$$\langle \bar{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle}.$$

Toute distribution T peut alors s'écrire $T = T_1 + iT_2$ avec T_1 et T_2 des distributions réelles, c'est à dire telles que $\langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ pour toute fonction φ à valeurs réelles. Il suffit en effet de poser

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + \bar{T}) \text{ et } T_2 = \frac{1}{2i}(T - \bar{T}).$$

11.3.1 Dérivation

Proposition 11.3.1 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ définie par $\varphi \mapsto \langle T, -\partial_j \varphi \rangle$ est une distribution, que l'on appelle dérivée partielle de T par rapport à la j-ième variable, et que l'on note $\partial_j T$.*

Preuve :
Soit $K \subset \Omega$ un compact, et $C = C_K > 0$, $k = k_K \in \mathbb{N}$ des constantes données par le fait que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ on a

$$|\langle \partial_j T, \varphi \rangle| = |\langle T, \partial_j \varphi| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \partial_j \varphi| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k+1} \sup |\partial^\alpha \varphi|,$$

ce qui montre que $\partial_j T$ est une distribution. □

On notera que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre k, alors $\partial_j T$ est d'ordre $k+1$ au plus. Cependant la dérivation n'augmente pas forcément l'ordre, comme par exemple pour les distributions associées à une fonction régulière :

Proposition 11.3.2 *Si $T = T_f$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $\partial_j T = T_{\partial_j f}$.*

Preuve :
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. La fonction φ se prolonge en une fonction $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ en posant $\tilde{\varphi}(x) = 0$ pour $x \notin \Omega$. Soit alors $A > 0$ tel que $\operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subset [-A, A]^n$, on a

$$\begin{aligned} \langle \partial_j T_f, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \partial_j \varphi \rangle = -\int_\Omega f \partial_j \varphi dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f \partial_j \tilde{\varphi} dx \\ &= -\int \dots \int \left(\int_{-A}^A f \partial_j \varphi dx_j \right) dx' = \int \dots \int \left(\int_{-A}^A \partial_j f \varphi dx_j \right) dx' = \langle T_{\partial_j f}, \varphi \rangle. \end{aligned} \tag{11.3}$$

□

Puisque $\partial_j T$ est une distribution, elle admet des dérivées partielles d'ordre 1. En itérant cet argument, on peut définir $\partial^\alpha T$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$: les distributions admettent des dérivées de tout ordre, données par

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Exemple 11.3.3 *Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction de Heaviside, définie par $H(x) = 1_{\mathbb{R}^+}(x)$. La fonction H appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et on note $T = T_H$ la distribution associée. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0),$$

donc $T' = \delta_0$.

Exemple 11.3.4 *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ la fonction définie par $f(x) = \ln(|x|)$, et $T = T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée. On veut identifier T' ; il semble raisonnable que T' ait un lien avec la fonction $x \mapsto 1/x$, mais celle-ci n'est pas intégrable en 0. Soit $A > 0$, et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([-A, A])$. On calcule*

$$\begin{aligned} \langle T', \varphi \rangle &= -\textstyle\int_{-A}^{A} \ln|x|\ \varphi'(x)dx \\ &= -\textstyle\int_{-A}^{0} \ln(-x)\varphi'(x)dx - \int_0^A \ln(x)\varphi'(x)dx. \end{aligned} \tag{11.4}$$

On ne peut pas intégrer par parties ($x \mapsto \ln(x)$ n'est pas dans $\mathcal{C}^1([0, A])$), mais le théorème de Convergence Dominée donne facilement

$$\langle T', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-A}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{A} \ln(x)\varphi'(x)dx\,.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\langle T', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln(\varepsilon)(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) - \int_{\varepsilon<|x|<A} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

On utilise enfin la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\ln(\varepsilon)(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) = \varepsilon \ln(\varepsilon)(\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon)),$$

où ψ est la fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$. Finalement

$$\langle T', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<|x|<A} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi \rangle,$$

donc $T' = \mathrm{vp}(1/x)$.

Seules les fonctions constantes ont une dérivée nulle. Pour les distributions d'une variable, on montre facilement le même résultat.

Proposition 11.3.5 *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifie $T' = 0$ alors T est donnée par une fonction constante.*

Preuve :
On commence remarquer qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est la dérivée d'une fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ si et seulement si $\int \varphi = 0$. En effet si $\varphi = \psi'$ avec ψ à support compact, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)dx = 0$. Réciproquement, si $\int \varphi = 0$, la fonction $\psi : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ est à support compact inclus dans le support de φ, et vérifie $\psi' = \varphi$.
Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\int \chi = 1$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on écrit

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \ \text{ avec } \ \varphi_1 = \varphi - (\int \varphi)\chi, \text{ et } \varphi_2 = (\int \varphi)\chi,$$

et $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi_1\rangle + \langle T, \varphi_2\rangle$. Puisque $\int \varphi_1 = 0$, il existe $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_1 = \psi'$. Donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \psi'\rangle + (\int \varphi)\langle T, \chi\rangle = -\langle T', \psi\rangle + (\int \varphi)\langle T, \chi\rangle = C \int \varphi = \langle T_C, \varphi\rangle,$$

où $C = \langle T, \chi\rangle$ est une constante indépendante de φ. $\square$

Notons que la proposition 11.3.2 dit en particulier que la dérivée d'une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à une fonction constante est nulle. La proposition ci-dessus énonce donc une équivalence.

11.3.2 Produit par une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Proposition 11.3.6 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. La forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ définie par $\varphi \mapsto \langle T, f\varphi\rangle$ est une distribution, que l'on note fT.*

Preuve :
Soit (φ_j) une suite de fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, qui converge vers 0 dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ pour tout j. On a donc $\operatorname{supp} f\varphi_j \subset K$ pour tout j. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha(f\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta f \, \partial^{\alpha-\beta}\varphi$$

On note alors
$$M = \max_{\beta\leq\alpha}\sup_K |\partial^\beta f|\,,$$
et l'on voit que
$$e^{i\theta_1} J + \sup|\partial^\alpha(f\varphi_j))| \leq M \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta \sup|\partial^{\alpha-\beta}\varphi_j|\,.$$
Or chacun des termes de la somme tends vers 0 quand $j \to +\infty$, donc, $\partial^\alpha(f\varphi_j) \to 0$ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Puisque T est une distribution, $\langle T, f\varphi_j\rangle \to 0$, ce qui montre que la forme linéaire $\varphi \to \langle T, f\varphi\rangle$ est continue sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. □

Exemple 11.3.7 *Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a $f\delta_0 = f(0)\delta_0$.*

Exemple 11.3.8 *Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on a $fT_g = T_{fg}$.*

Exemple 11.3.9 *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$. On sait qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = xg(x)$, et l'on voit facilement que $f\,\mathrm{vp}(1/x) = T_g$. En particulier $x\,\mathrm{vp}(1/x) = 1$.*

Proposition 11.3.10 *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On a la formule de Leibniz*
$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \partial^\alpha(fT) = \sum_{\beta\leq\,\alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta f\ \partial^{\alpha-\beta}T.$$

Preuve :
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On raisonne par récurrence sur $|\alpha|$. La formule est bien sûr vraie pour $|\alpha| = 0$, et on suppose qu'elle l'est pour tout $|\alpha| \leq m$. Pour $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\gamma| = m + 1$, on peut écrire $\gamma = \alpha + 1_j$ pour un α de longueur m et un $j \in \{1, \ldots, n\}$. Donc
$$\begin{aligned}
\langle\partial^\gamma(fT), \varphi\rangle &= \langle\partial_j(\partial^\alpha(fT)), \varphi\rangle \\
&= -\langle\partial^\alpha(fT)\partial_j\varphi\rangle \\
&= -\langle\textstyle\sum_{\beta\leq\,\alpha} C_\alpha^\beta\partial^\beta f\ \partial^{\alpha-\beta}T, \partial_j\varphi\rangle \\
&= \textstyle\sum_{\beta\leq\,\alpha} C_\alpha^\beta\langle\partial_j(\partial^\beta f\ \partial^{\alpha-\beta}T), \varphi\rangle \\
&= \textstyle\sum_{\beta\leq\,\alpha} C_\alpha^\beta\langle\partial^{\beta+1_j} f\ \partial^{\alpha-\beta}T + \partial^\beta f\ \partial^{\alpha+1_j-\beta}T, \varphi\rangle,
\end{aligned} \tag{11.5}$$
en utilisant la formule de Leibniz pour les dérivées partielles d'ordre 1.
On remarque que, en renumérotant,
$$\sum_{\beta\leq\,\alpha} C_\alpha^\beta\langle\partial^{\beta+1_j} f\ \partial^{\alpha-\beta}T, \varphi\rangle = \sum_{1_j\leq\beta\leq\,\gamma} C_{\gamma-1_j}^{\beta-1_j}\langle\partial^\beta f\ \partial^{\gamma-\beta}T, \varphi\rangle$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned}\langle \partial^\gamma (fT), \varphi \rangle = \ & \langle f\ \partial^\gamma T, \varphi \rangle + \\ & \textstyle\sum_{1_j \leq \beta \leq\ \alpha} \left(C_{\gamma - 1_j}^{\beta - 1_j} + C_{\gamma - 1_j}^{\beta} \right) \langle \partial^\beta f\ \partial^{\gamma - \beta} T, \varphi \rangle \\ & + \langle \partial^\gamma f\ T, \varphi \rangle, \end{aligned} \tag{11.6}$$

ce qui donne bien la formule de Leibniz pour $\partial^\gamma (fT)$. □

Voici un premier exemple de résolution d'équation différentielle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On retiendra qu'en fait, on utilise un facteur intégrant pour se ramener à la seule équation différentielle que l'on sache résoudre pour l'instant : l'équation $T' = 0$ (cf la proposition 11.3.5).

