ACADEMIA ROMÂNĂ
Institutul Naţional de Cercetări Economice "Costin C. Kiriţescu"

Lucrare de cercetare postdoctorală

Expert îndrumător:

Prof. Dr. Lucian BEZNEA

Cercetător postdoctorand:

Mihai N. PASCU

Bucureşti, 2012

UNIUNEA EUROPEANĂ
MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI EGALITĂŢII DE ŞANSE AMPOSDRU
FONDUL SOCIAL EUROPEAN POS DRU 2007-2013
INSTRUMENTE STRUCTURALE 2007-2013
MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI OIPOSDRU
INSTITUTUL NAŢIONAL DE CERCETĂRI ECONOMICE "COSTIN C. KIRIŢESCU"

Investeşte în oameni !
FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Programul Operaţional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 – 2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
Domeniul major de intervenţie 1.5 "Programe doctorale şi post-doctorale în sprijinul cercetării"
Titlul proiectului: **"Cercetarea ştiinţifică economică, suport al bunăstării şi dezvoltării umane în context european"**
Beneficiar: **Institutul Naţional de Cercetări Economice "Costin C. Kiriţescu"**
Numărul de identificare al contractului: POSDRU/89/1.5/S/62988

Procese stochastic Browniene şi aplicaţii

Expert îndrumător:
Prof. Dr. Lucian BEZNEA

Cercetător postdoctorand:
Mihai N. PASCU

Bucureşti, 2012

UNIUNEA EUROPEANĂ
MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI EGALITĂŢII DE ŞANSE AMPOSDRU
FONDUL SOCIAL EUROPEAN POS DRU 2007-2013
INSTRUMENTE STRUCTURALE 2007-2013
MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI OIPOSDRU
INSTITUTUL NAŢIONAL DE CERCETĂRI ECONOMICE "COSTIN C. KIRIŢESCU"

Cuprins

Rezumat

Introdusă în Economie şi Matematici Financiare în urmă cu mai bine de 100 de ani în teza de doctorat a lui Louis Bachelier "*Théorie de la spéculation*", modelarea stochastică s-a dovedit a fi un instrument de studiu deosebit de util în studiul fenomenelor economice şi financiare, cunoscând o dezvoltare exponenţială în ultimele decenii. Unul din motivele utilităţii acestor modele este că ele permit includerea, pe langă factorii determinanţi ai modelului şi a unui factor aleator, care însumează comportamentul factorilor ce nu au fost luaţi (sau nu pot fi luaţi) în calcul la elaborarea modelului, fie datorită multitudinii acestora, fie datorită faptului că anumiţi factori nu pot fi cuantificaţi exact.

Între procesele stochastice cel mai des folosite în modelare este *mişcarea Browniană*. Această alegere nu este întâmplătoare, ea fiind o consecinţă a Teoremei Limită Centrale a Teoriei Probabilităţilor, care arată că suma corespunzător normată de incremenţi independenţi şi identic distribuiţi – factorii "neglijabili", ignoraţi de regulă la elaborarea modelului – converge în distribuţie la o variabilă aleatoare normală, ce poate fi identificată cu incrementul mişcării Browniene.

Cele mai cunoscute şi apreciate astfel de modele sunt, spre exemplu, *modelul stochastic neoclasic de creştere economică Solow* ce apare în modelarea economică, respectiv *formula Black-Merton-Scholes* de stabilire a preţului unei opţiuni de stoc în matematicile financiare, contribuţii pentru care autorilor li s-a decernat premiul Nobel pentru Economie: lui Robert Solow în 1987, respectiv lui Robert C. Merton şi Myron S. Scholes în 1997.

În lucrarea de faţă prezentăm rezultatele cercetărilor efectuate asupra unei clase de procese stochastice înrudite mişcării Browniene, ce au local comportamentul mişcării Browniene, dar au un comportament global neomogen, fie spaţial sau temporal. Această alegere nu este una întâmplătoare, ea fiind este justificată de faptul că deşi mişcarea Browniană este folosită în modelare în diverse domenii, ea prezintă lacune. Astfel, evenimente recente cum ar fi căderea bursei de valori din 19 Octombrie 1987, evenimentele din 9 Septembrie 2004, criza pieţei imobiliare a Statelor Unite ale Americii din 2007 sau criza economică mondială declanşată la sfârşitul anului 2008, au arătat că modelarea prin mişcare Browniană sau mişcare Browni-

ană geometrică (procese continue, omogene din punct de vedere spaţial şi temporal) nu este întotdeauna adecvată, aceste evenimente sugerând luarea în calcul a proceselor stochastice cu singularităţi (salturi), sau cu comportament spaţial şi temporal neomogen.

Din punct de vedere matematic, aceasta presupune în primul rând studiul existenţei şi al unicităţii ecuaţiilor diferenţiale stochastice ce definesc aceste procese, precum şi a proprietăţilor şi reprezentărilor acestora, iar din punctul de vedere al aplicaţiilor presupune elaborarea de noi modele în care mişcarea Browniană să fie înlocuită prin noul tip de procese, cu parametrii corespunzător aleşi.

