MOMENTE IN EVOLUTIA PROBABILITATILOR NECOMUTATIVE.

1. Se considera drept inceput:

Segal, I.E., A noncommutative extension of abstract integration. Annals of Mathematics 57(1953), p.401-457.

2. Teoria masurii: (E,$\mathcal{K}$,μ). A probabilitatilor: μ(E)= 1. Interes in $\otimes_{n\geq 1}\mu_n$ etc. Functii masurabile (variabile aleatoare) f:E$\to$**C**. Integrala $\int$fdμ.

3. Alta viziune, de unde apare ideea generalizarii necomutative:

(E,$\mathcal{K}$,μ), H= L^2(μ), pt f masur. marg: V$_f$ $\in$L(H), V$_f$g= fg. V$_f^*$= V$_{\overline{f}}$, T$\in$L(H), TV$_f$= V$_f$T pt. orice f $\to$ T= V$_g$ pt. un g: M'= M pt M= $\{$V$_f$;f masur. marg.$\}$.

f$\to$ $\int$fdμ: un φ:M$\to$**C**, liniara, φ(V$_f$)$\geq$ 0 pt. f$\geq$ 0, φ comuta cu limite ascendente (Beppo Levi).

M e comutativa.

4. Cadru necomutativ: Algebra von Neumann M, deci M$\subset$L(H), H Hilbert, M*= M (deci T$\in$M$\to$T* $\in$M), M"= M (M"= (M')'). Obs ca 1$\in$M.

Definitie ce implica un spatiu Hilbert.

Vezi despre φ mai departe.

5. C*-algebra: o algebra Banach A care e $*$ -algebra $\|$x$^*\|$= $\|$x$\|$ si $\|$xx$^*\|$= $\|$x$\|^2$. Orice C*-algebra este isomorfa cu una $\subset$L(H), H Hilbert.

Daca o C* algebra A are 1 si este B*, B Banach, atunci A este isomorfa cu o algebra von Neumann.

Sakai, S., C*-algebras and W*-algebras, Springer Verlag Berlin, 1971.

6. O C*-algebra poate fi reprezentata in multe feluri intr-un L(H), dar o algebra von Neumann in "mai putine". O C*-algebra poate sa nu aiba in ea proiectori $\neq$0,1.

Daca M$\subset$L(H) este o algebra von Neumann si P$\in$M' este un proiector, atunci T$\to$T$|_{ImP}$ este un $*$ -homomorfism M$\to$L(ImP) si imaginea sa este o algebra von Neumann M$_P$ $\subset$L(ImP). Intr-o anumita conditie, M e izomorfa cu M$_P$.

Doua algebre von Neumann $*$ -izomorfe apar ca N$_P$, N$_Q$ cu o alta algebra von Neumann N.

7. Daca H este un spatiu Hilbert, atunci pe L(H) se defineste topologia σ-slaba, data de T$\to$ $\sum_{n\geq 1} <$ Tx$_n$,y$_n$ $>$, $\sum \|$x$_n\|\|$y$_n\| < \infty$,

T$\to$T$\otimes$1 ca L(H)$\to$L(H$\otimes$K) cu K infinit dimensional nu e slab continua, dar este σ-slab continua.

O algebra von Neumann $\subset$L(H) este o C*-algebra cu 1, σ-slab inchisa.

8. Daca $L(H)_*$ este multimea φ:L(H)$\rightarrow$**C** liniare si σ-slab continui, atunci $L(H)_*$ este un spatiu Banach si L(H) este dualul sau. Prin restrictie, se defineste predualul M_* al unei algebre von Neumann M; M= $(M_*)^*$.

9. Daca M$\subset$L(H), N$\subset$L(K) sunt algebre von Neumann si h:M $\rightarrow$ N este $*$ -izomorfism, atunci h este σ-slab homeomorfism. Deci topologia σ-slaba face parte din "structura de algebra von Neumann".

! Afirmatia asupra lui H nu e adevarata daca M e alg. v.N dar N e numai C^*. Daca presupunem h σ-slab continua, N rezulta algebra von Neumann.

10. Deci teoria necomutativa a probabilitatilor ar avea drept cadru: o algebra von Neumann M impreuna cu o f$\geq$ 0 in M_* , de preferinta fidela.

Pentru inceput, a aparut prea general.

Se considera "urme finite" deci f care satisfac f(TS)= f(ST); prin urma se intelege o notiune analoaga, in care f:$\{T;\in M, T\geq 0\} \rightarrow [0,\infty]$, dar (f$< \infty$) este suficient de "bogat".

Cum trebuie sa fie o algebra von Neumann pentru ca pe ea sa existe o urma fidela?

