Espaces fonctionnels appliqués aux EDP: quand Lévy, Besov, Morrey et Campanato se rencontrent

Diego Chamorro (& S. Menozzi)

25/05/2017 – București

Université d'Evry

LaMME Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

Le **Laplacien**: entre analyse, E.D.P. et probabilités

$$\boxed{\Delta(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f \qquad\qquad (f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})}$$

Le **Laplacien**: entre analyse, E.D.P. et probabilités

$$\boxed{\Delta(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f \qquad\qquad (f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})}$$

- Au niveau de Fourier $\widehat{\Delta(f)} = -c|\xi|^2 \widehat{f}$
- Equation de la chaleur $(u : [0, +\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})$

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0,$$

dont la solution fondamentale est une gaussienne:

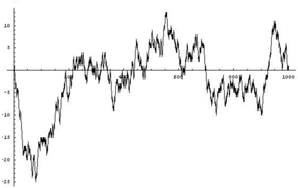
$$g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \text{ si } t > 0.$$

Le mouvement Brownien

- Les gaussiennes sont des densités de probabilité: si $X \sim \mathcal{N}(\sigma, m)$ alors

$$\mathbb{P}(X \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} g_\sigma(x-m)dx$$

- Le mouvement Brownien est une marche aléatoire particulière

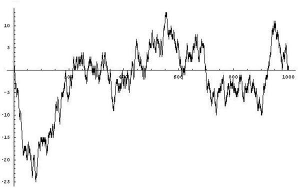


Le mouvement Brownien

- Les gaussiennes sont des densités de probabilité: si $X \sim \mathcal{N}(\sigma, m)$ alors

$$\mathbb{P}(X \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} g_\sigma(x-m)dx$$

- Le mouvement Brownien est une marche aléatoire particulière



$\Longrightarrow$ Le Laplacien est le *générateur infinitésimal* du mouvement Brownien.

Laplacien Fractionnaire?

$$\sqrt{(-\Delta)}(f) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}(f)$$

Laplacien Fractionnaire?

$$\boxed{\sqrt{(-\Delta)}(f) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}(f)}$$

- Fourier:

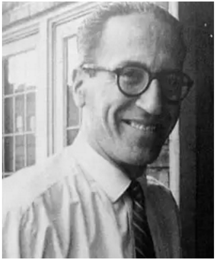
$$\left(\sqrt{(-\Delta)}(f)\right)^{\wedge} = c|\xi|\widehat{f}$$

- E.D.P.:

$$\partial_t u(t,x) + \sqrt{(-\Delta)}u(t,x) = 0$$

la solution fondamentale est le noyau de Poisson

$$p_t(x) = ct(t^2 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$



A. Calderón (1920-1998)

Laplacien Fractionnaire?

$$\boxed{\sqrt{(-\Delta)}(f) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}(f)}$$

- Fourier:

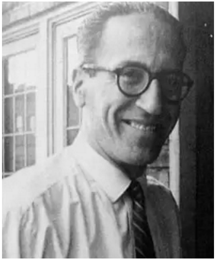
$$\left(\sqrt{(-\Delta)}(f)\right)^{\wedge} = c|\xi|\widehat{f}$$

- E.D.P.:

$$\partial_t u(t,x) + \sqrt{(-\Delta)}u(t,x) = 0$$

la solution fondamentale est le noyau de Poisson

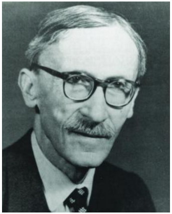
$$p_t(x) = ct(t^2 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$



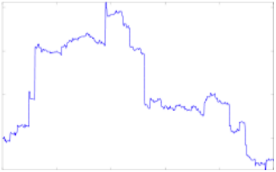
A. Calderón (1920-1998)

Quel est le processus stochastique associé?

Processus de Lévy



P. Lévy (1886-1971)



- Si $0 < \alpha < 2$ les opérateurs $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ sont des générateurs infinitésimaux de processus de Lévy (processus α-stables).

Ingrédient 1: Opérateurs de type Lévy

Il s'agit d'une généralisation du Laplacien fractionnaire

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(f)(x) = v.p.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+\alpha}}dy$$

Ingrédient 1: Opérateurs de type Lévy

Il s'agit d'une généralisation du Laplacien fractionnaire

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(f)(x) = v.p.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+\alpha}}dy$$

Définition (Opérateurs de type Lévy)

On note $\mathcal{L}^\alpha$ l'opérateur

$$\boxed{\mathcal{L}^\alpha(f)(x) = v.p.\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)-f(y))\pi(x-y)dy}$$

où $\pi(y) \sim |y|^{-(n+\alpha)}$ si $0<|y|<1$ et $\pi(y) \sim |y|^{-(n+\delta)}$ si $|y|>1$.

