LEA MATH-MODE

Rapport d'activité 2013

N. C. Bonciocat, Y. Bugeaud, M. Cipu, M. Mignotte

En 2013 nous avons obtenu des résultats dans deux directions.

1. L'étude de l'irréductibilité des combinaisons linéaires des polynômes en plusieurs variables sur un corps arbitraire

Le problème de décider si la somme de deux polynômes premiers entre eux, à coefficients dans un domaine avec factorisation unique, est irréductible ou non est en général assez difficile, et aucune réponse ne semble disponible. Un peu plus facile est l'étude des combinaisons linéaires de ces polynômes, disons $n_1 f(X) + n_2 g(X)$, au lieu de leur somme. De telles combinaisons linéaires peuvent être irréductibles si quelques conditions sur la factorisation de n_1 et n_2 sont satisfaites. Par exemple, quelques résultats récents donnent des critères d'irréductibilité pour des polynômes de la forme $f(X)+pg(X)$, où f et g sont des polynômes premiers entre eux à coefficients rationnels et p est un nombre premier sufissament grand — voir [8], [9], [5], [3], [2], [10], [4] et [1].

Dans le cadre d'un projet précédemment soutenu par LEA Math-Mode, nous avons donné [6] des critères d'irréductibilité pour des polynômes $f(X) + p^k g(X)$ avec f, $g \in \mathbb{Z}[X]$, f et g premiers entre eux, $\deg g > \deg f$, p un nombre premier qui ne divise aucun des coefficients dominants de f et g, et k un entier positif premier à $\deg g - \deg f$. Dans le cadre du projet en cours de réalisation nous avons étudié les polynômes de la forme $f(X,Y) + p(X)^k g(X,Y)$, avec f et g premiers entre eux, $\deg_Y f < \deg_Y g$, k nombre naturel et $p \in K[X]$ irréductible sur le corps des coefficients K. Un de nos résultats assure l'irréductibilité d'un tel polynôme en deux variables pourvu que k soit premier avec $\deg_Y g - \deg_Y f$ et $\deg p^k$ dépasse une certaine borne dépendant des degrés des coefficients de f et de g. Plus precisément, nous avons prouvé le résultat suivant.

Théorème 1 *Soit K un corps, et $f(X,Y) = \sum_{i=0}^{n-d} a_i(X)Y^i$, $g(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} b_i(X)Y^i \in K[X,Y]$, où $a_0,\dots,a_{n-d}, b_0,\dots,b_n \in K[X]$, $a_{n-d}b_n \neq 0$ et $d \geq 1$. Si f et g regardés comme des polynômes en Y à coefficients en $K[X]$ sont premiers entre eux, alors pour tout polynôme irréductible $p(X) \in K[X]$ qui ne divise pas $a_{n-d}b_n$, et tout nombre naturel k premier avec d tel que*

$$k \deg p > \max_{0\leq i\leq n-d} \deg a_i + n \max_{0\leq i\leq n} \deg b_i,$$

le polynôme $f(X,Y) + p(X)^k g(X,Y)$ est irréductible sur $K(X)$.

Pour $k = 1$ on ne doit pas demander que p ne divise pas $a_{n-d}b_n$, car cette condition sera évidemment satisfaite car p est irréductible sur K et la condition sur $\deg p$ impose $\deg p > \max\{\deg b_n,\ \deg a_{n-d}\}$. Plus preécisement, pour $k = 1$ nous avons le résultat suivant.

Théorème 2 *Soit K un corps, et $f(X,Y) = \sum_{i=0}^{n-d} a_i(X)Y^i$, $g(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} b_i(X)Y^i \in K[X,Y]$, où $a_0,\dots,a_{n-d}, b_0,\dots,b_n \in K[X]$, $a_{n-d}b_n \neq 0$ et $d \geq 1$. Si f et g regardés* *comme des polynômes en Y à coefficients en $K[X]$ sont premiers entre eux, alors pour tout polynôme irréductible $p(X) \in K[X]$ tel que*

$$\deg p > \max_{0\leq i\leq n-d} \deg a_i + n \max_{0\leq i\leq n} \deg b_i$$

le polynôme $f(X,Y) + p(X)g(X,Y)$ est irréductible sur $K(X)$.

Pour prouver ces résultats, nous avons utilisé le lemme suivant, qui est d'un intérêt indépendant.