11. Clasificarea algebrelor von Neumann.

Aceasta se bazeaza pe notiunea de echivalenta a proiectorilor intr-o algebra von Neumann M. Spunem ca P$\sim$ Q (unde P,Q$\in$M proiectori) daca exista W$\in$M cu W^*W= P, WW^*= Q (W, numit "partial izometri", rezulta ImP$\rightarrow$ImQ liniar izometric etc.).

P se numeste finit, daca P$\sim$ Q$\leq$ P implica Q= P.

Incepem cu "factorii" M$\subset$L(H), deci cu cele pentru care Z(M)= M$\cap$M' este 1 (inteles ca $\{\lambda\cdot id;\lambda \in \mathbf{C}\} \subset$L(H)).

Intr-un factor, orice doi proiectori P, Q sunt comparabili (sau P$\sim$ P_1 $\leq$ Q, sau Q$\sim$ Q_1 $\leq$ P si daca ambele au loc atunci P$\sim$ Q).

Factorii sunt de trei tipuri: I daca este izomorf cu un L(H), II daca are proiectori finiti $\neq$0, dar n-are proiector minimal (L(H) are) si III daca toti proiectorii $\neq$0 sunt infiniti. Un factor M se numeste finit daca 1$\in$M este finit.

Urme exista (unice pqna la proportionalitate) pe cei de tip I si II, dar nu pe cei de tip III. Urme finite exista pe cei finiti de tip I si II si numai pe ei.

Istoria demonstratiei existentei urmei.

F.J.Murray, J.von Neumann, On rings of operators II, Transactions of the American Mathematical Society 41(1937), p.208-248.

F.J.Yeadon, A new proof of the existence of a trace in finite von Neumann algebras, Bulletin of the American Mathematical Society 77(1971), p. 257-260.

Sakai, S., C^*-algebras and W^*-algebras, Springer Verlag Berlin, 1971.

12. Descompunere.

J.von Neumann, On rings of operators. Reduction theory, Annals of Mathematics 50(1949), p.401-485.

Algebrele von Neumann M$\subset$L(H) ce satisfac o anumita conditie de numarabilitate se descompun: H= $\oplus\int$H(ζ)d$\mu(\zeta)$ cu o masura μ (revine la H= $\oplus$L^2(μ_i,H$_i$), dimH$_i$ diferite, H, H$_i$ separabile), M= $\oplus\int$M(ζ)d$\mu(\zeta)$ unde M(ζ) sunt factori, aceasta insemnqnd M= $\{\oplus\int$T(ζ)d$\mu(\zeta)$;T(ζ)$\in$M(ζ)$\}$ etc.

Existenta unei urme pe M este echivalenta cu absenta factorilor III intre M(ζ), iar a unei urme finite cu: toti M(ζ) sunt finiti.

Expunerile teoriei ce au urmat

Dixmier, J., Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien (algebres de von Neumann), Gauthier Villars, Paris, 1957.

etc.

pornesc dela algebre von Neumann si urme si se ajunge la "existenta" din pct. 11 dupa destule eforturi.

13. Exemplu de factor de tip II.

H cu baza ortonormala x$_1\otimes$...$\otimes$x$_n\otimes$... , x$_n$ $\in$H$_2\otimes$H$_2$= H$_4$ unde dimH$_k$= k, x$_n$ $\in$B unde B este o baza ortonormala, $\{$n;x$_n$ $\neq$a$\}$ finita unde a$\in$B, $<$ (T$\otimes$1)a,a$>$ = TrT, Tr fiind urma pe L(H$_2$) ce ia valoarea 1 in 1 (deci a= (e$_1\otimes$e$_1$+e$_2\otimes$e$_2$)/2 etc), M este algebra von Neumann generata de toti T$_1\otimes$...$\otimes$T$_n\otimes$1$\otimes$1..., n$\geq$ 1, T$_j$ $\in$L(H$_2$)$\otimes$1$\subset$L(H$_2\otimes$H$_2$).

Urma este $<\cdot$(a$\otimes$a$\otimes$...),a$\otimes$a$\otimes$...$>$.

Pe scurt M= $\otimes_{n\geq 1}$L(H$_2$) construit cu elementele Tr$\in$L(H$_2$)$_*$.

Se numeste factorul II$_1$ hiperfinit.

14. 2 moduri de a prezenta teoria probabilitatilor.

Primul, cel uzual, cu accentul pe teoreme limita, teorema limita centrala, convolutii.

Al doilea, cu accentul pe valori medii conditionate, filtratti (familii ascendente de corpuri boreliene) procese stocastice, martingale, integrale stocastice. Interesant pentru multe probleme de mecanica cuantica, inginerie.

Primele dezvoltari ale probabilitatilor necomutative au urmat a doua cale.

Martingalele au aparut in teoria probabilitatilor ca instrumente pentru demonstratii de teoreme de convergenta aproape peste tot (care se stie ca nu e definita de o topologie); cu acest aspect a inceput si teoria necomutativa. Ele au devenit insa, ca procese stocastice, personagii principale ale calculului stocastic.