$\Longrightarrow$ Propriétés de régularisation similaires à un Laplacien fractionnaire.

Ingrédient 2: Espaces de Fonctions

Ingrédient 2: Espaces de Fonctions

Espaces Fonctionnels (I) - Espaces de Besov

Ce sont des espaces qui généralisent
les espaces de **Sobolev**.

- Si $0 < s < 2$, $1 \leq p, q \leq +\infty$

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|f(\cdot + y) + f(\cdot - y) - 2f(\cdot)\|^q_{L^p}}{|y|^{n+sq}} dy\right)^{1/q} < +\infty.$$

Ingrédient 2: Espaces de Fonctions

Espaces Fonctionnels (I) - Espaces de Besov

Ce sont des espaces qui généralisent les espaces de **Sobolev**.

O. Besov (1933-)

- Si $0 < s < 2$, $1 \leq p, q \leq +\infty$

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|f(\cdot + y) + f(\cdot - y) - 2f(\cdot)\|^q_{L^p}}{|y|^{n+sq}} dy\right)^{1/q} < +\infty.$$

- Si $0 < s < 1$, $p = q$ on a:

$$\boxed{\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy\right)^{1/p} < +\infty.}$$

$\Longrightarrow$ Ces espaces mesurent la régularité des fonctions.

Propriétés (Besov)

- Si $0 < s < 1$ et $p = q = +\infty$ on a $\dot{B}^{s,\infty}_{\infty} = \dot{\mathcal{C}}^s$ (espace de Hölder)
- On a $\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{\dot{B}^{s-\alpha,p}_q} = \|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q}$

Propriétés (Besov)

- Si $0 < s < 1$ et $p = q = +\infty$ on a $\dot{B}^{s,\infty}_{\infty} = \dot{\mathcal{C}}^s$ (espace de Hölder)
- On a $\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{\dot{B}^{s-\alpha,p}_q} = \|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q}$

Théorème (D.Ch. & PG. Lemarié ('12) + D.Ch & S. Menozzi ('15))

- *Soit* $\mathcal{L}^\alpha$ *un opérateur de type Lévy de régularité* $0 < \alpha < 2$.
- *Si* $2 \leq p < +\infty$, *on a l'inégalité*

$$\boxed{\|f\|_{\dot{B}^{\frac{\alpha}{p},p}_p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-2} f(x) \mathcal{L}^\alpha f(x) dx}$$

$\Longrightarrow$ Première rencontre entre Besov et Lévy.

Espaces Fonctionnels (II) - Espaces de Morrey-Campanato

C'est une généralisation des espaces **Lebesgue** et de **Hölder**

Si

$$\overline{f}_{B(x_0,r)} = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} f(y)dy$$

est la moyenne de f sur $B(x_0, r)$

Ch. Morrey (1907-1984)

S. Campanato (1930-2005)

On définit les espaces $M^{q,a}(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq q < +\infty$, $0 \leq a < n+q$ par l'expression

$$\|f\|_{M^{q,a}} = \sup_{\substack{x_0\in\mathbb{R}^n\\ 0<r<1}} \left(\frac{1}{r^a}\int_{B(x_0,r)} |f(x) - \overline{f}_{B(x_0,r)}|^q dx\right)^{1/q} + \sup_{\substack{x_0\in\mathbb{R}^n\\ r\geq 1}} \left(\frac{1}{r^a}\int_{B(x_0,r)} |f(x)|^q dx\right)^{1/q} < +\infty$$

Propriétés (Morrey-Campanato)

- Si $0 \leq a < n$ on obtient des espaces de Morrey

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset M^{q,a}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{con } p = \frac{qn}{n-a}.$$

- Si $a = n$ on obtient l'espace $bmo(\mathbb{R}^n)$
- Si $n < a < n+q$ alors $M^{q,a}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{C}^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{a-n}{q} = \lambda$ et $\lambda \in]0,1[$.

Propriétés (Morrey-Campanato)

- Si $0 \leq a < n$ on obtient des espaces de Morrey
$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset M^{q,a}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{con } p = \frac{qn}{n-a}.$$
- Si $a = n$ on obtient l'espace $bmo(\mathbb{R}^n)$
- Si $n < a < n+q$ alors $M^{q,a}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{C}^\lambda(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{a-n}{q} = \lambda$ et $\lambda \in]0,1[$.

