Rapport d'activité en 2010

1. Titre : Analyse diophantienne dans l'étude des polynômes et des équations diophantiennes

2. Participants :

Yann Bugeaud et Maurice Mignotte (Université de Strasbourg, Institut de Recherche Mathématique Avancée – UMR 7501),

Nicolae Ciprian Bonciocat et Mihai Cipu (Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine, Bucarest)

3. Présentation synthétique des résultats obtenus :

Nous avons travaillé sur deux problèmes, portant sur les $D(-1)$-suites et respectivement les polynômes irrreductibles.

Une suite de nombres entiers telle que tout produit de deux termes distincts est un carré parfait plus 1 est appelée $D(-1)$-suite. Cette notion est la transcription contemporaine d'un problème formulé par Diophante dans le III $^{\text{ème}}$ siècle.

On sait que toute $D(-1)$-suite a au plus quatre termes et qu'il y a seulement un nombre fini de $D(-1)$-quadruples. Les experts s'attendent qu'il y ait aucun.

Grâce aux travaux de Dujella, Filipin, Fuchs, Fujita, He, Tamura, Togbé, parmi d'autres, on connaît aussi que tout $D(-1)$-quadruple (a, b, c, d) avec $a < b < c < d$ satisfait les conditions suivantes :

$$a = 1, \quad b > 100, \quad c > 3b, \quad c < 10^{491}.$$

Le résultat centrale de notre recherche donne des conditions nécessaires bien plus fortes sur un $D(-1)$-quadruple hypothétique :

$$b > 10^{13}, \quad c > b^{1.18}, \quad c < 10^{160}.$$

Les améliorations sont dues à la combinaison de trois idées. Premièrement, nous avons donné une expression quantitative au principe de "répulsion des solutions d'une équation diophantienne". Deuxièmement, nous avons décomposé l'espace où peut se trouver la troisième composante d'un $D(-1)$-quadruple dans dix tranches fines et chacune d'entre elles a été examinée avec les plus appropriés outils. Finalement, nous avons utilisé un réseau de 6 ordinateurs pour étudier numériquement divers paramètres associés à un $D(-1)$-quadruple.

Les informations recueillies ont servi pour établir la nouvelle borne supérieure pour le nombre des $D(-1)$-quadruples. Nous avons réussi majorer le nombre des $D(-1)$-quadruples par 10^{79}, au lieu de 10^{356}, qui est le meilleur résultat publié. Plusieures ordres de magnitude ont été gagnés grâce à l'utilisation du principe "calculer au lieu d'estimer" pour déterminer les valeures d'une fonction.

La deuxième thème de recherche commune porte sur l'irréductibilité des polynômes en plusieures variables. Nous avons obtenu un nouveau critère d'irréductibilité pour des polynômes sur un corps arbitraire, qui généralise un critère d'irréductibilité de Pólya pour des polynômes $f(x)$ à coefficients entiers tels que $|f(n)|$ est sufissament petit pour un certain nombre de valeurs entiers de n. Notre critère donne l'irréductibilité des polynômes en deux variables $f(x, y)$ tels que le degré de $f(x, f_i(x))$ est suffisamment petit, pour certains polynômes $f_i(x)$ avec $\deg(f_i) \neq \deg(f_j)$ pour $i \neq j$. Afin de prouver l'irréducibilité de tels polynômes, on a exploité l'analogie avec les polynômes dans une variable et on a utilisé des techniques de la théorie des valuations non-archimédiènnes sur l'anneau $K[X]$ (où K est un corps arbitraire et X une variable). Ensuite nous avons obtenu un critère d'irréductibilité similaire pour des polynômes en $r \geq 3$ variables sur un corps arbitraire, en utilisant la valuation donnée par le degré d'un tel polynôme par rapport à une de ses variables. Une classe d'exemples de tels polynômes est donnée par : $F(x, y) = (y - f_1(x) \cdots (y - f_n(x)) + f(x)$, où $\deg(f_i) \neq \deg(f_j)$ pour $i \neq j$ et $\deg f$ sufissament petit.

4. Activités financées par LEA Math-Mode en 2010 :

Une visite à Strasbourg dans la dernière semaine du mois d'août pour les deux participants roumains.

5. Conférences :

Le 1er septembre 2010, N. C. Bonciocat a fait un exposé à l'Université de Strasbourg sur l'iréductibilité des polynômes en plusieures variables, dont le titre est "On Perron's irreducibility criterion".

6. Articles en préparation :

N. C. Bonciocat, M. Cipu, M. Mignotte, On $D(-1)$-quadruples.

N. C. Bonciocat, Y. Bugeaud, M. Cipu, M. Mignotte, On an irreducibility criterion of Pólya.