Introducere

Teza de doctorat "Reprezentari gradient ale curentilor stocastici cu aplicatie in P.D.E si jocuri diferentiale " constituie un studiu asupra unor ecuatii diferentiale stocastice cu reprezentari gradient ale curentilor stocastici asociati cu algebre Lie de campuri vectoriale netede.

Munca la aceasta teza a avut un real ajutor din seminarul stiintific organizat de Institutul de Matematica al Academiei Romane "Aplicatii ale algebrelor Lie in ecuatii diferentiale "

In lucrare se analizeaza o clasa de ecuatii diferentiale stocastice ordinare sau cu derivate partiale in prezenta unor conditii initiale sau "drift" non adaptate filtratiei $\{\{\mathcal{F}_t\} \uparrow, t \in [0,t]\} \subseteq \mathcal{F}$ generate de procesul Wiener.Utilizam atat difeomorfisme netede deterministe ,asociate cu campurile netede prezente in perturbatia stocastica cat si integrale stocastice ale unor orbite asociate cu aceste difeomorfisme.

Suntem obligati sa descompunem solutiile non adaptate intr-un proces continuu si $\mathcal{F}_t-$adaptat cu valori in spatiul difeomorfismelor netede ,care sunt restrictionate la unele solutii asociate cu driftul anticiptiv . Se foloseste o compozitie finita de curenti locali care sunt determinati de o algebra Lie,asociata cu campurile vectoriale netede ale perturbatiei stocastice corespunzatoare.Integrala Fisk-Stratonovich potrivita pentru solutiile $\mathcal{F}_t-$adaptate este inlocuita cu un alt tip de integrala stocastica "$\otimes$",care permite o generalizare pentru solutii non $\mathcal{F}_t-$ adaptate.Astfel ,folosirea unui drift non $\mathcal{F}_t-$adaptat cat si conditia initiala nu se supun integralei uzuale Fisk Stratonovich si regulei stocastice de diferentiere corespunzatoare.Regula de diferentiere stocastica pentru solutii non $\mathcal{F}_t-$adaptate ,ne conduce la faptul ca integrala Fisk Stratonovich este inlocuita de un tip special de integrala .O regula stocastica de derivare asociata cu ecuatia integrala data in lema 2.1.2 este exprimata in capitolul II. Aici putem rescrie regula mentionata folosind integrala stocastica "$\otimes$"(de tip Stratonovich).Teorema 3.2.1, impreuna cu lema 3.2.1 arata ca solutia sistemului caracteristic (α_1) se transforma in solutie a ecuatiei stocastice cu derivate partiale (α), daca se foloseste un difeomorfism stocastic convenabil (vezi [17] din bibliografie).

Se prezinta reprezentari gradient ale curentilor stocastici,cu implicatie in studiul unor SPDE de tip parabolic publicate de autoare in articolul [18] .

Sistemul quasiliniar de ecuatii diferentiale stocastice Hamilton Iacobi (SHJ) este tratat in teorema 3.3.1.2 folosind o extindere a proprietatii de involutie a campurilor vectoriale originale.O descriere a solutiilor este data folosind difeomorfisme netede deterministe ca solutii pentru sistemul stocastic de caracteristici corespunzator.

Rezultatele importante implica algebre Lie infinit dimensionale de campuri vectoriale si aproximarea lor cu campuri de vectori aleatori ,care se concretizeaza prin aceea ca solutia ecuatiei cu derivate partiale parabolice va depinde de conditia Cauchy a sistemului asociat (vezi [18] din bibliografie).

Capitolul I

Acest capitol are un caracter preliminar continand rezultate cunoscute din teoria ecuatiilor diferentiale stocastice folosite ulterior in teza .Astfel avem rezultate clasice privind existenta si unicitatea solutiei unei ecuatii diferentiale stocastice date in Teorema 1.2.1,Teorema 1.2.2 si Teorema 1.2.3.

In paragraful 1.3 prezentam integrale stocastice de tip Ito si Fisk-Stratonovich.

Una din cele mai importante unelte in analiza stocastica este *Regula de diferentiere stocastica* .De fapt ea stabileste ca o functie neteda a unei semimartingale este o semimartingala continua si asigura descompunerea sa.

Avem urmatoarea versiune multidimensionala a regulei Ito:

Teorema 1.3.1 [17]

Fie$\{X\,(t)\,, t \in [0,T]\}$ o semimartingala d-dimensionala astfel incat:

$$X\,(t) = X_0 + B\,(t) + M\,(t)\,, 0 \leq t \leq T,$$

unde $\{M\,(t)\}$ este un proces ale carui componente sunt martingale continue integrabile si $\{B(t)\}$ este un vector al proceselor continue si adaptate cu variatie marginita cu $B(0) = 0$.

Fie $f(t,x) : [0,T] \times R^d \to R$ o functie de clasa$C^{1,2}$.Atunci, pentru orice ω

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f\,(0, X_0) &+ \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(s, X_s)\, dB_i\,(s) \\ &+ \sum_{i=0}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(s, X_s)\, dM_i\,(s) \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(s, X_s)\, d\,\langle M_i, M_j\rangle\, s, 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Propozitia 1.3.2

Presupunem ca $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$si $\{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$ sunt semimartingale continue avand descompunerea :

$$X_t = X_0 + B_t + M_t, Y_t = Y_0 + C_t + N_t, 0 \leq t \leq T,$$

$\{M_t\}, \{N_t\}$ sunt martingale integrabile continue si
$\{B_t\}, \{C_t\}$ sunt procese adaptate si continue cu variatie marginita cu $B_0 = 0, C_0 = 0$.
Atunci urmatoarea integrare prin parti ramane adevarata

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle M, N \rangle_t .$$

Constructia unei aproximari netede a unei miscarii Browniene standard m dimensionala ne permite sa aproximam solutia unui SDE prin solutii ale unei ODE daca partea stocastica este scrisa ca o integrala Fisk-Stratonovich .

Observatia 1.3.3

Calculul Ito difera de calculul ordinar,cum se vede din formula anterioara ,avem termeni de corectie ca $\langle M, N \rangle_t$ .Pentru a evita acesti termeni de corectie trebuie sa ii absorbim in definirea integralei.