15. Spatii L^p, valori medii conditionate, martingale.

Definitia spatiilor L^p fata de o urma τ pe o algebra von Neumann M este naturala, sunt completate ale $\{$T;$\in$M,τ(|T|)$<\infty\}$, L$^1(\tau)$ se identifica natural cu M$_*$, L$^2(\tau)$ este completatul fata de (T,S)= τ(S*T) si M apare ca $\subset$L(L$^2(\tau)$) (ca multime a operatorilor de inmultire la stqnga), aceasta fiind cea mai naturala plasare a lui M pe un spatiu Hilbert.

Reamintim ca $|T|= (T^*T)^{1/2}$ si ca T= W|T| (descompunerea polara) unde W este "partial izometric).

Demonstratiile pot fi date in mod diferit; fie prin "interpolare", fie cu ajutorul: $|h(p)| \leq (\sup_{t\in\mathbf{R}}|h(it)|)^{1-p}(\sup_{t\in\mathbf{R}}|h(1$
pentru o h olomorfa, fie elementar:

Yeadon, F.J., Noncommutative L^p-spaces, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 77(1975), p.91-102.

Daca τ este o urma finita si N⊂M este o alta algebra von Neumann, atunci $L^2(\tau|_N)\subset L^2(\tau)$ si proiectorul respectiv determina o valoare medie conditionata E_N:M→N, (care actioneaza si $L^1(\tau)\rightarrow L^1(\tau|_N)$) deci o aplicatie liniara, $E_N(T)\geq 0$ pentru $T\geq 0$, $E_N(T)= T$ pentru T∈N, si σ-slab continua.

Pe baza acestei notiuni, se defineste un martingal drept o familie $(T_n)_{n\geq 0}$ de elemente din $L^1(\tau)$ astfel ca $T_n= E_{N_n}T_{n+1}$ unde (N_n) este o filtratie, deci $N_n \subset N_{n+1}$ sunt algebre von Neumann ⊂M.

16. Convergenta aproape peste tot a martingalelor.

Convergenta in L^2 este "a matter of Hilbert spaces"

Umegaki, H., Conditional expectation in an operator algebra I, Tôhoku Mathematical Journal 6(1954), p.177-181.

Pentr a putea fi vorba de convergenta aproape peste tot, trebuie definite spatiile $L^p(\tau)$ ca spatii de "operatori masurabili". Prin operator afiliat lui M se intelege un operator inchis T asa, in decompunerea polara T= W|T|, sa avem W∈M, $\chi_A(|T|)$∈M pentru orice A. Spunem ca T este masurabil daca exista a> 0 cu $\tau(\chi_{(a,\infty)}(|T|))< \infty$. Multimea lor $\mathcal{M}(\tau)$, este o $*$ -algebra fata de operatii naturale si chiar un spatiu metric complet, operatiile fiin continui.

$T\in L^p(\tau)$ daca $\|T\|_p^p= \int t^p d\tau(\chi_.(|T|))(t)$ este finita.

Ce inseamna convergenta aproape peste tot? Nu avem "valori ale lui T" si definitia urmeaza teorema lui Egorov: $T_n \rightarrow T$ a.p.t. daca exista proiectori $P_k \leq P_{k+1}$ in M cu $\tau(1\text{-}P_k)\rightarrow 0$, T_nP_k , TP_k ∈M, $\lim_n\|T_nP_k\text{-}TP_k\|= 0$ (e vorba de norma obisnuita) pentru toti k.

In:

Cuculescu, I., Martingales on von Neumann algebras, Journal of Multivariate Analysis 1(1971), p.17-27.

se stabilesc rezultate de convergenta a.p.t. a martingalelor (τ urma finita). Martingalele se descomun in suma a unui $E_{N_n}T$, $T\in L^1(\tau)$ si a unuia singular (care se arata ca tinde la 0 a.p.t) descompunere care corespunde decompunerii lui $(\cup_{n\geq 1}N_n)^*$ in suma directa: restrictiile $f\in M_*$ si cele ce nu domina nici o astfel de restrictie etc.

17. S-a demonstrat vreun analog al teoremei limita centrale?

Putem mentiona:

Cushen, C.D., Hudson, R.L., A quantum mechanical central limit theorem, Journal of Applied Probability 8(1971), p.454-469.

Ce se poate convoluta, pentru a nu reveni la cazul comutativ?

