

Rapport final du projet “Méthodes variationnelles en micromagnétisme” dans le cadre du LEA Math-Mode

Le projet “Méthodes variationnelles en micromagnétisme” a été réalisé dans le cadre du Laboratoire Européen Associé Math-Mode pour une durée de deux ans (2008 et 2009). Ce projet a comporté une équipe de trois enseignant-chercheurs parisiens et une équipe roumaine de l’Université de Cluj :

Équipe française :

- François Alouges, Professeur, Ecole Polytechnique, Paris ;
- Radu Ignat, Maître de Conférences, Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud ;
- Benoît Merlet, Maître de Conférences, LAGA, Université Paris 13.

Équipe roumaine :

- Radu Precup, Professeur, Faculté de Mathématiques et Informatique, Université Babes-Bolyai, Cluj ;
- Adrian VIOREL, Doctorant, Université Babes-Bolyai, Cluj ;
- Florin-Cristian CRISTEA, étudiant en Master, Université Babes-Bolyai, Cluj.

Dans le cadre du projet, nous nous sommes intéressés à l’analyse mathématique des couches limites qui apparaissent en micromagnétisme.

- Dans un premier article (R. Ignat, *A Γ -convergence result for Néel walls in micromagnetics*, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 285-316), nous avons étudié la couche limite prédominante dans les films ferromagnétiques minces, appelée *paroi de Néel*. Cela consiste à étudier un problème variationnel non-local et non-convexe pour des aimantations unidimensionnelles à valeurs dans S^1 et qui dépend d’un petit paramètre $\varepsilon > 0$. Afin de caractériser le comportement asymptotique des minimiseurs, nous établissons un résultat de Γ -convergence pour ce modèle quand $\varepsilon \downarrow 0$. On montre d’abord que les aimantations limites sont des fonctions constantes par morceaux correspondant à un nombre fini de parois de même angle. Ensuite, on montre que l’énergie Γ -limite est proportionnelle au nombre de parois de ces configurations et le coût énergétique d’une paroi est quartique pour des petits angles.

- Dans un deuxième travail (R. Ignat et B. Merlet, *Lower bounds for Bloch walls in micromagnetics*, prépublication de Ecole Polytechnique CMAP 667), nous nous intéressons à un second type de couche limite, appelée *paroi de Bloch* qui apparaît dans des films magnétiques épais. Le modèle variationnel est bidimensionnel comportant une fonctionnelle d’énergie définie pour des champs de vecteurs à valeurs dans la sphère S^2 . Les configurations d’énergie finie tendent à devenir planaires en dehors de petites régions (correspondant aux parois de Bloch) où la transition entre deux directions se fait dans S^2 . En effet, nous montrons que les configurations limites sont des champs de vecteurs unitaires 2D à divergence nulle avec un ensemble de saut \mathcal{H}^1 -rectifiable. Nous

déterminons l'énergie Γ -limite : elle se concentre sur l'ensemble de sauts avec un coût quadratique dans la taille du saut. La charge exacte d'un saut est calculée via une analyse asymptotique pour des couches limites unidimensionnelles. En utilisant le concept des entropies, nous trouvons des estimations inférieures pour le modèle $2D$ qui coïncide avec l'énergie Γ -limite en $1D$ dans certains cas particuliers. Finalement, nous établissons que pour ce modèle la méthode d'entropie ne peut pas permettre d'obtenir le résultat complet de Γ -convergence.

- Dans un troisième travail (R. Ignat et B. Merlet, *Entropy method for line-energies*, en préparation), nous abordons en toute généralité les énergies limites de parois qu'il est raisonnable de définir dans un modèle $2D$ de micromagnétisme. Ces énergies se concentrent sur les lignes de saut des applications $2D$ à valeurs dans S^1 et à divergence nulle. En utilisant le concept d'entropie, nous voulons caractériser la densité d'énergie de ligne (*fonction de coût*) pour que la fonctionnelle d'énergie soit semicontinue inférieurement (s.c.i.). Nous arrivons à montrer une conjecture selon laquelle les densités d'énergie sous la forme $f(t) = t^p$ pour $p \in [1, 3]$ constituent des fonctionnelles s.c.i. Ensuite, nous nous intéressons à l'existence des minimiseurs qui revient à établir un résultat de compacité. Une question naturelle est de savoir si la configuration de viscosité est minimisante selon la géométrie du domaine et les conditions limites. Nous montrons que ce n'est pas vrai en général si le domaine est non-convexe. Le cas des domaines convexes reste ouvert.