Lucrarea de faţă conţine rezultatele studiului autorului asupra mai multor procese înrudite mişcări Browniene. Astfel, în Capitolul 1 al lucrării, după ce în Secţiunea 1.1.1 este evidenţiat stadiul cunoaşterii în domeniu referitor la existenţa şi unicitatea ecuaţiilor diferenţiale stochastice, sunt prezentate rezultate de existenţă şi unicitate asupra mai multor ecuaţii diferenţiale stochastice cum ar fi ecuaţia (1.2.1) (Secţiunea 1.2.1), ecuaţia (1.2.15) (Secţiunea 1.2.2) sau ecuaţiile (1.2.21) şi (1.2.50) (Secţiunea 1.2.3). De remarcat este aici faptul că pentru ultimele trei ecuaţii diferenţiale stochastice menţionate obţinem şi *reprezentări explicite ale tuturor soluţiilor slabe*, prin introducerea a două noi procese (*alegere de semn* şi *alegere de semn independentă şi identici distribuită*, în sensul Definiţiei 1.2.9, Definiţiei 1.2.16 şi al Definiţiei 1.2.17). De asemenea, este demn de remarcat introducerea unui nou tip de soluţie pentru o ecuaţie diferenţială stochastică, pe lângă noţiunile clasice cunoscute de soluţie slabă şi soluţie tare, şi anume a noţiunii de φ-soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale stochastice (Definiţia 1.2.13), şi a noţiunilor corespunzătoare de existenţă şi unicitate. Acest nou tip de soluţie interpolează între noţiunile de soluţie slabă şi soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale, şi arată într-un anumit sens cantitatea de informaţie ce poate fi unic determinată dintr-o ecuaţie diferenţială stochastică (un model stochastic), având importante consecinţe practice. Simplificând mult situaţia, putem compara cu situaţia ecuaţiilor algebrice, spre exemplu al ecuaţiei $x^2 = -1$, în care nu avem unicitate a soluţiei (există două soluţii, $x = -1$ şi $x = 1$), dar putem determina în mod unic o anumită funcţie de soluţie care este unică ($|x| = 1$ în cazul ambelor soluţii). Acest fapt arată că, chiar dacă nu putem determina în mod unic soluţia ecuaţiei, putem deduce anumite informaţii asupra soluţiei în cauză (modulul soluţiei), şi putem obţine o reprezentare a tuturor soluţiilor ecuaţiei în funcţie de o anumită alegere de semn ($x = \pm 1$ în cazul menţionat). Aceste rezultate sunt prezentate mai detaliat în capitolul introductiv al lucrării, precum şi în cadrul secţiunilor menţionate.

Ca şi aplicaţii, sunt prezentate în lucrare două modele probabiliste pentru circulaţia banilor. Alegerea este pertinentă credem stadiului în care se află economia în momentul de faţă, având în vedere că o bună dezvoltare a acesteia este strâns legată de modul în care se efectuează investiţiile şi de cererea şi oferta de pe piaţa de valori, toate în strânsă legătură cu circulaţia banilor.

Pentru construcţia modelului, am studiat, la scară micro, modul în care o unitate monetară (o monedă) circulă în societate, şi am considerat într-o primă aproximare că fiecare membru al societăţii, atunci când este în posesia monedei, decide să o păstreze sau să o dea unuia din vecinii adiacenţi cu o anumită probabilitate (populaţie omogenă), independent de deciziile celorlalţi membrii ai societăţii. Am obţinut proprietăţi ale drumului aleator reprezentat de traseul descris de monedă, şi am obţinut legile limită corespunzătoare (acestea dau comportamentul la scară macro al modelului), rezultatele corespunzătoare fiind prezentate în Secţiunea 2.1. În Secţiunea 2.2 am studiat o variantă extinsă a modelului anterior (cazul populaţiei neomogene), în care membrii populaţiei iau decizia de a păstra sau de a da moneda unuia din vecinii adiacenţi cu probabilităţi diferite. În mod alternativ, acest model se poate aplica unei economii în care firmele iau decizia de a păstra sau de a da (de a investi spre exemplu) banii altor firme, cu anumite probabilităţi. Şi în acest caz am arătat că la scară micro modelul are aceleaşi proprietăţi ca în cazul anterior, şi am obţinut o Lege Tare a Numerelor Mari corespunzătoare.

Lucrarea se încheie cu un capitol de concluzii, în care sunt evidenţiate rezultatele originale obţinute comparativ cu cele estimate a fi obţinute, şi cu posibilul impact al acestora.

Cuvinte cheie: mişcare Browniană, ecuaţie diferenţială stochastică, existenţă şi unicitate, modelare stochastică, circulaţia banilor.

Summary

Introduced in Economy and Financial Mathematics more then 100 years ago in the doctoral thesis "*Théorie de la spéculation*" of Louis Bachelier, the stochastic modelling proved to be a very useful instrument in the study of economic and financial phenomena, which had an exponential development in the last decades. One of the reasons of the utility of these models is that they allow the inclusion, together with determining factors of the model, of a random factor, which cummulates the behaviour of the factors which were not (or cannot) taken into account in the construction of the model, either because of the multitude of them, or due to the fact that certain factors cannot be quantified exactly.

Among the stochastic processes mostly used in modelling is *Brownian motion*. This choice is not accidental, but a consequence of the Central Limit Theorem of Probability Theory, which shows that the appropriately normed sum of independent and identically distributed random variables – "negligible" factors, usualy ignored in constructing the model – converges in distribution to a normal random variable, which can be identified with the increment of Brownian motion.

Among the most widely known and appreciated such models are, for example, the *Solow neoclassic stochastic model of economic growth* which appears in economic modelling, respectively the *Black-Merton-Scholes formula* for establishing the price of a stock option in financial mathematics, contributions for which the authors were awarded the Nobel prize for Economy: Robert Solow in 1987, respectively Robert C. Merton and Myron S. Scholes in 1997.