$\Longrightarrow$ Les espaces de Morrey-Campanato décrivent des situations irrégulières et régulières en fonction du paramètre a

$$\begin{array}{ccccc} M^{q,a} & \longrightarrow & bmo & \longrightarrow & \mathcal{C}^\lambda \\ 0 \leq a < n & \longrightarrow & a = n & \longrightarrow & n < a < n+q \end{array}$$

L'équation

Transport-Diffusion

- Soit $\theta : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $n \geq 2$
- Soit $\mathcal{L}^\alpha$ un opérateur de type Lévy de régularité $0 < \alpha < 2$ (Diffusion).
- Soit $A_{[\theta]}(t,x) = [A_1(\theta)(t,x), \cdots, A_n(\theta)(t,x)]$ un vecteur d'intégrales singulières (Transport) *i.e.*

$$A_i(\theta)(t,x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \kappa_i(x-y)\theta(t,y)dy$$

Transport-Diffusion

- Soit $\theta : [0, +\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $n \geq 2$
- Soit $\mathcal{L}^\alpha$ un opérateur de type Lévy de régularité $0 < \alpha < 2$ (Diffusion).
- Soit $A_{[\theta]}(t,x) = [A_1(\theta)(t,x), \cdots, A_n(\theta)(t,x)]$ un vecteur d'intégrales singulières (Transport) *i.e.*

$$A_i(\theta)(t,x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \kappa_i(x-y)\theta(t,y)dy$$

$$\begin{cases} \partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^\alpha\theta(t,x) = 0, \\ div(A_{[\theta]}) = 0, \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ C'est une équation de transport-diffusion non linéaire

Objectif

Objectif

$$\boxed{\text{On veut étudier la } \textbf{régularité} \text{ (Hölder) des solutions de cette équation.}}$$

Propriétés de l'équation (I)

(i) Si la donnée initiale vérifie $\theta_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 < p < +\infty$

(ii) Si le Transport est borné dans les espaces de Morrey

$$\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{q,a})} \leq C\|\theta\|_{L^\infty(M^{q,a})}$$

Propriétés de l'équation (I)

(i) Si la donnée initiale vérifie $\theta_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 < p < +\infty$

(ii) Si le Transport est borné dans les espaces de Morrey

$$\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{q,a})} \leq C\|\theta\|_{L^\infty(M^{q,a})}$$

$\Longrightarrow$ existence de solutions faibles $\theta \in L^\infty(L^p)$

$\Longrightarrow$ on a un principe du maximum

$$\boxed{\|\theta(t,\cdot)\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p}}$$

Théorème (D. Ch. & S. Menozzi ('15))

$$\partial_t \theta(t,x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]}\, \theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha} \theta(t,x) = 0$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha}$

(ii) *Si le transport est borné dans* $M^{q,a}$

Si on a la relation

$$\frac{a-n}{q} = 1 - \alpha$$

alors les solutions de cette EDP sont Hölder régulières.

Théorème (D. Ch. & S. Menozzi ('15))

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^\alpha\theta(t,x) = 0$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^\alpha$

(ii) *Si le transport est borné dans* $M^{q,a}$

Si on a la relation

$$\frac{a-n}{q} = 1-\alpha$$

alors les solutions de cette EDP sont Hölder régulières.

$$bmo \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{L}^1 = (-\Delta)^{1/2}$$

Théorème (D. Ch. & S. Menozzi ('15))

$$\partial_t \theta(t,x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]}\, \theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha}\theta(t,x) = 0$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha}$

(ii) *Si le transport est borné dans* $M^{q,a}$

Si on a la relation

$$\frac{a-n}{q} = 1 - \alpha$$

alors les solutions de cette EDP sont Hölder régulières.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{1-\alpha} & & \\
bmo \arrow[u] & \Longleftrightarrow & \mathcal{L}^{1} = (-\Delta)^{1/2} \arrow[d] \\
& & \mathcal{L}^{\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1)
\end{tikzcd}$$

Théorème (D. Ch. & S. Menozzi ('15))

$$\partial_t \theta(t,x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha}\theta(t,x) = 0$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha}$

(ii) *Si le transport est borné dans* $M^{q,a}$

Si on a la relation

$$\frac{a-n}{q} = 1-\alpha$$

alors les solutions de cette EDP sont Hölder régulières.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{1-\alpha} & & \mathcal{L}^{\alpha}, \quad (1<\alpha<2) \\
bmo \arrow[u] \arrow[d] & \Longleftrightarrow & \mathcal{L}^{1} = (-\Delta)^{1/2} \arrow[u] \arrow[d] \\
M^{q,a} & & \mathcal{L}^{\alpha}, \quad (0<\alpha<1)
\end{tikzcd}$$

Est-il possible de casser cette relation?

$$\frac{a-n}{q} = 1 - \alpha$$

Est-il possible de casser cette relation?

$$\frac{a-n}{q} = 1 - \alpha$$

$\Longrightarrow$ Dans le cas général (linéaire) **non** (contre exemples)

Est-il possible de casser cette relation?

$$\frac{a-n}{q} = 1 - \alpha$$

$\Longrightarrow$ Dans le cas général (linéaire) **non** (contre exemples)

$\Longrightarrow$ Dans un cadre **non linéaire** c'est possible...