Proposition 11.3.11 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $a \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$. Les distributions de $\mathcal{D}'(I)$ qui vérifient l'équation différentielle (linéaire d'ordre 1 homogène)*

$$T' + aT = 0 \text{ dans } I$$

sont exactement les fonctions $\mathcal{C}^1$ solution de cette équation, autrement dit les T_f avec $f : x \mapsto Ce^{A(x)}$, où $C \in \mathbb{C}$ est une constante, et A une primitive de a sur I.

Preuve :
Soit A une primitive de a sur I. Pour $T \in \mathcal{D}'(I)$, on a, grâce à la formule de Leibniz ci-dessus,

$$(e^A T)' = ae^A T + e^A T' = e^A (T' + aT).$$

Donc

$$T' + aT = 0 \iff (e^A T)' = 0 \iff e^A T = T_C \iff T = e^{-A} T_C = T_{Ce^{-A}}.$$

□

Exercice 11.3.12 *Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation inhomogène $T' + aT = f$, où $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.*

Exercice 11.3.13 *Montrer que $x \operatorname{vp} \frac{1}{x} = 1$. Y-a-t-il d'autres solutions de $xT = 1$?*

11.4 Support d'une distribution

11.4.1 Définition

Définition 11.4.1 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $V \subset \Omega$ un ouvert. On dit que T est nulle dans V lorsque*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi \subset V \Rightarrow \langle T, \varphi\rangle = 0.$$

Proposition 11.4.2 *Soit (V_j) une famille d'ouverts de Ω, et $V = \bigcup_j V_j$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est nulle dans chacun des V_j, alors T est nulle dans V.*

Preuve :
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $K = \operatorname{supp}\varphi \subset V$. Puisque K est compact, on peut trouver $j_1, j_2, \dots, j_N$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^N V_{j_k}$. Soit alors (χ_k) une partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ associée. On a $\varphi = \sum_{k=1}^N \varphi\chi_k$ et

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{k=1}^N \langle T, \varphi\chi_k\rangle = 0,$$

puisque $\operatorname{supp}\varphi\chi_k \subset V_k$. □

Définition 11.4.3 *Le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est le complémentaire du plus grand ouvert (de la réunion des ouverts) où T est nulle. On le note* $\operatorname{supp} T$.

On notera que $\operatorname{supp} T$ est un fermé, et dans la pratique on utilise l'une ou l'autre des caractérisations suivantes :
(i) $x_0 \notin \operatorname{supp} T$ si et seulement si il existe un voisinage V de x_0 tel que $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$.
(ii) $x_0 \in \operatorname{supp} T$ si et seulement si pour tout voisinage V de x_0, on peut trouver $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$ telle que $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$.

Exemple 11.4.4

i) Soit $T = \delta_0$. Si V est un ouvert qui ne contient pas $\{0\}$, alors $\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0) = 0$ pour toute fonction $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset V$. Donc $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$.

ii) Si $T = T_f$ avec $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a $\operatorname{supp} T = \operatorname{supp} f$.
En effet supposons que x_0 n'appartient pas au support de f. Il existe un voisinage V de x_0 tel que $f_{|V} = 0$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$ on a $\langle T_f, \varphi\rangle = 0$, donc T_f est nulle sur V, et x_0 n'est pas dans le support de T_f. Réciproquement, si $x_0 \notin \operatorname{supp} T_f$, il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$, $\int f\varphi dx = \langle T_f, \varphi\rangle = 0$. On a vu (dans la preuve de la proposition 11.1.4), que cela entraîne $f = 0$ dans V, donc $x_0 \notin \operatorname{supp} f$.

11.4.2 Propriétés

Lemme 11.4.5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

i) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\operatorname{supp} \partial^\alpha T \subset \operatorname{supp} T$.

ii) Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} fT \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} T$.

Preuve :

Soit $x_0 \notin \operatorname{supp} T$. Il existe un voisinage V de x_0 tel que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$, $\langle T, \psi\rangle = 0$. Or si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$, $\psi = \partial^\alpha\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$, donc

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle = 0.$$

Donc $x_0 \notin \operatorname{supp} \partial^\alpha T$, ce qui prouve le point *i)*.
On prouve maintenant le second point. Si $x_0 \notin \operatorname{supp} f \bigcup \operatorname{supp} T$, x_0 appartient ou bien a $(\operatorname{supp} f)^c$ ou bien a $(\operatorname{supp} T)^c$. Dans le premier cas, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f_{|V} = 0$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$, on a $\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle = 0$, donc $x_0 \notin \operatorname{supp}(fT)$. Dans le second cas, il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$, $\langle T, \psi\rangle = 0$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$, $f\varphi$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, nulle en dehors d'un compact inclus dans V. Donc $\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle = 0$, et $x_0 \notin \operatorname{supp} fT$. □

Proposition 11.4.6 *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$, alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$.*

Preuve :
Soit $x \in \operatorname{supp} \varphi$. Par hypothèse $x \notin \operatorname{supp} T$, donc il existe un voisinage V_x de x sur lequel T est nulle. Du recouvrement du compact $\operatorname{supp} \varphi$ par les ouverts V_x, on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \bigcup_{j=1}^N V_{x_j}.$$

Soit maintenant $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_N$ une partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ associée. On a

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle T, \chi_j \varphi\rangle = 0,$$

puisque $\chi_j \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V_{x_j})$. □

Attention : On peut avoir $\varphi = 0$ sur $\operatorname{supp} T$ et $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$. C'est le cas par exemple pour $T = \delta_0'$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$. On réexamine cette question dans la Section 11.4.4.

11.4.3 Distributions à support compact

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω à support compact.

Proposition 11.4.7 *Les distributions à support compact sont d'ordre fini. Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, notant m son ordre, pour tout voisinage compact $\tilde{K}$ de* $\operatorname{supp} T$*, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha \varphi| .$$

Preuve :
Soit $\tilde{K}$ un voisinage compact de $\operatorname{supp} T$, i.e. un compact tel que $\operatorname{supp} T \subset \operatorname{Int}(\tilde{K})$, et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\operatorname{Int}(\tilde{K}))$ une fonction plateau, telle que $\chi = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp} T$.
Puisque T est une distribution, il existe $C = C(\tilde{K}) > 0$, $m = m(\tilde{K}) \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp} \psi \subset \tilde{K} \Rightarrow |\langle T, \psi\rangle| \ \leq\ C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha \psi| ,$$

et on note désormais m le plus petit entier pour lequel cette propriété est vraie.
Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, puisque $\operatorname{supp}(\varphi - \chi\varphi) \cap \operatorname{supp} T = 0$, on a

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle + \langle T, \varphi - \chi\varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle.$$

La fonction $\chi\varphi$ étant $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $\tilde{K}$, on obtient donc

$$|\langle T, \varphi\rangle| \ \leq |\langle T, \chi\varphi\rangle| \ \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha (\chi\varphi)| .$$

Enfin, la formule de Leibniz permet de montrer que

$$\sup |\partial^\alpha(\chi\varphi)| = \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha(\chi\varphi)| \leq C \sum_{\beta\leq\alpha} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\beta\varphi| ,$$

ce qui est l'inégalité annoncée. □

Attention : Comme le montre l'exemple ci-dessous, on ne peut pas en général remplacer le compact $\tilde{K}$ par $\operatorname{supp} T$ dans l'estimation de la proposition 11.4.7.

Exercice 11.4.8 *Montrer que la forme linéaire T sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par*

$$T(\varphi) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0))$$

est une distribution. Donner son support, que l'on notera K, et montrer que T est d'ordre 1.
Montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on ait

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1(K)}.$$

On pourra tester cette inégalité sur des fonctions plateau bien choisies.

On identifie maintenant $\mathcal{E}'(\Omega)$ à l'espace des formes linéaires continues sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Cette identification repose sur la

Proposition 11.4.9 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ son ordre, et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ une fonction telle que $\chi = 1$ sur un voisinage de* $\operatorname{supp} T$. *On note $\tilde{T} : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par*

$$\tilde{T}(f) = \langle T, \chi f\rangle.$$

1. *$\tilde{T}$ ne dépend pas du choix de χ.*
2. *Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\tilde{T}(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle$.*
3. *$\tilde{T}$ est continue sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$:*

$$\exists \tilde{K} \subset \Omega, \exists C > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), |\tilde{T}(f)| \leq C \sum_{\alpha\leq m} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha f| .$$

Enfin si $L : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire qui vérifie (ii) et (iii), $L = \tilde{T}$.

