

Rapport scientifique  
concernant l'activité de l'année 2013 sur le projet  
Méthodes de Décomposition de Domaine pour les Problèmes de  
Contact avec Frottement  
dans le cadre du LEA Math-Mode

Les participants à ce projet de recherche sont: Lori Badea (Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine), Marius Cocou et Frédéric Lebon (Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS et Université d'Aix-Marseille). L'activité de recherche du projet a été menée principalement sur l'analyse mathématique et numérique d'une classe d'inéquations variationnelles d'évolution implicites qui représente une généralisation de plusieurs problèmes quasi-statiques de contact en élasticité. De plus, pendant les visites à Bucarest de Frédéric Lebon et à Marseille de Lori Badea, nous avons envisagé l'étude d'un problème de couplage entre deux corps élastiques avec de conditions sur l'interface données par les sauts des déplacements et des contraintes. Enfin, nous avons continué l'analyse des méthodes de Schwarz pour les problèmes de contact avec frottement formulés en variables des contraintes. Nous décrivons dans la suite les résultats que nous avons obtenus.

**Résultats obtenus**

1. Les résultats concernant l'analyse mathématique et numérique d'un système d'inéquations variationnelles d'évolution implicites ont été publiés dans deux articles:

[1] L. Badea and M. Cocou, Approximation results and subspace correction algorithms for implicit variational inequalities, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, **6**, 6, pp. 1507-1524, 2013.

[2] L. Badea and M. Cocou, Internal and subspace correction approximations of implicit variational inequalities, *Mathematics and Mechanics of Solids*, paru en ligne le 10 Décembre 2013, DOI: 10.1177/1081286513514075.

Les résultats obtenus seront aussi présentés par Marius Cocou à

[3] Contact Mechanics International Symposium CMIS 2014, Abu Dhabi, 3 - 5 février 2014, dans une communication intitulée "Internal and subspace correction approximations of quasistatic contact problems".

Le but de ces recherches a été d'étudier l'existence des solutions et de donner des algorithmes de résolution numérique pour un système d'inéquations variationnelles d'évolution qui représente une généralisation de plusieurs problèmes quasi-statiques de contact en élasticité. Les résultats obtenus constituent une approche unifiée qui peut être appliquée à divers problèmes quasi-statiques de contact, y compris de contact unilatéral ou bilatéral avec frottement non local, aux conditions de compliance normale avec frottement ou aux lois plus complexes d'interaction comme, par exemple, des lois d'interface couplant le contact unilatéral, l'adhérence et le frottement non local entre deux corps élastiques. En utilisant des estimations appropriées pour les solutions incrémentales, nous prouvons l'existence d'une solution continue et montrons la convergence d'une méthode basée sur une approximation interne et un schéma semi-discret aux différences implicite. Pour résoudre les problèmes correspondants entièrement discrétisés, nous proposons trois algorithmes multiplicatifs dans [1] et deux algorithmes additifs dans [2]. Ces algorithmes sont écrits comme des méthodes

de correction sur sous-espaces pour lesquelles nous prouvons la convergence globale et nous donnons des estimations de l'erreur.

Puisque cette théorie générale concerne aussi les problèmes non linéaires, nous nous proposons dans la suite d'appliquer les résultats que nous avons obtenus à un problème qui est effectivement non linéaire. De plus, nous nous proposons d'introduire et d'analyser la convergence des algorithmes du type Euler-Schwarz pour des problèmes de contact avec frottement. Dans les approches habituelles, le problème est discrétisé en temps et on applique la méthode de Schwarz pour résoudre le problème à chaque pas de temps. Dans les algorithmes du type Euler-Schwarz, le problème est résolu simultanément en temps et en espace pendant les itérations.

2. Pour le problème du couplage entre deux corps élastiques avec des conditions sur l'interface données par les sauts de déplacements et de contraintes, nous avons donné une formulation variationnelle et formulé une méthode d'éléments finis pour le résoudre. Nous nous proposons d'élaborer, avec l'aide de Serge Dumont, un collaborateur de Frédéric Lebon, un code de calcul et de comparer les résultats numériques avec ceux obtenus par deux autres méthodes.

3. Nous avons soumis il y a longtemps l'article (mais nous n'avons aucune réponse des rapporteurs)

- Lori Badea et Frédéric Lebon, Schwarz methods for dual contact problems, soumis à Journal of Computational and Applied Mathematics,

où nous analysons les méthodes multiplicative et additive de Schwarz pour les problèmes de contact avec frottement de Tresca formulés en contraintes. Dans cette variable duale, le problème est écrit comme une inéquation variationnelle dans l'espace  $H_{div}(\Omega)$ ,  $\Omega$  étant le domaine du problème. Sous certaines hypothèses, nous démontrons la convergence globale et nous donnons l'estimation de l'erreur pour ces méthodes. Toutefois, la vérification de ces hypothèses dans l'espace  $H_{div}(\Omega)$  ne peut pas être faite facilement, comme pour l'espace  $H^1(\Omega)$ . Le résultat principal de cet article a été de montrer que ces hypothèses sont vérifiées pour cette inéquation variationnelle.

Les expériences numériques ont montré que les systèmes linéaires à variable duale sont mieux conditionnés que ceux à variable primale. D'autre part, cette approche est moins utilisée que les approches primale ou mixte en raison de certaines difficultés numériques liées aux espaces d'éléments finis qu'on doit utiliser. Les résultats de l'article ont été donnés pour le problème continu. Cette année nous avons abordé l'étude des méthodes pour le problème discrétisé par les éléments finis.

### Séjours effectués

- Lori Badea, 16.12.2013 - 23.12.2013 (8 jours) au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique CNRS, Marseille

- Frédéric Lebon, 29.11.2013 - 02.12.2013 (4 jours) à l'Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine, Bucarest

- Marius Cocou, 28.10.2013 - 01.11.2013 (5 jours) à l'Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine, Bucarest