

Rapport scientifique  
concernant l'activité sur le projet  
Méthodes de Décomposition de Domaine pour les Problèmes de  
Contact avec Frottement  
dans le cadre du LEA Math-Mode

Les participants à ce projet de recherche sont: Lori Badea (Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine), Marius Cocou et Frédéric Lebon (Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS et Université de Provence (Aix-Marseille 1)). A l'occasion de la visite au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de L. Badea, du 28 juillet au 8 août 2008, nous avons établi les détails du projet. Nous sommes maintenant en train de rédiger une prépublication (un rapport interne) qui sera achevée durant les visites à l'Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine de M. Cocou (du 24 octobre au 1er novembre 2008) et de F. Lebon (du 16 au 22 novembre 2008). Evidemment, ce rapport interne sera soumis pour publication à une revue scientifique.

Pour la deuxième partie du projet, en 2009, nous envisageons aussi d'implémenter sur ordinateur les algorithmes proposés. Dans ce but, nous proposons de coopter le Dr. Iulian Rosu (Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS) qui est un spécialiste dans ce domaine.

Pour la première partie de ce projet, en 2008, nous nous sommes proposés d'étudier *la convergence des méthodes de décomposition de domaine de Schwarz pour le problème **quasi-statique** de contact avec frottement **non-local***. Nous partons dans cet étude de l'expérience antérieure des auteurs du projet dans le cas du problème statique. Ainsi, dans le cas statique, l'existence et l'unicité conditionnelle de la solution ainsi que la convergence de la méthode des éléments finis ont été démontrées dans [8] et [10]. De même, la résolution numérique des problèmes de contact avec frottement basée sur les techniques de point fixe, en se rapprochant du frottement de Coulomb par une suite de problèmes avec frottement de Tresca, a été étudiée dans [11] et [12]. De plus, de nouveaux algorithmes de Schwarz pour résoudre le problème statique ont été proposés dans [4] et [5]. Concernant l'application de la méthode multiplicative de Schwarz à un seul maillage aux problèmes de contact avec frottement, on peut citer [6] et [7]. Dans les deux articles, le problème décrit la dynamique des séismes, modélisés comme des instabilités de glissement avec frottement entre deux plaques tectoniques. Dans [6], le problème anti-plan est considéré. Dans ce cas, le problème incrémental correspondant est équivalent à la minimisation avec contraintes d'une fonctionnelle non-quadratique, et on peut appliquer les résultats de convergence de la méthode de Schwarz de [1] et [2] (pour des résultats similaires concernant la convergence de la méthode additive de Schwarz, on peut voir [3]). Dans [7], le problème local en 3D a été considéré. Même si les résultats numériques ont été très encourageants, l'unicité de la solution et la convergence de la méthode ne sont pas démontrées théoriquement. Pour la deuxième partie de ce projet, en 2009, en partant des résultats publiés dans [14], nous nous proposons d'étudier l'application des méthodes de décomposition de domaine pour un tel problème.

Pour le cas quasi-statique, l'existence d'une solution et la convergence de la méthode des éléments finis ont été étudiées dans [9], [13], [14]. Après une discrétisation temporelle,

nous arrivons à un problème décrit par une inéquation quasi-variationnelle qui, dans le cas du frottement non local, a aussi une solution unique. Pour résoudre cette inéquation nous avons appliqué des méthodes de Schwarz similaires à celles du cas statique données dans [4] et [5] et nous prouvons que ces méthodes sont globalement convergentes pour le problème continu. De même, nous étudions le taux de convergence des méthodes dans le cas où le problème est discretisé par les éléments finis. Nous prouvons que le taux de convergence dépend de  $1/\delta$  dans les cas des méthodes à un seul maillage,  $\delta$  étant le paramètre de recouvrement des sous-domaines. De la même façon, les méthodes à deux maillages ont un taux de convergence optimal, c'est-à-dire qu'il dépend seulement de  $H/\delta$  et de  $H/h$  (comme dans le cas des problèmes linéaires), où  $H$  et  $h$  sont les paramètres des maillages. Ce résultat est d'un intérêt particulier, puisque, en outre la convergence, la scalabilité de la méthode est d'une grande importance. D'autant plus que pour les problèmes non linéaires, les maillages grossiers fournissent une robustesse supplémentaire de la convergence de la méthode.