Preuve :
Soit χ_1, χ_2 deux fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ qui valent 1 dans un voisinage de $\operatorname{supp} T$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle T, \chi_1\varphi\rangle - \langle T, \chi_2\varphi\rangle = \langle T, (\chi_1 - \chi_2)\varphi\rangle = 0\,,$$

puisque $\operatorname{supp}(\chi_1 - \chi_2)\varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$. De la même manière, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, puisque $\operatorname{supp}(1-\chi)\varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$,

$$\tilde{T}(\varphi) = \langle T, \chi\varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle + \langle T, (1-\chi)\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

On a donc prouvé les points (i) et (ii). Soit maintenant $\tilde{K}$ un voisinage compact de $\operatorname{supp} T$. Puisque T est une distribution d'ordre m, il existe $C = C(\tilde{K}) > 0$ tels que

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp}\psi \subset \tilde{K} \Rightarrow |\langle T, \psi\rangle| \ \leq\ C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha \psi|\,.$$

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} \chi f \subset \tilde{K}$, donc

$$|\tilde{T}(f)| = |\langle T, \chi f\rangle| \ \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha(\chi f)| \ \leq C' \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha f|\,,$$

ce qui prouve le point (iii).
Soit enfin L vérifiant (ii) et (iii). En raison de l'inégalité du (iii), si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifie $\operatorname{supp} f \cap \tilde{K} = \emptyset$, on a $L(f) = 0$. Soit donc $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ près de $\tilde{K}$. On a

$$L(f) = L(\chi f) + L((1-\chi)f) = L(\chi f) = \langle T, \chi f\rangle,$$

grâce à (ii). $\square$

On pourra noter que la notion de continuité ci-dessus coïncide avec la continuité des formes linéaires sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

11.4.4 Distributions supportées en un point

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse aux distributions non-nulles $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\operatorname{supp} T \subset \{x_0\}$. Pour éviter d'alourdir inutilement les notations, et sans perte de généralité, on considère le cas $x_0 = 0$. On a besoin d'un résultat intermédiaire, qui a aussi son propre intérêt.

Proposition 11.4.10 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, et m son ordre. On suppose que* $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$. *Si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifie*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\,, \partial^\alpha \varphi(x_0) = 0\,,$$

alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Il est important de confronter cet énoncé avec l'exemple qui suit la proposition 11.4.6.

Preuve :
On traite pour simplifier le cas de la dimension 1 avec $x_0 = 0$. On part de

$$|T(\psi)| \leq C \sup_{k \leq m, x \in [-1,+1]} |\psi^{(k)}(x)|\,,\ \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\,.$$

Soit χ une fonction plateau égale à 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et à support dans $]-1,+1[$, et $\chi_\epsilon(x) = \chi(x/\epsilon)$.
En utilisant l'hypothèse sur le support de T, on a, pour tout $\epsilon > 0$, t

$$|T(\varphi)| = |T(\chi_\epsilon \varphi)| \leq C \sup_{k \leq m, x \in [-1,+1]} |(\chi_\epsilon \varphi)^{(k)}(x)|\,.$$

Sous l'hypothèse d'annulation de φ et de ses m premières dérivées en 0, on vérifie facilement en utilisant la formule de Leibnitz, que le membre de droite est $\mathcal{O}(\epsilon)$. Mais le membre de gauche est indépendant de ϵ. En faisant tendre ϵ vers 0. On obtient le résultat. □

On est maintenant en mesure de montrer le résultat principal de cette section.

Proposition 11.4.11 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution non-nulle, et $x_0 \in \Omega$. Si $\operatorname{supp} T \subset x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et des nombres complexes a_α pour $|\alpha| \leq N$ tels que l'un des a_α avec $|\alpha| = N$ n'est pas nul, et*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}.$$

Preuve :
On écrit la preuve pour $x_0 = 0$. Une telle distribution T est à support compact, et on note N son ordre exact. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ près de 0. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) \chi(x) + r(x),$$

où

$$r(x) = (1-\chi(x)) \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0) + (N+1) \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^N \partial^\alpha\varphi(tx)dt.$$

Comme la fonction r s'annule à l'ordre N en 0, i.e. sur le support de T, la proposition précédente dit que

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq N} \partial^\alpha\varphi(0)\langle T, \frac{x^\alpha}{\alpha!}\chi(x)\rangle,$$

d'où la forme annoncée en notant $a_\alpha = \langle T, \frac{x^\alpha}{\alpha!}\chi(x)\rangle$. Enfin si tous les a_α avec $|\alpha| = N$ étaient nuls, T serait d'ordre $\leq N-1$. $\square$

Les coefficients c_α dans cette décomposition sont uniquement déterminés. En effet

Proposition 11.4.12 *Soit $x_0 \in \Omega$, et $N \in \mathbb{N}$. Les distributions $(\partial^\alpha\delta_{x_0})_{|\alpha|\leq N}$ sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Preuve :
Encore une fois, on écrit la preuve pour $x_0 = 0$. Supposons que

$$\sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \partial^\alpha\delta_0 = 0$$

pour des $a_\alpha \in \mathbb{C}$.
Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ près de 0 et $\beta \in \mathbb{N}^n$. On calcule

$$\langle \partial^\alpha\delta_0, x^\beta\chi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(x^\beta\chi)_{|x=0}$$

Or $\partial^\alpha(x^\beta\chi)_{|x=0}$ est nul si $\alpha \neq \beta$ et vaut $\alpha!$ sinon. Donc, pour tout $|\beta| \leq N$,

$$0 = \langle \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha\partial^\alpha\delta_0, x^\beta\chi\rangle = (-1)^{|\beta|}\beta!\, a_\beta,$$

ce qui montre que tous les a_α sont nuls. $\square$

Exercice 11.4.13 *Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $x^pT = 0$, pour $p \in \mathbb{N}$.*

Exercice 11.4.14 *On considère l'application de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\phi \mapsto \int \phi(x,x)dx\,.$$

Montrer que l'on définit une distribution T sur $\mathbb{R}^2$. Quel est son support ? Montrer que c'est une solution au sens des des distributions de l'équation des ondes.

11.5 Suites de distributions

11.5.1 Convergence, exemples

Définition 11.5.1 *Soit (T_j) une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que (T_j) converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, la suite $(\langle T_j, \varphi\rangle)$ converge vers $\langle T, \varphi\rangle$.*

Exemple 11.5.2 *Soit $T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à la fonction $x \mapsto e^{ikx}$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, notant $A > 0$ un réel tel que* $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$, *on a*

$$\langle T_k, \varphi\rangle = \int_{-A}^{A} e^{ikx} \varphi(x) dx \to 0$$

par le théorème de Riemann-Lebesgue (ou, ici, par une simple intégration par parties). Donc la suite (T_k) converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exemple 11.5.3 *Soit (χ_ε) une approximation de l'identité dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et (T_ε) la famille de distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ associées. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, notant $A > 0$ un réel tel que* $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]^n$, *on a*

$$\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle = \int_{[-A,A]^n} \chi_\varepsilon(x)\varphi(x) dx = \int_{[-A/\varepsilon, A/\varepsilon]^n} \chi(y)\varphi(\varepsilon y) dy,$$

et le théorème de convergence dominée montre que $\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle \to \varphi(0)$ quand $\varepsilon \to 0$. On dit donc que la suite (χ_ε) converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 11.5.4 *Montrer que la suite $(\frac{1}{x \pm i\varepsilon})$ converge vers* $\operatorname{vp}(\frac{1}{x}) \mp i\pi\delta_0$ *dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0^+$. On note désormais*

$$\frac{1}{x - i0} = \operatorname{vp}(\frac{1}{x}) + i\pi\delta_0 \ \textit{et}\ \frac{1}{x + i0} = \operatorname{vp}(\frac{1}{x}) - i\pi\delta_0.$$

11.5.2 Propriétés

Les opérations que l'on a définit sur les distributions sont continues par rapport à la convergence des suites. Autrement dit :

Proposition 11.5.5 *Si (T_j) converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors*

1. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $(\partial^\alpha T_j)$ converge vers $\partial^\alpha T$.*
2. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, (fT_j) converge vers fT.*

Preuve :
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. On a immédiatement

$$\langle \partial^\alpha T_j, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_j, \partial^\alpha \varphi\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle,$$

et

$$\langle fT_j, \varphi\rangle = \langle T_j, f\varphi\rangle \to \langle T, f\varphi\rangle = \langle fT, \varphi\rangle.$$

□

Exercice 11.5.6 *Montrer que si (f_j) converge vers f dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors (f_jT) converge vers fT dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

11.6 Distributions périodiques sur $\mathbb{R}$

11.6.1 Définitions

Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un fonction régulière, et $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a\varphi$ la fonction définie par $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$. Cette fonction $\tau_a\varphi$ a la même régularité que φ, et est à support compact quand φ l'est.

Proposition 11.6.1 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et $a \in \mathbb{R}$. La forme linéaire τ_aT la forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par*

$$\tau_aT(\varphi) = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle,$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$, qu'on appelle translatée de T.

Définition 11.6.2 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et $a \in \mathbb{R}$. On dit que T est périodique de période a lorsque $\tau_aT = T$.*

Par exemple la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et définit une distribution 2π-périodique, connue sous le nom de peigne de Dirac.

Proposition 11.6.3 *Soit (c_n) une suite de nombres complexes. S'il existe une constante $C > 0$ et un entier $p \in \mathbb{N}$ tels que*

$$|c_n| \leq C(1+|n|)^p,$$

la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_ne^{inx}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et sa somme est une distribution 2π-périodique.

Preuve :
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, et $A > 0$ un réel tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Notant S_N la N-ième somme partielle de la série, on a

$$\langle S_N, \varphi\rangle = \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-A}^{A} e^{inx}\varphi(x)dx.$$

En intégrant par parties $p+2$ fois, on obtient

$$\langle S_N, \varphi\rangle = c_0 \int_{-A}^{A} \varphi(x)dx + \sum_{n=-N\,,\,n\neq 0}^{N} c_n(-1)^{p+2} \int_{-A}^{A} \frac{e^{inx}}{(in)^{p+2}}\varphi^{(p+2)}(x)\,dx\,,$$

et, en utilisant l'hypothèse de croissance modérée de la suite (c_n),

$$|\langle S_N, \varphi\rangle| \leq 2CA(1 + \sum_{n=-N\,,\,n\neq 0}^{N} \frac{(1+|n|)^p)}{|n|^{p+2}}) \sup|\varphi^{(p+2)}| \lesssim \sup|\varphi^{(p+2)}|\,,$$

ce qui montre que la suite $(\langle S_N, \varphi\rangle)_N$ converge.
La suite de distributions $(S_N)_N$ converge donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une certaine distribution S, et choisissant A assez grand pour que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A] \cap [-A+2\pi, A+2\pi]$,

$$\begin{aligned}\langle S_N, \tau_{-2\pi}\varphi\rangle &= \textstyle\sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-A}^{A} e^{inx}\varphi(x+2\pi)dx \\ &= \textstyle\sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-A+2\pi}^{A+2\pi} e^{in(y-2\pi)}\varphi(y)dy = \langle S_N, \varphi\rangle.\end{aligned} \tag{11.7}$$

En passant à la limite $N \to +\infty$, on obtient bien que $\tau_{2\pi}S = S$. □

Cette proposition admet une réciproque : toute distribution 2π-périodique admet une décomposition en série de Fourier.