Au convolutat $f\in L(H)_*$, $H= L^2(R,m)$, utilizqnd relatiile canonice de comutare: toate sunt izomorfe, anume cu familia scrisa ca W_z $\in$L(H), z= s+it$\in$C, $(W_{s+it}f)(x)$= exp(it(x-(s/2)))f(x-s), f$\in$H, prin teorema Stone von Neumann. Convolutia se defineste luqnd produsul tensorial si substituind z/n$^{1/2}$ in loc de z (deci nu este "asociativa"). Teorema se dovedeste cu ajutorul functiilor caracteristice φ_f(z)= f(W_z). Insa ele sunt de patrat integrabil si situatia apare drept particulara.

18. Functionale σ-slab continui ≥ 0 in loc de urme.

Dang Ngoc, N., Pointwise convergence of martingales in von Neumann algebras, Israel Journal of Mathematics 34(1979), p.273-280.

Fie M o algebra von Neumann, $M_n \subset M_{n+1}$ algebre von Neumann $\subset$M a caror reuniune genereaza M. Fie E_n:M$\to M_n$,n= 1,...,∞ valori medii conditionate cu $E_n \circ E_m$= E $_{min(n,m)}$, n,m$\leq \infty$. Atunci, pentru orice T$\in$M, avem E_nT $\to$T relativ la orice f$\geq$ 0 din M_* , aceasta inseamnqnd liminf$_{f(P)\to 0}$limsup$_n\|E_n$T-T$\|$= 0, P parcurgqnd proiectorii din M.

Demonstratia utilizeaza tehnici din teoria ergodica.

Sunt diverse moduri in care se poate defini $T_n \to$T, neechivalente, analizate in

Paszkiewicz, A., Convergence in W*-algebras, Journal of Functional Analysis 69(1986), p.143-154.

Cqnd exista o valoare medie conditionata E:M$\to$N, unde N$\subset$M sunt algebre von Neumann?

Este poate prima interventie a "Teoriei Tomita" in problemele descrise.

H.J.Borchers, On revolutionizing quantum field theory with Tomita's modular theory, Journal of Mathematical Physics 41(2000), p.3604-3673.

18. Teoria lui Tomita.

Prezentam concluziile din

Haagerup, U., The standard form of von Neumann algebras, Mathematica Scandinavica 37(1975), p.271-283.

Orice algebra von Neumann M se poate "aseza" ca M$\subset$L(H), avqnd $\Pi \subset$H, J:H$\to$H antiliniar izometric J^2= 1 asa ca JMJ= M', J(Π)= Π, Π= {x;y$\in$ Π $\to$< x,y>$\geq$ 0}. Π este, prin f= < $\cdot$x,x> , in bijectie cu multimea tuturor f$\geq$ 0 din M_* .

Daca exista f$\geq$ 0 in M fidela (f(T)=0,T$\geq$ 0$\to$T=0; asemenea f nu exista pentru orice M), atunci Tx$\to$T*x are ca inchidere $J\Delta_f^{1/2}$, $\Delta_f \geq 0$ (in general nemarginit), $\chi_{\{0\}}(\Delta_f)$= 0 si avem $\Delta_f^{it}M\Delta_f^{-it}$= M; T$\to$ $\Delta_f^{it}T\Delta_f^{-it}$ defineste un automorfism σ_t^f al lui M; $\sigma_t^f\sigma_s^f$= σ_{t+s}^f .

(M,H,J,Π) se numeste "forma standard" pentru M; este unica.

Teoria lui Tomita a permis o clasificare a factorilor de tip III.

SpΔ_f= **R** pt orice f: M tip III_1 . Exista f cu SpΔ_f= {λ^n;n$\in$**Z**}, $\lambda \in$(0,1): M tip III_λ . Pt orice a$\in$(0,1) exista f cu Sp$\Delta_f\setminus$\{1\} $\subset$**C**([a,a^{-1}}): M tip III_0 . Orice factor M de tip III are una din aceste proprietati.

19. Existenta unor valori medii conditionate.

Takesaki, M., Conditional expectations in von Neumann algebras, Journal of Functional Analysis 9(1972), p.306-321.

Daca f$\geq$ 0 este fidela in M_* si N$\subset$M e algebra von Neumann, atunci existenta unei valori medii conditionate E:M$\rightarrow$N cu f$|_N\circ$E= f este echivalenta cu σ_t^f(N)= N pentru toti t$\in\mathbf{R}$; in acest caz avem $\sigma_t^{f|N}= \sigma_t^f|_N$.

Nici nu este nevoie ca 1$\in$M sa fie si 1$\in$N etc.

20. Generalizare.

Accardi, L., Cecchini, C., Conditional expectation in von Neumann algebras, Journal of Functional Analysis 45(1982), p.245-273.

au definit, pentru orice algebre von Neumann N$\subset$M si f$\geq$ 0 fidela in M_* , o aplicatie liniara E:M$\rightarrow$N σ-slab continua, f$|_N\circ$E= f dar pentru care E$|_N$ nu este identitatea.

