

Autour d'équations elliptiques singulières

October 29, 2012

Ce projet concerne l'analyse de quelques types d'équations elliptiques nonlinéaires par des méthodes variationnelles. Plus précisément, les équations auxquelles nous nous intéressons sont associées à des problèmes de minimisation qui comportent souvent des phénomènes singuliers. Notre but consiste à développer de nouvelles techniques pour rendre compte de la perte de régularité et l'apparition des singularités dans des questions concrètes concernant la physique (cristaux solides, cristaux liquides, micromagnétisme...), le transport branché et la géométrie. Ces nouvelles approches mettent en oeuvre des outils du calcul des variations, la géométrie et la théorie géométrique de la mesure appliquées à l'analyse des équations aux dérivées partielles.

1 Chercheurs impliqués dans le projet

Ce projet comporte une équipe de l'Université Paris-Sud et une équipe roumaine de l'Université Babes-Bolyai de Cluj (Roumanie):

Équipe du Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud:

- Radu Ignat, Maître de Conférences;
- Filippo Santambrogio, Professeur;
- Pierre Bochard, Doctorant;
- Alpar Meszaros, Doctorant;
- Antonin Monteil, Doctorant.

Équipe de la Faculté de Mathématiques et Informatique, Université Babes-Bolyai, Cluj:

- Alexandru Kristály, Maître de Conférences;
- Csaba Varga, Professeur;
- Csaba Farkas, Doctorant;
- Orsolya Vas, Etudiant (Master).

2 Montant demandé et justification des dépenses

Ce projet est prévu pour les deux ans universitaires 2012-2013 et 2013-2014. Les actions suivantes sont envisagées (tous les montants sont HT):

1. Organisation d'un groupe de travail à l'Université de Cluj pendant 10 jours. Un cours et des exposés sur le sujet sont prévus. Il faudra prendre en charge les frais de voyage et de séjour des chercheurs invités. Soit 4000 euro.
2. Echanges des chercheurs et des étudiants entre l'Université de Cluj et l'Université Paris-Sud pour des courts séjours (1 semaine) en 2012-2014. Soit 6 séjours et voyages à 700 euro chaque: 4200 euro.
3. Achat d'une dizaine d'ouvrages sur le sujet. 500 euro.

Total: **8700 euro HT**.

3 Description scientifique détaillée

I. a. *Problèmes elliptiques anisotropes: EDP via géométrie de Riemann-Finsler*. Beaucoup de problèmes anisotropes sont étudiés via des arguments variationnels, en considérant la fonctionnelle $E_H(u) = \int_{\Omega} H(\nabla u)^2 dx$ définie pour $u \in W^{1,2}(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine régulier et $H : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction convexe de classe $C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ qui est homogène de degré un. En fait, l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle E_H représente une équation elliptique nonlinéaire faisant intervenir l'opérateur de Finsler-Laplace $\Delta_H u := \operatorname{div}(H(\nabla u)\nabla H(\nabla u))$. Ce type de problème surgit en physique mathématique où la minimisation de l'énergie E_H se fait sous des contraintes de périmètre ou volume et la solution minimisante correspond à la configuration optimale de la tension de surface anisotrope. En particulier, ces résultats théoriques justifient la structure polyédrale des cristaux solides avec des petites ruptures intergranulaires (voir Taylor [27]).

La minimisation de E_H entraîne un phénomène de symétrisation, les solutions minimisantes étant recherchées dans un espace fonctionnel dont les éléments vérifient certaines conditions de symétrie. En effet, on a que $E_H(u) \geq E_H(u^*)$ pour tout $u \in W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, où la symétrisée u^* de u est donnée par un réarrangement décroissant de u par rapport à H , i.e., les sous-ensembles de niveau de u^* sont des "formes de Wulff" homothétiques à l'ensemble $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : H_0(x) \leq 1\}$. Ici, $H_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ est la transformée polaire de H définie par $H_0(x) = \sup_{y \neq 0} \frac{\langle x, y \rangle}{H(y)}$ (voir Alvino, Ferone, Lions et Trombetti [1]).