11.6.2 Série de Fourier d'une distribution périodique

On commence par un résultat très simple.

Lemme 11.6.4 *Il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(x+2\pi n) = 1.$$

Preuve :
Soit $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction positive, et telle que $\omega(x) > 0$ pour $x \in [0, 2\pi]$. Soit aussi $A > 0$ tel que $\operatorname{supp}\omega \subset [-A, A]$. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\omega(x + 2\pi n) = 0$ pour tout $n \notin [\frac{-A-x}{\pi}, \frac{A-x}{\pi}]$. Donc pour $x \in [-B, B]$, $\omega(x + 2\pi n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \notin [\frac{-A-B}{\pi}, \frac{A+B}{\pi}]$. La série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_{-2\pi n}\omega(x)$$

est donc localement finie, ce qui prouve qu'elle converge (par exemple uniformément sur tout compact), et que sa somme est $\mathcal{C}^\infty$. Elle est aussi strictement positive, et la fonction

$$\psi(x) = \frac{\omega(x)}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega(x + 2\pi n)},$$

est bien définie et vérifie les conditions du lemme. □

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution 2π-périodique, et ψ_1, ψ_2 deux fonctions comme dans le lemme. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle T, e^{-inx}\psi_1\rangle = \langle T, e^{-inx}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\tau_{-2\pi k}\psi_2)\,\psi_1\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle T, e^{-inx}(\tau_{-2\pi k}\psi_2)\,\psi_1\rangle\,.$$

Or puisque T est 2π-périodique, on a

$$\langle T, e^{-inx}\tau_{-2\pi k}\psi_2\psi_1\rangle = \langle \tau_{-2\pi k}T, e^{-inx}(\tau_{-2\pi k}\psi_2)\,\psi_1\rangle = \langle T, e^{-inx}\psi_2\,(\tau_{2\pi k}\psi_1)\rangle\,.$$

Donc

$$\langle T, e^{-inx}\psi_1\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle T, e^{-inx}\psi_2(\tau_{2\pi k}\psi_1)\rangle = \langle T, e^{-inx}\psi_2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tau_{-2\pi k}\psi_1\right)\rangle = \langle T, e^{-inx}\psi_2\rangle.$$

Autrement dit, le nombre $\langle T, e^{-inx}\psi\rangle$ ne dépend pas du choix de la fonction ψ vérifiant les conditions du lemme, ce qui justifie la

Définition 11.6.5 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution 2π-périodique. On appelle coefficients de Fourier de T les nombres*

$$c_n(T) = \frac{1}{2\pi}\langle T, e^{-inx}\psi\rangle,\ n \in \mathbb{Z},$$

où $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est comme dans le lemme.

Il est très simple de voir que la suite $(c_n(T))_n$ des coefficients de Fourier de T est à croissance modérée puisque T est une distribution, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$|c_n| \leq C \sum_{j \leq m} \sup |\partial_x^j(e^{-inx}\psi)|,$$

donc $|c_n| = \mathcal{O}((1+|n|)^m)$. D'après la proposition 11.6.3, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution 2π-périodique, qu'on appelle série de Fourier de T.

Proposition 11.6.6 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution 2π-périodique. La série de Fourier de T est égale à T :*

$$T = \sum_{n\in Z} c_n(T) e^{inx}$$

On prendra garde au fait que même si chaque terme de la série est une fonction régulière, la convergence n'a lieu que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en général. Autrement dit, cette égalité ne dit pas que toute distribution périodique est une fonction.

Preuve :

Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{n\in Z} \tau_{2\pi n}\psi = 1$ et $c_n(T) = \frac{1}{2\pi}\langle T, e^{-inx}\psi\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de T. Pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on note $\widetilde{\varphi}$ la fonction $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique définie par

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\tau_{2k\pi}\varphi)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x - 2k\pi).$$

Notant

$$c_n(\widetilde{\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{\phi}(x) e^{-inx} dx$$

pour $n \in \mathbb{Z}$, ses coefficients de Fourier, on sait que

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\widetilde{\varphi}) e^{inx}\,,$$

où la série converge dans C^k pour tout k.

Or on a

$$\langle T, \phi\rangle \;= \langle T, \textstyle\sum_{n\in Z} (\tau_{2\pi n}\psi)\,\phi\rangle = \sum_{n\in Z} \langle T,\ (\tau_{2\pi n}\psi)\,\phi\rangle\,. \tag{11.8}$$

Ensuite en utilisant la périodicité de T on obtient

$$\begin{aligned} \langle T, \phi\rangle \;&= \textstyle\sum_{n\in Z} \langle T, \psi\ \tau_{-2\pi n}\phi\rangle \\ &= \langle T, \psi\widetilde{\varphi}\rangle\,. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Donc, en utilisant la propriété de T avec $K = \operatorname{supp}\psi$ (ordre fini p) et la convergence dans C^p entionnée ci-dessus :

$$\langle T, \phi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\widetilde{\varphi})\langle T, e^{inx}\psi\rangle = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}(T)\; c_n(\widetilde{\varphi}).$$

On revient alors à la définition des $c_n(\widetilde{\varphi})$:

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}(T) \int_0^{2\pi} \widetilde{\varphi}(x) e^{-inx} dx \\ &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}(T) \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-2\pi k) e^{-inx} dx \\ &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}(T) \int \phi(x) e^{-inx} dx \\ &= \textstyle\int \phi(x) \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}(T) e^{-inx} dx \\ &= \textstyle\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}(T) e^{-inx}, \varphi\rangle,\end{aligned} \tag{11.10}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$

Exercice 11.6.7 *Vérifier que si $T = T_{\tilde f}$ avec $\tilde f$ dans L^2_{loc} et (2π)-périodique, alors $c_n(T)$ est bien le coefficient de Fourier $c_n(\tilde f)$ introduit dans le chapitre sur les séries de Fourier.*

Chapitre 12

Espaces de Sobolev

On veut distinguer parmi les distributions (tempérées) celles qui sont plus régulières, par exemple données par des fonctions $\mathcal{C}^k$. On a vu que plus f est régulière, plus $\hat{f}$ décroit rapidement à l'infini, par exemple puisque

$$\|\xi^\alpha \hat{f}\|_{L^2} = \|\widehat{D^\alpha f}\|_{L^2}.$$

On aurait aussi pu écrire $\|\xi^\alpha \hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{D^\alpha f}\|_{L^1}$, mais on va tirer parti de manière essentielle de la structure d'espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

12.1 Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$

12.1.1 Définitions

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$. La fonction $\xi \mapsto \langle\xi\rangle$ est $\mathcal{C}^\infty$, et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $|\xi| \geq 1$,

$$\frac{1}{C}|\xi| \leq \langle\xi\rangle \leq C|\xi|.$$

Autrement dit $\langle\xi\rangle$ est une version régularisée de $|\xi|$ qui a le même comportement à l'infini.

Définition 12.1.1 *Soit $s \in \mathbb{R}$. On dit qu'une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\langle\xi\rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 12.1.2 *La distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{u} = \langle\xi\rangle^{-s} g$.*

Exemple 12.1.3

1. *$\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $s < \frac{-n}{2}$. En effet $\hat{\delta}_0 = 1$ donc $\langle\xi\rangle^s\hat{\delta}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $2s < -n$.*
2. *Les fonctions constantes ne sont dans aucun $H^s(\mathbb{R}^n)$, puisque $\hat{C} = C\delta_0$ n'est pas une fonction L^1_{loc}.*

Proposition 12.1.4 *La forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)_s$ sur $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$ définie par*

$$(u,v)_s = (\langle\xi\rangle^s\hat{u}, \langle\xi\rangle^s\hat{v})_{L^2} = \int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\langle\xi\rangle^{2s}d\xi$$

est un produit scalaire hermitien qui fait de $H^s(\mathbb{R}^n)$ un espace de Hilbert. On note

$$\|u\|_s = \sqrt{(u,u)_s} = \|\langle\xi\rangle^s\hat{u}\|_{L^2}$$

la norme associée.

Preuve
Soit (u_j) une suite de Cauchy de $H^s(\mathbb{R}^n)$. La suite $(\langle\xi\rangle^s\hat{u})$ est une suite de Cauchy de L^2, donc converge vers un $v \in L^2$. Soit alors u la distribution tempérée définie par $u = \mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{-s}\hat{v})$. On a $\hat{u} = \langle\xi\rangle^{-s}v$ avec $v \in L^2$, donc $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, et

$$\|u_j - u\|_s = \|\langle\xi\rangle^s\hat{u}_j - v\|_{L^2} \to 0 \text{ quand } j \to +\infty.$$

Donc (u_j) converge dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. □

Il est important de noter que $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, où l'égalité a lieu entre espaces de Hilbert. On a aussi

$$s_1 \leq s_2 \Rightarrow H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$$

puisque $\langle\xi\rangle^{s_1} \leq \langle\xi\rangle^{s_2}$, où le symbole $\hookrightarrow$ désigne une injection continue. Les H^s forment donc une famille décroissante d'espaces de Hilbert. En particulier, pour $s \geq 0$, on a $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. On a même la

Proposition 12.1.5 *(Interpolation) Soit $s_0 \leq s \leq s_1$ trois réels. Pour $u \in H^{s_0}(\mathbb{R}^n) \cap H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$, on a $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|u\|_s \leq \|u\|_{s_0}^{(1-\theta)}\|u\|_{s_1}^{\theta},$$

où $\theta \in [0,1]$ est défini par $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$.