Definitia 1.3.7

Fie $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ si $\{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$semimartingale continue ca in propozitia 2.Definim integrala Fisk-Stratonovich pt.$\{X_t\}$ relativ la $\{Y_t\}$ astfel:
$\int_0^t Y_s \circ dX_s := \int_0^t Y_s dB_s + \int_0^t Y_s dM_s + \frac{1}{2} \langle M, N \rangle_t = \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2} \langle M, N \rangle_t .$
Vom da o formula tip Ito folosind integrala Fisk-Stratonovich.

Propozitia 1.3.3

Fie $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ ca in teorema 1.3.1 si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un difeomorfism de clasa C^3.Atunci

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_i(s) .$$

Observatia 1.3.4

Pentru $\{X_t; 0 \le t \le T\}$ o semimartingala $d-$dimensionala si $g_i(x) \in \mathbb{R}^d, f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ difeomorfism de clasa C^3.Avem:

$$\begin{aligned}(\alpha) \qquad dX_t &= g_0(X_t)\,dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(X_t)\,dw_i(t) \\ X_t &= X_0 + \int_0^t g_0(X_s)\,ds + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t g_i(X_s)\,dw_i(s)\end{aligned}$$

$$(\beta)\ \ dX_t = g_0(X_t)\,dt - \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{d} \partial_x g_i(X_t)\,g_i(X_t)\right] dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(X_t)\circ dw_i(t)$$

unde $\int_0^t g(X_s)\circ dw_j(s) = \int_0^t g(X_s)\,dw_j(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \partial x g(X_s)\,g_j(X_s)\,ds$, $j = 1, .., d$.
Avem:

$$\begin{aligned}1.\ f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \langle \partial x f(X_s), g_0(X_s)\rangle\,ds \\ &+\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \langle \partial x f(X_s), g_i(X_s)\rangle\,dw_i(s) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t \left\{\sum_{i=1}^{d}\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s)\,g_i(X_s), g_i(X_s)\right\rangle\right\} ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2.f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \langle \partial_x f(X_s), g_0(X_s)\rangle\,ds \\ &+\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \langle \partial_x f(X_s), g_i(X_s)\rangle \circ dw_i(s) \\ &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \{\langle \partial_x f(X_s), \partial_x g_i(X_s)\,g_i(X_s)\rangle\}\,ds\end{aligned}$$

In paragraful 1.4 -Reprezentari de tip gradient pentru curentul stocastic folosind algebre Lie de campuri vectoriale se defineste un sistem gradient si

Teorema 1.4.1 afirma ca orice compozitie finita de curenti $y(p) = G_1(t_1) \circ .. \circ G_m(t_m)(x_0)$ poate fi asociata cu un sistem gradient

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} = Y_1(y), \frac{\partial y}{\partial t_2} = X_2(t_1, y), .., \frac{\partial y}{\partial t_m} = X_m(t_1, .., t_{m-1}; y)$$

cu conditia Cauchy $y(0) = x_0$.

Amandoua, solutia si sistemul gradient sunt bazate esential pe proprietatea ca

$$\frac{\partial}{\partial t_1}, .., \frac{\partial}{\partial t_m} \text{ sunt derivari comutative in } Der(\mathbb{R}^m)$$

.

In definitiile 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4 se dau rezultate clasice din teoria algebrelor Lie si relatia cu probleme de orbite de origine.

Definitia 1.4.4 [30]

Spunem ca algebra $\Lambda \subseteq F_n$ *este finit generata relativ la orbitele de origine* $x_0 \in R^n$ *daca exista* $\{Y_1, ..Y_M\} \subset \Lambda$ *a.i oricare* $Y \in \Lambda$ *de-a lungul unei orbite arbitrare* $G(p, x_0), p \in D_k$ *se poate scrie*

$$Y(G(p, x_0)) = \sum_{j=1}^{M} a_j(p) Y_j(G(p, x_0)) \text{ cu } a_j \in C^\infty(D_k)$$

depinzand de Y *si* $G(p, x_0), p \in D_k$; $\{Y_1, .., Y_M\}$ *s.n sistem de generatori.*

Este usor de vazut ca $\{g_1, .., g_M\} \subseteq F_n$ in involutie $[g_i, g_j](x) = \sum_k a_k(x) g_k(x), a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ determina o algebra Lie $\Lambda(g_1, .., g_M)$ care este finit generata peste orbite.

In particular orice algebra Lie finit dimensionala este finit generata peste orbite cu un sistem de generatori fixat independent de originea x_0.

Fie $G_i(t)(x), t \in (-a_i, a_i), x \in V(x_0)$ curentul generat de Y_i si

$$H_i(t, y) \triangleq \left(\frac{\partial G_i}{\partial y}(t, y)\right)^{-1}, y_{i+1} \triangleq G_i(-t_i, y_i), y_1 \triangleq y, i = 1, .., M-1$$

Atunci definim campurile vectoriale

1)

$$\begin{aligned}
X_1(y) &= Y(y) \\
X_2(t_1,y) &= H_1(-t_1,y_1)\,Y_2(G(-t_1,y_1)) \\
&. \\
&. \\
X_M(t_1,..,t_{M-1},y) &= H_1(-t_1,y_1)\,H_2(-t_2,y_2)\,..H_{M-1}(-t_{M-1},y_{M-1})\,Y_M(y_M)
\end{aligned}$$

unde $y \in V(x_0)\,, p \triangleq (t_1,..,t_M) \subset D_M = \prod_{i=1}^{M}(-a_i,a_i)$

Campurile vectoriale din (1) determina un sistem gradient:

$$2)\frac{\partial y}{\partial t_i} = X_1(y)\,, \frac{\partial y}{\partial t_2} = X_2(t_1,y)\,, .., \frac{\partial y}{\partial t_M} = X_M(t_1,..,t_{M-1};y)\,,$$

$p \in D_M, y \in V(x_0)$,orbita de origine $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$3)\ y(p) = G_1(t_1)\circ..\circ G_m(t_m)(x_0)\,, y(p) = G_1(t_1)\circ..\circ G_m(t_m)(x_0)\,,$$

$p \triangleq (t_1,..,t_M) \subset D_M$,satisface (2).