Notre objectif est de combiner des éléments de la géométrie de Riemann-Finsler avec la théorie des problèmes elliptiques. Plus précisément, nous nous focalisons sur des phénomènes singuliers anisotropes qui font intervenir une norme de Minkovski homogène $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ modélisant par exemple l'aspect des pentes en montagne ou la structure des cristaux optiques ou bien, des contraintes environnementales en écologie (voir e.g. Antonelli, Ingarden et Matsumoto [3]). Via des arguments variationnels nous voulons analyser des équations elliptiques singulières et nonlinéaires comportant l'opérateur Finsler-Laplacien Δ_H qui peuvent être traitées en utilisant la fonctionnelle de type Hardy

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \left[H(\nabla u)^2 - \mu \frac{u^2}{H_0(x)^2} \right] dx.$$

Les résultats existants dans la littérature montrent que les ensembles de niveau des solutions de ces problèmes sont de type surface de Wulff (voir van Shaftingen [28], Cianchi et Salani [13]).

Des problèmes elliptiques similaires ont été considérés aussi sur des variétés Riemanniennes noncompactes avec certaines contraintes de courbure (voir Bhakta et Sandeep [6], Carron [11], Kombe et Özaydin [21]).

Une autre question à laquelle nous nous intéressons concerne l'étude des inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) sur des variétés Finsler. Dans ce contexte, le cadre est donné par un espace de Minkovski (\mathbb{R}^N, H) qui supporte les inégalités CKN optimales et fournit les constantes optimales dans les inégalités CKN ainsi que les surfaces de Wulff extrémales. Nous voulons explorer les propriétés de courbure (sectionnelle, Ricci...) des variétés de Finsler non-compactes qui conduisent aux inégalités CKN optimales, ainsi que déduire des résultats topologiques de rigidité.

I. b. *Problèmes sous-elliptiques singuliers sur le groupe d'Heisenberg.* Récemment, Balogh et Kristály ont montré un résultat d'injection compacte à la Lions sur des domaines symétriques nonbornés du groupe d'Heisenberg (voir [5]). Dans ce contexte, l'action de groupe naturelle pour le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ est donnée par le groupe unitaire $U(n) \times \{1\}$ et ses sous-groupes appropriés, qui étaient utilisés pour construire des sous-espaces avec certaines propriétés de symétrie et compacité dans l'espace de Sobolev $HW_0^{1,2}(\mathbb{H}^n)$. Comme application, on peut traiter la multiplicité des solutions des problèmes sous-elliptiques en exploitant la technique de résolution du cube de Rubik appliquée aux sous-groupes de $U(n) \times \{1\}$. Nous voulons aussi traiter d'autres problèmes variationnels relatifs au groupe d'Heisenberg, comme par exemple:

- des inégalités sous-elliptiques optimales sur le groupe d'Heisenberg (de type Caffarelli-Kohn-Nirenberg, Gagliardo-Nirenberg, Sobolev-Hardy etc.);
- le problème de Serrin sur-déterminé sur le groupe d'Heisenberg \mathbb{H}^1 où la boule B_{bubble} (à une translation et une dilatation près) apparaît comme le profil isopérimétrique naturel du problème (voir Capogna, Danielli, Pauls et Tyson [12]), i.e.,

$$B_{\text{bubble}} = \{(z, t) \in \mathbb{H}^1 : |t| < f_R(|z|)\},$$

où $f_R : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$f(r) = \frac{1}{4} \left(R^2 \arccos \left(\frac{r}{R} \right) + r \sqrt{R^2 - r^2} \right).$$

II. *Approximation elliptique d'énergies singulières.* Une autre direction du projet concerne la régularisation elliptique d'énergies singulières issues du transport branché ou de la physique (cristaux liquides, micromagnétisme, élasticité...). Dans ce contexte, notre étude est basée sur la théorie de la Γ -convergence introduite par De Giorgi ([14]) pour donner un cadre précis à l'analyse asymptotique des problèmes de minimisation. Le but de cette théorie consiste à définir une notion de convergence pour une suite $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon \downarrow 0}$ de fonctionnelles, de manière à garantir que leurs minimiseurs convergent vers les minimiseurs de la fonctionnelle limite, et pour assurer la convergence des valeurs minimales de F_ε .