S-au dovedit proprietati "de martingal" pentru asemenea "valori medii conditionate":

Hiai, F., Tsukada, M., Strong martingale convergence of generalized conditional expectations on von Neumann algebras, Transactions of the American Mathematical Society 282(1984), p.791-798.

21. Cqteva observatii.

Fie M$\subset$L(H) un factor. Atunci $*$ -algebra A generata de M$\cup$M' este izomorfa cu produsul tensorial algebric M$\otimes$'M'. Dar in general norma de pe A nu corespunde cu norma imaginii in M$\otimes$M' (pentru algebre von Neumann M$\subset$L(H), N$\subset$L(K), M$\otimes$N se defineste ca algebra von Neumann generata (in L(H$\otimes$K)) de toti T$\otimes$S, T$\in$M, S$\in$N.

Dintre toti factorii finiti de tip II, numai in cazul celui hiperfinit cele doua norme se corespund. Dar chiar si atunci identitatea nu este un σ-slab homeomorfism.

Pe produsul tensorial algebric a doua C^*-algebre A, B sunt, in general, mai multe C^*-norme. Ele sunt definite de familii de functionale pozitive, si aceste functionale sunt in bijectie cu aplicatii "complet pozitive" B$\rightarrow A^*$.

In cazul unui factor finit de tip II, cele doua norme mentionate coincid daca si numai daca M este injectiv, adica exista o valoare medie conditionata "bruta" L(H)$\rightarrow$M (deci una care nu este σ- slab continua). Aceste valori medii conditionate brute sunt complet pozitive.

Connes, A., Classification of injective factors, Cases II_1, II_∞, III_λ , $\lambda \neq$1, Annals of Mathematics 104(1976), p.73-115.

Haagerup, Uffe, A new proof of the equivalence of injectivity and hyperfiniteness for factors on a separable Hilbert space, Journal of Functional Analysis 62(1985), p.160-201.

22. Integrale stocastice.

Pentru definirea lor, in raport cu un martingal x_t cu timp [0,t], este necesar a realiza "descompunerea Doob Meyer", deci a reprezenta x_t^2 ca suma dintre un martingal si un proces crescator, etc. In cazul necomutativ, un asemenea rezultat general a rezistat tentativelor de a fi obtinut.

Pasul inainte a fost realizat intr-un caz particular, cu ajutorul "C^*-algebrei Clifford".

De mentionat ca prin reprezentari ale acestei algebre s-a dat un exemplu de o familie de puterea continuului de factori tip III neizomorfi; pqna atunci se stiau 3.

Powers, R.T., Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, Annals of Mathematics 86(1967), p.138-171,

articol care a stqrnit un deosebit interes.

23. Algebra Clifford.

Se defineste ca $*$ -algebra liber generata de un spatiu Hilbert separabil H, cu conditiile $x^2 = 0$, $xy^* + y^*x = < x,y > \cdot 1$ si apoi completata (la o $C^*(H)$) in raport cu unica C^*-norma ce exista pe ea. Ea are o reprezentare pe un spatiu Hilbert $F_a(H)$, unde genereaza ca algebra von Neumann factorul hiperfinit de tip II. Anume $F_a(H)$ este "spatiul Fock antisimetric peste H ", $F_a(H) = \oplus_{n \geq 0} H\wedge_n$, $H\wedge_n$ este generat de $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$, $x_i \in H$, cu $< x_1\wedge \ldots \wedge x_n, y_1 \wedge \ldots \wedge y_n > = \det(< x_i, y_j >)$, iar pentru $x \in H \subset C^*(H)$ actiunea lui x este $L_x(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)$ $x \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$.

H pot fi alesi dintr-o filtratie si astfel obtinem o filtratie pe $F_a(H)$.

Citam un rezultat ceva mai general decqt cel din articolul ce-l mentionam:

Propositie. Daca (H_t) este o filtratie continua a spatiului Hilbert H, daca K este alt spatiu Hilb ert si $x \in H$, daca P_t este proiectia pe H_t si μ este familia spectrala pe $[0,\infty)$ pentru care $U^{\mu}_{\chi_{[0,t]}} = P_t$, atunci exista o izometrie liniara unica $f \rightarrow \int (dx) f$ dela $L^2_{ad}((F_a(H_t) \otimes K), \mu_{x,x})$ la $F_a(H) \otimes K$ astfel ca $\int (dx) X \chi_{(s,t]} = (L_{(P_t - P_s)x} \otimes 1)X$ pentru s<t si $X \in F_a(H_s) \otimes K$.

In demonstratie: $T_t = L_{P_t x}$, $<((T_t - T_s)^*(T_t - T_s) - \mu((s,t]))x,y> = 0$ pentru s<t si $x,y \in H_s$, ultima relatie realizqnd descompunerea Doob Meyer.