In the present thesis we present the results of the research on a class of stochastic processes related to the Brownian motion, which have locally the behavior of the Brownian motion, but have a global non-homogenous behaviour, either spatial or temporal. This choice is again not accidental, being justified by the fact that even though the Brownian motion is used in modelling in various fields, it has shortcomings. Thus, the recent events such the fall of the stock market on October 19, 1987, the events on September 9, 2004, the crisis of the real estate market of the United States of America in 2007, or the world economic crisis started at the end of 2008, shown that modelling by Brownian or geometric Brownian motion (continuous pro-

cesses, homogeneous in space and time) is not always appropriate, these events suggesting the taking into consideration of stochastic processes with singularities (jumps), or with a spatial or temporal non-homogeneous behaviours.

From the mathematical point of view, this requires in the first place the study of the existence and uniqueness of the stochastic differential equations which define these processes, as well as the study of the properties and their representations, and from the point of view of the applications it requires the development of new modelsin which the Brownian motion is substituted by the new type of processes, with the appropriately chosen parameters.

The present thesis contains the research results of the author on several processes related to Brownian motion. Thus, in the Chapter 1 of the thesis, after which in Section 1.1.1 is presented the current stage of knowledge in the field of existence and uniqueness of stochastic differential equations, are presented the existence and uniqueness results on several stochastic differential equations such as the equation (1.2.1) (Section 1.2.1), the equation (1.2.15) (Section 1.2.2) or the equations (1.2.21) and (1.2.50) (Section 1.2.3). Noteworthy is here the fact that for the last three stochastic differential equations mentioned above we obtained *explicit representation of all weak solutions*, by introducing two new type of processes (*sign choice* and *independent and identically distributed sign choice*, in the sense of Definition 1.2.9, Definition 1.2.16 and Definition 1.2.17). Also, it is noteworthy the introduction of a new type of solution for a stochastic differential equation, in addition to the known classical notions of weak solution and strong solution, namely of the notion of φ-strong solution of a stochastic differential equation (Definition 1.2.13), and of the corresponding notions of existence and uniqueness. This new type of solution interpolates between the notions of weak and strong solution of a stochastic differential equation, and shows to a certain extent the quantity of information which can be uniquely determined from a stochastic differential equation (a stochastic model), having important practical consequences. Simplifying the situation, we can compare with the situation of alebraic equations, for example of the equation $x^2 = -1$, in which we do not have uniqueness of the solution (there are two solutions, $x = -1$ and $x = 1$), but we can determine uniquely a certain function of the solution ($|x| = 1$ in the case of both solutions). This fact shows, that even though we cannot determine uniquely the solution of the equation, we can deduce certain information about the solution (the absolute value of the solution), and we can obtain a representation of all solutions of the equation using a sign choice ($x = \pm 1$ in the aforementioned example). These results were presented in detail in the introductory chapter of the thesis, as well as in the corresponding sections mentioned above.

As applications, in the thesis are presented two models for the cash flow. We believe that the choice is meaningful for the stage in which the economy is at the present moment, taking into account that a good development of it is closely related to the way in which investments are made by the demand and supply on the market of values, all in close connection to the cash flow.

For the construction of the model, we studied, at micro scale, the way in which a monetary unit (a coin) circulates in the society, and in a first approximation we considered that each member of the society, when is given a coin, decides to keep it or to pass it to one of his adjacent neighbors with a certain probability (homogeneous population), independent of the decisions of the rest of the members of the society. We obtained the properties of the random walk represented by the trajectory of the coin, and we obtained the corresponding limit laws (these laws give the behavior at the macro scale of the model), the corresponding results being presented in Section 2.1. In Section 2.2 we studied an extended version of the previous model (the case of a homogeneous population), in which the member of the population take the decision to keep or to pass the coin to one of the adjacent neighbors with different probabilities. Alternatively, the model is suitable for an economy in which the firms decide to keep or to pass away (to invest, for example) money to other firms, with certain probabilities. In this case we also shown that at the micro scale the model has the same properties as in the previous case, and we obtained a corresponding Strong Law of Large Numbers.

The thesis concludes with a chapter of concluding remarks, in which are highlighted the original results we obtained comparatively with the estimated ones, and with their possible impact.

Keywords: Brownian motion, stochastic differential equation, existence and uniqueness, stochastic modelling, cash flow.

Introducere

Motivaţia, scopul şi obiectivele urmărite

Acum mai bine de 100 de ani, Louis Bachelier introducea mişcarea Browniană în teza sa de doctorat "*Théorie de la spéculation*" pentru a modela dinamica preţurilor de stoc. Acest prim pas făcut în modelarea stochastică a diverselor procese ce apar în Economie şi Finanţe a cunoscut ulterior o dezvoltare exponenţială prin contribuţiile aduse de renumiţi matematicieni şi economişti ai timpului.

Între procesele stochastice folosite în modelare, mişcarea Browniană este probabil procesul stochastic cel mai bine cunocut şi totodată cel mai des folosit, el apărând în modelarea economică, spre exemplu în *modelul stochastic neoclasic de creştere economică Solow*, sau în modelarea financiară, cum este cazul formulei Black-Merton-Scholes de stabilire a preţului unei opţiuni de stoc, contribuţii pentru care autorilor li s-a decernat premiul Nobel pentru Economie (Robert Solow în 1987, respectiv Robert C. Merton şi Myron S. Scholes în 1997). Pentru mai multe detalii referitoare la aceste rezultate se pot consulta spre exemplu referinţele [BaSa03], [BlSc73], [Gu10], [HuWh87], [So56], sau Secţiunea 5.2 din propunerea de proiect "*Procese stochastice Browniene cu aplicaţii în Finanţe şi Economie*" a autorului, prezenta teză fiind o sinteză a rezultatelor autorului obţinute în cadrul proiectului "*Cercetarea ştiinţifică economică, suport al bunăstării şi dezvoltării umane în context european*" (proiect finanţat din Fondul Social European şi de către Guvernul României prin Programul Operaţional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane 2007-2013, prin contractul SOP HRD/89/1.5/S/62988), desfăşurat în perioada 1 Decembrie 2010 – 31 Noiembrie 2012, şi având ca beneficiar Institutul Naţional de Cercetări Economice "Constantin C. Kiriţescu" al Academiei Române, iar ca partener (unul din cei cinci parteneri afiliaţi proiectului) Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române.