Lema 1.4.1 [30]

Fie $\Lambda \subseteq F_n$ finit generata relativ la orbitele de origine $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixat.Consider sistemul gradient din (2) asociat cu un sistem de generatori fixat $\{Y_1,..,Y_M\}$ .Atunci orbita in (3) este solutia sistemului gradient (2) a.i campurile vectoriale $X_j(p_j,y)$ in (2) pentru $y = y(p)$ in (3) satisfac urmatoarea reprezentare algebrica:

$\alpha) X_{j+1}(p_{j+1}, y(p))$
$= \{Y_1(y(p)), .., Y_M(y(p))\}\, Z_1(t_1;t_1,..,t_M)\,..Z_j(t_j;t_j,..,t_M)\, e_{j+1}$

unde $e_1,..,e_M \in \mathbb{R}^M$ este baza canonica si Z_j este de clasa C^∞, $p \in D_M$ si satisface ecuatiile diferentiale liniare

$$\frac{dZ_j}{dt} = Z_j B_j(t_j - t; t_{j+1},..,t_M)\,, Z_j(0) = I_M$$

Teorema 1.4.2 [30]

Fie $\Lambda \in F_n, x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixat a.i Λ e finit generata relativ la orbita de origine x_0 Pentru un sistem de generatori fixat $\{Y_1, .., Y_M\} \subseteq \Lambda$ asociem orbita $y(p) = G_1(t_1) \circ .. \circ G_M(t_M)(x_0), p \in D_M$ si sistemul gradient corespunzator

$$1) \frac{\partial y}{\partial t_1} = Y_1(y), \frac{\partial y}{\partial t_2} = X_2(t_1, y), .., \frac{\partial y}{\partial t_M} = X_M(t_1, .., t_{M-1}, y)$$

$p \triangleq (t_1, .., t_M) \subset D_M, y \in V(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Atunci pentru fiecare $p_0 \in D_M$,exista $U(0) \subseteq \mathbb{R}^M$ si o matrice nesingulara $A(s, p_0), s \in U(0)$ a.i

$$2) \{Y_1, X_2(t_1), .., X_M(t_1, .., t_{M-1})\}(y) = \{Y_1, .., Y_M\}(y) A(s, p_0)$$

cu conditia $y = y(p), p = p_0 + s, s \in U(0)$.

In paragraful 1.4.1 avem o aplicatie a unui caz de ecuatii diferentiale stocastice de tip difuzie , considerand algebra Lie finit dimensionala ,determinata de campurile de difuzie .

Capitolul II

In paragraful 2.1 -ecuatii diferentiale stocastice de tip Hamilton Iacobi cu solutie $\mathcal{F}_t-$adaptata se analizeaza ecuatii diferentiale stocastice de ordinul I de tip Hamilton Iacobi cu perturbatie stocastica. Metoda de abordare se bazeaza pe sisteme de ecuatii caracteristice asociate cu ecuatia stocastica redusa.Aceasta se realizeaza considerand ca algebra Lie determinata de campurile de difuzie este finit dimensionala.

Ca un aspect particular pentru ecuatiile de tip Hamilton Iacobi cu perturbatie stocastica, a carei coeficienti de difuzie depind de gradientul functiei necunoscute,solutia rezultata va satisface ecuatia numai de-a lungul traiectoriilor din spatiul starilor, care verifica sistemul caracteristic. Metoda e constructiva si solutia se reprezinta folosind aplicatii deterministe netede, care scot in evidenta neunicitatea solutiei (dependenta de baza aleasa in algebra Lie asociata).

Analiza se concentreaza asupra ecuatiilor diferentiale de ordinul I cu drift adaptate filtratiei $\{\{\mathcal{F}_t\} \uparrow, t \in [0, T]\} \subseteq \mathcal{F}$ generate de procesul Wiener al perturbatiei stocastice.

Scriem ecuatia diferentiala de ordinul I dupa cum urmeaza:

$$\alpha)\begin{cases} d_t u = g_0(x,u,\partial_x u)dt + \sum\limits_{j=1}^{m} g_j(x,u,\partial_x u) \circ dw_j(t),\ t \in [0,T] \\ u(0) = u_0(x), x \in R^n, u \in R, \partial_x u \in R^n, (u,\partial_x u) \in B(o,\rho) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \end{cases}$$

unde $w(t) \triangleq (w_1(t),..,w_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ este procesul Wiener standard m-dimensional pe un spatiu filtrat de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{F}, P; \{\mathcal{F}_t\} \uparrow\subseteq \mathcal{F}\}$. Solutia pentru sistemul (α) derivă folosind o solutie a sistemului stocastic de caracteristici asociat:

$$\alpha_1)\begin{cases} d_t z = Z_0(z)dt + \sum\limits_{j=1}^{m} \chi_\tau(t) Z_j(z) \circ dw_j(t).t \in [0,T]\,, \\ z \in B(0,\rho) \times \mathbb{R}^n \\ z(0) = z_0(\lambda) \triangleq (u_0(\lambda), \partial_\lambda u_0(\lambda), \lambda) \in B(0,\rho_1) \times \mathbb{R}^n \triangleq D_1, \\ \rho_1 \in (0,\rho) \end{cases}$$

unde $z = (u, \partial_x u, x) \triangleq (u,p,x)$.

O solutie pentru sistemul (α) este obtinut folosind sistemul stocastic corespondent de caracteristici definit in (α_1) .Trebuie inceput cu o solutie locala asociata cu sistemul stocastic redus .

$$2)\begin{cases} d_t z = \sum\limits_{j=1}^{m} Z_j(z) \circ dw_j(t), t \in [0,T], z \in D \triangleq B(0,\rho) \times \mathbb{R}^n \\ z(0) = z_0 \in D_0 = B(0,\rho_0) \times \mathbb{R}^n, 0 < \rho_0 < \rho, \end{cases}$$

unde se foloseste integrala Fisk-Stratonovich " $\circ$ " si

$w(t) \triangleq (w_1(t),..,w_m(t)) \in \mathbb{R}^m$este procesul m-dimensional Wiener pe un spatiu de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}\} \uparrow\subseteq \mathcal{F}\}$.

O solutie locala pentru (2) e gasita ca un proces continuu si

$\mathcal{F}_t$ -adaptat considerand:

H_1) Algebra Lie $L(Z_1,..,Z_m) \subseteq C_b^\infty(D; \mathbb{R}^{2n+1})$ determinata de campurile vectoriale $\{Z_1,..,Z_m\}$ este finit dimensionala.

In paragraful 2.2 se dau definitii si leme auxiliare penru Teorema 2.2.1 care da o solutie locala a s.p.d.e.(α) de-a lungul $x = \hat{x}\,(t,\lambda)$,solutie care este unica .

