**RAPPORT SCIENTIFIQUE FINAL
SUR LE PROJET LEA MATH-MODE
VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES ET DE RÉSONANCE**

ALEXANDRU DIMCA ET STEFAN PAPADIMA

1. Articles rédigés.

- [1] A. Dimca, S. Papadima, A. Suciuc, *Topology and geometry of cohomology jump loci*, Duke Math. Journal **148** (2009), no. 3, 405–457.
- [2] A. Dimca, S. Papadima, A. Suciuc, *Quasi-Kähler groups, 3-manifold groups, and formality*, preprint arXiv:0810.2158, à paraître dans Math. Zeitschrift.
- [3] A. Dimca, S. Papadima, *Finite Galois covers, cohomology jump loci, formality properties, and multinets*, preprint arXiv:0906.1040 (2009), soumis.
- [4] A. Dimca, S. Papadima, *Arithmetic group symmetry and finiteness properties of Torelli groups*, preprint arXiv:1002.0673 (2010), soumis.

2. Résultats obtenus. Les *variétés caractéristiques* d'un complexe connexe M ayant 1-squelette fini,

$$(1) \quad \mathcal{V}_k^i(M) := \{\rho \in \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{C}^*) \mid \dim H^i(M, \rho\mathbb{C}) \geq k\},$$

contiennent toute l'information sur la cohomologie de M à coefficients complexes tordus de rang 1. Les *variétés de résonance*,

$$(2) \quad \mathcal{R}_k^i(M) := \{z \in H^1(M, \mathbb{C}) \mid \dim H^i(H^\bullet M, \mu_z) \geq k\},$$

où μ_z est la multiplication par z dans $H^\bullet M$, ne dépendent que de l'algèbre de cohomologie usuelle $H^\bullet M$.

Notre point de départ a été un résultat d'Esnault, Schechtman et Viehweg (Invent. Math. 109, 1992), qui donne un isomorphisme de germes, $(\mathcal{R}_k^i(M), 0) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{V}_k^i(M), 1)$, lorsque M est un complément d'arrangement d'hyperplans complexes. Dans ce cas, on sait aussi que M est un espace 1-*formel*, au sens de D. Sullivan (Publ. IHES 47, 1977). Le but principal de notre projet a été d'étendre le résultat d'ESV.

Date: 22 février 2010.

Dans [1], on a abordé (pour la première fois dans la littérature, d'après notre connaissance) l'étude systématique des *variétés caractéristiques relatives*,

$$(3) \quad \mathcal{V}_k^i(M, \rho) := \{\rho' \in \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{B}) \mid \dim H^i(M, \rho'V) \geq k\},$$

associées à un morphisme de groupes linéaires algébriques, $\rho : \mathbb{B} \rightarrow \text{GL}(V)$. Dans un premier temps, on a défini des *variétés de résonance relatives*, $\mathcal{R}_k^i(M, \theta)$, qui ne dépendent que de l'algèbre $H^\bullet M$ et de l'application tangente $\theta = d_1(\rho)$. Remarquons que $\mathcal{V}_k^i(M, \text{id}_{\mathbb{C}^*}) = \mathcal{V}_k^i(M)$, et $\mathcal{R}_k^i(M, \text{id}_{\mathbb{C}}) = \mathcal{R}_k^i(M)$. On établit ensuite un isomorphisme de germes, $(\mathcal{R}_k^1(M, \theta), 0) \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{V}_k^1(M, \rho), 1)$, dans le cas 1-formel.

Sous la même hypothèse de 1-formalité, on démontre que les composantes irréductibles de $\mathcal{R}_k^1(M)$ sont des sous-espaces linéaires définis sur $\mathbb{Q}$. Ceci nous a permis de donner un exemple subtil, d'algèbre graduée commutative de dimension finie sur $\mathbb{Q}$, qui n'est pas l'algèbre de cohomologie d'un espace 1-formel. D'après un résultat fondamental de Sullivan, un tel phénomène ne peut pas se produire dans le cas 1-connexe.

On considère aussi une question classique de Serre, sur la caractérisation des groupes (*quasi*)projectifs, i.e., de la forme $\pi_1(M)$, où M est une variété algébrique complexe lisse (*quasi*)projective. On trouve des nouvelles restrictions, liées aux espaces tangents en 1 aux composantes irréductibles de $\mathcal{V}_1^1(M) = \mathcal{V}_1^1(\pi_1(M))$. On les utilise pour montrer que les seuls groupes quasi-projectifs, dans la classe des groupes d'Artin aux angles droits, sont les produits de groupes libres, en précisant ainsi un résultat partiel de Kapovich et Millson (Publ. IHES 88, 1998).