Alegerea ca obiect de studiu a proceselor stochastice Browniene (procese obţinute ca şi perturbări ale mişcării Browniene obişnuite) este justificată de faptul că deşi mişcarea Browniană este frecvent folosită în modelare în diverse domenii (spre exemplu în cele două modele menţionate mai sus, în Economie, respectiv în Matematici Financiare), ea prezintă lacune din punctul de vedere al modelului: în unele modele este de dorit ca procesul folosit să aibă comportament spaţial neomogen, temporal neomogen, să aibă salturi (discontinuităţi), sau alte proprietăţi depinzând de modelul ales.

Amintim aici doar trei exemple ce motivează această alegere.

1. Căderea bursei de valori din 19 Octombrie 1987, sau cea de după evenimentele din 9 Septembrie 2004, au arătat că modelarea prin mişcare Browniană geometrică (un proces continuu) nu este adecvată, deoarece preţul stocului poate avea discontinuităţi. De asemenea, se ştie că preţurile anumitor comodităţi, cum ar fi alimente, sau chiar bursa de valori, au o tendinţă sezonieră.

2. Criza din 2007 a pieţei imobilare din Statele Unite ale Americii a determinat un colaps pentru multe bănci internaţionale mari, precum şi pentru unele instituţii financiare asociate. Din nou aceasta arată că modelele stochastice considerate trebuie să aibă în vedere procesele stochastice cu singularităţi pentru a putea putea prevedea acest tip de evenimente nedorite.

3. Criza economică mondială, declanşată la sfârşitul anului 2008, a arătat că modelarea economică trebuie să aibă în vedere procesele discontinue, cu salturi. De asemenea, creşterea economică în această criză nu este un proces omogen pentru toate ţările, şi deci trebuie avute în vedere procese stochastice cu un comportament spaţial şi temporal neomogen, precum şi cu posibile discontinuităţi.

Aceste trei exemple concrete, precum şi alte exemple similare din Economie, Finanţe, sau alte domenii înrudite acestora, **motivează** studiul şi aplicaţiile proceselor înrudite mişcării

Browniene: schimbări de timp ale mişcării Browniene, mişcare Browniană sticky, drumuri aleatoare neomogene şi/sau în medii aleatoare, comportamentul la limită al acestora, etc, pe care ne propunem să le studiem în lucrarea de faţă.

Din punct de vedere matematic, aceasta presupune studiul existenţei, al unicităţii şi a proprietăţilor procesului corespunzător, iar din punctul de vedere al aplicaţiilor, studiul presupune elaborarea de noi modele în care mişcarea Browniană să fie înlocuită prin noul tip de procese considerat, cu parametrii corepunzător aleşi.

Scopul prezentei teze este studiul proceselor stochastice înrudite mişcării Browniene, ce au local comportamentul mişcării Browniene, dar au un comportament global neomogen, atât spaţial cât şi temporal, şi obţinerea de aplicaţii practice în domeniul Economic sau în domenii înrudite, conexe temei proiectului de finanţare.

În conformitate cu obiectivele proiectului propus de autor (a se vedea spre exemplu *Planul de lucru al proiectului* din Secţiunea 5.5 a acestuia), ne propunem următoarele **obiective**:

1. Studiul diverselor perturbări ale mişcărilor Browniene, prin:

    (a) studiul existenţei soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale stochastice ce definesc aceste procese;

    (b) studiul unicităţii soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale stochastice ce definesc aceste procese;

    (c) obţinerea de reprezentări explicite ale acestor procese;

    (d) obţinerea de proprietăţi ale acestor procese;

2. Aplicaţii ale proceselor în modelarea economică şi a domeniilor conexe, prin:

    (a) Elaborarea de noi modele în Economie şi în domenii conexe;

    (b) Studiul proceselor ce intervin în aceste modele;

    (c) Obţinerea de concluzii practice prvind modelele elaborate şi studiate.

Metodologia utilizată

Metodologia utilizată este adaptată cerinţelor de cercetare ştiinţifică, şi urmăreşte îndeplinirea obiectivelor proiectului, în condiţiile respectării normelor deontologice ale cercetătorului.

Astfel în metodologia utilizată pe parcursul întregului proiect s-au avut în vedere următoarele.

1. **Studiu bibliografic.** Pe parcursul celor doi ani ai proiectului, autorul a studiat mai multe articole ştiinţifice de referinţă şi cărţi de specialitate din diverse domenii: Matematic, Economic, Matematici Financiare. De menţionat că doar o parte din aceste articole şi cărţi apar în bibliografia selectivă din lucrare, restul fiind necesare pentru o mai bună înţelegere a fenomenului studiat sau pentru studiul comparativ al rezultatele obţinute de alţi cercetători (estimăm că lista de referinţe bibliografice ar trebui să fie probabil de 3 ori mai lungă decât în prezent, dacă am fi adăugat toate lucrările studiate).