Capitolul III

In acest capitol sunt rezultatele originale ale autoarei ,in care sunt analizate doua probleme majore din teoria ecuatiilor stocastice cu derivate partiale folosind reprezentari integrale (gradient) ale curentilor stocastici asociati cu algebre Lie de campuri vectoriale netede. In prima problema ecuatiile stocastice de tip parabolic sunt studiate ca un caz limita al unor ecuatii de tip Hamilton Iacobi cu coeficienti de difuzie ,care depind de gradientul functiei necunoscute, iar a doua problema in conditia Cauchy sau in partea de drift a ecuatiilor diferentiale stocastice sunt prezentate procese anticipative si integrala stocastica este adaptata corespunzator.

In paragraful 3.1-Ecuatii diferentiale stocastice asociate cu difeomorfisme netede si solutii non $\mathcal{F}_t-$adaptate se face analiza unor ecuatii diferentiale stocastice ordinare sau cu derivate partiale in prezenta unor conditii initiale sau "drift" neadaptate filtratiei $\{\{\mathcal{F}_t\}\uparrow, t\in[0,T]\}\subseteq\mathcal{F}$ generate de procesul Wiener ,ne obliga sa utilizam atat difeomorfisme netede deterministe asociate cu campurile netede prezente in perturbatia stocastica cat si integrale stocastice ale unor orbite asociate cu aceste difeomorfisme.

Suntem obligati sa descompunem solutiile non $\mathcal{F}_t$ - adaptate intr-un proces continuu si $\mathcal{F}_t$ -adaptat cu valori in spatiul difeomorfismelor netede care sunt restrictionate la unele solutii asociate cu driftul anticipativ dat.

Se va folosi o compozitie finita de curenti locali care sunt determinati de o algebra Lie asociata cu campurile vectoriale netede ale perturbatiei stocastice corespunzatoare.In plus,Integrala Fisk-Stratonovich potrivita pentru solutiile $\mathcal{F}_t$ - adaptate este inlocuita de un tip special de integrala stocastica "$\otimes$" care ne permite sa includem si solutiile non $\mathcal{F}_t$ -adaptate cu o structura speciala.

Scriem ecuatiile diferentiale de ordinul intai (s.p.d.e) dupa cum urmeaza

$$\alpha)\begin{cases} d_t u = g_0^\omega(x,u,\partial_x u)dt + \sum\limits_{j=1}^{m} g_j(x,u,\partial_x u)\otimes dw_j(t),\ t\in[0,T], g_i\in\mathbb{R} \\ u(0)=u_0^\omega(x), x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}, \partial_x u\in R^n, \\ (u,\partial_x u)\in B(o,\rho)\subseteq\mathbb{R}^{n+1} \end{cases}$$

unde $u_0^\omega\in C_b^2(R^n)$ si $g_0^\omega\in C_b^2(R^n\times B(0,\rho))$ sunt doar $\mathcal{F}-$masurabile relativ la $\omega\in\Omega$ fiind functii scalare non $\mathcal{F}_t$ -adaptate si

$w(t)\triangleq(w_1(t),..,w_m(t))\in\mathbb{R}^m$ este un proces Wiener m-dimensional pe un spatiu filtrat de probabilitate dat $\{\Omega,\mathcal{F},P;\{\mathcal{F}_t\}\uparrow\subseteq\mathcal{F}\}$ .Pentru simplificare, vom omite sa scriem variabila $\omega\in\Omega$ si sensul pentru o solutie pentru (s.p.d.e.) dat in (α) este derivat folosind o solutie a sistemului stocastic de caracteristici asociat:

$$\alpha_1)\begin{cases} d_t z = Z_0(z)dt + \sum_{j=1}^{m} \chi_\tau(t) Z_j(z) \otimes dw_j(t).t \in [0,T], \\ z \in B(0,\rho) \times \mathbb{R}^n \\ z(0) = z_0(\lambda) \triangleq (u_0(\lambda), \partial_\lambda u_0(\lambda), \lambda) \in B(0,\rho_1) \times \mathbb{R}^n \triangleq D_1, \\ \rho_1 \in (0,\rho) \end{cases}$$

unde $z = (u, \partial_x u, x) \triangleq (u, p, x)$,si campurile vectoriale netede $Z_i(z) \in \mathbb{R}^{2n+1}, i \in \{0, 1, .., m\}$,sunt definite in forma standard.

$$\alpha_2) \qquad Zi(z) \triangleq \begin{pmatrix} Y_i(z) \\ X_i(z) \end{pmatrix}, X_i(z) \triangleq -\partial_p g_i(x,u,p) \in \mathbb{R}^n,$$

$$Y_i(z) \triangleq \begin{pmatrix} g_i(x,u,p) - \langle p, \partial_p g_i(x,u,p) \rangle \\ \partial_x g_i(x,u,p) + p \partial_u g_i(x,u,p) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

In cazul functiilor deterministice $u_0 \in C_b^2(R^n), g_0 \in C_b^2(D)$, $D = B(0,\rho) \times \mathbb{R}^n$,putem lucra cu integrala Fisk-Stratonovich " $\circ$ "si solutiile $\mathcal{F}_t$ -adapte asociate cu (α) si (α_1) sunt obtinute ca in capitolul II.In cazul nostru,folosirea unui tip special de integrala (de tip Stratonovich) este bazata pe aproximarea neteda Langevin $w^\varepsilon(t)$ care inlocuieste procesul original Wiener $w(t), t \in [0,T]$.

O solutie a sistemului stocastic de caracteristici (α_1) este definita cu conditia (H_1) , algebra Lie $L(Z_1, .., Z_m)$ determinata de$\{Z_1, .., Z_m\} \subseteq C^\infty(D, \mathbb{R}^{2n+1})$ este finit dimensionala.

Similar pot fi tratate ecuatiile diferentiale stocastice de tip parabolic descrise de urmatoarele ecuatii:

$$\beta)\begin{cases} d_t u = [\triangle_x u + f^\omega(t,x,u,\partial_x u)]dt + \sum_{j=1}^{m} g_j(x,u,\partial_x u) \otimes dw_j(t) \\ u(0) = u_0^\omega(x), t \in (0.T), x \in \mathbb{R}^n, u \in R, \triangle_x u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u \end{cases}$$

unde conditia initiala $u_0^\omega \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$,si functiile scalar continue $f^\omega \in C([0,T]; C_b^2(D))$,pot depinde de parametrul $\omega \in \Omega$ intr-o maniera non $\mathcal{F}_t$-adaptata fiind doar $\mathcal{F}$ -masurabile.

