L'unicité et la propriété de Liouville pour le système dynamique de Glauber

Projet de recherche pour les anées 2009-2010 dans le cadre du Laboratoire Européen Associé CNRS franco-roumain *Math Mode*

par

Ludovic Dan LEMLE
Université Politehnica de Timişoara, Roumanie

et

Liming WU
Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, France

Rapport d'activité pour 2009

A l'occasion de la visite à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand de L.D Lemle, du 4 may au 27 may 2009, nous avons établi les détails du projet.
Notre projet de recherche s'enscrire dans la thématique de l'analyse stochastique. Considerons le système dynamique de Glauber

$$dx_i(t) = \sigma dB_i(t) - \nabla \sum_{j \neq i} \Phi_{ij}(X(t)) \quad , \quad i \in \mathbb{Z}^d$$

où (Φ_{ij}) est une famille de potentiel d'intéraction. De point de vue des équations différentielles stochastiques, Doss et Royer ont établi l'existence et l'unicité de ce système dans un cadre hilbertien. Comme l'espace de configuration $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ n'est pas compact, le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ n'est pas fortement continu et la théorie de Hille-Yosida ne marche pas.

Soit E un espace polonais doté d'une mesure σ-finie μ sur sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. D'abord, il faut remarquer que la topologie naturelle pour l'étude des C_0-semi-groupes sur $L^\infty(E,\mu)$ est *la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensemble compact de* $L^1(E,\mu)$, désignée par $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$. Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $L^1(E,\mu)$ ayant pour générateur l'opérateur $\mathcal{L}$, alors $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ ayant pour générateur l'opérateur $\mathcal{L}^*$. De plus, on peut prouver que $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ est un espace complet et que le dual topologique de l'espace $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ est $(L^1, \|\,.\,\|_1)$.

De plus, pour un opérateur linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{D} \longrightarrow L^\infty(E,\mu)$ ayant un domaine $\mathcal{D}$ dense dans $L^\infty(E,\mu)$, par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$, nous avons

Definition 0.1. *On dit que $\mathcal{A}$ est un pré-générateur sur $L^\infty(E,\mu)$, s'il existe un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur $(L^\infty(E,\mu), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ dont le générateur $\mathcal{L}$ est une extension de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est $(L^\infty(E,\mu), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unique, si $\mathcal{A}$ est un opérateur pré-fermé et sa fermeture $\overline{\mathcal{A}}$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe sur $(L^\infty(E,\mu), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$.*

Nous croyons que la méthode décrite ci-dessu pourraient être utilisée pour résudre notre problème. Soit $C_b(E)$ l'espace des fonctions continues et bornées dans E et $M_b(E)$ l'espace des mesures à variation finie sur $(E, \mathcal{B})$. Considérons la relation duale entre $C_b(E)$ et $M_b(E)$

$$(f,\mu) \longmapsto \langle f, \mu\rangle := \mu(f) := \int_E f(x)d\mu(x).$$

Rappelons qu'un noyau $P(x, dy)$ sur E est appelé *un noyau de Feller* si

$$Pf(.) := \int_E f(y)P(., dy) \in C_b(E)$$

pour tout $f \in C_b(E)$.

Il est bien connu que le semi-groupe des noyaux de Feller sur un espace polonais E n'est pas fortément continu sur $C_b(E)$ par rapport à la topologie de la norme.

Nous nous sommes sur le point d'introduire une nouvelle topologie localement convexe β sur l'espace $C_b(E)$ par rapport à laquelle le semi-group des noyaux de Feller devient un C_0-semigroup on $(C_b(E), \beta)$ et d'introduire une notion d'unicité des pré-générateurs sur $(C_b(E), \beta)$. Nous espérons que nous pouvons utiliser cette théorie pour le sysème dynamique de Glauber.