2. **Cercetare ştiinţifică individuală.** Autorul a efectuat efectuat cercetare ştiinţifică individuală, reflectată în rapoartele lunare şi trimestriale elaborate, rapoarte vizate de expertul îndrumător în cadrul proiectului. Un alt indicator al cercetării sunt lucrările ştiinţifice elaborate (două lucrări apărute în reviste indexate în baze de date internaţionale şi o alta în curs de apariţie, o lucrare acceptată într-o revistă ISI, şi o altă lucrare în curs de recenzie tot la o revistă ISI), precum şi participările la conferinţe ştiinţifice naţionale şi internaţionale la care au fost prezentate rezultatele acestor cercetări.

3. C**olaborare cu alţi cercetători**. Un element important al cercetării ştiinţifice efectuate a fost colaborarea cu alţi specialişti din domeniu. Un rol important l-a avut aici colaborarea cu expertul îndrumător (Prof. dr. Lucian Beznea, Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române), cu care autorul a discutat diverse aspecte legate de cercetare, cum ar fi: rezultate obţinute, probleme apărute în cercetare şi posibila lor soluţionare, extinderea rezultatelor obţinute, noi direcţii în cercetare, etc. Pe parcursul desfăşurării proiectului, autorul a colaborat de asemenea cu mulţi alţi cercetători; în cadrul acestor întâlniri, autorul a încercat fie să se documenteze în noi teme de cercetare, conexe tematicii

proiectului, fie să prezinte soluţiile şi problemele întâmpinate în cercetare, fie să discute posibile abordări ale acestora.

De menţionat aici este spre exemplu stagiul de mobilitate extern din perioada 1 Martie – 31 Mai 2012 efectuat la Institutul de Matematică al Universităţii de Tehnologie şi Economie Budapesta, în care autorul a avut şansa să colaboreze în primul rând cu Prof. Dr. Balint Toth (expertul îndrumător la instituţia gazdă), matematician de renume internaţional, dar şi cu alţi cercetători de renume din cadrul acestei instituţii de prestigiu, cum ar fi Prof. Marton Balasz, Prof. Tamas Szabados, Prof. Simon Karoly, sau cu studenţii la doctorat ai acestei instituţii, studenţi ce formează un foarte puternic grup de cercetare (Horváth Illés, Kói Tamás, Komjáthy Júlia, Nagy Attila László, Nándori Péter, Rozgonyi Eszter, Bárány Balázs).

Pe parcursul întâlnirilor regulate cu mentorul de la instituţia gazdă, Prof. Balint TOTH, m-am familiarizat cu domeniul său de cercetare, şi am încercat să aplic cunoştinţele acumulate în cercetare. Urmând o sugestie a Prof. Toth, m-am documentat în domeniul teoriei excursiilor mişcării Browniene, şi am concretizat aceste studiu în obţinerea unora din rezultatele prezentate în Secţiunea 1.2.3. Un alt subiect care mi-a atras atenţia a fost cel al drumurilor aleatoare în medii aleatoare (în care Prof. Toth este specialist), şi ca urmare a documentării am iniţiat studiul modelelor probabiliste pentru circulaţia banilor, modele prezentate în Secţiunea 2.1 şi Secţiunea 2.2.

4. **Respectarea normelor deontologice ale cercetării ştiinţifice**. În toate lucrările elaborate în cadrul acestui proiect, autorul a avut în citarea şi autocitarea (acolo unde a fost cazul) rezultatelor utilizate în cercetare, precum şi menţionarea sursei de finanţare în articolele elaborate sau în cadrul prezentării lucrărilor elaborate la conferinţele de specialitate.

   Fiind vorba de un proiect finanţat din fonduri europene, autorul a avut în vedere respectarea obligaţiilor ce decurg din acestă finanţare (evitarea dublei finanţări, a respectării termenlor impuse pentru raportare, prezentarea documentelor de decontare şi a rapoartelor de activitate în urma stagiului la întoarcerea în ţară, etc).

Structura lucrării

Lucrarea de faţă este structurată în trei capitole, conţine un rezumat în limba Română şi unul în limba Engleză, o introducere şi o bibliografie selectivă.

Capitolul de faţă, intitulat "Introducere", conţine 4 secţiuni. În prima secţiune se prezintă motivaţia alegerii temei lucrării (ca necesitate a extinderii mişcării Browniene la alte procese înrudite cu comportament similar, dar care permit ne-omogneitate spaţială sau temporală, discontinuităţi, etc), şi sunt prezentate scopul şi obiectivele lucrării. În continuare, în a doua secţiune, este prezentată metodologia specifică utilizată în vederea îndeplinirii obiectivelor, iar în ultima secţiune (secţiunea de faţă) este prezentată structura detaliată a lucrării.

Capitolul 1, intitulat "*Rezultate obţinute*" este structurat în două părţi: o primă parte ce conţine stadiul actual al cunoaşterii în domeniul ales, iar o a doua ce conţine rezultatele proprii obţinute în cercetarea.

Secţiunea 1.1 este structurată în două subsecţiuni, corespunzător celor două domenii ale lucrării, cel teoretic şi cel aplicativ. În Secţiunea 1.1.1 sunt prezentate rezultatele clasice recente referitoare la ecuaţii diferenţiale stochastice. Astfel, sunt prezentate noţiunile clasice de soluţie slabă şi soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale stochastice (Definiţia 1.1.1, respectiv Definiţia 1.1.2), şi noţiunile corespunzătoare de existenţă şi unicitate slabă şi tare. Exemplul 1.1.6 este un exemplu de referinţă în cadrul ecuaţiilor diferenţiale stochastice (datorat lui H. Tanaka, fiind considerat ulterior şi de alţi cercetători), ce arată lipsa unei soluţii tari a unei anumite ecuaţii diferenţiale stochastice, şi care a fost folosit de autor ca punct de plecare al cercetărilor efectuate. Tot în aceasta sunt prezentate trei teoreme de referinţă referitoare la existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor stochastice diferenţiale: Teorema 1.1.7 (rezultatul datorat lui Engelbert-Schmidt, ce dă o condiţie necesară şi suficientă de existenţă şi unicitate în sens slab), Teorema 1.1.9 (rezultatul lui Le Gall, ce dă mai multe condiţii necesare ce asigură existenţa şi unicitatea în sens tare), şi Teorema 1.1.10 (rezultat recent obţinut de Bass-Chen privitor la soluţiile ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii de reflecţie pe frontieră).

