Rapport scientifique sur le projet LEA Math-mode

La modélisation des interactions entre les populations de neurones en utilisant une approche densité de population

Jacques Henry et Carmen Oana Tarniceriu

Missions dans le cadre du projet

Deux missions ont été effectuée dans le cadre de ce projet:

1. Carmen Oana Tarniceriu a visité UFR Science et Modélisation Bordeaux du 29 mai au 14 juin 2010.

2. Carmen Oana Tarniceriu a visité UFR Science et Modélisation Bordeaux du 29 novembre au 20 decembre 2010.

Présentation synthétique des résultats obtenus

Nous avons étudié, sur financement INRIA dans l'équipe Anubis en 2009, les phénomènes de synchronisation pour une population de neurones d'Izhikevich faiblement couplée. Cette étude théorique s'appuit sur l'approche densité de population. En supposant que le couplage synaptique se modélise par une intensité proportionnelle au taux de déclenchement de la population, nous avons obtenu des équations simplifiées, décrivant cette fois ci, la densité de phase de la population. Puis par un développement asymptotique semblable à celui utilisé dans le théorème de Malkin, nous obtenons une équation sur la variation en temps long de la densité de phase.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \tau}\bar{q}^{\epsilon}(\tau,x) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(H(\tau,x)\bar{q}^{\epsilon}(\tau,x)\right) = 0, & \tau > 0, \quad x \in (0,T), \\ H(\tau,x) = \dfrac{c_0\dot{s}(T)}{T}\displaystyle\int_0^T \bar{q}^{\epsilon}(\tau,x-t)\lambda_1(t)\,\mathrm{d}t, & \tau \geq 0, \quad x \in [0,T), \\ \bar{q}^{\epsilon}(\tau,0) = \bar{q}^{\epsilon}(\tau,T), & \tau > 0, \\ \bar{q}^{\epsilon}(0,x) = q_0^{\epsilon}(x), & x \in [0,T), \end{cases} \tag{0.1}$$

où c_0, s, q_0^ϵ sont des donées tandis que λ_1 est solution du système adjoint :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_1(t,\varphi) = -\dfrac{\partial F^v}{\partial v}(\tilde{v},\tilde{u})\lambda_1(t,\varphi) - \dfrac{\partial F^u}{\partial v}(\tilde{v},\tilde{u})\lambda_2(t,\varphi), \quad t \in [0,T), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_2(t,\varphi) = -\dfrac{\partial F^v}{\partial u}(\tilde{v},\tilde{u})\lambda_1(t,\varphi) - \dfrac{\partial F^u}{\partial u}(\tilde{v},\tilde{u})\lambda_2(t,\varphi), \quad t \in [0,T), \end{cases} \tag{0.2}$$

Avec des conditions aux limites de transversalité et de périodicité imposées sur (λ_1, λ_2). A noter qu'ici les fonctions F^v et F^u sont connues et données par le modèle d'Izhikevich. Ce système permet ainsi d'analyser en fonction de la répartition de phase initiale et de la nature du couplage si une population de neurones aura ou non tendance à se synchroniser.
Nous avons trouvé dans un cas très particulier, une condition suffisante sur la répartition initiale pour garantir la synchronisation. Dans le cadre de ce projet, nous avons continué avec une analyse de stabilité de la solution stationnaire. La condition de stabilité que nous obtenons est liée a la valeur de la parte imaginaire de la transformée Fourier de λ_1. Nous avons ensuite essayé d'appliquer la même méthode pour une population de neurones Integre-et-Tire, un cas plus simple qui nous permettra de trouver une condition explicite de stabilité de la solution stationnaire et de la solution synchronsée.

Conférences

Un exposé a été fait au "CMPD 3 Conference on Computational and Mathematical Population Dynamics" pendant la premiere mission fait grace au financement LEA Math-Mode.