Barnett, C., Streater, R.F., Wilde, I.F., The Itô-Clifford integral, Journal of Functional Analysis 48(1982), p.172-212.

24. Evolutie.

Barnett, C., Streater, R.F., Wilde, I.F., The Itô-Clifford integral II, Stochastic differential equations, Journal of the London Mathematical Society 27(1983), p.373-384.

Barnett, C., Streater, R.F., Wilde, I.F., The Itô-Clifford integral III, Markov property of solutions of stochastic differential equations, Communications in Mathematical Physics 89(1983), p.13-17.

Barnett, C., Streater, R.F., Wilde, I.F., The Itô-Clifford integral IV, A Radon Nikodym theorem and bracket processes, Journal of Operator Theory 11(1984), p.255-271.

De asemenea. s-au dezvoltat scheme generale de integrale stocastice:

Barnett, C., Wilde, I.F., Belated integrals, Journal of Functional Analysis 66(1986), p.283-307.

plecqnd dela integralele Bartle:

Bartle, R.G., General bilinear vector integral, Studia Mathematica (Warsaw) 15(1956), p.337-352.

In definitiile legate de algebra Clifford, aparea o algebra von Neumann $M \subset L(H)$ si un $v \in H$ astfel ca $T \rightarrow Tv$ sa fie injectiva cu imagine densa (adica v ciclic si separator), situatie ce era importanta in expunere.

S-au definit, analog, integrale stocastice si pentru alte reprezentari ale algebrei Clifford, printre care se gasesc si cele considerate de R.Powers.

Barnett, C., Streater, R.F., Wilde, I.F., Quasifree quantum stochastic integrals for the CAR and CCR, Journal of Functional Analysis 52(1983), p.19-47.

25. Practic fara algebre von Neumann.

In Hudson, R.L., Parthasarathy, K.R., Quantum Itô's formula and stochastic evolutions, Communications in Mathematical Physics 93(1984), p.301-323, se definesc integrale stocastice si se rezolva ecuatii stocastice relativ la o filtratie de spatii Fock simetrice: $F_s(H) = \oplus_{n\geq 0} H\vee_n$, $< x_1\vee ...\vee x_n, y_1\vee ...\vee y_n > = \sum_{\sigma\in S_n}\Pi_{i=1}^n < x_{\sigma(i)}, y_i >$. Aci nu mai avem o C*-algebra care sa genereze una von Neumann, v care apare nu mai este separator (T→Tv nu e injectiva; o integrala stocastica in sensul precedent era un operator care se identifica prin valoarea sa in v) si chiar cuvqntul de algebra von Neumann nu prea apare in mod esential.

Am stabilit o legatura (printr-o limita) intre cele doua "tipuri" de integrale stocastice in

I. Cuculescu, Relation between Fock and non Fock CAR stochastic integrals, Quantum Probability Communications vol X, p.205-213, 1998, World Scientific, Singapore etc.

S-a dovedit ca este suficienta formula lui Itô pentru un produs, in dezvoltarea teoriei, desi:

G.F.Vincent-Smith, The Itô formula for quantum semimartingales, Proceedings of the London Mathematical Society 75(1997), p.671-720.

S-a ajuns la:

Fie $H = L^2([0,\infty))\otimes X$, $H_t = L^2([0,t])\otimes X$, $e_1,...,e_p$ o baza ortonormala in X, $\Lambda_0^0 = t$, $\Lambda_0^i(t) = 1_{K_0}\otimes$'$b(\chi_{[0,t]}e_i)$, $b(x)x_1\vee ...\vee x_n = x\vee x_1\vee ...\vee x_n$, $\Lambda_j^0(t) = 1_{K_0}\otimes$'$b(\chi_{[0,t]}e_j)^*$, $\Lambda_j^i(s,t) = (M_{s,t}\otimes W_{ij})(F\ 18)X$ pentru s< t, unde $M_{s,t} = M_t - M_s \in L(L^2(m))$ este inmultirea cu $\chi_{(s,t]}$, $W_{ij} = < \cdot, e_j > e_i$ si $(T(F\ 18)X^n)(x\vee^n) = n(Tx)\vee(x\vee^{n-1})$.

Fie $A\subset L(K_0)$ o C*-algebra continqnd 1. Printr-o difuzie Evans Hudson pe A ce corespunde lui (λ_k^i) intelegem o familie j_t , $t\in[0,\infty)$, de $*$ -homomorfisme $j_t : A\to L(K)$, $K = K_0\otimes\Gamma_s(H)$ si $\lambda_j^i : A\to A$, i,j= 0,1,...,p, astfel ca:

i. $j_t(V)$ apare ca $W\otimes 1$ relativ la $K = (K_0\otimes\Gamma_s(H_t))\otimes\Gamma_s(H_t^\perp)$, .

ii. $j_t(1) = 1$.

iii. $j_t(V)u$ este continuu in t pentru orice $V\in A$, $u\in K$.

iv. $j_t(V) = V\otimes 1 + \sum_{i,k=0}^p \int \chi_{[0,t]} j_\cdot(\lambda_k^i(V)) d\Lambda_k^i$

Se arata ca (λ_k^i) este un sistem Evans Hudson, adica $\lambda_k^i(V)$ sunt liniare in V, $\lambda_k^i(1) = 0$, $\lambda_k^i(V^*) = \lambda_i^k(V)^*$ si $\lambda_k^i(VW) = V\lambda_k^i(W) + \lambda_k^i(V)W + \sum_{r\geq 1}\lambda_r^i(V)\lambda_k^r(W)$.