Idée: utiliser l'information supplémentaire $A_{[\theta]} = f(\theta)$

Propriétés (II)

Une étude plus poussée du principe du maximum

$$\boxed{\|\theta(t,\cdot)\|_{L^p} + \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |\theta(s,x)|^{p-2}\theta(s,x)\mathcal{L}^\alpha\theta(s,x)dx}_{\|\theta\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}} \leq} ds \leq \|\theta_0\|_{L^p} < +\infty}$$

$\Longrightarrow$ Contrôle de la quantité $\|\theta\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}}$: la solution appartient à un espace de Besov

$\Longrightarrow$ On va exploiter cette information supplémentaire

Les Théorèmes

Théorème (1)

$$\partial_t \theta(t,x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]}\, \theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* $M^{q,a}$

Théorème (1)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* $M^{q,a}$

(iii) *Si le transport est borné en* $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}$ *:*

$$\boxed{\|A_{[\theta]}\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}} \leq C\|\theta\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}}}$$

(iv) *Si* $p = \frac{qn}{n-a}$, *et* $1 < \alpha_0 = \frac{p+n}{p+1} < 2$,

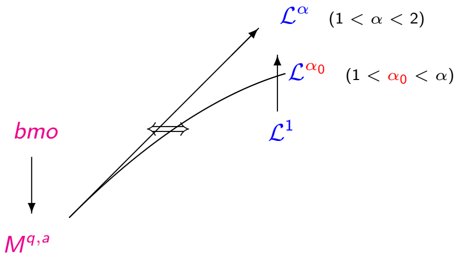
alors les solutions sont régulières et on "casse" l'équilibre.

La condition Besov est *générale*

$\Longrightarrow$ Première rencontre entre Lévy, Besov et Morrey-Campanato

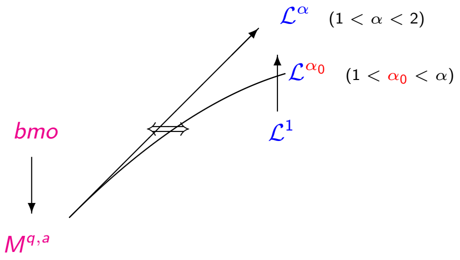
$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{L}^{\alpha} \quad (1 < \alpha < 2) \\
bmo \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[d] & & \mathcal{L}^{1} \arrow[u] \\
M^{q,a} & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{L}^{\alpha} \quad (1 < \alpha < 2) \\
bmo \arrow[d] & \Longleftrightarrow & \mathcal{L}^{1} \arrow[u] \\
M^{q,a} \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}
$$



$\Longrightarrow$ L'information Besov permet de casser l'équilibre

$\Longrightarrow$ Ceci reste vrai dans l' "intervalle" $[M^{q,a}, bmo[$



$\Longrightarrow$ L'information Besov permet de casser l'équilibre

$\Longrightarrow$ Ceci reste vrai dans l' "intervalle" $[M^{q,a}, bmo[$

$\Longrightarrow$ ... mais tout s'écrase si on considère bmo

($bmo \simeq p = +\infty$ et on perd l'information Besov $\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}$)

Théorème (2)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

Théorème (2)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* L^p-$M^{p,a}$

$$\boxed{\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{p,a})} \leq C\|\theta\|_{L^\infty(L^p)}}$$

Théorème (2)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* L^p-$M^{p,a}$

$$\boxed{\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{p,a})} \leq C\|\theta\|_{L^\infty(L^p)}}$$

(iii) *Si le transport est borné en* $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}$: $\|A_{[\theta]}\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}} \leq C\|\theta\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}}$

(iv) *Si* $0 \leq a < \alpha_0 = \frac{p+n}{p+1}$,

alors les solutions sont régulières et on “casse” l'équilibre.