O solutie locala pentru (β) utilizează o solutie continua si non $\mathcal{F}_t$ -adaptata $\hat{y}(t,\lambda) \triangleq (\hat{u}(t,\lambda), \hat{p}(t,\lambda)) \in B(0,\rho) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$satisfacand urmatorul sistem parabolic de ecuatii diferentiale stocastice :

$$\beta_1)\begin{cases} d_t\hat{y}(t,\lambda) = [\triangle_\lambda \hat{y}(t,\lambda) + Y_0(t,\hat{x}(t,\lambda),\hat{y}(t,\lambda),\partial_\lambda \hat{y}(t,\lambda))]dt \\ \qquad +\sum_{i=1}^{m}\chi_\tau(t)Y_i(\hat{x}(t,\lambda),\hat{y}(t,\lambda))\otimes dw_i(t), t\in(0,a] \\ \hat{y}(0,\lambda) = y_0(\lambda) \overset{\triangle}{=} (u_0(\lambda),\partial_\lambda u_0(\lambda)) \in B(0,\rho_0), \rho_0\in(0,\rho) \end{cases}$$

cu un timp de oprire fixat $\tau(\omega):\Omega \longrightarrow [0,T]$,si

$\hat{x}(t,\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{m} b_i w_i(t\wedge\tau)$ considerand că

(H_2) $b_i \overset{\triangle}{=} -\partial_p g_i(x,u,p) \overset{\triangle}{=} X_i(z), i\in\{1,..,m\}$,sunt vectori constanti in $\mathbb{R}^n$.

In ambele cazuri,sistemul stocastic de caracteristici corespunzator (α_1)(sau (β_1)) ne permite sa avem un proces continuu si non $\mathcal{F}_t$ -adaptat:

$y(t,x) \overset{\triangle}{=} (u(t,x),p(t,x)) = (u(t,x),\partial_x u(t,x)), t\in[0,a]$,cu valori in spatiul difeomorfismelor netede

$y\in C_b^1(R^n;B(0,\rho))$,(sau $y\in C_b^2(\mathbb{R}^n;B(0,\rho))$) pentru fiecare

$t\in(0,a]$,astfel incat $\hat{y}(t,\lambda) = y(t,\hat{x}(t,\lambda))$,unde $\hat{z}(t,\lambda) \overset{\triangle}{=} (\hat{y}(t,\lambda)\hat{,}x(t,\lambda))$, $\hat{y}(t,\lambda) \overset{\triangle}{=} (\hat{u}(t,\lambda),\hat{p}(t,\lambda))$.

O solutie locala pentru ecuatia diferentiala stocastica (α) trebuie sa fie un proces continuu $u = u(t,x), t\in[0,a]$,cu valori in spatiul difeomorfismelor netede $u\in C_b^2(\mathbb{R}^n)$ satisfacand ecuatia integrala corespondenta:

$$\int_0^t [d_s u(s,x)]_{x=\hat{x}(s,\lambda)} = \int_0^t g_0(\hat{x}(s,\lambda),\hat{y}(s,\lambda))ds \\ +\sum_{j=1}^{m}\int_0^t \chi_\tau(s) g_j(\hat{x}(s,\lambda),\hat{y}(s,\lambda))\otimes dw_j(s)$$

unde diferentiala stocastica $[d_s u(s,x)]_{x=\hat{x}(s,\lambda)}$ de-a lungul lui $x=\hat{x}(s,\lambda)$ este calculata astfel încât satisface:

$$\int_0^t [d_s u(s,x)]_{x=\hat{x}(s,\lambda)} = \int_0^t d_s\hat{u}(s,\lambda) - \int_0^t \langle \hat{p}(s,\lambda), d_s\hat{x}(s,\lambda)\rangle$$

Ecuatia stocastica parabolica (β) prezinta un caz special când operatorul laplacian $\triangle_x u(t,x)$ este calculat de-a lungul lui $x=\hat{x}(t,\lambda)$ folosind procesul continuu

$y = \hat{y}(t,\lambda) \overset{\triangle}{=} (\hat{u}(t,\lambda),\hat{p}(t,\lambda))$.

Cea mai simpla forma pe care o putem gasi este legata de faptul ca

$X_i(z) \overset{\triangle}{=} -\partial_p g_i(x,u,p) = b_i \in \mathbb{R}^n, i\in\{1,..,m\}$,sunt constante.

Considerand ca $f(t,x,u,\partial_x u)$ si $u_0(x)$ sunt niste functii deterministe atunci solutia locala asociata cu ecuatia parabolica (α) este construi

Calculul prezentat in observatiile 3.1.1,3.1.2 si 3.1.3 cat si continutul lemelor 3.2.1 si 3.2.2 prezinta pasii ce trebuie parcursi pentru definirea integralei stocastice de tip Stratonovich,aplicarea acestor rezultate la ecuatia Hamilton Iacobi (α) se face prin solutia sistemului caracteristica (α_1), definita ca un proces anticipativ $\{\hat{z}(t,\lambda) : t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ precizand ca algebra Lie a campurilor de difuzie este finit dimensionala (ipoteza H_1).

Lema 3.2.2 arata ca $\{\hat{z}(t,\lambda) : t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ este solutie a sistemului caracteristic (α_1) si Teorema 3.2.1 arata ca solutia sistemului caracteriestic se transforma in solutie a ecuatiei stocastice cu derivate partiale (α), daca se foloseste un difeomorfism stocastic convenabil.

Teorema 3.2.1

Fie $g_i(x,u,p), i \in \{1,..,m\})$ dat astfel incat ipoteza (H_1) este satisfacuta.

Fie $\hat{z}(t,\lambda) \overset{\triangle}{=} (\hat{y}(t,\lambda), \hat{x}(t,\lambda)), (t,\lambda) \in [0,a] \times R^n$ solutia locala asociata cu sistemul de caracteristici definit in lema 3.2.3.