Preuve
On écrit simplement

$$\|u\|_s^2 = \int \langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}|^2 d\xi = \int (\langle\xi\rangle^{2(1-\theta)s_0}|\hat{u}|^{2(1-\theta)})(\langle\xi\rangle^{2\theta s_1}|\hat{u}|^{2\theta})d\xi,$$

et on applique l'inégalité de Hölder avec $p = 1/(1-\theta)$ et $q = 1/\theta$. $\square$

On voit apparaître la notion de régularité que l'on cherche dans la proposition qui suit : plus on dérive, plus on descend dans l'échelle des espaces de Sobolev.

Proposition 12.1.6 *Si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve
Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. On a $\widehat{\partial_j u} = \xi_j \hat{u}$, donc $\widehat{\partial_j u}$ est une fonction L^1_{loc}. De plus

$$\|\langle\xi\rangle^{s-1}\widehat{\partial_j u}\|_{L^2} = \|\langle\xi\rangle^{s-1}\xi_j\hat{u}\|_{L^2} \leq C\|\langle\xi\rangle^s\hat{u}\|_{L^2},$$

ce qui montre que $\partial_j u \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$. Le cas général s'obtient par récurrence sur $|\alpha|$. $\square$

Voici une autre illustration du fait que H^s contient des éléments de plus en plus singuliers quand s diminue.

Proposition 12.1.7 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution à support compact. Si $p \geq 0$ est l'ordre de T, alors $T \in H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s < -p - \frac{n}{2}$.*

Preuve
Pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on sait que $\hat{T} \in \mathcal{C}^\infty \subset L^1_{loc}$. De plus

$$|\langle\xi\rangle^s\hat{T}(\xi)| = |\langle\xi\rangle^s\langle T_x, e^{-ix\cdot\xi}\rangle| \leq C\langle\xi\rangle^s \sum_{|\alpha|\leq p} \sup|\partial_x^\alpha(e^{-ix\cdot\xi})| \leq C\langle\xi\rangle^{s+p}$$

Donc $T \in H^s(\mathbb{R}^n)$ dès que $2(s+p) < -n$. $\square$

12.1.2 Densité des fonctions régulières

Proposition 12.1.8 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve
D'abord, l'application $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \langle\xi\rangle^s \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une bijection pour tout $s \in \mathbb{R}$. En particulier si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle\xi\rangle^s \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$.
Soit alors $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ telle que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^\perp$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$0 = (u, \varphi)_s = (\langle\xi\rangle^s \hat{u}, \langle\xi\rangle^s \hat{\varphi})_{L^2}.$$

Donc pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\langle\xi\rangle^s \hat{u}, \psi)_{L^2} = 0$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ (cf. le corollaire 9.2.7), cela entraîne $u = 0$. Ainsi

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H^s(\mathbb{R}^n).$$

□

Remarque 12.1.9 *On a donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \cap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$, mais l'inclusion inverse est fausse.*
Par exemple, en dimension 1, si $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on a $\hat{u}(\xi) = e^{-|\xi|}$, donc $u \in H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, mais $u \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 12.1.10 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve
Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $H^s(\mathbb{R}^n)$. On raisonne par troncature : soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi = 1$ sur $B(0,1)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\chi_k(x) = \chi(x/k)$ et $\varphi_k = \chi_k \varphi$. On a

$$\begin{aligned} \|\varphi_k - \varphi\|_s &\leq \left(\int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{\varphi}_k(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ &\leq \sup\left(\langle\xi\rangle^{s+(n+1)/2} |\hat{\varphi}_k(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|\right) \left(\int \langle\xi\rangle^{-(n+1)} d\xi\right)^{1/2} \\ &\leq C\, N_p(\widehat{\varphi_k - \varphi}) \\ &\leq C\, N_{p+n+1}(\varphi_k - \varphi), \end{aligned} \tag{12.1}$$

où $p \in \mathbb{N}$ est tel que $p \geq s + (n+1)/2$.
On a vu dans la preuve de la Proposition 9.2.8 que, pour tout q, $N_q(\varphi_k - \varphi) \to 0$ quand $k \to +\infty$. □

12.1.3 Multiplicateurs de H^s

Proposition 12.1.11 *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La multiplication par φ est une opération continue dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve
Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et

$$\langle\xi\rangle^s \widehat{\varphi u} = (2\pi)^{-n} \langle\xi\rangle^s \hat{\varphi} * \hat{u}.$$

On peut supposer d'abord que $u \in \mathcal{S}$. Pour contrôler la norme L^2 du second membre, on va faire le produit scalaire L^2 avec un élément $\psi \in C_0^\infty$.
Donc pour $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle\langle\xi\rangle^s \widehat{\varphi u}, \psi\rangle_{L^2} == (2\pi)^{-n} \int\int \langle\xi\rangle^s \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)\bar{\psi}(\xi) d\xi d\eta\,.$$

On en déduit la majoration :

$$|\langle\langle\xi\rangle^s \widehat{\varphi u}, \psi\rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-n} \int\int \langle\xi\rangle^s |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\, |\hat{u}(\eta)||\psi(\xi)|\, d\xi d\eta$$

On a besoin du

Lemme 12.1.12 *(Lemme de Peetre) Pour $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$\langle\xi\rangle^s \leq 2^{|s|/2} \langle\xi-\eta\rangle^{|s|} \langle\eta\rangle^s\,.$$

Preuve du lemme de Peetre
En échangeant ξ et η on voit qu'il suffit de prouver l'inégalité pour $s \geq 0$ et de fait pour $s = 2$. Or dans ce cas, c'est évident. en développant le terme de droite. □

Revenons à la proposition. Avec le lemme de Peetre, on a

$$\begin{aligned}
|\langle\langle\xi\rangle^s \widehat{\varphi u}, \psi\rangle_{L^2}| &\leq 2^{|\frac{s}{2}|} (2\pi)^{-n} \int\int |\langle\xi-\eta\rangle^s |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\, |\langle\eta\rangle^s |\hat{u}(\eta)||\psi(\xi)|\, d\xi d\eta \\
&\leq 2^{|\frac{s}{2}|} (2\pi)^{-n} \int \left(\int |\langle\xi-\eta\rangle^s |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\, |\langle\eta\rangle^s |\hat{u}(\eta)|\, d\eta\right) |\psi(\xi)|\, d\xi\,.
\end{aligned}$$

On reconnait la convolution de $\langle\xi\rangle^{|s|}|\hat{\phi}$ et de $\langle\xi\rangle^s \hat{u}$ qu'on va considérer comme la convolution d'une fonction de L^1 et d'une fonction de L^2. L'inégalité de Young combinée à l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne donc :

$$|\langle\langle\xi\rangle^s \widehat{\varphi u}, \psi\rangle_{L^2}| \leq 2^{|\frac{s}{2}|} (2\pi)^{-n} ||u||_s\, ||\langle\cdot\rangle\hat{\phi}||_{L^1} ||\psi||_{L^2}\,.$$

On en tire d'abord que pour φ dans $\mathcal{S}$ et u dans $\mathcal{S}$, la norme dans L^2 de $\langle\xi\rangle^s \widehat{\varphi u}$ est contrôlée par

$$||\langle\xi\rangle^s \widehat{\varphi u}||_{L^2} \leq 2^{|\frac{s}{2}|} (2\pi)^{-n} ||u||_s\, ||\langle\cdot\rangle\hat{\phi}||_{L^1}\,,$$

soit encore

$$||\varphi u||_s \leq 2^{|\frac{|s|}{2}}(2\pi)^{-n}||u||_s\,||\langle\cdot\rangle\hat{\phi}||_{L^1}\,. \tag{12.2}$$

$\mathcal{S}$ étant dense dans H^s, on en déduit que l'application $u \mapsto \phi u$ se prolonge en une application continue de H^s dans H^s. On vérifie que c'est bien l'application de multiplication au sens de $\mathcal{S}'$. □

Remarque 12.1.13 *La démonstration (voir (12.2)) montre qu'on peut prolonger la multiplication à tous les φ tels que $\langle\cdot\rangle^{|s|}\hat{\varphi} \in L^1$.*

12.1.4 Injections de Sobolev

Les résultats ci-dessous peuvent être vus comme une réponse à la question "qu'est-ce qui n'est pas dans $H^s(\mathbb{R}^n)$", ou encore comme un pas supplémentaire dans la description de la régularité des distributions tempérées.
On note $\mathcal{C}^k_{\to 0}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^n$ qui tendent vers 0 à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leq k$.