În Secţiunea 1.1.2 sunt prezentate rezultatele clasice referitoare la legile limită ale drumurilor aleatoare: Legea Slabă a Numerelor mari (1.1.12), Legea Tare a Numerelor Mari (1.1.14), Teorema Limită Centrală 1.1.16, precum şi o variantă Funcţională a Teoremei Limită Centrale (1.1.17).

Partea a doua a primului capitol, intitulată "*Ecuaţii diferenţiale stochastice cu singularităţi*", conţine rezultatele originale ale cercetărilor autorului, şi este este structurată în patru subsecţiuni. În Secţiunea 1.2.1 sunt prezentate rezultatele cercetării referitoare la un proces înrudit mişcării Browniene, şi anume *mişcarea Browniană sticky*. Rezultate principale sunt aici Teorema 1.2.3, în care se obţine o nouă reprezentare a soluţiei unei ecuaţii difereniale stochastice degenerate (soluţia este un proces similar mişcării Browniene sticky), diferită de cea clasică datorată lui Engelbert-Schmidt (a se vedea Observaţia 1.2.4), şi Consecinţa 1.2.6, în care se obţine o condiţie suficientă de existenţă şi unicitate pentru o anumită ecuaţie diferenţială stochastică degenerată, ce completează un rezultat din 1.2.13 (a se vedea Observaţia 1.2.7).

În Secţiunea 1.2.2, autorul studiază mai îndeaproape exemplul clasic al lui H. Tanaka (a se vedea Exemplul 1.1.6), şi arată că, chiar dacă această ecuaţie diferenţială stochastică nu are soluţie tare unică, soluţiile slabe sunt unice în sensul distribuţiei, şi obţine o *reprezentare explicită a tuturor soluţiilor slabe* ale ecuaţiei (Teorema 1.2.11). Soluţia generică obţinută depinde de o alegere de semn, noţiune introdusă de autor în Definiţia 1.2.9, care explică lipsa unicităţii în sens traiectorial a soluţiilor slabe a ecuaţiei, precum şi lipsa unei soluţii tari a ecuaţiei.

Extinzând rezultatele din secţiunea anterioară, în Secţiunea 1.2.3 autorul studiază existenţa şi uicitatea pentru două tipuri de ecuaţii difrenţiale stochastice cu singularităţi. Plecând de la observaţia că în cazul secţiunii anterioare valoarea absolută a soluţiei ecuaţiei lui Tanaka este unic determinată de mişcarea Browniană ce apare în această ecuaţie, autorul introduce noţiunea de φ-soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale stochastice (Definiţia 1.2.13), noţiune ce interpolează între noţiunile clasice de soluţie slabă şi soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale stochastice. Ca şi în cazul secţiunii anterioare, studiul ecuaţiilor stochastice cu singularităţi este legat de noţiunea de *alegere de semn* (Definiţia 1.2.16). În acest caz studiul este mai amplu (a se vedea discuţia referitoare la ordonarea excursiilor unei mişcări Browniene ce urmează Definiţiei 1.2.16), şi necesită introducerea unei noţiuni suplimentare, şi anume aceea de *alegere de semn independentă şi identic distribuită* (1.2.17). Rezultatele principale ale acestei secţiuni sunt Teorema 1.2.20 şi Teorema 1.2.22, care arată existenţa şi unicitatea φ-soluţiilor tari (în sensul definiţiei introduse) pentru cele două tipuri de ecuaţii diferenţiale stochastice considerate, şi, mai mult, dau o *reprezentare a tuturor soluţiilor slabe* ale ecuaţiei în termenii unei alegeri de semn i.i.d.

Capitolul 2 al lucrării, intitulat "*Aplicaţii*", conţine rezultatele cercetărilor autorului referitoare la o problemă de interes economic, şi anume aceea a circulaţiei banilor. În Secţiunea 2.1, plecând de la un set de ipoteze minimale, autorul introduce un model probabilist pentru circulaţia banilor. Astfel, după ce în Secţiunea 2.1.1 se introduce modelul matematic ce descrie drumul aleator corespunzător traseului unei monede în interiorul populaţiei, în Secţiunea 2.1.2 sunt obţinute proprietăţi ale acestuia. Astfel se arată că drumul aleator al monedei este o martingală recurentă şi ireductibilă (Proposition 2.1.2), iar în Teorema 2.1.3 se obţin legile limită corespunzătoare: Legea Slabă şi Legea Tare a Numerelor Mari, Teorema Limită Centrală, şi varianta Funcţională a Teoremei Limită Centrale. În încheiere, în Secţiunea 2.1.3 sunt prezentate câteva implicaţii economice ale rezultatelor obţinute.

