Rapport d'activité (LEA Math-Mode)

Marius Paicu* et Aida Timofte†

Pour le modèle décrivant le comportement en hystérésis des matériaux ferroélectriques, Aida Timofte a obtenu rcemment un nouveau résultat d'homogénéisation concretisé par l'article "Homogenization for a nonlinear ferroelectric model", accepté pour la publication dans *Asymptotic Analysis*. En collaboration avec Marius Paicu, on envisage d'appliquer la même méthode, en vue d'obtenir des résultats similaires pour des equations du type Navier-Stokes. Dans ce sense, on a consulté une vaste litterature à ce sujet, voir [A91, CDGO08, CDZ06a, CDZ06b, C85, M02, LM05, M91]. Il semble que la méthode d'éclatement périodique pour des domaines perforés proposée récemment dans [CDGO08, CDZ06a, CDZ06b], constitue un outil très bien adapté aux problèmes d'homogénéisation dans la mécanique des fluides. Ci-dessous on présente une très courte description des résultats obtenus dans [T08].

Le modèle ferroélectrique. Les fonctionnelles énergie et dissipation:

$$\mathcal{E}_\varepsilon(t,u,D,q)=\int_\Omega \big(W(\tfrac{x}{\varepsilon},\boldsymbol{e}(u),D,q)+\alpha(\tfrac{x}{\varepsilon},\nabla q)\big)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^d\setminus\Omega}\frac{1}{2\epsilon_0}|D|^2\,\mathrm{d}x-\langle \ell(t),(u,D)\rangle,$$

$$\mathcal{R}_\varepsilon(\dot q)=\int_\Omega R\left(\tfrac{x}{\varepsilon},\dot q(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Le problème d'homogénéisation (S^ε) & (E^ε): pour tout $t\in[0,T]$ la *condition de stabilité* (S^ε) et le *bilan énergétique* (E^ε) sont satisfaites:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{S}^\varepsilon):\quad & \mathcal{E}_\varepsilon(t,u_\varepsilon(t),D_\varepsilon(t),q_\varepsilon(t))\le \mathcal{E}_\varepsilon(t,\widehat u,\widehat D,\widehat q)+\mathcal{R}_\varepsilon(\widehat q-q_\varepsilon(t))\quad \text{for all } \widehat u,\widehat D,\widehat q;\\
(\mathrm{E}^\varepsilon):\quad & \mathcal{E}_\varepsilon(t,u_\varepsilon(t),D_\varepsilon(t),q_\varepsilon(t))+\textstyle\int_0^t\mathcal{R}_\varepsilon(\dot q_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s\\
& =\mathcal{E}_\varepsilon(0,u_\varepsilon(0),D_\varepsilon(0),q_\varepsilon(0))-\textstyle\int_0^t\langle\dot\ell(s),(u_\varepsilon(s),D_\varepsilon(s))\rangle\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Le probleme homogénisé $(\mathbf{S})$ & $(\mathbf{E})$: pour tout $t\in[0,T]$, la condition de stabilité $(\mathbf{S})$ et le bilan énergétique $(\mathbf{E})$ sont satisfaites, où

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S}):\quad & \mathbf{E}(t,U(t),\mathbb{D}(t),Q(t))\le \mathbf{E}(t,\widetilde U,\widetilde{\mathbb{D}},\widetilde Q)+\mathbf{R}(\widetilde Q-Q(t))\quad \text{pour tout } (\widetilde U,\widetilde{\mathbb{D}},\widetilde Q)\in\mathbf{Z},\\
(\mathbf{E}):\quad & \mathbf{E}(t,U(t),\mathbb{D}(t),Q(t))+\int_0^t\mathbf{R}(\dot Q(s))\mathrm{d}s=\mathbf{E}(0,U(0),\mathbb{D}(0),Q(0))-\int_0^t\langle\dot\ell(s),(u_0(s),\overline{\mathbb{D}}(s))\rangle\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Le théorème d'homogénéisation. *Soit* $(u_\varepsilon,D_\varepsilon,q_\varepsilon):[0,T]\to\mathcal{Y}$ *une solution de* (S^ε) & (E^ε). *On suppose que*

$$\mathcal{E}_\varepsilon(0,u_\varepsilon(0),D_\varepsilon(0),q_\varepsilon(0))\to\mathbf{E}(0,U^0,\mathbb{D}^0,Q^0),$$

pour un certain $Z^0=(U^0,\mathbb{D}^0,Q^0)\in\mathbf{Z}$*. Alors il existe une sous-suite* $(u_{\varepsilon'},D_{\varepsilon'},q_{\varepsilon'})_{\varepsilon'}$*, telle que*

$$(u_{\varepsilon'}(t),D_{\varepsilon'}(t),q_{\varepsilon'}(t))\overset{\mathrm{w2c}}{\rightharpoonup} Z(t)=(U(t),\mathbb{D}(t),Q(t))\ \textit{dans } \mathbf{Z},\ \textit{pour tout } t\in[0,T],$$

où $Z:[0,T]\to\mathbf{Z}$ *est une solution de* $(\mathbf{S})$ & $(\mathbf{E})$ *avec la condition initiale* $Z(0)=Z^0$.

*Université Paris-Sud, marius.paicu@math.u-psud.fr

†l'Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine, aida.timofte@imar.ro

References

[A91] G. Allaire. Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes I. Abstract framework, a volume distribution of holes. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 113, 209–259, 1991.

[CDGO08] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso and D. Onofrei. The periodic unfolding method for perforated domains and Neumann sieve models. *J. Math. Pures Appl.*, 89, 248–277, 2008.

[CDZ06a] D. Cioranescu, P. Donato, and R. Zaki. Periodic unfolding and Robin problems in perforated domains. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342, 469–474, 2006.

[CDZ06b] D. Cioranescu, P. Donato, and R. Zaki. The periodic unfolding method in perforated domains. *Portugaliae Mathematica*, 63, 467-496, 2006.

[C85] C. Conca. Homogenization of the Euler system in a 2D porous medium. *J. Math. Pures Appl.*, 64, 31–75, 1985.

[LM05] P.-L. Lions and N. Masmoudi. Homogenization of the Euler system in a 2D porous medium. *J. Math. Pures Appl.*, 84, 1–20, 2005.

[M02] N. Masmoudi. Homogenization of the compressible Navier-Stokes equations in a porous medium. *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 89, 248–277, 2008.

[M91] A. Mikelić. Homogenization of nonstationary Navier-Stokes equations in a domain with a grained boundary. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, CLVIII, 167–179, 1991.

[T08] A. Timofte. Homogenization for a nonlinear ferroelectric model. *Asymptot. Analysis*, to appear, 2008.