La condition Lebesgue-Morrey **n'est pas** *générale*

Théorème (2)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* L^p-$M^{p,a}$

$$\boxed{\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{p,a})} \leq C\|\theta\|_{L^\infty(L^p)}}$$

(iii) *Si le transport est borné en* $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}$: $\|A_{[\theta]}\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}} \leq C\|\theta\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}}$

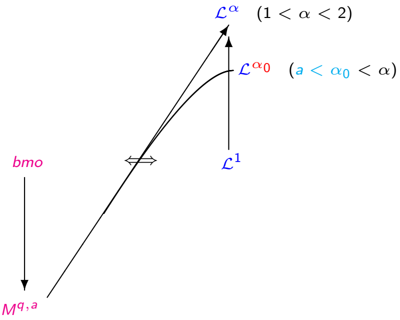
(iv) *Si* $0 \leq a < \alpha_0 = \frac{p+n}{p+1}$,

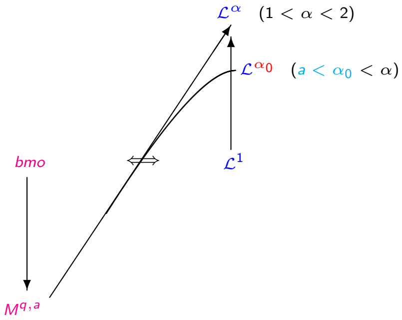
alors les solutions sont régulières et on "casse" l'équilibre.

La condition Lebesgue-Morrey **n'est pas** *générale*

$\Longrightarrow$ **Compétition** entre Lévy, Besov et Morrey-Campanato

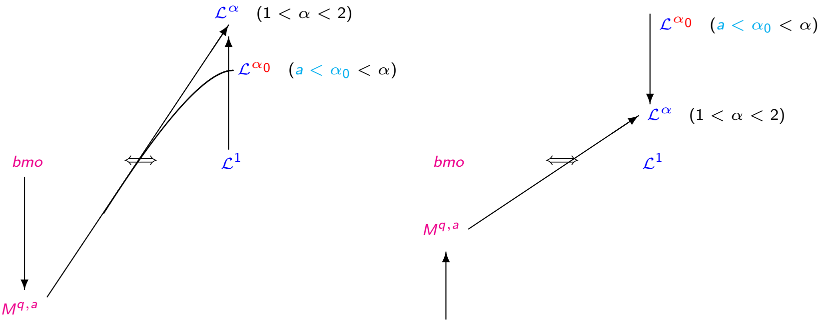
$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{L}^{\alpha} \quad (1 < \alpha < 2) \\
bmo \arrow[d] & \Longleftrightarrow & \mathcal{L}^{1} \arrow[u] \\
M^{q,a} \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}
$$


$\mathcal{L}^{\alpha}$ $(1 < \alpha < 2)$
$\mathcal{L}^{\alpha_0}$ $(a < \alpha_0 < \alpha)$
bmo
$\Longleftrightarrow$
$\mathcal{L}^{1}$
$M^{q,a}$

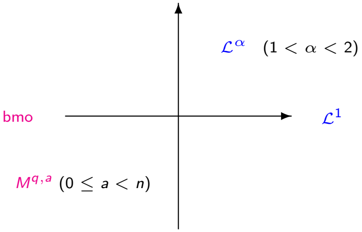


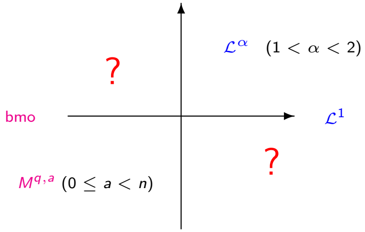
$\mathcal{L}^{\alpha_0}$ $(a < \alpha_0 < \alpha)$

$bmo \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}^1$



Si Morrey-Campanato/Lebesgue est plus régulier, l'information Besov ne sert plus


$\mathcal{L}^{\alpha}$ $(1 < \alpha < 2)$
bmo
$\mathcal{L}^{1}$
$M^{q,a}$ $(0 \leq a < n)$



Est-il possible rompre l'équilibre si $0 < \alpha < 1$?

Théorème (Régularisation)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[(-\Delta)^{-\varepsilon/2}\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

Théorème (Régularisation)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[(-\Delta)^{-\varepsilon/2}\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* $M^{q,a}$

Théorème (Régularisation)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[(-\Delta)^{-\varepsilon/2}\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p \qquad 0<\varepsilon<1$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* $M^{q,a}$

(iii) *Si le transport est borné en* $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}$

Théorème (Régularisation)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[(-\Delta)^{-\varepsilon/2}\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* $M^{q,a}$

(iii) *Si le transport est borné en* $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}$