Fie $u(t,x) \overset{\triangle}{=} \hat{u}(t,\psi(t,x)), p(t,x) \overset{\triangle}{=} \hat{p}(t,\psi(t,x))$ unde

$y(t,\lambda) \overset{\triangle}{=} (\hat{u}(t,\lambda), \hat{p}(t,\lambda))$

si $\lambda = \psi(t,x)$ este solutie in (22)

Atunci $\partial_x u(t,x) = p(t,x), (t,x) \in [0,a] \times R^n$ si $u = u(t,x)$ este solutie locala pentru s.p.d.e.(α) de-a lungul lui $x = \hat{x}(t,\lambda)$, a.i

$$u(0,x) = u_0(x), x \in R^n \text{ si } [d_t u(t,x)]_{x=\hat{x}(t,\lambda)} = g_0(\hat{z}(t,\lambda))\,dt + \sum_{j=1}^{m} \chi_\tau(t)\, g_j(\hat{z}(t,\lambda)) \otimes dw_j(t)$$

pentru $t \in [0,a]$ unde

$$\int_{t'}^{t''} [d_t u(t,x)]_{x=\hat{x}(t,\lambda)} = \hat{u}(t'',\lambda) - \hat{u}(t',\lambda) + \int_{t'}^{t''} \langle \hat{p}(t,\lambda), \partial_p g_0(\hat{z}(t,\lambda))\rangle\, dt + \sum_{j=1}^{m} \int_{t'}^{t''} \chi_\tau(t) \langle \hat{p}(t,\lambda), \partial_p g_j(\hat{z}(t,\lambda))\rangle \otimes dw_j(t)$$

pentru orice $[t',t''] \subset [0,a]$.

In lema 3.2.4si teorema 3.2.2. se analizeaza constructia solutiei pentru s.p.d.e (β) de tip parabolic urmand in principiu aceeasi schema dezvoltata pentru s.p.d.e (α) Calculul detaliat este finalizat folosind ipoteza suplimentara (H_2).

Teorema 3.2.2

Fie $f \in C([0,T]; C_b^2(\mathbb{R}^n \times B(0,\rho)))\, u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ astfel incat $y_0(\lambda) = (u_0(\lambda), \partial_\lambda u_0(\lambda)) \in B(0,\rho_0) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$si

$\partial_i y_0(\lambda) \in B(0,\rho_0) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, i \in \{1,..,n\}, \lambda \in \mathbb{R}^n$ .Fie $g_j, j \in \{1,..,m\}$ satisfacand ipoteza (H_1) si $\partial_p g_j(x,u,p) = b_j \in \mathbb{R}^n, j \in \{1,..,m\}$.

Definim $\hat{x}(t,\lambda) = \lambda - \sum_{j=1}^{m} b_j w_j(t \wedge \lambda), \psi(t,x) = x + \sum_{j=1}^{m} b_j w_j(t \wedge \lambda)$ si $y(t,x) \overset{\triangle}{=} \hat{y}(t,\psi(t,x)) \overset{\triangle}{=} (u(t,x), p(t,x)), t \in [0,a], x \in \mathbb{R}^n$,unde $\hat{y}(t,\lambda) = (\hat{u}(t,x), \hat{p}(t,x))$ este solutia ecuatiei (β_1) date in lema 3.2.4.

Atunci $u = u(t,x), t \in [0,a], x \in \mathbb{R}^n$este solutie locala pentru s.p.d.e (β) de-a lungul lui $x = x(t,\lambda)$,a.i.

$[\partial_x u(t,x)]_{x=\hat{x}(t,\lambda)} = \hat{p}(t,\lambda), [\Delta_x u(t,x)]_{x=\hat{x}(t,\lambda)} = \Delta_\lambda \hat{u}(t,\lambda), u(0,x) = u_0(x)$ si

$$*)\ [d_t u(t,x)]_{x=\hat{x}(t,\lambda)} = [\Delta_\lambda \hat{u}(t,\lambda) + f(t,\hat{z}(t,\lambda)]\, dt + \sum_{j=1}^{m} \chi_\tau(t)\, g_j(\hat{z}(t,\lambda)) \otimes dw_j(t), t \in [0,a]$$

unde $\hat{z}(t,\lambda) = (\hat{y}(t,\lambda), \hat{x}(t,\lambda))$ si

$$**)\ \int_{t'}^{t''} [d_t u(t,x)]_{x=\hat{x}(t,\lambda)} = \hat{u}(t'',\lambda) - \hat{u}(t',\lambda) + \sum_{j=1}^{m} \int_{t\prime}^{t''} \chi_\tau(t) \langle \hat{p}(t,\lambda), b_j \rangle \otimes dw_j(t).$$

In 3.3. se prezinta reprezentari gradient ale curentilor stocastici, cu implicatie in studiul unor SPDE de tip parabolic.Aceasta sectiune este compusa din rezultate generale originale publicate de autoare in articolul [18] .

Sistemul quasiliniar de ecuatii diferentiale stocastice Hamilton Iacobi (SHJ) este tratat in teorema 3.3.1.2 folosind o extindere a proprietatii de involutie a campurilor vectoriale originale.O descriere a solutiilor este data folosind difeomorfisme netede deterministe ca solutii pentru sistemul stocastic de caracteristici corespunzator.

In paragraful 3.3.1 se analizeaza integrale prime ca solutii pentru unele SPDE parabolice.Definitiile urmeaza metoda Cauchy de rezolvare a sistemelor de ecuatii Hamilton Iacobi daca procesul Wiener este aproximat cu un proces adaptat neted,folosind metoda de perturbatie singulara Langevin.

Rezultatele importante implica algebre Lie infinit dimensionale de campuri vectoriale si aproximarea lor cu campuri de vectori aleatori ,care se concretizeaza prin aceea ca solutia ecuatiei cu derivate partiale parabolice va depinde de conditia Cauchy a sistemului asociat (vezi [18] din bibliografie).