Proposition 12.1.14 *Si $s > \frac{n}{2} + k$, alors $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^k_{\to 0}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve
Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq k$, on a $\xi^\alpha\hat{u} \in L^1$. En effet

$$|\xi^\alpha\hat{u}(\xi)| \leq \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{\langle\xi\rangle^s}\langle\xi\rangle^s|\hat{u}(\xi)| \leq \langle\xi\rangle^{k-s}\langle\xi\rangle^s|\hat{u}(\xi)|,$$

et $\langle\xi\rangle^{k-s} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ puisque $-2(k-s) > n$. On a donc, par Cauchy-Schwarz,

$$\|\xi^\alpha\hat{u}\|_{L^1} \leq C_{s,n}\|u\|_s\,. \tag{12.3}$$

Ainsi $D^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha\hat{u}) \in \mathcal{C}^0_{\to 0}$, et la continuité de l'injection de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}^k_{\to 0}(\mathbb{R}^n)$ n'est qu'une autre manière de formuler les inégalités

$$\forall|\alpha| \leq k,\ \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq \|\xi^\alpha\hat{u}\|_{L^1} \leq C_{s,n}\|u\|_s\,.$$

□

Proposition 12.1.15 *Soit $s > \frac{n}{2}$. Si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante $C_s > 0$, telle que, pour tout $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|uv\|_s \leq C_s\|u\|_s\|v\|_s\,.$$

Preuve
La proposition précédente dit que u et v sont des fonctions continues, donc le produit uv est bien défini. On a d'abord $u, v \in L^2 \cap L^\infty$, puisque $s \geq 0$ d'une part, et puisque u et v sont des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini. Du coup $f = uv$ est une fonction de $L^1 \cap L^\infty$, et on a $\hat{f} = (2\pi)^{-n}\hat{u} * \hat{v}$. Donc

$$\|f\|_s^2 = (2\pi)^{-2n} \int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{u}*\hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi \leq (2\pi)^{-2n} \int \Big(\int \langle\xi\rangle^s |\hat{u}(\xi-\eta)| \, |\hat{v}(\eta)| d\eta \Big)^2 d\xi \, .$$

Or puisque $s \geq 0$, on a $(a+b)^s \leq 2^s(a^s + b^s)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^+$. En écrivant l'inégalité triangulaire, on obtient facilement

$$\langle\xi\rangle^s \leq 2^s(\langle\xi-\eta\rangle^s + \langle\eta\rangle^s) \, .$$

L'inégalité précédente donne alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_s^2 \ & \leq (2\pi)^{-2n} 2^{2s} \int \Big(\int \langle\xi-\eta\rangle^s |\hat{u}(\xi-\eta)| \, |\hat{v}(\eta)| + |\hat{u}(\xi-\eta)| \langle\eta\rangle^s |\hat{v}(\eta)| d\eta \Big)^2 d\xi \\
& \leq (2\pi)^{-2n} 2^{2s+1} \int \Big(\int \langle\xi-\eta\rangle^s |\hat{u}(\xi-\eta)| \, |\hat{v}(\eta)| d\eta \Big)^2 + \Big(\int |\hat{u}(\xi-\eta)| \langle\eta\rangle^s |\hat{v}(\eta)| d\eta \Big)^2 d\xi \\
& \leq (2\pi)^{-2n} 2^{2s+1} (\| \langle\eta\rangle^s |\hat{u}| * |\hat{v}| \|_{L^2}^2 + \| |\hat{u}| * \langle\eta\rangle^s |\hat{v}| \|_{L^2}^2 \, .)
\end{aligned} \tag{12.4}$$

L'inégalité de Young dit que, pour le premier terme par exemple,

$$\| \langle\eta\rangle^s |\hat{u}| * |\hat{v}| \|_{L^2}^2 \leq \| \langle\eta\rangle^s |\hat{u}| \|_{L^2}^2 \| \hat{v} \|_{L^1}^2 \leq C_s \|u\|_s^2 \|v\|_s^2 \, ,$$

en utilisant aussi (12.3).
Le second terme se traite de le même manière, et l'on obtient bien

$$\|f\|_s^2 \leq C \, \|u\|_s^2 \, \|v\|_s^2 \, .$$

□

Proposition 12.1.16 *Pour $p \geq 2$ et $s \geq n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$, on a $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$. Précisément, il existe une constante $C_{n,s,p} > 0$ telle que*

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^n), \|u\|_{L^p} \leq C_{n,s,p} \|u\|_s \, .$$

Remarque 12.1.17 *$H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (donc pas dans $\mathcal{C}^0_{\to 0}$), ce qui est la cause d'un certain nombre de difficultés techniques.*

Preuve
On l'admet. □

12.1.5 Dualité $H^s(\mathbb{R}^n)/H^{-s}(\mathbb{R}^n)$

On s'intéresse maintenant de plus près aux espaces de Sobolev d'ordre négatif. Une façon souvent commode de traiter l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ avec $s > 0$, consiste à le considérer comme l'espace des formes linéaires continues sur $H^s(\mathbb{R}^n)$. On a effet la

Proposition 12.1.18 *Soit $s \in \mathbb{R}$, et $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. La forme linéaire L_u définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par*[1]

$$L_u(\varphi) = \langle u, \varphi\rangle,$$

se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $H^s(\mathbb{R}^n)$. De plus l'application $L : u \mapsto L_u$ est un isomorphisme bicontinu de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ dans $(H^s(\mathbb{R}^n))'$.

Preuve
Tout d'abord, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$|L_u(\varphi)| = |\langle u, \varphi\rangle| \leq (2\pi)^{-n}\|u\|_{-s}\|\varphi\|_s\,, \tag{12.5}$$

ce qui, compte tenu de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ donne le premier point.
On montre maintenant que L est bijective. Elle est clairement injective, puisque

$$\begin{aligned} \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), L_u(\varphi) = 0 &\iff \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \textstyle\int \langle\xi\rangle^{-s}\hat{u}(\xi)\langle\xi\rangle^{s}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = 0 \\ &\iff \forall\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \textstyle\int \langle\xi\rangle^{-s}\hat{u}(\xi)\psi(\xi)d\xi = 0 \\ &\iff u = 0\,. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Soit $\varphi \in (H^s(\mathbb{R}^n))'$; on cherche $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ telle que $L_u = \varphi$. Soit Ψ la forme linéaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\Psi(f) = \varphi(\mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{-s}f))\,.$$

On a, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$|\Psi(f)| \leq C\|\mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{-s}f)\|_s \leq C\|f\|_{L^2}\,,$$

donc Ψ est continue sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par le théorème de Riesz, il existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Psi(f) = (g, \bar{f})_{L^2}$, et on pose $u = \mathcal{F}(\langle\xi\rangle^s g)$. On a

$$\langle\xi\rangle^{-s}\hat{u} = (2\pi)^n\langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^{s}\check{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)\,,$$

1. Le $\langle\cdot\rangle$ désigne au départ la dualité $\mathcal{S}'/\mathcal{S}$.

donc $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. De plus pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$L_u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle = \int \langle \xi \rangle^s g(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \Psi(\langle \xi \rangle^s \hat{\varphi}) = \varphi(\varphi).$$

Donc L est surjective. Enfin la continuité de $L : u \mapsto L_u$ provient de (12.5) :

$$\|L_u\| = \sup_{\varphi \in H^s, \|\varphi\|_s = 1} |L_u(\varphi)| \leq (2\pi)^{-n}\|u\|_{-s},$$

et celle de L^{-1} est automatique puisque l'on travaille dans des espaces de Banach. □

12.1.6 Trace d'un élément de $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 1/2$

Lorsqu'une fonction f est continue, il n'y a aucune difficulté pour définir sa restriction à une hypersurface, par exemple en utilisant une paramétrisation de celle-ci : la restriction de f à l'hypersurface $x_n = 0$ de $\mathbb{R}^n$ est la fonction $\gamma(f) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\gamma(f)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0). \tag{12.7}$$

Il n'y a a priori rien d'équivalent pour les fonctions définies presque partout, puisqu'une hypersurface est de mesure nulle. Lorsque u est dans un espace de Sobolev d'ordre pas trop petit, sans pour autant être une fonction continue, on peut néanmoins donner un sens à cette restriction.

Proposition 12.1.19 *Pour tout $s > \frac{1}{2}$, l'opérateur $\gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ défini par (12.7) s'étend de manière unique en un opérateur linéaire continu et surjectif de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.*

Preuve
On veut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\gamma(\varphi)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{12.8}$$

L'existence de l'unique prolongement continu de γ découlera alors de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.
Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi)(x') &= \varphi(x', 0) \\ &= \mathcal{F}^{-1}_{(\xi', \xi_n) \to (x', 0)}(\hat{\varphi}(\xi', \xi_n)) \\ &= (2\pi)^{-n} \int\int e^{ix'\cdot\xi'}\hat{\varphi}(\xi', \xi_n)d\xi' d\xi_n \\ &= (2\pi)^{-(n-1)} \int e^{ix'\cdot\xi'} \left(\frac{1}{(2\pi)}\int \hat{\varphi}(\xi', \xi_n)d\xi_n\right) d\xi'. \end{aligned} \tag{12.9}$$

Donc, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$,

$$\widehat{\gamma(\varphi)}(\xi') = \frac{1}{(2\pi)} \int \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi_n.$$

En particulier

$$\begin{aligned} |\widehat{\gamma(\varphi)}(\xi')|^2 &\leq \tfrac{1}{(4\pi)^2} |\int \langle\xi\rangle^s |\hat{\varphi}(\xi', \xi_n)| \langle\xi\rangle^{-s} d\xi_n|^2 \\ &\leq \tfrac{1}{(4\pi)^2} \int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{\varphi}(\xi', \xi_n)|^2 d\xi_n \times \int \langle\xi\rangle^{-2s} d\xi_n \,. \end{aligned}$$

Or, en posant $\xi_n = (1 + |\xi'|^2)^{1/2} t$, on obtient

$$\begin{aligned} \int \langle\xi\rangle^{-2s} d\xi_n &= \int \tfrac{1}{(1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^s} d\xi_n \\ &= \int \tfrac{1}{(1+t^2)^s (1+|\xi'|^2)^s} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} dt \\ &= \langle\xi'\rangle^{-2s+1} \int \tfrac{dt}{(1+t^2)^s} \\ &= C_s \langle\xi'\rangle^{-2s+1} \,. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Ainsi

$$\int \langle\xi'\rangle^{2s-1} |\widehat{\gamma(\varphi)}(\xi')|^2 d\xi' \leq \frac{C_s}{(4\pi)^2} \int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \,,$$

c'est-à-dire (12.8).