În Secţiunea 2.2 este prezentată o extensie recentă a modelului probabilist pentru circulaţia banilor din secţiunea anterioară. În acest model se consideră o populaţie neomogenă, în sensul că membrii populaţiei decid cu probabilităţi diferite de a păstra sau de a da moneda unui din vecinii adiacenţi (în modelul anterior aceste probabilităţi au fost considerate identice, adică populaţia a fost considerată ca fiind omogenă din punctul de vedere al deciziilor). Ca şi în cazul modelului anterior, se arată că dacă probabilităţile de a da moneda unui din vecinii adiacenţi sunt strict pozitive pentru toţi membrii populaţiei, atunci drumul aleator al monedei este o martingală recurentă şi ireductibilă (Propoziţia 2.2.2). De asemenea, în ipoteza suplimentară că probabilităţile a da moneda unui din vecinii adiacenţi sunt mărginite inferior de o constantă pozitivă pentru toţi membrii populaţiei, atunci are loc Legea Tare a Numerelor Mari. În Secţiunea 2.2.3 se arată că datorită neomogenităţii populaţiei, variabilele aleatoare reprezentând decizia membrilor populaţiei, aflaţi la diverse momente de timp în posesia monedei, de a o da sau nu vecinilor adiacenţi, nu sunt în general variabile aleatoare independente şi identic distribuite; din acest motiv, nu s-au putut obţine şi celelalte legi limită pentru drumul aleator al monedei (Teorema Limită Centrală şi varianta Funcţională corespunzătoare).

Ultimul capitol al lucrării este intitulat "*Concluzii*", şi conţine trei secţiuni: Secţiunea 3.1, în care sunt prezentate rezultatele obţinute comparativ cu cele estimate a fi obţinute, Secţiunea

3.2, în care sunt evidenţiate rezultatele originale obţinute în cercetare, şi Secţiunea 3.3, în care este prezentat impactul posibil al acestor rezultate.

Lucrarea se încheie cu o bibliografie selectivă conţinând peste 50 de articole şi cărţi folosite la elaborarea lucrării.

Capitolul 1

REZULTATE OBŢINUTE

1.1 Stadiul actual al cercetării în domeniu

1.1.1 Existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale stochastice

În cadrul proceselor stochastice, un rol important îl ocupă studiul ecuaţiilor diferenţiale stochastice, deoarece acestea permit includerea în modelare (spre deosebire de ecuaţiile diferenţiale clasice) a factorilor aleatori ce influenţează evoluţia procesului studiat.

O problemă fundamentală în teoria ecuaţiilor diferenţiale stochastice o reprezintă existenţa şi unicitatea soluţiei. Explicaţia practică este că atunci când se elaborează un model probabilist al unui anumit fenomen sau sistem dinamic, plecând de la anumite premize asupra fenomenului în cauză se ajunge în final la o descriere a procesului corespunzător ca şi soluţie a unei ecuaţii diferenţiale stochastice. În general, această ecuaţie poate avea sau nu soluţii, iar dacă ecuaţia admite soluţie, aceasta poate fi sau nu unică.

În situaţiile practice, este evident de dorit ca ecuaţia diferenţială stochastică construită să admită soluţie (în caz contrar modelul matematic construit nefiind viabil), şi de asemenea este de dorit ca soluţia să fie unică (în caz contrar, modelul matematic arată că situaţia concretă modelată poate avea una din mai multe evoluţii posibile, fapt ce nu este în general folositor în practică, mai ales dacă aceste evoluţii posibile acoperă o plajă largă de evoluţii posibile ale sistemului). Aceste cerinţe, impuse de necesităţi practice, corespund exact problemei fundamentale în studiul ecuaţiilor diferenţiale, şi anume aceea a existenţei şi unicităţii soluţiei.

În cele ce urmează vom fi preocupaţi în principal de ecuaţii diferenţiale stochastice 1-dimensionale în raport cu mişcarea Browniană, adică a ecuaţiilor de forma

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \int_0^t b(X_s)\, ds, \qquad t \geq 0, \tag{1.1.1}$$

în care ξ este valoarea iniţială a procesului $(X_t)_{t\geq 0}$ studiat, $(B_t)_{t\geq 0}$ este o mişcare Browniană 1-dimensională standard începută la $B_0 = 0$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este coeficientul de difuzie, iar $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este coeficientul de drift (tendinţă).

Literatura de specialitate operează cu două tipuri de soluţii ale ecuaţiei (1.1.1): soluţii tari (Engl., strong solutions) şi soluţii slabe (Engl., weak solutions), introduse de către T. Watanabe şi S. Yamada ([YaWa71b]) după cum urmează.

Pentru a defini noţiunile de soluţie tare şi slabă a unei ecuaţii diferenţiale stochastice, precum şi pentru conceptele de existenţă şi unicitate corespunzătoare, vom folosi abordarea recentă din [KaSh91] (pag. 285 – 300). Astfel, pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ fixat, considerăm $(B_t)_{t\geq 0}$ o mişcare Browniană 1-dimensională începută la $B_0 = 0$, şi notăm cu $\left(\mathscr{F}_t^B\right)_{t\geq 0}$ filtraţia generată corespunzătoare, adică $\mathscr{F}_t^B = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t), \quad t \geq 0$. Dacă ξ este o variabilă aleatoare independentă de $\mathscr{F}_\infty^B$, şi $\mathscr{N} = \left\{N \subset \Omega : \exists F \in \mathscr{F}_\infty^B \text{ a.î. } N \subset F \text{ şi } P(F) = 0\right\}$ este familia mulţimilor P-neglijabile, definim filtraţia $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ prin

$$\mathscr{F}_t = \sigma\left(\mathscr{N} \cup \mathscr{F}_t^B \cup \sigma(\xi)\right), \qquad t \geq 0. \tag{1.1.2}$$

Augmentând în mod corespunzător această filtraţie, putem presupune că filtraţia $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ verifică condiţiile uzuale (este continuă la dreapta şi conţine mulţimile neglijabile).