Ipoteza 2

(a) Campurile vectoriale complete $\{g_1(x,U), .., g_m(x,U)\}$ sunt in involutie peste $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ i.e. $[g_i, g_j]_x (x,U) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{i,j}^k (x,U)\, g_k(x,U)$ pentru $\alpha_{i,j}^k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ unde cu $[g_i, g_j]_x$ s-a notat paranteza Lie corespunzatoare relativ la $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\partial_x L(x,U)\, g_j(x,U) = 0$ si $\partial_U g_j(x,U)\, L(x,U) = 0$,pentru
$j \in \{1,..,m\}, (x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$;
(c) $[g_0, g_j]_x (x,U) = 0$ pentru $j \in \{1,..,m\}, (x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$;

Teorema 3.3.1.2

Consideram ca ipoteza 2 este satisfacuta si
$z_0 := (x_0, U_0(x_0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ fixat .Atunci exista un timp de oprire $\tau \in (0,T]$ si coordonate netede pentru $x = G(t,p)[y], U = H(t,p)[V]$, pentru $t \in [0,T]$,$p \in B(0,2\rho) \subset \mathbb{R}^m$ si un proces continuu adaptat $p(t) \in B(0,\rho), t \in [0,T]$ astfel încât:
(i) $\hat{x}(t,z_0) = G(t,p(t))[x_0], \hat{U}(t,z_0) = H(t,p(t))[U_0(x_0)]$ pentru $t \in [0,\tau]$ unde$\left(\hat{x}(t,z_0), \hat{U}(t,z_0)\right), t \in [0,T]$ este solutie a sistemului (11) pentru $\lambda = x_0$,
(ii) $U(t,x) := H(t,p(t))[U_0(\psi(t,p(t),x))], t \in [0,T]$ este o solutie pentru (10) de-a lungul $x = \hat{x}(t,z_0)$ unde difeomorfismul neted
$\lambda = \psi(t,p,x) := [G(t,p)]^{-1}(x)$ si $U_0 \in C_b^2\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N\right)$ sunt folosite.

Capitolul IV

In paragraful 4.1 se prezinta principalele etape in formularea unui principiu de optimalitate pentru sisteme cu control anticipativ si perturbatie stocastica, adica contine aplicatii respectiv probleme de control asociate cu solutii non $\mathcal{F}_t$ adaptate

In paragraful 4.2-teoria jocurilor dinamice asociate cu echilibru Nash si perturbare stocastica se da un model pentru sistemul caracteristic asociat cu ecuatia Hamilton Iacobi (α) ,din capitolul III. Teorema 4.2.1 prezinta principiul Pontreaghin pentru componenta determinista a hamiltonianului asociat cu fiecare jucator .

Teorema 4.2.1

Fie $(y^*(\cdot), u^*(\cdot))$ o solutie de echilibru Nash asociata cu jocul diferential deterministic $\Gamma_N(\omega)$ pentru fiecare $\omega \in \Omega$.
Consideram ca functiile date $f(t,x,u) \in \mathbb{R}^n, F^i(x), f_0^i(t,\cdot,u) \in \mathbb{R}$,
$i \in \{1,..,N\}$ satisfac ipotezele (i_1)si (i_2) si in plus $f(t,\cdot,u) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pentru fiecare $(t,u) \in [0,t_f] \times U, i \in \{1,..,N\}$.
Atunci

$\tilde{H}^i(\omega,t,y,u,\tilde{\psi}_i) \triangleq \psi_i^T \tilde{f}(\omega,t,y,u) + \tilde{f}_0^i(\omega,t,y,u)$ satisfac urmatoarele ecuatii:

$$\tilde{C}_1)\frac{dy^*}{dt}(t,\omega) = \frac{\partial \tilde{H}^i}{\partial \tilde{\psi}_i}(\omega,t,y^*(t,\omega),u^*(t,\omega),\tilde{\psi}_i(t,\omega)), t \in [0,t_f].$$

$$\tilde{C}_2)\frac{d\tilde{\psi}_i}{dt}(t,\omega) = -\frac{\partial \tilde{H}^i}{\partial y}(\omega,t,y^*(t,\omega),u^*(t,\omega),\tilde{\psi}_i(t,\omega)), t \in [0,t_f].$$

$$\tilde{C}_3)\tilde{\psi}_i(t_f,\omega) = \bigtriangledown_y F^i(\omega, y^*(t_f,\omega)), \omega \in \Omega.$$

$$\tilde{C}_4)\tilde{H}^i(\omega,t,y^*(t,\omega),u^*(t,\omega),\tilde{\psi}_i(t,\omega)) = \\ = \min \tilde{H}^i(\omega,t,y^*(t,\omega),(u^*_{(-i)}(t,\omega),u_i),\tilde{\psi}_i(t,\omega)).$$

pentru fiecare punct de continuitate $t \in [0,t_f]$ de $u_i^*(\cdot,\omega)$ si orice $\omega \in \Omega, i \in \{1,..,N\}$.

Demonstratia acestei teoreme este descrisa de principiul Pontreaghin asociat cu problema de control optimal corespuzatoare pentru fiecare $i \in \{1,..,N\}, \omega \in \Omega$ legat de proprietatea ca $u_i^*(\cdot)$ este un control optimal relativ la functionala $J_i(\omega,u_i) = \tilde{J}_i\left(\omega;\left(u^*_{(-i)},u_i\right)\right)$,si $u_i(\cdot) \in \mathcal{A}_i$ pentru fiecare $i \in \{1,..,N\}$ si $\omega \in \Omega$ .Cum ne asteptam,conditia necesara corespunzatoare asociata cu solutia originala de echilibru Nash $(x^*(\cdot),u^*(\cdot))$ este o consecinta directa a concluziilor $\left(\tilde{C}_1\right) - \left(\tilde{C}_2\right)$.

Teorema 4.2.2

Fie $(x^*(\cdot),u^*(\cdot))$ o solutie de echilibru Nash asociata cu jocul diferential deterministic $\Gamma_N(\omega)$ definit in (3).Consideram ca functiile date $g_j(t,x), f(t,x,u) \in \mathbb{R}^n, F^i(x), f_0^i(t,x,u) \in \mathbb{R}$,

$j \in \{1,..,d\}, i \in \{1,..,N\}$ satisfac ipotezele $(i_0),(i_1),(i_2)$.

In plus,presupunem $f(t,\cdot,u) \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ si $F^i(\cdot), f_0^i(t,\cdot,u) \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ pentru orice $(t,u) \in [0,t_f] \times U$ si $i \in \{1,..,N\}$.