L'un des premiers problèmes étudiés dans ce cadre (voir [23]) a donné le résultat suivant.

Theorem 3.1 (Modica-Mortola). *Définissons les fonctionnelles $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon \downarrow 0}$ définies sur $L^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ par*

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega W(u(x)) dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx & \text{si } u \in H^1(\Omega); \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, si $W(0) = W(1) = 0$ et $W(t) > 0$ pour tout $t \neq 0, 1$, on a $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$, où F est donnée par

$$F(u) = \begin{cases} c \operatorname{Per}(S) & \text{si } u = \mathbf{1}_S \text{ et } S \subset \Omega \text{ est de périmètre fini;} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la constante c est donnée par $c = 2 \int_0^1 \sqrt{W(t)} dt$.

Il s'agit d'un cas très intéressant parce que les fonctionnelles approximantes F_ε et la fonctionnelle limite F sont de natures différentes ($\{F_\varepsilon\}_\varepsilon$ sont finies seulement sur les fonctions H^1 alors que la limite F ne l'est que sur les fonctions indicatrices $u \in BV$). Ce résultat permet d'approcher une transition "nette" (irrégulière) de phase (passer de 0 à 1) par une transition "douce" (régulière), qui se base sur des fonctionnelles plus standards et plus faciles à étudier (en particulier numériquement). Nous signalons par exemple que, récemment, E. Oudet a utilisé ce résultat théorique d'approximation pour mettre en oeuvre une procédure numérique sur un problème d'interfaces, et cela a donné des résultats très satisfaisants (voir [24]).

Il y a beaucoup d'autres problèmes où une énergie "singulière" (dans le cas de Modica-Mortola, l'énergie limite est concentrée sur une interface, donc un objet de co-dimension un) est étudiée comme limite d'énergies intégrales avec un terme régularisant elliptique (énergie de Dirichlet) dont le coefficient converge vers 0. Nous citons quelques exemples:

Cadre vectoriel venant de la supraconductivité : Analyse asymptotique de la fonctionnelle de type Ginzburg-Landau (voir Béthuel-Brezis-Hélein[9]) lorsque $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\min \frac{1}{\varepsilon^2 |\log \varepsilon|} \int (1 - |u|^2)^2 + \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int |\nabla u|^2, \quad u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \Omega \subset \mathbb{R}^d.$$

En imposant des contraintes au bord de $\partial\Omega$ (de type degré topologique), des singularités de co-dimension deux apparaissent (e.g. des points-vortex en dimension $d = 2$) et sont détectées par le jacobien dont la variation totale constitue la fonctionnelle Γ -limite (voir Jerrard-Soner [19]).

Cas des champs de gradient venant de l'élasticité ou les cristaux liquides : Analyse asymptotique de la fonctionnelle suivante lorsque $u = \nabla\psi$ est un champ de gradient dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$\min \frac{1}{\varepsilon} \int W(\nabla\psi) + \varepsilon \int |D^2\psi|^2. \quad (3.1)$$

Typiquement, le potentiel W est positif (dans \mathbb{R}^d) et s'annule sur la sphère S^{d-1} de sorte que la fonctionnelle se concentre sur des interfaces de co-dimension un. Donc, on s'attend à avoir des résultats à la Modica-Mortola pour ces énergies d'ordre plus élevé. C'est un sujet qui a beaucoup été étudié dans les dix dernières années (voir Aviles-Giga [4], Jin-Kohn [20], Ambrosio-DeLellis-Mantegazza [2], DeSimone-Kohn-Müller-Otto [15], Jabin-Perthame [18]...)