Lemme 3 *Soit K un corps et f, $g \in K[X,Y]$ deux polynômes avec $\deg_Y g = n$ et $\deg_Y f = n - d$, et soit $d \geq 1$ un nombre naturel. Soit $p(X) \in K[X]$ un polynôme irréductible qui ne divise aucun des coefficients dominants de f et g, regardés comme des polynômes en Y à coefficients en $K[X]$, et soit k un nombre naturel premier avec d. Si on peut écrire $f(X,Y) + p(X)^k g(X,Y)$ comme le produit de deux polynômes $f_1, f_2 \in K[X,Y]$ dont $\deg_Y f_1 \geq 1$ et $\deg_Y f_2 \geq 1$, alors le coefficient dominant de f_1 ou celui de f_2, regardés comme des polynômes en Y à coefficients en $K[X]$, doit être divisible par $p(X)^k$.*

Les techniques utilisées dans la preuve nous permettent d'étendre ces résultats aux polynômes en plusieurs variables. On va aussi utiliser ces techniques pour obtenir des résultats similaires pour des compositions des polynômes en plusieurs variables, ainsi que pour des convolutions multiplicatives de polynômes en plusieurs variables sur un corps arbitraire.

Un article intitulé *Irreducibility criteria for sums of two relatively prime multivariate polynomials* a été soumis pour publication.

2. Dans l'étude des $D(-1)$-suites, nous nous sommes interessés aux propriétés qu'une telle suite de longueur quatre doit avoir. Nous avons montré qu'il n'y a pas des $D(-1)$-quadruples $(1, b, c, d)$ avec $1 < b < c < d$ et $c > 4b^2$, sauf peut-être dans le domaine $220b^3 < c < 500b^3$.

D'autre part, nous avons amélioré la borne sur le nombre des $D(-1)$-quadruples. Dans notre article [7] issu d'un projet précédemment soutenu par LEA Math-Mode, on trouve la borne $4 \cdot 10^{70}$. La meilleure borne publiée est depuis peu $5 \cdot 10^{60}$, voir [11]. Pour le moment, nous pouvons réduire ce nombre de moitié, ce qui est encore très loin de la valeur conjecturée — zéro.

Ces résultats sont contenus dans un travail en préparation.

Nous nous proposons d'approfondir l'étude des $D(-1)$-quadruples et de voir dans quelle mesure nos techniques peuvent être adaptées pour obtenir de nouveaux résultats sur les $D(n)$-suites pour d'autres valeurs de n.

En 2013, M. Cipu a effectué une visite d'une semaine à l'Université de Strasbourg afin de finaliser le travail sur les polynômes et d'avancer l'étude des $D(-1)$-suites. La visite a permis de consulter quelques ouvrages qui se trouvent dans la bibliothèque de l'UFR Mathématiques-Informatique de l'Université de Strasbourg, mais pas dans la bibliothèque de IMAR.

References

[1] A.I. Bonciocat, N.C. Bonciocat, *A Capelli type theorem for multiplicative convolutions of polynomials*, Math. Nachr. 281 (2008), no. 9, 1240–1253.

[2] A.I. Bonciocat, N.C. Bonciocat, A. Zaharescu, *On the number of factors of convolutions of polynomials with integer coefficients*, Rocky Mountain J. Math. 38 (2008), 417–431.

[3] A.I. Bonciocat, A. Zaharescu, *Irreducibility results for compositions of polynmials with integer coefficients*, Monatsh. Math. 149 (2006), 31–41.

[4] A.I. Bonciocat, A. Zaharescu, *Irreducibility results for compositions of polynmials in several variables*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 115 (2) (2005), 117–126.

[5] N.C. Bonciocat, *Upper bounds for the number of factors for a class of polynmials with rational coefficients*, Acta Arith. 113 (2004), 175–187.

[6] N.C. Bonciocat, Y. Bugeaud, M. Cipu, M. Mignotte, *Irreducibility criteria for sums of two relatively prime polynmials*, Int. J. Number Theory 9 (2013), no. 6, 1529–1539.

[7] N. C. Bonciocat, M. Cipu, M. Mignotte, On $D(-1)$-quadruples, *Publ. Math.*, **56**(2012), 279–304.

[8] M. Cavachi, *On a special case of Hilbert's irreducibility theorem*, J. Number Theory 82 (2000), 96–99.

[9] M. Cavachi, M. Vâjâitu, A. Zaharescu, *A class of irreducible polynomials*, J. Ramanujan Math. Soc. 17 (2002), 161–172.

[10] M. Cavachi, M. Vajaitu, A. Zaharescu, *An irreducibility criterion for polynomials in several variables,* Acta Math. Univ. Ostrav. 12 (2004), no. 1, 13–18.

[11] C. Elsholtz, A. Filipin, Y. Fujita, On Diophantine quintuples and $D(-1)$-quadruples, *Monats. Math.*, to appear (2014)