SURFACES MINIMALES INTRINSÈQUES
– PROJET DE RECHERCHE –

ANDREI MOROIANU, SERGIU MOROIANU

En 1873 Schlaefli a posé la question de savoir si toute surface riemannienne se plonge localement isométriquement dans $\mathbb{R}^3$. Cette question, remise au goût du jour par S.-T. Yau plus d'un siècle plus tard, est toujours ouverte en toute généralité, même si on sait que la réponse est positive dans le cas analytique (Janet et Cartan, 1927) ou au voisinage des points où la courbure de Gauss est non-nulle (Hartman et Winter, 1950), ou encore au voisinage des points ou la courbure s'annule avec une certaine régularité (Han, Hong et Lin, 2003). Nous nous proposons d'attaquer ce problème (en commençant par le cas des surfaces minimales) par des méthodes spinorielles, en mettant à profit les spineurs de Killing généralisés qui caractérisent les plongements isométriques des variétés comme hypersurfaces dans des espaces plats ou admettant des spineurs parallèles. Ce projet fait suite à notre travail récent en collaboration avec B. Ammann [1] où nous étudions le problème de Cauchy pour les métriques d'Einstein.

Nous venons d'obtenir un résultat encourageant dans cette direction : une surface riemannienne (M^2, g) se plonge localement isométriquement comme surface minimale dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si sa courbure de Gauss K est non-positive et satisfait la *condition de Ricci*

$$K\Delta K + g(dK, dK) + 4K^3 = 0. \tag{1}$$

Dans le cas oeù la courbure K est strictement négative, ce résultat a été prouvé par Ricci lui-même dans les années 1920.

Motivés par ce résultats, nous appelons une surface riemannienne (M^2, g) dont la courbure de Gauss K satisfait (1) *surface minimale intrinsèque*.

Nous nous proposons d'initier une étude systématique des surfaces minimales intrinsèques. Nous irons dans plusieures directions :

(1) Trouver des exemples compacts. De tels exemples, s'ils existent, seraient des variétés qui se plongent localement comme surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$, mais qui n'admettent aucune immersion isométrique globale comme surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$.

(2) Étudier l'espace de modules des surfaces minimales intrinsèques, en tant que sous-variété de l'espace de Teichmüller.

(3) Étudier les solutions *positives* de l'équation (1), qui correspondent à des surfaces admettant des plongements locaux comme surfaces maximales dans l'espace de Lorenz $\mathbb{R}^{2,1}$.

(4) Attaquer le problème plus général des plongements des surfaces dans les espaces plats à l'aide des spineurs de Killing généralisés.

Chacun de nous deux est assez experimenté dans un des deux domaines impliqués : la géométrie spinorielle et la théorie des surfaces de Riemann. En outre, nous avons déjà une experience de recherche en commun (dans le cadre du précédent programme LEA 2008-2011) sur des sujets connexes, cf. [1], [2], [3]. Cela étant, nous pensons que notre projet est tout-à-fait réalisable.

Références

[1] B. Ammann, A. Moroianu, S. Moroianu, *The Cauchy problem for metrics with parallel spinors*, 30 pp., arXiv :1106.2066.

[2] A. Moroianu, S. Moroianu, *The Dirac spectrum on manifolds with gradient conformal vector fields*, J. Funct. Anal. **253** (2007), 207–219.

[3] A. Moroianu, S. Moroianu, *The Dirac operator on generalized Taub-NUT spaces*, Commun. Math. Phys. **305** (2011), 641–656.

Centre de Mathémathiques, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

E-mail address: am@math.polytechnique.fr

Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, 21 Calea Grivitei Str. 010702-Bucharest, Romania

E-mail address: sergiu.moroianu@imar.ro