Rapport d'activités (2009) dans le cadre du projet *Control of nonlinear PDE's* du LEA Franco-Roumain Math–Mode

Le 15 février 2010

Missions dans le cadre du projet

Deux missions ont été effectuées dans le cadre de ce projet :

1. Viorel Barbu a visité l'université de Cergy–Pontoise du 20 au 28 septembre 2009.

2. Armen Shirikyan a visité l'université de Iaşi du 25 au 31 octobre 2009.

Présentation synthétique des résultats obtenus

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) un domaine borné à bord régulier. Considérons le système de Navier–Stokes dans Ω avec la condition de Dirichlet au bord:

$$\dot{u} + \langle u \cdot \nabla \rangle u - \nu \Delta u + \nabla p = f(t, x), \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Ici $\nu > 0$ désigne la viscosité du fluide, u et p sont le champ de vitesse et la pression, et f est une force extérieure. On fixe un ouvert $\omega \subset \Omega$ et on suppose que la force extérieure a la forme

$$f(t, x) = h(t, x) + \eta(t, x), \tag{3}$$

où h est une fonction régulière donnée et η est un contrôle dont le support par rapport à x est inclut dans ω. Il est bien connu que le problème local de contrôlabilité exacte pour le système de Navier–Stokes est actuellement bien compris. Plus précisément, pour tout $T > 0$, toute solution régulière $\hat{u}$ du problème (1), (2) avec $f = h$ et toute fonction régulière u_0 de divergence nulle qui satisfait la condition (2) et se trouve dans un petit voisinage de $\hat{u}(0)$, on peut trouver un contrôle η porté par $[0, T] \times \omega$ tel que le problème (1), (2) complété par la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x) \tag{4}$$

possède une unique solution régulière u, qui vérifie la relation $u(T,x) = \hat{u}(T,x)$. Une question naturelle se pose : peut-on choisir un contrôle par retour d'état? Cette question a été étudiée dans le contexte du problème de stabilisation pour le cas particulier où h ne dépend pas de t et $\hat{u}$ est une solution stationnaire. Par exemple, dans le cas $d = 3$, il a été démontré qu'il existe un opérateur borné $K_{\hat{u}}$ qui agit dans l'espace $L^2 = L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tel que $\operatorname{supp} K_{\hat{u}} v \subset \omega$ pour tout $v \in L^2$, et la solution du problème (1) – (4) avec $\eta = K_{\hat{u}} u$ et $\|u_0 - \hat{u}\|_{L^2} \ll 1$ converge vers $\hat{u}$ avec une vitesse exponentielle. Un résultat analogue est vrai pour le problème de la stabilisation par la frontière.

Pour énoncer notre résultat principal, on introduit d'abord quelques notations. Soit $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ et $Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$. On note L^p et H^s les espaces de Lebesgue et Sobolev usuels et $\mathcal{V}$ l'espace de fonctions $u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ telles que $\operatorname{div} u = 0$ dans Ω. Soit H and V les adhérences de l'espace $\mathcal{V}$, respectivement, dans L^2 et H^1. On fixe une fonction scalaire non nulle $\chi \in C_0^\infty(\omega)$ et on note $\mathcal{E}_M$ l'espace de dimension M engendré par $\chi\varphi_1, \dots, \chi\varphi_M$, où $\{\varphi_j\} \subset L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ désigne une base orthonormée composée des fonctions propres du laplacien dans Ω avec la condition de Dirichlet au bord. On dit qu'une fonction vectorielle (u, p) est une *solution forte globale* du problème (1), (2) si

$$u \in C(\mathbb{R}_+, V) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, H^2), \quad p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, H^1),$$

et les équations (1) sont vérifiées au sens des distributions.

Théorème. *Soit $h \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2)$ une fonction donnée, R et λ des constantes positives et $(\hat{u}, \hat{p})$ une solution forte globale du problème* (1), (2) *avec le membre de droite $f = h$ telle que*

$$\left\|\partial_t^j \partial_x^\alpha \hat{u}\right\|_{L^\infty(Q)} \le R \quad \textit{pour } j = 0, 1,\ |\alpha| \le 1.$$

Alors il existe un entier $M \ge 1$ et des constantes positives C, δ (qui ne dépendent que de R, λ et ν), et une famille d'opérateurs linéaires continus $K_{\hat{u}}(t) : H \to \mathcal{E}_M$, $t \ge 0$, tels que les assertions suivantes ont lieu.

(a) *La fonction $t \mapsto K_{\hat{u}}(t)$ est continue pour la topologie faible de l'espace d'opérateurs, et sa norme vérifie l'inégalité*

$$\|K_{\hat{u}}(t)\| \le C \quad \textit{pour tout } t \ge 0.$$

(b) *Pour toute fonction initiale $u_0 \in V$ telle que $\|u_0 - \hat{u}(0)\|_{H^1} \le \delta$ le problème* (1) – (4) *dans lequel η est remplacé par $K_{\hat{u}}(t)(u - \hat{u}(t))$ possède une unique solution forte globale (u, p), qui vérifie l'inégalité*

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\|_{H^1} \le C e^{-\lambda t} \|u_0 - \hat{u}(0)\|_{H^1}, \quad t \ge 0.$$

Signalons que dans le cas 2D la condition $u_0 \in V$ peut être remplacée par $u_0 \in H$, et il suffit que les données initiales soient proches pour la norme L^2. Cette remarque est une conséquence immédiate de la propriété régularisante de l'opérateur qui résout le problème de Cauchy pour le système de Navier–Stokes 2D.

Pré-publications

Un article intitulé *Internal exponential stabilization for Navier-Stokes equations by means of finite-dimensional distributed controls* est déposé à l'archive sous le numéro *arXiv:1002.2176v1*. Il est soumis à la publication dans la revue *SIAM Journal on Control and Optimization*.

Conférences

Trois conférences ont été présentées pendant les missions effectuées grace au financement du LEA Math–Mode ou sur des résultats obtenus dans le cadre de ce projet :

1. Le 26 novembre 2009, A. Shirikyan a fait un exposé à l'Institut de Mathématiques de Iaşi sur le problème de contrôlabilité du système d'Euler 2D.

2. Le 22 janvier 2010, A. Shirikyan a fait un exposé sur le résultat décrit ci-dessus pour le groupe de travail *Contrôle* à Paris-6.

3. Le 26 janvier 2010, S. Rodrigues a fait un exposé sur le résultat décrit ci-dessus pour le colloque *Control of Partial Differential Equations* à CIRM (Marseille).