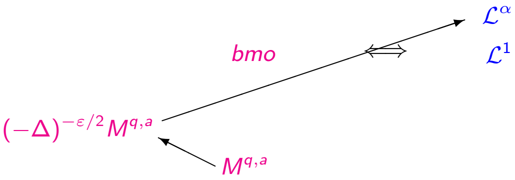
(iv) *Si* $p = \frac{qn}{q\varepsilon+n-a}$, *et* $1/2 < \alpha = \frac{n+p(1-\varepsilon)}{p+1} < 2.$

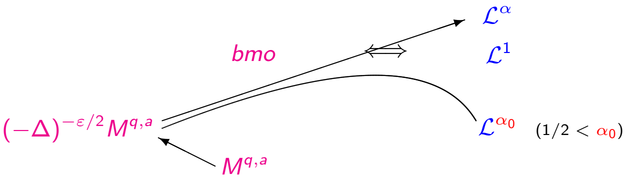
alors les solutions sont régulières.

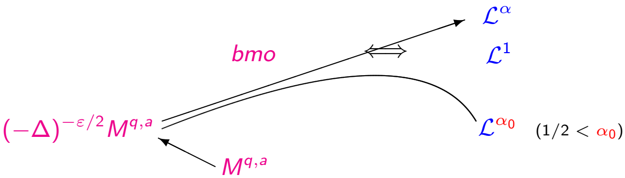
$\Longrightarrow$ **La régularisation** avec $(-\Delta)^{-\varepsilon/2}$ permet $1/2 < \alpha < 1$.

$bmo \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{L}^1$

$M^{q,a}$


$\mathcal{L}^\alpha$
bmo
$\Longleftrightarrow$
$\mathcal{L}^1$
$(-\Delta)^{-\varepsilon/2}M^{q,a}$
$M^{q,a}$


$\mathcal{L}^{\alpha}$
bmo
$\Longleftrightarrow$
$\mathcal{L}^{1}$
$(-\Delta)^{-\varepsilon/2}M^{q,a}$
$\mathcal{L}^{\alpha_0}$
$(1/2 < \alpha_0)$
$M^{q,a}$



$\Longrightarrow$ Effet **régularisant** de $(-\Delta)^{-\varepsilon/2}$

Théorème (Singularisation)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[(-\Delta)^{+\varepsilon/2}\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p \qquad 0<\varepsilon<1$$

Théorème (Singularisation)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[(-\Delta)^{+\varepsilon/2}\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p \qquad 0<\varepsilon<1$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* $M^{q,a}$

Théorème (Singularisation)

$$\partial_t\theta(t,x) - \nabla\cdot(A_{[(-\Delta)^{+\varepsilon/2}\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* $M^{q,a}$

(iii) *Si le transport est borné en* $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}$

Théorème (Singularisation)

$$\partial_t \theta(t,x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{+\varepsilon/2}\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0 \qquad \theta_0 \in L^p \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

(i) *Si la diffusion est un opérateur de type Lévy* $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

(ii) *Si le transport est borné en* $M^{q,a}$

(iii) *Si le transport est borné en* $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p},p}$

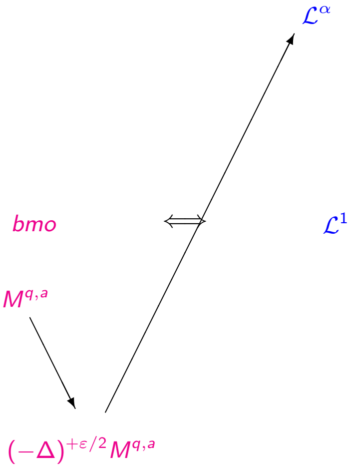
(iv) *Si* $1 < \alpha = \frac{n+p(1+\varepsilon)}{p+1} < 2.$

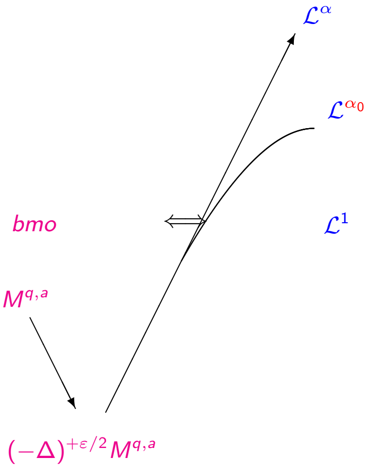
alors les solutions sont régulières.