Dans le cadre de ce projet, un workshop a été organisé à l'Université Babes-Bolyai de Cluj entre 3-7 Novembre 2008. Ce workshop a été la première occasion pour les deux équipes (Paris et Cluj) impliquées dans ce projet de se réunir et discuter sur les problèmes proposés en micromagnétisme. A part les deux équipes, les participants à ce workshop ont été des professeurs de l'Université Babes-Bolyai ainsi que de l'Université Technique de Cluj. Les trois membres de l'équipe française ont donné chacun un exposé :

“Aspects théoriques en micromagnétisme(I) : parois de Néel et lignes de Bloch” (Radu Ignat)

“Aspects théoriques en micromagnétisme(II) : parois de Bloch” (Benoît Merlet)

“Nage optimale à très faible nombre de Reynolds” (François Alouges)

Publications

François Alouges

- F. Alouges, S. Faure et J. Steiner, The vortex core structure inside spherical ferromagnetic particles, accepté pour publication dans DCDS-A
- M. Lo Bue, F. Mazaleyrat, M. Ammar, R. Barrué, Y. Champion, S. Faure, M. Hytch, E. Snoeck, J. Steiner, F. Alouges Observation and Modelling of magnetic vortex core structure in Permalloy nanoparticles Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Elsevier doi :10.1016/j.jmmm.2009.04.081
- F. Alouges, Y. Chitour et R. Long, A motion planning algorithm for the rolling-body problem, en révision pour IEEE
- F. Alouges, A. Lefebvre et A. DeSimone, Biological fluid dynamics : swimming at low Reynolds numbers, Encyclopedia of Complexity and System Science, Springer Verlag
- F. Alouges, A. Lefebvre et A. DeSimone, Optimal strokes for axisymmetric microswimmers, accepté pour publication dans European Physical Journal E, DOI : 10.1140/epje/i2008-10406-4
- F. Alouges, A. DeSimone et A. Turco, Wetting on rough surfaces and contact angle hysteresis : numerical experiments based on a phase field model, accepté pour publication dans M2AN, DOI : 10.1051/m2an/2009016
- F. Alouges et K. Beauchard, Magnetization switching on small ellipsoidal ferromagnetic samples, ESAIM : COCV 2009; 15 (3)

- F. Alouges, J. Bourguignon et D. Levadoux, An efficient domain decomposition method for scattering problems involving a deep cavity, accepté à Waves 2009
- F. Alouges, S. Molko et D. Levadoux, Taking into account geometrical singularities in the GCSIE for Laplace and Helmholtz problems, accepté à Waves 2009
- F. Alouges, Y. Chitour, R. Long, A motion planning algorithm for the rolling-body problem, accepté à 48th IEEE Conference on Decision and Control
- F. Alouges, K. Beauchard et M. Sigalotti, Magnetization switching in small ferromagnetic ellipsoidal samples, accepté à 48th IEEE Conference on Decision and Control

Radu Ignat

- R. Ignat et H. Knuepfer, *Vortex energy and 360° Néel walls in thin films micromagnetics*, accepté à Comm. Pure Appl. Math. (2010)
- R. Ignat, *A Γ -convergence result for Néel walls in micromagnetics*, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 285-316.
- R. Ignat et F. Otto, *A compactness result in thin-film micromagnetics and the optimality of the Néel wall*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **10** (2008), 909-956.
- R. Ignat, *A survey of some new results in ferromagnetic thin films*, Séminaire d'Équations aux Dérivées Partielles (Ecole Polytechnique) 2007–2008, Exp. No. VI, 19 pp.

Benoît Merlet

- Benoit Merlet *L^∞ - and L^2 -error estimates for a finite volume approximation of linear advection*, SIAM J. Numer. Anal. **46** (2008), no. 1, 124–150.
- B. Merlet, M. Pierre *Convergence to equilibrium for the Euler backward scheme and applications*, to appear in CPAA.