Dans [2], on poursuit l'étude des groupes quasi-projectifs $\pi_1(M)$. Dans cette classe, on obtient la classification des groupes qui sont 1-formels, et réalisables en même temps comme groupes fondamentaux de 3-variété réelle fermée et orientable, au niveau de leurs algèbres de Malcev. En enlevant l'hypothèse de réalisabilité par 3-variétés, on trouve une formule simple pour le corang de $\pi_1(M)$, qui ne dépend que du cup-produit des éléments de $H^1 M$. La variété de résonance $\mathcal{R}_1^1$ joue un rôle décisif dans les preuves.

On examine les 3-variétés M associées aux singularités isolées de surface complexe quasi-homogène (pour lesquelles le groupe $\pi_1(M)$ est quasi-projectif). Soit g le genre de la courbe projective lisse M/S^1 . On montre que l'espace M n'est pas 1-formel, lorsque $g \geq 1$. Néanmoins, la propriété d'ESV est vraie pour $i = k = 1$, si $g > 1$.

On construit des surfaces affines lisses qui ne sont pas 1-formelles, ce qui contraste avec la 1-formalité des variétés projectives lisses, établie par Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan (Invent. Math. 29, 1975).

L'ouvrage [3] est consacré aux revêtements Galoisien finis, $p : F \rightarrow M$. On examine les liens entre l'action de monodromie sur $H^\bullet F$, notée $h^\bullet$, et les variétés (1) et (2), associées à M et F . Dans un premier temps, on suppose que M est 1-formel et l'action h^1 est triviale. On montre que p induit une bijection entre $\mathcal{V}_k^1(M)$ et $\mathcal{V}_k^1(F)$ (au niveau des composantes irréductibles contenant l'origine 1), et une identification entre $\mathcal{R}_k^1(M)$ et $\mathcal{R}_k^1(F)$.

Dans le cas où F est la fibre de Milnor et p est associé à un arrangement $\mathcal{A}$ de droites projectives complexes dans $\mathbb{P}^2$, une question ouverte importante concerne la *détermination combinatoire* de l'action de monodromie h^1 . Dans cette direction, on montre que $h^1 \neq \text{id}$, lorsque la combinatoire de $\mathcal{A}$ admet une structure de *multi-réseau*, dans le sens de Falk-Yuzvinsky (Compositio Math. 143, 2007), et la fonction multiplicité de cette structure a une certaine propriété combinatoire.

En utilisant la structure de Hodge mixte de $H^\bullet F$, où F est la fibre de Milnor de $\mathcal{A}$, on déduit que l'identification $p^* : \mathcal{R}_1^1(M) \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_1^1(F)$ entraîne l'égalité $h^1 = \text{id}$.

Le travail [4] porte sur le groupe de Torelli T_g , associé à une surface de Riemann compacte de genre g , qui est 1-formel pour $g \geq 6$, d'après un résultat de Hain (J. Amer. Math. Soc. 10, 1997). Le groupe T_g contient un sous-groupe important, le noyau K_g de l'homomorphisme de Johnson.

Pour $g \geq 4$, on montre que $\mathcal{R}_1^1(T_g) = \{0\}$, et l'intersection de $\mathcal{V}_1^1(T_g)$ avec la composante connexe de $1 \in \text{Hom}(T_g, \mathbb{C}^*)$ est finie. On en déduit que le premier nombre de Betti est fini, pour tout sous-groupe de T_g contenant K_g . Ceci donne une réponse surprenante à une question ouverte importante; voir Farb (Proc. Symp. Pure Math. 74, 2006).

Notre calcul a comme point de départ l'existence d'une action naturelle du groupe arithmétique $Sp_g(\mathbb{Z})$, sur les variétés (1) et (2) associées au groupe de Torelli T_g . Remarquons que le calcul du germe de $\mathcal{V}_1^1(G)$, au voisinage d'un élément différent de $1 \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, semble un problème très difficile, dans le cas d'un groupe 1-formel G arbitraire.

On établit un lien nouveau, entre les variétés de résonance et les propriétés de finitude d'un groupe 1-formel G : $\mathcal{R}_1^1(G) \subseteq \{0\}$ si et seulement si la complétion I -adique de l'invariant d'Alexander complexe de G est de dimension finie. L'implication directe est vraie pour les groupes de Torelli T_g , en genre $g \geq 4$.

Comme une autre application du principe de symétrie arithmétique, on trouve le lien suivant, entre deux problèmes ouverts: Si T_g est le groupe fondamental d'une variété de Kähler compacte, le groupe K_g doit être finiment engendré.

3. Conférences. Dans le cadre d'une mission LEA, St. Papadima a participé au colloque international "Fundamental groups in algebraic geometry" (Université de Nice, 25-27 mai 2009), avec l'exposé *Germes of cohomology jump loci*.