Evans a dovedit, printr-un sistem ingenios de aproximatii succesive simultane, ca pentru orice sistem Evans Hudson exista o difuzie corespunzatoare, astfel numele lui figureaza in numele notiunii.

Evans, M.P., Existence of quantum diffusions, Probability Theory and Related Fields 81(1989), p.473-483.

Parthasarathy, K.R., Sinha, K.B., Markov chains as Evans Hudson diffusions in Fock space, Séminaire de Probabilités XXIV, 1988/89, p.362- 369, Lecture Notes in Mathematics 1426, Springer Verlag, Berlin, 1990.

26. Procese Markov.

Din cauza problemelor legate de existenta valorilor medii conditionate, definitiile initiale ale proceselor Markov au fost destul de netransparente.

Este meritul lui K.Parthasarathy de a fi ajuns la o definitie manevrabila.

Printr-un proces Markov quantic se intelge un sistem format din

i. Un subspatiu inchis H_0 al unui spatiu Hilbert H.

ii. O C^*-algebra $A \subset L(H_0)$, $1 \in A$.

iii. O familie j_t , $t \in [0,\infty)$ de $*$ -homomorfisme j_t:A$\rightarrow$L(H)

iv. O familie de aplicatii $\mathcal{L}_t$:A$\rightarrow$A, $t \in [0,\infty)$,

cu proprietatile:

v. $\mathcal{L}_t 1 = 1$

vi. $j_0(V) = V \oplus 0$ in reprezentarea $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$,

vii. $j_s(1) j_{s+t}(V) j_s(1) = j_s(\mathcal{L}_t(V))$ (Markov).

$\mathcal{L}_t$ rezulta liniare si complet pozitive, $\mathcal{L}_t \mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{t+s}$. Pentru orice $\mathcal{L}_t$ cu aceste doua ultime proprietati si cu v, exista un proces Markov quantic corespunzator (via "Stinespring").

Aceasta definitie (am auzit-o in 1993 la o conferinta) este utilizata in

Parthasarathy, K.R., Bhat, Rajarama B.V., Markov dilations of nonconservative dynamical semigroups and a quantum boundary theory, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistique 30(1995), p.601- 652.

Difuziile Evans Hudson sunt procese Markov quantice (daca luam, in loc de $j_t(V)$, $j_t(V) P_t$ unde P_t este proiectorul pe $(K_0 \otimes \Gamma_s(H_t)) \otimes 1)$ cu $\mathcal{L}_t = e^{t\lambda^0 0}$. Un exemplu este $\lambda_0^0(V) = \sum_{r\geq 1} L_r V L_r^*$-(1/2)$(\sum_{r\geq 1} L_r L_r^*)$V-(1/2)V$(\sum_{r\geq 1} L_r L_r^*)$+i(LV-VL), $L_1,...,L_p$,L$\in$L(K), $L^* = L$.

Lindblad, G., On the generators of quantum dynamical semigroups, Communications in Mathematical Physics 48(1976), p.119-130.

27. Rezultate recente asupra martingalelor pe algebre von Neumann cu urma.

Pisier, Gilles, Xu, Quanhua, Non-commutative martingale inequalities, Communications in Mathematical Physics 189(1997), p.667-698:

Fie $M_n \subset M_{n+1}$ algebre von Neumann continute in algbera von Neumann M, τ o urma finita pe M, $x = (x_n)$, $x_n \in M_n$ un martingal. Notam, pentru $a_n \in M$, $\|(a_n)\|_{p,C} = \|(\sum |a_n|^2)^{1/2}\|_p$, $\|(a_n)\|_{p,R} =$

$\|(\sum|a_n^*|^2)^{1/2}\|_p$. Fie $\|x\|_{p,C}= \|(x_n-x_{n-1})\|_{p,C}$, $\|x\|_{p,R}= \|(x_n-x_{n-1})\|_{p,R}$, $H^p(M)= H^p_C(M)+H^p_R(M)$ pentru $p\in[1,2)$, $H^p(M)= H^p_C(M)\cap H^p_R(M)$ pentru $p\in[2,\infty)$ cu normele $\inf\{\|y\|+\|z\|;x=y+z\}$ etc, respectiv $\max(\|\cdot\|,\|\cdot\|)$.

