LEA MATH MODE

– RAPPORT 2012 –

ANDREI MOROIANU, SERGIU MOROIANU

En 1873 Schlaefli a posé la question de savoir si toute surface riemannienne se plonge localement isométriquement dans $\mathbb{R}^3$. Cette question, remise au goût du jour par S.-T. Yau plus d'un siècle plus tard, est toujours ouverte en toute généralité, même si on sait que la réponse est positive dans le cas analytique (Janet et Cartan, 1927) ou au voisinage des points où la courbure de Gauss est non-nulle (Hartman et Winter, 1950), ou encore au voisinage des points ou la courbure s'annule avec une certaine régularité (Han, Hong et Lin, 2003). Nous avons attaqué ce problème dans le cas des surfaces minimales par des méthodes spinorielles, en mettant à profit les spineurs de Killing généralisés qui caractérisent les plongements isométriques des variétés comme hypersurfaces dans des espaces plats ou admettant des spineurs parallèles. Ce travail fait suite à notre article récent en collaboration avec B. Ammann [1] où nous étudions le problème de Cauchy pour les métriques d'Einstein.

Nous avons montré [2] qu'une surface riemannienne (M^2, g) se plonge localement isométriquement comme surface minimale dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si sa courbure de Gauss K est non-positive et satisfait la *condition de Ricci*

$$K\Delta K + g(dK, dK) + 4K^3 = 0. \tag{1}$$

Dans le cas où la courbure K est strictement négative, ce résultat a été prouvé par Ricci-Curbastro dans les années 1920. De plus, nous montrons que si la courbure K d'une métrique riemannienne satisfait (1) alors elle ne change pas de signe sur les composantes connexes de M, et ses zeros sont isolés. Dans le cas $K \geq 0$ nous montrons que (M^2, g) se plonge localement isométriquement comme surface maximale dans l'espace de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$.

Motivés par ce résultat, nous appelons une surface riemannienne (M^2, g) dont la courbure de Gauss K satisfait (1) *surface de Ricci*.

Dans la seconde partie du papier [2] nous nous sommes intéressés aux exemples compacts de surfaces de Ricci. Ces variétés sont intéressantes car elles se plongent localement comme surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$, mais étant compactes, n'admettent aucune immersion isométrique globale comme surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$. Nous avons construit trois classes d'exemples :

(1) Des quotients de surfaces minimales triplement périodiques par une lattice de $\mathbb{R}^3$;

(2) Des revêtements ramifiés de genre g de la sphère S^2 dont le degré est $g-1$;
(3) Des surfaces en tout genre $g \geq 2$ obtenues par recollement de triangles sphériques.

Nous avons également étudié les solutions *positives* de l'équation (1), qui correspondent à des surfaces admettant des plongements locaux comme surfaces maximales dans l'espace de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$. Il n'existe pas d'exemples compacts lisses de telles variétés, mais nous construisons néanmoins des exemples compacts à singularités coniques.

Nous nous proposons de continuer l'étude systématique des surfaces de Ricci en développant plusieures directions :

(1) Étudier l'espace de modules des surfaces de Ricci dans l'espace de Teichmüller.
(2) Attaquer le problème plus général des plongements des surfaces dans les espaces plats à l'aide des spineurs de Killing généralisés.

Références

[1] B. Ammann, A. Moroianu, S. Moroianu, *The Cauchy problem for metrics with parallel spinors*, accepté dans Commun. Math. Phys.

[2] A. Moroianu, S. Moroianu, *Ricci surfaces*, arXiv :1206.1620.

Andrei Moroianu, Université de Versailles-St Quentin, Laboratoire de Mathématiques, UMR 8100 du CNRS, 45 avenue des États-Unis, 78035 Versailles, France

E-mail address: am@math.polytechnique.fr

Sergiu Moroianu, Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, 21 Calea Grivitei Str. 010702-Bucharest, Romania

E-mail address: sergiu.moroianu@imar.ro