$\Longrightarrow$ **Singularisation** avec $(-\Delta)^{+\varepsilon/2}$

$bmo \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}^1$

$M^{q,a}$


$\mathcal{L}^\alpha$
bmo
$\Longleftrightarrow$
$\mathcal{L}^1$
$M^{q,a}$
$(-\Delta)^{+\varepsilon/2}M^{q,a}$


$\mathcal{L}^{\alpha}$
$\mathcal{L}^{\alpha_0}$
bmo
$\Longleftrightarrow$
$\mathcal{L}^{1}$
$M^{q,a}$
$(-\Delta)^{+\varepsilon/2}M^{q,a}$

Idée de la preuve

Idée principale: la dualité

Définition (Espaces de Hölder)

Si $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *alors* $\theta \in \mathcal{C}^\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$ *si*

$$\|\theta\|_{\mathcal{C}^\gamma} = \|\theta\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|\theta(x) - \theta(y)|}{|x - y|^\gamma} < +\infty$$

Idée principale: la dualité

Définition (Espaces de Hölder)

Si $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *alors* $\theta \in \mathcal{C}^\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$ *si*

$$\|\theta\|_{\mathcal{C}^\gamma} = \|\theta\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|\theta(x) - \theta(y)|}{|x-y|^\gamma} < +\infty$$

Théorème (dualité Hardy-Hölder (Goldberg '79))

Si $0 < \gamma < 1$ *et* $0 < \sigma < 1$ *t.q.* $\sigma = \frac{n}{n+\gamma}$

$\Longrightarrow$ *L'espace dual d'un espace de* **Hardy** h^σ *est un espace de* **Hölder** $\mathcal{C}^\gamma$.

$\Longrightarrow$ $\theta \in \mathcal{C}^\gamma$ ssi pour tout $g \in h^\sigma$ on a $\langle \theta, g \rangle_{\mathcal{C}^\gamma \times h^\sigma} < +\infty$

Caractérisation moléculaire des espaces de Hardy

Définition (Espaces de Hardy)

Si $\mathbf{g} \in h^\sigma$ *alors*

$$\mathbf{g} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \psi_j$$

où $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^\sigma < +\infty$ *et* $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *sont des r-molécules.*

Définition (Molécules)

- $(0 < r < 1)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)||x - x_0|^{\omega} dx \leq r^{\omega-\gamma}, \text{ avec } x_0 \in \mathbb{R}^n \quad + \quad \|\psi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{r^{n+\gamma}} \; (1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0$$

- $(1 \leq r < +\infty)$: *Condition (1)*

$\Longrightarrow$ (1) implique $(1 \leq p < +\infty)$

$$\boxed{\|\psi\|_{L^p} \leq \frac{1}{r^{(n-\frac{n}{p}+\gamma)}}}$$

Astuce: Transfert

Théorème (Kiselev & Nazarov ('10))

$\Longrightarrow$ *Si* θ *sol. Eq.* $\partial_t\theta + \nabla\cdot(v\theta) + \mathcal{L}(\theta) = 0$

$\Longrightarrow$ *Si* ψ *sol. Eq. avec* ψ_0 *une molécule.*

$$\partial_t\psi + \nabla\cdot(v\psi) + \mathcal{L}(\psi) = 0$$

alors il y a **conservation** *du crochet de dualité*

$$\begin{array}{c}\langle\theta_0, \psi(t,\cdot)\rangle \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \langle\theta(t,\cdot), \psi_0\rangle\end{array}$$

$\Longrightarrow$ Pour étudier la régularité des solutions...

$$|\langle \theta(t,\cdot), \psi_0 \rangle| = |\langle \theta_0, \psi(t,\cdot) \rangle| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty} \|\psi(t,\cdot)\|_{L^1}$$

$\Longrightarrow$ Pour étudier la régularité des solutions...

$$|\langle\theta(t,\cdot),\psi_0\rangle| = |\langle\theta_0,\psi(t,\cdot)\rangle| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty}\|\psi(t,\cdot)\|_{L^1}$$

Théorème

Pour toute donnée initiale moléculaire ψ_0, la solution $\psi(t,x)$ est contrôlée en norme L^1 pour $t > T_0$.

- grandes molécules $\Longrightarrow$ principe du maximum

$$\|\psi\|_{L^1} \leq \frac{1}{r^\gamma}$$

$\Longrightarrow$ Pour étudier la régularité des solutions...

$$|\langle \theta(t,\cdot), \psi_0\rangle| = |\langle \theta_0, \psi(t,\cdot)\rangle| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty} \|\psi(t,\cdot)\|_{L^1}$$

Théorème

Pour toute donnée initiale moléculaire ψ_0, la solution $\psi(t,x)$ est contrôlée en norme L^1 pour $t > T_0$.