En conclusion, dans la première partie de ce projet nous avons étudié la convergence des méthodes de Schwarz (y compris à un et deux maillages) pour les inéquations quasi-variationnelles provenant de la discrétisation temporelle du problème quasi-statique de contact avec frottement non-local.

Comme nous avons précisé au-dessus, pour la deuxième partie de ce projet, en 2009, nous nous proposons d'étudier *la convergence des méthodes de décomposition de domaine de Schwarz pour les problèmes statique et quasi-statique de contact avec frottement local de Coulomb*. Ce problème n'a pas une solution unique, mais dans [13] et [14] l'existence d'une solution est prouvée. Le problème quasi-statique est discrétisé en temps par une méthode implicite et les problèmes obtenus à chaque pas de temps sont régularisés, en utilisant un paramètre de régularisation. Une solution du problème quasi-statique initial est obtenue comme la limite de solutions des problèmes régularisés. Nous voulons utiliser cette technique pour montrer que les méthodes de Schwarz que nous avons déjà étudiées dans le cas des problèmes avec frottement non-local peuvent être appliquées pour la résolution des problèmes avec frottement local de Coulomb. Nous envisageons aussi de faire des expériences numériques avec les méthodes proposées, et pour cela nous proposons de coopter pour la deuxième partie de ce projet le Dr. Iulian Rosu qui est un spécialiste dans ce domaine.

## References

- [1] L. BADEA, *Convergence rate of a multiplicative Schwarz method for strongly nonlinear variational inequalities*, in Analysis and Optimization of Differential Systems, V. Barbu, I. Lasiecka, D. Tiba and C. Varsan (eds.), Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 31–42.
- [2] L. BADEA, *Convergence rate of a Schwarz multilevel method for the constrained minimization of nonquadratic functionals*, SIAM J. Numer. Anal., **44**, no. 2, 2006, pp. 449–477.

- [3] L. BADEA, *Additive Schwarz method for the constrained minimization of functionals in reflexive Banach spaces*, in U. Langer et al. (eds.), *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVII*, LNSE 60, Springer, 2008, pp. 427–434.
- [4] L. BADEA AND R. KRAUSE, *One- and two-level multiplicative Schwarz methods for variational and quasi-variational inequalities of the second kind: Part I - general convergence results*, INS Preprint, no. 0804, Institute for Numerical Simulation, University of Bonn, June 2008
- [5] L. BADEA AND R. KRAUSE, *One- and two-level multiplicative Schwarz methods for variational and quasi-variational inequalities of the second kind: Part II - frictional contact problems*, INS Preprint, no. 0805, Institute for Numerical Simulation, University of Bonn, June 2008
- [6] L. BADEA, I. IONESCU AND S. WOLF, *Domain decomposition method for dynamic faulting under slip-dependent friction*, *J. of Computational Physics*, **201**, 2, 2004, pp. 487–510.
- [7] L. BADEA, I. IONESCU AND S. WOLF, *Schwarz method for earthquake source dynamics*, *J. of Computational Physics*, **227**, 8, 2008, pp. 3824–3848 (doi:10.1016/j.jcp.2007.11.044).
- [8] M. COCOU, *Existence of solutions of Signorini problems with friction*, *Int. J. Engrg. Sci.*, **22**, 5, 1984, pp. 567–575.
- [9] M. COCOU, E. PRATT AND M. RAOUS, *Formulation and approximation of quasi-static frictional contact*, *Int. J. Engrg. Sci.*, **34**, 7, 1996, pp. 783–798.
- [10] A. RADOSLOVESCU CAPATINA AND M. COCOU, *Internal approximation of quasi-variational inequalities*, *Numer. Math.*, **59**, 1991, pp. 385–398.
- [11] F. LEBON, *Contact problems with friction: Models and simulations*, *Simulation, Modelling, Practice and Theory*, **11**, 2003, pp. 449–464.
- [12] F. LEBON AND M. RAOUS, *Friction modelling of a bolted junction under internal pressure loading*, *Computers and Structures*, **43**, 1992, pp. 925–933.
- [13] R. ROCCA AND M. COCOU, *Existence and approximation of a solution to quasistatic Signorini problem with local friction*, *Int. J. Engrg. Sci.*, **39**, 11, 2001, pp. 1233–1255.
- [14] R. ROCCA AND M. COCOU, *Numerical analysis of quasistatic unilateral contact problems with local friction*, *SIAM J. Numer. Anal.*, **39**, 4, 2001, pp.1324–1342.