Asociem forma diferentiala stocastica

$$H^i(t,x,u,\psi_i;dt,dw) = \left[\psi_i^T f(t,x,u) + f_0^i(t,x,u)\right]dt + \\ +\sum_{j=1}^{d}\psi_i^T g_j(t,x) \otimes dw_j(t)$$

Atunci urmatoarele ecuatii au loc:

$$C_1)\ d_t\ x^*(t,\omega) = \frac{\partial H^i}{\partial \psi_i}(t,x^*(t,\omega),u^*(t,\omega),\psi_i(t,\omega);dt,dw)$$

$C_2)\ d_t\psi_i(t,\omega) = -\dfrac{\partial H^i}{\partial x}(t, x^*(t,\omega), u^*(t,\omega), \psi_i(t,\omega); ; dt, dw)$

$C_3)\ \psi_i(t_f,\omega) = \bigtriangledown_x F^i(x^*(t_f,\omega))$

$C_4)\ \int\limits_0^{t_f} H^i(t, x^*(t,\omega), u^*(t,\omega), \psi^i(t,\omega))dt \leq$

$$\leq \int\limits_0^{t_f} H^i(t, x^*(t,\omega), (u^*_{(-i)}(t,\omega), u_i\,(t,\omega)\,, \psi_i(t,\omega))dt$$

pentru orice $u_i\,(\cdot) \in \mathcal{A}_i, \omega \in \Omega, i \in \{1, .., N\}$

In aceasta teorema concluziile de optimalitate se transfera catre jocul diferential stocastic cu echilibru Nash

In paragraful 4.3 -exemple de jocuri diferentiale asociate cu solutii de echilibru Nash si strategii in bucla deschisa sunt prezentate doua cazuri ,cazul determinist si cazul cu perturbare stocastica unde calculele se pot explicita sub forma unui algoritm daca se particularizeaza coeficientii de difuzie sub forma unor campuri liniare cu coeficienti constanti.

Bibliografie

[1] L.H.R.Alvarez and L.A.Sheep.Optimal harvesting of stocastically fluctuating populations.J.Math.Biol.37 (1998), 155-177.

[2] F.E.Benth and H.Gjessing.Anonlinear parabolic equation with noise,a reduction method.Potential Analysis.
(In the Press).

[3] A.Champneys,S.Harris,J.Toland,J.Warren and D.Williams.
Algebra,Analysis and probabylity for coupled system of reaction-diffusion equations.Phil.Trans.R.Soc.Lond.A 350(1995),
69-112.

[4] I.M.Davies,A.Truman and H.Z.Zhao.Stochastic generalized KPP equations.Proc.R.Soc.Edinb.A 126 (1996),
957-983.

[5] K.D.Elworthy and H.Z.Zhao.The propagation of traveling waves for stochastic generalized KPP equations.
Math.Comp.Modeling 20 (1994),131-166.

[6] K.D.Elworthy ,A.Truman,H.Z.Zhao and J.G.Gaines.
Aproximate travelling waves for generalized KPP equations and classical mechanics.Proc.R.Soc.Lond.A 446 (1994),529-554.

[7] W.M.McEneancy,G.George Yin,Ouin Zang (Editors),
Stocastic Analysis,Control,Optimization and Aplications.
A volume in Honor of W.H.Fleming.Birkhäuser,1999.

[8] M.W.Feldman and J.Roughgarden.A population's stationary distribution and chance of extinction in a stochastic environment with remarks on the theory of species packing.Theor.Population Biol.7
(1975),(197-207).

[9] M.Freidlin.Markov processes and differential equations asymptotic problems.(Basel:Birkhäuser,1996).

[10] A.Friedman.Partial differential equations of parabolic type (Englewood Cliffs,NJ:Prentice-Hall,1964).

[11] A,Friedeman,Stochastic Differential Equations and Applications,vol.I Academic Press,1975.

[12] A.Gyllensten.White noise analysis with applications. Cand.Sci.Thesis,University of Oslo (1998,in norvegian).

[13] I.Helland.One dimensional difusion processes and their boundaries.manuscript, University of Oslo (1996).

[14] H.Holden,B.Oksendal,J.Uboe and T.S.Zhang.Stochastic partial differential equations (Basel:Birkhäuser,1996).

[15] B.Iftimie,C.Varsan ,A pathwise solution for nonlinear parabolic equations with stochastic perrturbations.
Cent.Eur.J.Math, 3 (2003).

[16] B.Iftimie,Evolution Systems with Stochastic Perturbations,Matrix Rom,2006.

[17] Daniela Ijacu,C.Varsan,Smooth mappings and non $\mathcal{F}_t$ adapted solutions associated with Hamilton Iacobi stochastic equations.IFIP Proceedings "Analysis and Optimization of diferential Systems",Kluwer Academic Publishers,2003.

[18] Daniela Ijacu,I Molnar and C.Varsan, On some parabolic SPDE involving gradient representation of stochastic flows,Rev.Roum.Pures Appl.
tom.LI,Nr.4 (2006)

[19] Daniela Ijacu,C.Varsan,Stochastic Diferential Equations Associated with Smooth mappings and non $\mathcal{F}_t$ adapted solutions ,Preprint nr.6/2003
IMAR,ISSN-02503638.

[20] N.Keiding.Extinction and exponential growth in random environments.
Theor.Population Biol. 8 (1975),43-63.

[21] A.R.Kiester and R.Barakat.Exact solutions to certain stochastic differential equations models of populations growth.Theor.Population Biol.6 (1974) 199-216.

[22] E.M.Lungu and B.Oksendal.Optimal harvesting from a population in a stochastic croweded environment.
Math.Biosci.145 (1997),47-75.

[23] R.M.May.Stability in randomly fluctuating versus deterministic environments.Am.Naturalist 107 (1973),621-650.

[24] R.M.May.Stability and complexity in model ecosystems (Princeton,NJ:Princeton University Press,1974.

[25] J.D.Murray,Mathematical biology (Springer,1993).

[26] B.Oksendal Stochastic Differential Equations,An introduction with Aplications,Fifth Edition,Springer-Verlag, 2000.

[27] J.Smoller.Shock waves and reaction-diffusion equations (Springer ,1983).

[28] H.C.Tuckwell.A study of some diffusion models of population growth.Theor. Population Biol. 5 (1974),
345-357.

[29] C.Varsan, On evolution system of diferential equations with stocastic perturbation,Preprint IMAR nr.4/2001,ISSN 02503638.

[30] C.Varsan,Applications of Lie algebras to hyperbolic and stochastic differential equations. Kluwer Academic Publishers,1999.

[31] J.Yong and X.Y.Zhou,Stocastic Controls,Hamiltonian Systems and HJB Ecuations.Springer-Verlag,1999.