Nom du projet LEA Math Mode

Équations aux dérivées partielles stochastiques sans viscosité

SAUSSEREAU Bruno

Université de Franche-Comté, Besançon

&

STOICA Lucretiu

Université de Bucarest

Rapport d'activité (15/12/08)

Notre projet de recherche s'insère dans la thématique analyse stochastique et a de nombreux liens avec la thématique des équations aux dérivées partielles.

Nos travaux s'articulent autour de l'étude d'équations aux dérivées partielles stochastiques (edps par la suite) du type loi de conservation dont un célèbre cas particulier est l'équation de Burgers sans viscosité.

Ce projet a débuté au printemps 2007 lors de la venue de Lucretiu Stoica au Laboratoire de Mathématiques de Besançon (UMR CNRS 6623) en tant que directeur de recherche invité.

Pendant la visite de B. Saussereau à Bucarest du 22/10/08 au 31/10/08, nous avons généralisé une partie des résultats de Weinan, Khanin, Mazel et Sinai (Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing. Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 3, 877–960) au cas d'une équation de loi de conservation scalaire du type suivant :

$$\partial_t u(t,x,\omega) + \mathrm{div}_x \Psi\big(u(t,x,\omega)\big) = \mathrm{div}_x \dot{F}(t,x,\omega)\ . \tag{1}$$

Dans l'équation ci-dessus, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $u(t,x,\cdot)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F est une force aléatoire. On se donne une fonction initiale déterministe $u(t_0,x) = u_0(x)$ qui verifiera $u_0 \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$. La force aléatoire ne sera pas différentiable en temps et donc $\dot{F}$ est une dérivée formelle. Dans l'article de Weinan et al. précédemment cité, les auteurs ont montrer l'existence d'une mesure invariante pour l'équation de Burgers (cela signifie que $\Psi(u) = u^2/2$) avec un terme de force aléatoire donné par $F(t,x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x)\dot{B}_k(t)$ où $(B_k)_{k\geq 1}$ sont des mouvemens browniens indépendants.

Un premier résultat a consisté à généraliser aux lois de conservations quelconque (Ψ n'est plus forcément ègal à la fonction carrée) le théorème d'existence et d'unicité de la solution de (1). Nous avons de plus considé un bruit (coefficient de force aléatoire) du type processus de Wiener fractionnaire (à la place de mouvements Browniens classiques). Plus précisement, on a demontré qu'il existe une unique solution faible entropique. Le sens précis de la notion de solution est donné par les deux définitions suivantes :

Definition 1. *Un champs aléatoire u défini sur $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \Omega$ à valeurs réelles est une solution faible de* (1) *si :*

(i) Pour tout $t > t_0$ et $x \in \mathbb{R}$, $u(t, x, \cdot)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_0,t} = \sigma\{B_k(s), t_0 \leq s \leq t, k \geq 1\}$.

(ii) Presque-sûrement, $u(\cdot, \cdot, \omega) \in L^1_{loc}([t_0, \infty) \times \mathbb{R})$

(iii) Pour toute fonction test $\varphi \in C^2_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions deux fois différentiables à support compact) on a presque-sûrement :

$$\int_{t_0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} u(t,x) dx dt + \int_{t_0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \Psi\big(u(t,x)\big) dx dt =$$

$$- \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(t_0, x) dx - \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ F_k(x) \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial t \partial x} (b_k(t) - b_k(t_0)) dt \right\} dx \; .$$

Definition 2. *Une solution faible de* (1) *est une solution entropique si pour tout $(t, x) \in (t_0, \infty) \times \mathbb{R}$, $u(t, x+, \omega) \leq u(t, x-, \omega)$, presque-sûrement.*

Le fait de remplacer un brownien classique par un mouvement brownien fractionnaire n'est pas sans conséquence en ce qui concerne l'étude des mesures invariantes. Une des propriétes incontournables est une propriété de faible oscillation en temps long de certains processus gaussien. Pour le cas d'un processus de Wiener classique, il n'est pas très difficile de montrer (en utilisant un lemme de Borel-Cantelli) que pour tout horizon de temps T on a la propriété suivante :

$$\liminf_{n \to \infty} \sup_{2^n - T \leq t, s \leq 2^n} |B_t - B_s| = 0, \; a.s. \tag{2}$$

Nous avons démontré en utilisant une version conditionnelle du lemme de Borel-Cantelli que la propriété d'oscillation (2) demeure vraie pour des mouvements browniens fractionnaires ce qui nous permet d'aborder le problème d'existence de mesure invariante.

Conclusion :

Ce travail est maintenant en cours de rédaction. La prochaine visite prévue dans notre projet LEA-MATH-MODE (L. Stoica viendrait à Besançon au printemps 2009) consisterai donc à finaliser la rédaction des ces résultats. De plus, nous souhaitons aussi étudier les possibilités d'extension aux edps de certaines notions de solutions faibles qui sont particulièrement bien adaptées aux lois de conservation déterministes. Il nous semble désormais très important d'étudier la notion de solution cinétique pour les edps : nous espérons débuter cette étude lors de notre prochaine entrevue.