- grandes molécules $\Longrightarrow$ principe du maximum

$$\|\psi\|_{L^1} \leq \frac{1}{r^\gamma}$$

- petites molécules

Déformation des molécules (I)

- Pour une petite molécule de taille r:

$$\int |\psi(0,x)||x-x_0|^\omega dx \leq r^{\omega-\gamma}$$

$$\|\psi(0,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{r^{n+\gamma}}$$

- Au temps s on obtient une molécule de taille $(r+s)$:

$$\int |\psi(s,x)||x-x_s|^\omega dx \leq (r^\alpha + Ks)^{(\omega-\gamma)/\alpha}$$

$$\|\psi(s,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(r^\alpha + Ks)^{(n+\gamma)/\alpha}}$$

Idée: la vitesse est irrégulière, le déplacement du centre de la molécule x_0 est donnée par une moyenne

$$\begin{cases} x'(s) = & \overline{v}_{B(x(s),r)} = \frac{1}{|B(x(s),r)|}\displaystyle\int_{B(x(s),r)} v(s_0, y)dy, \quad s \in [0, s_0], \\ x(0) = & x_0. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Les espaces de Morrey-Campanato vont apparaître avec cette régularisation

Idée: la vitesse est irrégulière, le déplacement du centre de la molécule x_0 est donnée par une moyenne

$$\begin{cases} x'(s) = & \overline{v}_{B(x(s),r)} = \frac{1}{|B(x(s),r)|}\displaystyle\int_{B(x(s),r)} v(s_0,y)dy, \quad s \in [0,s_0], \\ x(0) = & x_0. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Les espaces de Morrey-Campanato vont apparaître avec cette régularisation

$$x'(s) = \overline{v}_{B(x(s),r)} = v * \varphi, \quad s \in [0,s_0]$$

$\Longrightarrow$ Los espaces de Besov vont apparaître avec cette régularisation

Déformation des molécules (II)

On fait "**fondre**" la norme L^1 des molécules

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(S_0, x)||x - x_{S_0}|^\omega dx \leq C_1 \quad + \quad \|\psi(S_0, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C_2$$

$\Longrightarrow$ $\|\psi(S_0, \cdot)\|_{L^1} \leq C_3$

$\Longrightarrow$ on obtient alors un contrôle de la norme L^1. ∎

$\Longrightarrow$ Autre type d'opérateurs? / autre type de transport?
SQG (transformées de Riesz en particulier)

$\Longrightarrow$ Autre type d'opérateurs? / autre type de transport?
SQG (transformées de Riesz en particulier)

$\Longrightarrow$ Contrôle en temps?
La régularité en temps et en espace sont reliées (équation de la chaleur)

$$\partial_t f \iff \Delta f$$

$\Longrightarrow$ Autre type d'opérateurs? / autre type de transport?
SQG (transformées de Riesz en particulier)

$\Longrightarrow$ Contrôle en temps?
La régularité en temps et en espace sont reliées (équation de la chaleur)

$$\partial_t f \iff \Delta f$$

$\Longrightarrow$ Utilisation de dérivées fractionnaires en temps

$$D_t^\sigma \theta(t,x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{+\varepsilon/2}\theta]}\,\theta)(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha_0}\theta(t,x) = 0$$

avec $0 < \sigma < 1$ et D^σ est la dérivée de Caputo

$$D^\sigma \psi(t) = \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\sigma}\psi'(s)ds$$

- L. Caffarelli & A. Vasseur. *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation*, Annals of Math., Vol 171 (2010), No 3, 1903-1930.
- P. Constantin & J. Wu. *Regularity of Hölder continuous solutions of the supercritical quasi-geostrophic equation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire. Vol 25, N$^\circ$6, 1103-1110 (2008).
- L. Silvestre, V. Vicol & A. Zlatos *On the loss of continuity for super-critical drift-diffusion equations*, Archive of Rational Mechanics and Analysis 207 (2013), No 3, 845-877.

- D. Chamorro & P. G. Lemarié-Rieusset. *Quasi-geostrophic equation, nonlinear Bernstein inequalities and α-stable processes*, Revista Matemática Iberoamericana (2011).
- A. Cordoba & D. Cordoba. *A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations*, Commun. Math. Phys. 249, 511-528 (2004).

- A. Kiselev & F. Nazarov. *A variation on a theme of Caffarelli and Vasseur*, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, Vol. 370, 58–72, (2009).
- D. Chamorro & S. Menozzi. *Fractional operators with singular drift: Smoothing properties and Morrey-Campanato spaces*, Rev. Mat. Iberoam. 32, no. 4, 1447–1501 (2016).
- D. Chamorro & S. Menozzi. *Nonlinear singular drifts: when Besov meets Morrey and Campanato* (2016)