Énergies atomiques sur la droite : Bouchitté Dubs et Seppecher ont démontré que les énergies suivantes définies sur $H^1(\mathbb{R})$

$$\min \frac{1}{\varepsilon} \int W(u) + \varepsilon \int |u'|^2 \quad (\text{avec } W'(0) > 0 \text{ et } W(t)/t \rightarrow \infty \text{ pour } t \rightarrow \infty)$$

Γ -convergent vers une énergie définie sur les mesures purement atomiques $u = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ (dont les atomes représenteraient des gouttelettes) de la forme $E(u) = \sum_i g(a_i)$. Si W est une

puissance g l'est aussi, ce qui apparaîtra aussi dans le problème du transport branché ci-dessous.

II. a. *Application en micromagnétisme.* Nous nous intéressons ici à un problème similaire au (3.1) venant du micromagnétisme. Le contexte est plus géométrique à cause de la contrainte $|u| = 1$ (faisant un lien avec les fonctions harmoniques à valeurs dans la sphère S^2). Il s'agit d'analyser l'énergie micromagnétique:

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int W(u_3^2) + \varepsilon \int |\nabla u|^2, \quad u = (u', u_3) \in H^1(\Omega; S^2), \quad \nabla \cdot u' = 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Des résultats de compacité (pour la topologie forte $L^1(\Omega)$) sur les suites $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \downarrow 0}$ satisfaisant $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$ sont disponibles pour un certain type de potentiel $W \geq 0$ s'annulant en 0 (avec croissance quadratique en 0, i.e., $W(t) \geq Ct^2$). Un problème ouvert consiste à analyser la compacité pour d'autres types de potentiels (par exemple à croissance cubique en 0). Une autre direction concerne l'étude de la Γ -convergence de F_ε . Comme dans le modèle de Modica-Mortola, l'énergie limite est concentrée sur les lignes de saut $J(u)$ des u qui sont à divergence nulle et prennent des valeurs dans S^1 (lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$):

$$F(u) := \int_{J(u)} f(|u^+ - u^-|) d\mathcal{H}^1$$

(voir Ignat-Merlet [16] pour une analyse de ces énergies de ligne F). Le lien entre la fonction de coût f et le potentiel W est en général établie par une analyse asymptotique $1D$ à travers les lignes de singularité au niveau $\varepsilon = 0$. Dans le cas d'un potentiel linéaire (i.e., $W(t) = t$), ce problème de Γ -convergence a été traité par Ignat-Merlet [17] en utilisant les entropies venant des lois de conservation scalaires (qui caractérisent la structure de la limite u). En un premier temps, nous voulons établir le résultat de Γ -convergence pour un potentiel quadratique $W(t) = t^2$; en effet, il s'agit d'adapter les résultats obtenus pour (3.1) dans notre cas plus géométrique $u(x) \in S^2$ et la fonctionnelle F_ε contrôle aussi la variation de u_3 . Ensuite, nous nous intéresserons à d'autres cas de potentiel.

II. b. *Application en transport branché.* En parallèle, nous sommes également intéressés par un nouveau problème d'approximation récemment étudié par F. Santambrogio et, ensuite, numériquement, par E. Oudet (voir [26, 25]).

Ce problème d'approximation reprend un peu ce qui a été fait dans [10], où un résultat très similaire pour des énergies définies sur les mesures atomiques sur la droite a été obtenu, mais se met dans un cadre où l'inconnue est un réseau de transport, donc un objet de dimension 1 dans \mathbb{R}^2 . L'objet de l'étude est le problème du transport branché.

Le nom "transport branché" s'est récemment affirmé pour désigner tous ces problèmes de transport où le coût pour une masse m qui parcourt une longueur l n'est pas proportionnel à la masse mais sous-additif et, typiquement, proportionnel à une puissance m^α ($0 < \alpha < 1$). De cette manière le transport joint est favori, avec des effets de branchement vers les différentes destinations. Dans le cas des graphes finis ce genre de problèmes remonte aux années '60 (dans un cadre de recherche opérationnelle), alors que ses généralisations au continu viennent de la communauté du transport optimal et sont beaucoup plus récentes (voir [8], par exemple).