Atunci $ct_1\|x\|_{Hp(M)} \leq \sup_n\|x_n\|_p \leq ct_2\|x\|_{Hp(M)}$

Marius Junge, Doob's inequality for non-commutative martingales, Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 549(2002), p.149-190:

Pentru $x\in L_p(\tau)$, $p\in(1,\infty)$, exista $a,b\in L^{2p}(\tau)$, $\|y_n\| \leq 1$ astfel ca $E_n(x)= ay_nb$, $\|a\|_{2p}\|b\|_{2p} \leq ct\|x\|_p$.

28. Spatii L_p pentru algebre von Neumann ce nu sunt de tip I$\oplus$II.

Ele apar in lucrari ulterioare ale lui M.Junge, Xu.

Se considera $f\geq 0$ fidela in M_* , $K= L^2(\mathbf{R},H)$ si "cross produsul $M\vee_{\sigma f}\mathbf{R}$ ", adica algebra von Neumann generata de toti $i_f(t)$, $t\in\mathbf{R}$, definit ca $(i_f(t)\varphi)(s)= \varphi(t-s)$ si toti $i_f(T)$, $T\in M$, definit ca $(i_f(T)\varphi)(s)= \sigma^f_{-s}(T)\varphi(s)$; avem $i_f(t)i_f(T)i_f(t)^{-1}= i_f(\sigma^f_t(T))$.

Pe $M\vee_{\sigma f}\mathbf{R}$ exista o urma τ_f ! cu proprietatea $\tau\circ\theta_t= e^t\tau$, unde $\theta_t \in Aut(M\vee_{\sigma f}\mathbf{R})$, $\theta_t(i_f(T))= i_f(T)$, $\theta_t(i_f(s))= e^{its}i_f(s)$.

$L^p(M,f)$ se defineste ca $\{V;\in \mathcal{M}(\tau^f),\tau^f(V)= e^{-1/p}V\}$ cu $\|V\|_p= (\tau^f(\chi_{(1,\infty)}(|V|)))^{1/p}$.

S-au cautat definitii mai directe dar pqna la urma cu ajutorul acesteia se stabilesc proprietatile importante.

Haagerup, U., L^p spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra, Algebres d'operateurs et leurs applications en Physique Math., p.175-184, Colloques Internationaux du CNRS, Nr.274, Marseille 20-24 juin 1977, Edit, CNRS, Paris,1979.

Mai multe detalii in:

Terp, Marianne, L^p-spaces associated with von Neumann algebras, Kobenhavns Universitet, Matematisk Institut, Rapport No. 3a,3b, 1981.

29. Independenta libera.

S-a vazut ca a lega, in necomutativ, notiunea de independenta de cea de produs tensorial intqmpina dificultati; produsul tensorial are "trasaturi comutative".

Urmatoarele ne dau o idee asupra "independentei libere", a convolutiilor corespunzatoare; ele sunt primii pasi catre teoremele limita din acea teorie, analoage cu cele din teoria obisnuita a probabilitatilor.

Definitie. Fie A_i, $i\in I$, subalgebre ale unei algebre A cu 1, $1\in A_i$, $i\in I$, si f o functionala liniara pe A cu $f(1)= 1$. Spunem ca A_i sunt libere relativ la f daca, pentru orice $n>2$, i_1 ,...,$i_n \in I$ cu $i_j \neq i_{j+1}$ si $a_j \in A_{i_j}$ cu $f(a_j)= 0$, avem $f(a_1\cdots a_n)= 0$.

Propozitie. Daca μ,ν sunt probabilitati pe $(R,\mathcal{B})$, atunci exista o probabilitate unica μ(F 18)zν pe $(R,\mathcal{B})$ cu proprietatea: oricare ar fi algebra von Neumann si urma τ pe ea, $\tau(1)= 1$, si operatorii autoadjuncti T,S affiliati cu M, cu $\mu(A)= \tau(\chi_A(T))$, $\nu(A)= \tau(\chi_A(S))$ si cu algebrele von Neumann generate de $\{\chi_A(T);A\in \mathcal{B}\}$, $\{\chi_A(S);A\in \mathcal{B}\}$ libere fata de τ, avem $\tau(\chi_A(T+S))= (\mu$(F 18)z$\nu)(A)$.

Voiculescu D., Symmetries of some reduced free product C^*-algebras, Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, p.556-588, Lecture Notes in Mathematics 1132, Springer Verlag, Berlin, 1985.

Voiculescu, D., Addition of certain non commuting random variables, Journal of Functional Analysis 66(1986), p.323-346.

Philippe Biane, Processes with free increments, Mathematische Zeitschrift 227(1998), p.143-174.