**Visites envisagées:**

Lori Badea - à Marseille - 2 semaines en 2009  
 Marius Cocou - à Bucarest - 2 semaine en 2009  
 Frédéric Lebon - à Bucarest - 1 semaine en 2009  
 Iulian Rosu - à Bucarest - 1 semaine en 2009

**Financement demandé au L.E.A.:** Frais de voyage, frais d'hébergement et perdiem pour 6 semaines de séjour, 2 semaines en France et 4 semaines en Roumanie.

**Notice individuelle de Lori Badea.**

(un CV détaillé ainsi qu'une liste des publications peuvent être consultés à l'adresse <http://www.imar.ro/lbadea>)

*Date de naissance.* 09/08/1948.

*Lieu de naissance.* Visinesti (Roumanie).

*Formation.*

- Maîtrise en Mathématiques à la Faculté de Mathématiques de l'Université de Bucarest (1971).

- Doctorat de l'Université Paris 6, France (1992).

*Poste détenu actuellement.* Directeur de Recherche de première classe à l'Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine.

*Distinctions.* Prix "Spiru Haret" de l'Académie Roumaine, Section de Mathématiques (2001).

*Stages à l'étranger* comme professeur ou chercheur invité en France, Allemagne, Suisse, Norvège et aux Etats Unis.

**Notice individuelle de Marius Cocou.**

*Date de naissance.* 19/10/1954.

*Lieu de naissance.* Ploiesti (Roumanie).

*Formation.*

- Master de Mécanique des Solides, Faculté de Mathématiques, Université de Bucarest (1979).

- Doctorat ès Sciences Mathématiques, Spécialité Mécanique des Solides, de l'Université de Bucarest (1991).

*Poste détenu actuellement.* Professeur à l'Université de Provence.

*Stages à l'étranger* comme professeur invité en Suède, Grèce, Espagne, Portugal, République Tchèque et Roumanie.

**Notice individuelle de Frédéric Lebon.**

*Date de naissance.* 22/03/1961.

*Lieu de naissance.* Marseille (France).

*Formation.*

- Maîtrise en Mathématiques Appliquées à l'Université de Provence (1984).

- Doctorat de l'Université de Provence, France (1989).

*Poste détenu actuellement.* Professeur de première classe à l'Université de Provence.

*Stages à l'étranger* comme professeur ou chercheur invité en Italie, Roumanie, Brésil, Argentine, Cuba et Colombie.

**Notice individuelle de Iulian Rosu.**

*Date de naissance.* 11/11/1956.

*Lieu de naissance.* Budesti (Roumanie).

*Formation.*

- Master d'Informatique, Faculté de Cibernetique, ASE Bucarest (1981).
- Doctorat de l'Université Paris-XIII, Spécialité Mécanique, France (1996).

*Poste détenu actuellement.* Ingénieur de recherche, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, Marseille.