RAPPORT SCIENTIFIQUE SUR LE PROJET LEA MATH-MODE VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES ET DE RÉSONANCE

ALEXANDRU DIMCA ET STEFAN PAPADIMA

1. Résultats obtenus en 2008. Jusqu'à présent, notre travail a été rédigé sous forme finale dans [1].

2. Présentation. Soit M une variété différentiable réelle, et soit $\Gamma = \pi_1(M)$ son groupe fondamental. On va considérer les *variétés caractéristiques*

$$(1) \qquad \mathcal{V}^i_k(M) := \{\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \mid \dim H^i(M, {}_\rho\mathbb{C}) \geq k\},$$

où H^i est calculé comme cohomologie à coefficients tordus de rang 1, et les *variétés de résonance*

$$(2) \qquad \mathcal{R}^i_k(M) := \{z \in H^1(M, \mathbb{C}) \mid \dim H^i(H^\bullet M, z) \geq k\},$$

où H^i est calculé via la multiplication par z dans $H^\bullet M$.

Pour un complément d'arrangement d'hyperplans complexes, ESV– i.e., Esnault-Schechtman-Viehweg (Invent. Math. 109, 1992)– ont montré que les germes $(\mathcal{V}^i_k(M), 1)$ et $(\mathcal{R}^i_k(M), 0)$ sont isomorphes.

En 2008, nous avons commencé par deux questions: trouver des liens entre la géometrie de M et les variétés décrites ci-dessus, et entre la topologie de M et la propriété d'ESV. On a été guidés par les résultats connus suivants. Dans la deuxième direction, on sait (voir [2]) que la 1-formalité (topologique) de M entraîne la propriété d'ESV, en degré $i = 1$. Par les travaux de Morgan (Publ. IHES 48, 1978), les variétés kähleriennes compactes et les compléments d'hypersurface projective complexe sont 1-formelles. En ce qui concerne la première direction, les propriétés remarquables des variétés (1) et (2), dans le cas quasi-Kählerien et 1-formel (voir [2]), ont été utilisées dans [3] pour arriver à la classification des groupes Γ réalisables en même temps comme groupes fondamentaux de variété de Kähler compacte, et de 3-variété réelle fermée et orientable.

Date: 14 octobre 2008.

La première question est traitée dans la première partie de [1]. En remplaçant dans la classification précédente les variétés de Kähler compactes par une classe plus large, à savoir les variétés quasi-Kähleriennes 1-formelles, on obtient la classification des groupes Γ, au niveau de leurs algèbres de Malcev. Un point-clé de la preuve est l'analyse des propriétés de $\mathcal{R}_1^1(M)$, pour les variétés quasi-Kähleriennes versus les 3-variétés. En enlevant l'hypothèse de réalisabilité par 3-variétés, on trouve une formule simple pour le corang de Γ, qui ne dépend que du cup-produit des éléments de H^1M. Ici aussi, la structure de $\mathcal{R}_1^1(M)$, pour M quasi-Kählerienne et 1-formelle, joue un rôle décisif. Par exemple, la formule n'est plus vraie pour la surface de Riemann non-orientable de genre 3, qui est 1-formelle.

La deuxième question est abordée dans la seconde partie de [1]. On considère les 3-variétés M associées aux singularités isolées de surface complexe quasi-homogène. Soit g le genre de la courbe projective lisse M/S^1. On montre que M n'est pas 1-formelle, lorsque $g \geq 1$. Néanmoins, la propriété d'ESV est vraie pour $i = k = 1$, si $g > 1$. En plus, on calcule non seulement le germe $(\mathcal{V}_1^1(M), 1)$, mais aussi les composantes irréductibles de $\mathcal{V}_1^1(M)$ de dimension positive qui ne contiennent pas 1.

Finalement, on construit des surfaces affines lisses qui ne sont pas 1-formelles, ce qui contraste avec la 1-formalité des variétés projectives lisses.

3. Activités financées par LEA Math-Mode en 2008.

- S. Papadima: une visite de 3 semaines à Nice, en mai-juin
- A. Dimca: une visite de 10 jours à Bucarest, prévue en novembre

4. Références.

[1] A. Dimca, S. Papadima, A. Suciu, *Quasi-Kähler groups, 3-manifold groups, and formality*, preprint `arXiv:0810.2158`.
[2] A. Dimca, S. Papadima, A. Suciu, *Formality, Alexander invariants, and a question of Serre*, preprint `arXiv:math.AT/0512480`.
[3] A. Dimca, A. Suciu, *Which Kähler groups are 3-manifold groups?*, preprint `arXiv:0709.4350`, à paraître dans J. European Math. Soc.