Un traitement numérique satisfaisant de ces questions est encore loin d'être réalisé et cela a motivé le problème de l'approximation de ce type d'énergie. La formulation continue du problème de transport branché passe par une minimisation sous contrainte de divergence (voir [29]) et il est naturel de l'approcher par des problèmes qui portent sur des champs de vecteurs

plus réguliers (qui ont une densité différentiable et qui tendent à se concentrer sur un graphe, sans être des mesures de type \mathcal{H}^1). Le fait d'interpréter un problème de transport comme un problème de minimisation sous contrainte de divergence n'est pas nouveau, il date des années '40-'50 (même époque que Kantorovitch) et a été introduit lors des travaux d'économie spatiale de Beckmann [7].

La formulation précise du résultat est la suivante.

Soit $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace des mesures vectorielles finies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^d et telles que leur divergence est une mesure scalaire finie. Sur cet espace nous considérons la convergence faible de u et $\nabla \cdot u$. On se met dans le cas $d = 2$ et on définit

$$M_\varepsilon^\alpha(u) = \begin{cases} \varepsilon^{\alpha-1} \int_\Omega |u(x)|^\beta dx + \varepsilon^{\alpha+1} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx & \text{si } u \in H^1(\Omega), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $\beta = \frac{4\alpha-2}{\alpha+1}$ (en dimension supérieure la dépendance de β par rapport à α serait différente).

Theorem 3.2. *Posons*

$$M^\alpha(u) = \int_R \theta^\alpha d\mathcal{H}^1$$

si u est une mesure vectorielle rectifiable concentrée sur un ensemble rectifiable unidimensionnel $R \subset \mathbb{R}^d$ et avec densité $\theta\xi$ par rapport à la mesure \mathcal{H}^1 sur R , $\theta : R \rightarrow \mathbb{R}_+$ étant une multiplicité réelle et $\xi : R \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur unité tangent à R en presque tout point, et $M^\alpha(u) = +\infty$ pour les mesures qui n'ont pas cette structure.

Supposons $d = 2$ et $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$: on a alors Γ -convergence des fonctionnelles M_ε^α vers cM^α par rapport à la convergence de $\mathcal{M}(\Omega)$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Ici c est une constante finie et positive, donnée par $c = \alpha^{-1} (4c_0\alpha/(1-\alpha))^{1-\alpha}$, où $c_0 = \int_0^1 \sqrt{t^\beta - t} dt$.

Ceci a été fait dans [26, 25] mais de nombreuses questions restent ouvertes, notamment des problèmes de compacité (il n'est pas vrai que $M_\varepsilon^\alpha(u_\varepsilon) \leq C$ donne une compacité, même pas faible au sens des mesures, donc on s'attend à ce que cela soit vrai juste pour une suite de minimiseurs), mais également le fait d'inclure la contrainte de divergence dans le résultat ou le passage à la dimension supérieure. La limitation $\alpha > 1/2$ a ensuite été levée, ce qui a permis d'obtenir des résultats numériques pour le problème de Steiner, correspondant à $\alpha = 0$ (mais ce cas n'est traité que comme limite $\alpha \rightarrow 0$, puisque l'extension de [25] se limite à $\alpha > 0$, le cas $\alpha = 0$ restant ouvert, bien que probablement faisable).

L'idée de ce projet est donc d'exploiter les compétences qui viennent de deux communautés différentes au sein du calcul des variations, celle qui s'occupe de l'étude asymptotiques des singularités et des problèmes vectoriels et celle venant du transport optimal. font intervenir à la fois le calcul des variations et les EDP, les mathématiques pures et appliquées.