Il reste à montrer la surjectivité. On va exhiber pour cela un inverse à droite R de γ. Pour $v \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, on pose

$$u(x) = Rv(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} \left(K_N \frac{\langle\xi'\rangle^{2N}}{\langle\xi\rangle^{2N+1}} \hat{v}(\xi') \right) ,$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $K_N > 0$ seront fixés plus loin.

On a

$$\begin{aligned} \|u\|_s^2 &= K_N^2 \int \langle\xi\rangle^{2s} \tfrac{\langle\xi'\rangle^{4N}}{\langle\xi\rangle^{4N+2}} |\hat{v}(\xi')|^2 d\xi \\ &\leq K_n^2 \int \langle\xi'\rangle^{4N} |\hat{v}(\xi')|^2 \left(\int \langle\xi\rangle^{2s-4N-2} d\xi_n\right) d\xi' \\ &\leq K_n^2 C \int \langle\xi'\rangle^{2s-1} |\hat{v}(\xi')|^2 d\xi' \\ &\leq K_n^2 C \, \|v\|^2_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \,, \end{aligned} \tag{12.11}$$

où l'on a utilisé (12.10) et choisi $N > s/2 - 1/4$ pour que l'intégrale converge. Donc R envoie bien $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

On calcule alors

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma(Rv)}(\xi') &= \tfrac{1}{(2\pi)} \int \widehat{R\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi_n \\ &= \tfrac{K_N}{(2\pi)} \int \tfrac{\langle\xi'\rangle^{2N}}{\langle\xi\rangle^{2N+1}} \hat{v}(\xi') d\xi_n \\ &= \hat{v}(\xi') \tfrac{K_N}{(2\pi)} \langle\xi'\rangle^{2N} \int \langle\xi\rangle^{-(2N+1)} d\xi_n \\ &= \frac{C_{N+\frac{1}{2}} K_N}{2\pi} \hat{v}(\xi') \\ &= \hat{v}(\xi') \,, \end{aligned} \tag{12.12}$$

en choisissant pour obtenir la dernière égalité $K_N = 2\pi/C_{N+\frac{1}{2}}$, où $C_{N+\frac{1}{2}}$ est la constante introduite dans (12.10).
Donc $\gamma \circ R = Id$. □

12.2 Espaces de Sobolev sur Ω

12.2.1 Espaces de Sobolev d'ordre entier sur $\mathbb{R}^n$

On commence par quelques remarques simples. Pour $k \in \mathbb{N}$ les éléments de $H^k(\mathbb{R}^n)$ peuvent être caractérisés par

$$u \in H^k(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

En effet

$$\begin{aligned} \|\langle\xi\rangle^k \hat{u}(\xi)\|_{L^2}^2 &= \int (1+|\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha!} \int \xi^{2\alpha} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha!} \int \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \overline{\xi^\alpha \hat{u}(\xi)} d\xi \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha!} \|\widehat{D^\alpha u}\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha!} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{12.13}$$

Donc $\langle\xi\rangle^k \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $D^\alpha u$ est dans L^2 pour tout $|\alpha| \leq k$.
L'égalité (12.13) dit même davantage :

Proposition 12.2.1 *Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace de Hilbert $(H^k(\mathbb{R}^n), (\cdot,\cdot)_k)$ est égal à l'espace*

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

muni du produit scalaire

$$((u,v))_k = \sum_{|\alpha|\leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2}\,.$$

On notera $\|u\|_{H^k} = \sqrt{((u,u))_k}$ la norme associée, qui est donc équivalente à la norme $\|\cdot\|_k$.
Pour les entiers négatifs, en utilisant la Proposition 12.1.18, et la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $H^k(\mathbb{R}^n)$, on obtient la caractérisation suivante :

Proposition 12.2.2 *Soit $k \in \mathbb{N}$. L'espace $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des formes linéaires u sur $H^k(\mathbb{R}^n)$ telles qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), |\langle u, \varphi\rangle| \leq C\, \|\varphi\|_{H^k}\,.$$

12.2.2 Espaces de Sobolev d'ordre entier sur Ω

Un des intérêts principaux de ces remarques sur les Sobolev d'indice entier est qu'elles permettent de définir une échelle d'espaces de Hilbert, qui doit permettre de mesurer la régularité des distributions, sans recours à la transformation de Fourier. En particulier, pour $k \in \mathbb{Z}$, on peut parler d'espace de Sobolev d'ordre k sur n'importe quel ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 12.2.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $k \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartient à l'espace $H^k(\Omega)$ lorsque pour tout $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$. On note $(\cdot,\cdot)_k$ la forme sesquilinéaire définie sur $H^k(\Omega) \times H^k(\Omega)$ par*

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha|\leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2}.$$

Proposition 12.2.4 *Muni du produit scalaire hermitien $(\cdot,\cdot)_k$, l'espace $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Preuve
Soit (u_j) une suite de Cauchy de $H^k(\Omega)$. Pour chaque $|\alpha| \leq k$, la suite $(\partial^\alpha u_j)$ est une suite de Cauchy de L^2, donc converge vers un $v_\alpha \in L^2$. En particulier $u_j \to v_0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha v_0 = v_\alpha \in L^2(\Omega)$, et $(u_j) \to v_0$ dans $H^k(\Omega)$ □

Lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, l'espace des fonctions test $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ n'est pas toujours dense dans $H^k(\Omega)$. On est donc conduit à la

Définition 12.2.5 *On note $H_0^k(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert.*

Exemple 12.2.6 *Soit $I =]-a, a[\in \mathbb{R}$. On va décrire $H^1(I)$ et $H_0^1(I)$.*

- *Pour $f \in H^1(I)$, on a $f' \in L^2(I) \subset L^1(I)$. Donc la fonction $g : I \to \mathbb{C}$ définie par*
$$g(x) = \int_{-a}^{x} f'(t)dt$$
est continue. De plus $g' - f' = 0$ donc la distribution $g - f$ est constante. Comme g se prolonge en une fonction continue sur $[-a, a]$, f aussi.
- *La fonction $x \mapsto |f(x)|$ est continue sur $[-a, a]$, donc atteint son minimum en $b \in [-a, a]$. Comme*
$$2a|f(b)|^2 = \int_{-a}^{a} |f(b)|^2 dt \leq \int_{-a}^{a} |f(t)|^2 dt,$$

on a $\sqrt{2a}|f(b)| \leq \|f\|_{L^2}$. *Enfin puisque*

$$f(x) = f(b) + \int_b^x f'(t)dt,$$

on obtient

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\|f\|_{L^2} + \sqrt{2a}\|f'\|_{L^2} \leq C\|f\|_{H^1}.$$

En particulier la forme linéaire δ_x *est continue sur* $H^1(I)$.

– $H_0^1(I) = \{f \in H^1(I),\ f(-a) = f(a) = 0\}$. *En effet on a vu que les formes linéaires* $\delta_{\pm a}$ *sont continues sur* $H^1(I)$, *et sont nulles sur* $\mathcal{C}_0^\infty(I)$. *Donc si* $f \in H_0^1(I)$, *on a* $f(-a) = f(a) = 0$.
Réciproquement, soit $f \in H^1(I)$ *vérifiant* $f(a) = f(-a) = 0$. *Soit aussi* g *la fonction qui vaut* f *sur* $[-a, a]$ *et 0 ailleurs. On a* $g' = f'1_[- a, a]$, *donc* $g' \in L^2(\mathbb{R})$, *et* $g \in H^1(\mathbb{R})$. *Pour* $\lambda < 1$, *la suite* $g_\lambda = g(x/\lambda)$ *tend vers* f *dans* $H^1(I)$ *quand* $\lambda \to 1$, *et le support de* g_λ *est contenu dans* $[-a\lambda, a\lambda] \subset I$. *Si* (χ_ε) *est une approximation de l'identité,* $g_\lambda * \chi_\varepsilon$ *appartient à* $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ *pour* $\varepsilon > 0$ *assez petit, et converge vers* g_λ *dans* $H^1(\mathbb{R})$. *Donc* $g_\lambda \in H_0^1(I)$ *et* $f \in H_0^1(I)$.

Remarque 12.2.7 *L'orthogonal* F *de* $H_0^1(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$ *est le sous-espace constitué des fonctions* f *telles que*

$$(1 - \Delta)f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

En effet la fonction f *appartient à* F *si et seulement si pour tout* $u \in H_0^1(\Omega)$, *et par densité pour toute* $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$0 = (f, \bar{u})_{H^1} = \int_\Omega f u dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \partial_j f \partial_j u\, dx = \langle f - \Delta f, u\rangle.$$

Définition 12.2.8 *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *L'espace* $H^{-k}(\Omega)$ *est le sous-espace des* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *telles qu'il existe une constante* $C > 0$ *pour laquelle*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), |\langle u, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{H^k}.$$

On note $\|u\|_{H^{-k}}$ *la plus petite constante* C *possible dans l'inégalité ci-dessus. Ces distributions s'identifient aux formes linéaires continues sur* $H_0^k(\Omega)$.