Radu Precup

- R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Math. Comp. Modelling **49** (2009), 703-708.
- R. Precup, *The Leray-Schauder condition in critical point theory*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 3218-3228.
- R. Precup, A. Viorel, *Existence results for systems of nonlinear evolution equations*, Int. J. Pure Appl. Math. **47** (2008), no. 2, 199-206.

Prépublications

François Alouges

- François Alouges, Antonio DeSimone, and Luca Heltai. Numerical strategies for stroke optimization of axisymmetric microswimmers. 33/2009/M, SISSA, 2009

Radu Ignat

- R. Ignat et F. Otto, *A compactness result for the Landau state in thin film micromagnetics*, à soumettre.
- R. Ignat et B. Merlet, *Lower bounds for Bloch walls in micromagnetics*, prépublication de l'Ecole Polytechnique CMAP 667.

R. Ignat et B. Merlet, *Entropy method for line-energies*, en préparation.

Benoît Merlet

R. Ignat et B. Merlet, *Lower bounds for Bloch walls in micromagnetics*, prépublication de l'Ecole Polytechnique CMAP 667.

R. Ignat et B. Merlet, *Entropy method for line-energies*, en préparation.

Invitations aux Séminaires et Conférences

François Alouges

1. Workshop "Méthodes variationnelles en micromagnétisme", Université de Cluj, Roumanie, Novembre 2008.

2. 9èmes rencontres EDP/Probas, Janvier 2009, Paris.

3. Congrès SMAI 2009, Mai 2009.

4. Journée de lancement du projet Micro-MANIP, Juin 2009, Paris.

Radu Ignat

1. Workshop "Méthodes variationnelles en micromagnétisme", Université de Cluj, Roumanie, Novembre 2008.

2. Journée thématique à l'Université de Marseille, Décembre 2008.

3. Séminaire à l'Institut des Mathématiques Appliquées, Université de Bonn, Décembre 2008.

4. Journée sur les cristaux liquides, Université Paris-Sud, Février 2009.

5. Séminaire d'Analyse à l'Université Louvain-la-Neuve, Belgique, Avril 2009.

6. Workshop "Variational analysis and applications", Erice, Italie, Mai 2009.

7. Workshop "PDEs and Materials", Oberwolfach, Allemagne, Septembre 2009.

8. Colloque Franco-Tunisien d'Equations aux Dérivées partielles, Hammamet, Tunisie, Septembre 2009.

9. Groupe de travail "Calcul des variations", Université Paris-Dauphine, Novembre 2009.

10. Séminaire d'EDP, Université de Zürich, Novembre 2009.

Invitations à l'étranger :

1. Institut Hausdorff de Recherche en Mathématiques, Bonn (Allemagne), Septembre-Décembre 2008 (4 mois).

2. Université de Cluj, Novembre 2008, Juillet 2009 et Décembre 2009 (5 semaines).

3. Institut de Mathématiques Appliquées, Université de Bonn, Avril 2009, Juin 2009 et Novembre 2009 (3 semaines)

4. Université de Tlemcen, Algérie, Juin 2009 (1 semaine).

Benoît Merlet

1. Workshop "Méthodes variationnelles en micromagnétisme", Université de Cluj, Roumanie, Novembre 2008.

2. Congrès "Variational Analysis and Applications" in memory of E. De Giorgi, Erice (Sicily), 9-17 Mai 2009.

3. Séminaire d'analyse appliquée, LAGA, Université Paris 13, 27 Novembre 2009.

4. Séminaire de mathématique appliquées, CMAP, Ecole Polytechnique, 12 Janvier 2010.

Radu Precup

1. *Componentwise compression-expansion conditions for systems of nonlinear operator equations and applications*, International Conference on Boundary Value Problems : Mathematical Models in Engineering, Biology and Medicine, Santiago de Compostela (Spain), September 16-19, 2008.

2. *The Leray-Schauder boundary condition in critical point theory*, Romanian-German Symposium on Mathematics and Its Applications, Sibiu, May 14-17, 2009.