References

- [1] A. Alvino, V. Ferone, P.-L. Lions, G. Trombetti, Convex symmetrization and applications, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 14 (1997), no. 2, 275-293.
- [2] L. Ambrosio, C. De Lellis et C. Mantegazza, Line energies for gradient vector fields in the plane, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 9 (1999), pp. 327-255.
- [3] P. L. Antonelli, R. S. Ingarden, M. Matsumoto, *The theory of sprays and Finsler spaces with applications in physics and biology*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

- [4] P. Aviles et Y. Giga, A mathematical problem related to the physical theory of liquid crystal configurations, *Proc. Centre Math. Anal. ANU*, 12, 1–16, 1987.
- [5] Z. Balogh, A. Kristály, Lions-type compactness and Rubik actions on the Heisenberg group, *Calc. Var.*, en-ligne.
- [6] M. Bhakta, K. Sandeep, Poincaré Sobolev equations in the Hyperbolic space, prépublication.
- [7] M. Beckmann, A continuous model of transportation, *Econometrica* (20), 643–660, 1952.
- [8] M. Bernot, V. Caselles and J.-M. Morel, *Optimal transportation networks, Models and Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Vol. 1955 (2008).
- [9] F. Béthuel, H. Brezis et F. Hélein, *Ginzburg-Landau Vortices*, Birkhäuser, 1994.
- [10] G. Bouchitté, C. Dubs et P. Seppecher, Transitions de phases avec un potentiel dégénéré à l’infini, application à l’équilibre de petites gouttes, *C.R.Acad. Sci.*, 323, série I, p. 1103-1108, 1996.
- [11] G. Carron, Inégalité de Hardy sur les variétés Riemanniennes non-compactes, *J. Math. Pure Appl.* 76(1997), pp. 883-891.
- [12] L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls, J. T. Tyson, *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, Progress in Mathematics, 259. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [13] A. Cianchi, P. Salani, Overdetermined anisotropic elliptic problems, *Math. Ann.* 345 (2009), no. 4, 859-881.
- [14] E. De Giorgi et T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale, *Atti Acc. Naz. Lincei Rend.*, 58 (8) (1975), pp. 842-850.
- [15] A. DeSimone, R. V. Kohn, S. Müller et F. Otto, A compactness result in the gradient theory of phase transitions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 131 (2001), pp. 833–844.
- [16] R. Ignat et B. Merlet, Entropy method for line energies, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, en-ligne.
- [17] R. Ignat et B. Merlet, Lower bound for the energy of Bloch walls in micromagnetics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 199 (2011), pp 369–406.
- [18] P.-E. Jabin et B. Perthame, Compactness in Ginzburg-Landau energy by kinetic averaging, *Comm. Pure Appl. Math.*, 54 (2001), pp. 1096–1109.
- [19] R. L. Jerrard et H. M. Soner, The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 14 (2002), 151–191.
- [20] W. Jin et R. V. Kohn, Singular perturbation and the energy of folds, *J. Nonlinear Sci.*, 10 (2000), pp. 355–390.
- [21] I. Kombe, M. Özaydin, Improved Hardy and Rellich inequalities on Riemannian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* 361(2009), 6191-6203.

- [22] A. Kristály, V. Rădulescu, Cs. Varga, *Variational Principles in Mathematical Physics, Geometry, and Economics*, Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, No. 136, Cambridge, 2010.
- [23] L. Modica et S. Mortola, Un esempio di Γ -convergenza. (Italian) *Boll. Un. Mat. Ital. B* (14), no. 1, 285–299, 1977.
- [24] E. Oudet, Approximation of partitions of least perimeter by Γ -convergence : around Kelvin’s conjecture, *Exp. Math.* (20), No. 3 (2011), 260–270.
- [25] E. Oudet and F. Santambrogio, A Modica-Mortola approximation for branched transport and applications, to appear in *Arch. Rati. Mech. An.*, 201, No 1 (2011), 115–142.
- [26] F. Santambrogio, A Modica-Mortola approximation for branched transport, *Comptes Rendus Mathématiques* vol. 348, no15-16, pp. 941–945, 2010.
- [27] J. E. Taylor, Crystalline variational methods. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 99 (2002), no. 24, 15277-15280.
- [28] J. Van Schaftingen, Anisotropic symmetrization. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 23 (2006), no. 4, 539-565.
- [29] Q. Xia, Optimal Paths related to Transport Problems. *Comm. Cont. Math.* (5), no. 2, 251–279, 2003.