Exemple 12.2.9 *Si* $f \in L^2(\Omega)$, *on a* $\partial_j f \in H^{-1}(\Omega)$. *En effet, pour* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, *on a*

$$|\langle \partial_j f, \varphi\rangle| = |\langle f, \partial_j \varphi\rangle| \leq \int |f|\ |\partial_j \varphi| dx \leq \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{H^1}.$$

On a d'ailleurs au passage $\|\partial_j f\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{L^2}$.

On peut en fait démontrer le résultat suivant

Proposition 12.2.10 *Soit $k \in \mathbb{N}$. Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartient à $H^{-k}(\Omega)$ si et seulement si il existe des fonctions $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ telles que*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha f_\alpha.$$

12.2.3 L'inégalité de Poincaré

Proposition 12.2.11 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, borné dans une direction. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Preuve
L'hypothèse signifie qu'il existe $R > 0$ tel que, par exemple $\Omega \subset \{|x_n| < R\}$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a alors

$$\varphi(x', x_n) = \int 1_{[-R, x_n]}(t) \partial_n \varphi(x', t) dt.$$

En utilisant Cauchy-Schwarz, on a alors

$$|\varphi(x', x_n)|^2 \leq 2R \int_{-R}^{R} |\partial_n \varphi(x', t)|^2 dt.$$

On intègre cette inégalité sur Ω, et on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi(x', x_n)|^2 dx &\leq 2R \int_{-R}^{R} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-R}^{R} |\partial_n \varphi(x', t)|^2 dt dx_n dx' \\ &\leq 4R^2 \int |\partial_n \varphi(x)|^2 dx \\ &\leq 4R^2 \int |\nabla \varphi(x)|^2 dx. \end{aligned} \tag{12.14}$$

On obtient alors le résultat dans $H_0^1(\Omega)$ par densité. □

Remarque 12.2.12 *L'inégalité de Poincaré n'est pas vraie pour les u constantes non-nulles, qui n'appartiennent donc pas à $H_0^1(\Omega)$ pour Ω borné (dans une direction).*

On notera que l'inégalité de Poincaré entraîne que pour un ouvert borné (au moins dans une direction), l'application

$$u \mapsto \sqrt{\sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2},$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\| \cdot \|_{H^1}$.

12.2.4 Le problème de Dirichlet

On termine par la résolution du très classique problème de Dirichlet dans un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $(a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de fonctions de $L^\infty(\Omega)$. On suppose que la matrice $A = (a_{ij})$ est symétrique, i.e. que $a_{ij} = a_{ji}$, et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{C}^n,\ c|\xi|^2 \leq \mathrm{Re}(\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j}) \leq \frac{1}{c}|\xi|^2$$

On note alors Δ_a l'opérateur différentiel

$$\Delta_a f = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j f)$$

Lorsque $A = Id$, Δ_a n'est autre que le Laplacien habituel.
Pour $f \in H_0^1(\Omega)$, $\Delta_a f$ a bien un sens et appartient à $H^{-1}(\Omega)$, puisque $\partial_j f \in L^2$ et $a_{ij}\partial_j f \in L^2$, donc $\partial_i(a_{ij}\partial_j f) \in H^{-1}(\Omega)$. On va montrer que, pour Ω borné, Δ_a est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Pour prouver ce résultat, on va utiliser un résultat général abstrait qui à un intérêt en lui-même.

Proposition 12.2.13 *(Théorème de Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, et $a(x,y)$ une forme sesquilinéaire sur V (anti-linéaire par rapport à x et linéaire par rapport à y). On suppose que*

1. *la forme sesquilinéaire a est continue, i.e. il existe $M > 0$ tel que*

$$|a(x,y)| \leq M\|x\|\ \|y\|$$

pour tout $x, y \in V$.

2. *la forme sesquilinéaire a est coercive, i.e. il existe $c > 0$ tel que*

$$|a(x,x)| > c\|x\|^2$$

pour tout $x \in V$.

Alors pour tout forme linéaire continue ℓ sur V, il existe un unique $x \in V$ tel que

$$\forall y \in V\ ,\ \ \ell(y) = a(x,y).$$

De plus $\|x\| \leq \|\ell\|/c$.

Preuve
Pour tout $x \in V$, la forme linéaire $y \mapsto a(x,y)$ est continue. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $A(x) \in V$ tel que

$$\forall y \in V\,,\ a(x,y) = A(x) \cdot y.$$

L'application $A : x \mapsto A(x)$ est anti-linéaire puisque, pour tout $y \in V$,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\cdot y = a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \overline{\alpha_1} a(x_1, y) + \overline{\alpha_2} a(x_2, y) = (\overline{\alpha_1} A(x_1) + \overline{\alpha_2} A(x_2))\cdot y.$$

L'application A est aussi continue puisque $\|A(x)\| \leq M\|x\|$.
Soit maintenant ℓ une forme linéaire continue sur V. Encore avec le théorème de Riesz, il existe $z \in V$ tel que

$$\forall y \in V\,,\ \ell(y) = z \cdot y.$$

Donc il s'agit de résoudre l'équation $A(x) = z$ pour $z \in V$ donné, et on va montrer que A est une bijection sur V.
Puisque a est coercive, on a

$$c\|x\|^2 \leq |A(x)\cdot x| \leq \|A(x)\|\ \|x\|,$$

donc

$$\|A(x)\| \geq c\|x\|, \tag{12.15}$$

ce qui montre que A est injectif.
De plus $\Im A$ est un sous-espace fermé de V. En effet, si $(y_j) \in \Im A$ converge vers y dans V, notant $y_j = Ax_j$, on a grâce à (12.15)

$$c\|x_p - x_q\| \leq \|y_p - y_q\|,$$

donc (x_j) est une suite de Cauchy. Puisque V est un Hilbert, elle converge vers un certain $x \in V$ et puisque A est continue, on a

$$y = \lim_{j\to+\infty} y_j = \lim_{j\to+\infty} A(x_j) = A(\lim_{j\to+\infty} x_j) = Ax.$$

Donc $y \in \Im A$.
Maintenant si $x \in (\Im A)^\perp$, on a $0 = |A(x)\cdot x| \geq c\|x\|^2$, donc $(\Im A)^\perp = \{0\}$, et $\Im A = V$. □

Proposition 12.2.14 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, l'équation $\Delta u = f$ admet dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ une unique solution.*

Preuve
L'équation $\Delta_a u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ signifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \langle \Delta_a u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \tag{12.16}$$

ou encore

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \sum_{i,j} \langle u, \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j \varphi) \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, cela équivaut à

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j \varphi(x) dx = -\langle f, \varphi \rangle.$$

On note alors $a(u, v)$ la forme sesquilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ définie par

$$a(u, v) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}(x) \overline{\partial_i u(x)} \partial_j v(x) dx,$$

et ℓ la forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$ donnée par $\ell(v) = -\langle f, v \rangle$. L'équation (12.16) s'écrit

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ a(\overline{u}, \varphi) = \ell(\varphi),$$

et l'on veut montrer qu'elle admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$. Il suffit pour cela de prouver que a est continue et coercive.
La continuité découle facilement du fait que les a_{ij} sont bornées. Pour la coercivité, on a, d'abord pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, puis, par densité, pour $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$|a(u, u)| \geq \operatorname{Re} a(u, u) = \int_\Omega \operatorname{Re} \left(\sum_{i,j} a_{i,j} \overline{\partial_j u} \partial_i u \right) dx \geq c \int_\Omega \sum_j |\partial_j u|^2 \, dx \,.$$

Il reste donc à établir que

$$\int_\Omega \sum_j |\partial_j u|^2 dx \geq \|u\|_{H^1}^2 \,,$$

ce qui est une conséquence immédiate du lemme de Poincaré. □

12.3 Régularité du problème de Dirichlet

On a vu au paragraphe précédent que pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existait une unique distribution $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta u = f\,.$$

On suppose maintenant que $f \in L^2(\Omega)$ et on aimerait regarder les effets de cette hypothèse sur la régularité de u. On a dans cette direction le résultat suivant :

Théorème 12.3.1 *Si Ω est à bord régulier*[2] *et si $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution donnée par le théorème de Lax-Milgram est dans $H^2(\Omega)$.*

Preuve.
Nous ne démontrerons pas ce théorème mais nous contenterons de démontrer la propriété plus faible que

$$u \in H^2_{loc}(\Omega)\,,$$

c'est à dire que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi u \in H^2(\Omega)$. On appelle cette propriété la régularité intérieure et ce que nous ne démontrons pas ici est la régularité au bord.
On sait que $u \in H_0^1(\Omega)$. Considérons $-\Delta(\phi u)$. On a

$$-\Delta(\phi u) = \phi f - 2\nabla\phi \cdot \nabla u - \Delta\phi\, u \in L^2(\Omega)\,.$$

(En étendant par 0 en dehors de Ω, tous les termes sont à support compact dans Ω), on le réécrit sous la forme

$$(-\Delta + 1)(\phi u) \in L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

Il est immédiat (en considérant la transformée de Fourier) que ceci implique $\phi u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. □

Remarque 12.3.2 *Par récurrence on peut montrer que si $f \in H^k_{loc}(\Omega)$ ($k \geq 0$) alors $u \in H^{k+2}_{loc}(\Omega)$.*

Exercice 12.3.3 *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution dans Ω telle que $-\Delta u = f \in C^\infty(\omega)$ pour un ouvert $\omega \subset \Omega$. Montrer qu'alors la restriction à ω de u est dans $C^\infty(\omega)$.*

2. i.e. défini localement comme ensemble des zéros d'une fonction de classe C^2 de gradient non-nul