Definiţia 1.1.1. *O soluţie tare a ecuaţiei diferenţiale stochastice (1.1.1) pe spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ în raport cu mişcarea Browniană B este un proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ cu traiectorii continue care verifică următoarele proprietăţi:*

i) *X este adaptat în raport cu filtraţia $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ definită de 1.1.2;*

ii) $P(X_0 = \xi) = 1$;

iii) $P\left(\int_0^t b(X_s) + \sigma^2(X_s)\,ds < \infty\right) = 1$, *oricare ar fi* $t \geq 0$;

iv) *Aproape sigur* X *verifică relaţia (1.1.1).*

Aşa cum se arată în [KaSh91], partea importantă a acestei definiţii constă în punctul i) al definiţiei, adică al măsurabilităţii soluţiei în raport cu σ-algebra generată de mişcarea Browniană B_t. În mod echivalent, aceasta arată că soluţia X_t este determinată de mişcarea Browniană B_t (privită ca şi dată de intrare în ecuaţia diferenţială stochastică (1.1.1)), adică are loc aşa numitul *principiu al cauzalităţii* menţionat mai sus (datele de intrare în problema de modelare determină datele de ieşire).

Un alt tip de soluţie este aşa numită soluţie slabă, definită după cum urmează.

Definiţia 1.1.2. *O soluţie slabă a ecuaţiei diferenţiale stochastice (1.1.1) este un triplet* (X, B), $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, *cu următoarele proprietăţi:*

i) $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *este un spaţiu de probabilitate şi* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *este o filtraţie pe* $\mathscr{F}$ *ce verifică condiţiile uzuale;*

ii) $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *este un proces continuu, adaptat în raport cu filtraţia* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, *iar* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *este o mişcare Browniană* 1*-dimensională începută la* $B_0 = 0$, *adaptată în raport cu filtraţia* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$.

iii) $P\left(\int_0^t b(X_s) + \sigma^2(X_s)\,ds < \infty\right) = 1$, *oricare ar fi* $t \geq 0$;

iv) *Aproape sigur* X *verifică relaţia (1.1.1).*

Observaţia 1.1.3. *Aşa cum este uşor de observat, dacă* X *este o soluţie tare a ecuaţiei (1.1.1), atunci* (X, B) *este o soluţie slabă a acestei ecuaţii, pentru orice mişcare Browniană* B.

Reciproca nu este însă în general adevărată. Filtraţia $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *din Definiţia 1.1.2 nu este în general filtraţia augmentată generată de mişcarea Browniană* B *şi condiţia iniţială* ξ. *Aceasta arată că valoarea lui* X *la momentul* $t \geq 0$ *nu este în general determinată numai de mişcarea Browniană* B *până la momentul* t *şi condiţia iniţială* ξ, *ca în cazul unei soluţii tari. Cantitatea suplimentară de informaţie necesară pentru a determina valoarea lui* X *la momentul* $t \geq 0$ *este însă conţinută în* σ*-algebra* $\mathscr{F}_t$.

Corespunzător celor două tipuri de soluţii introduse, se pot introduce următoarele tipuri de existenţă şi unicitate pentru ecuaţia diferenţială stochastică (1.1.1). În cazul soluţiilor tari avem următoarea definiţie a unicităţii tari.

Definiţia 1.1.4. *Dacă oricare ar fi spaţiul de probabilitate* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, mişcarea Browniană* $(B_t)_{t\geq 0}$ *şi condiţia iniţială* ξ*, există o soluţie tare a ecuaţiei diferenţiale stochastice (1.1.1), spunem că existenţa tare este verificată pentru (1.1.1).*

Dacă oricare ar fi spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, mişcarea Browniană* $(B_t)_{t\geq 0}$ *şi condiţia iniţială* ξ*, şi oricare ar fi* X*,* $\widetilde{X}$ *două soluţii tari ale ecuaţiei (1.1.1) are loc*

$$P\left(X_t = \widetilde{X}_t, \quad 0 \leq t < \infty\right) = 1,$$

spunem că unicitatea tare este verificată pentru ecuaţia (1.1.1).

În cazul soluţiilor slabe, se pot defini două tipuri de unicitate pentru ecuaţii diferenţiale stochastice, şi anume unicitatea traiectorială şi unicitatea în distribuţie.

Definiţia 1.1.5. *Dacă* (X, B)*,* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*,* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *şi* $\left(\widetilde{X}, B\right)$*,* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*,* $\left(\widetilde{\mathscr{F}_t}\right)_{t\geq 0}$ *sunt două soluţii slabe ale ecuaţiei (1.1.1), pe acelaşi spaţiu de probabilitate, în raport cu aceeaşi mişcare Browniană B (posibil în raport cu filtraţii diferite), şi cu aceeaşi condiţie iniţială* ξ*, şi dacă*

$$P\left(X_t = \widetilde{X}_t, \quad 0 \leq t < \infty\right) = 1$$

spunem că unicitatea traiectorială (pathwise uniqueness) este verificată pentru ecuaţia (1.1.1).

Dacă (X, B)*,* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*,* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *şi* $\left(\widetilde{X}, \widetilde{B}\right)$*,* $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{P}\right)$*,* $\left(\widetilde{\mathscr{F}_t}\right)_{t\geq 0}$ *sunt două soluţii slabe ale ecuaţiei (1.1.1), cu aceeaşi condiţie iniţială* ξ*, şi dacă cele două procese au aceeaşi distribuţie, spunem că unicitatea în sensul distribuţiei are loc pentru ecuaţia (1.1.1).*

Un exemplu folosit de autor ca şi punct de plecare în cercetare este exemplul clasic datorat lui H. Tanaka (şi folosit ulterior şi de alţi autori, spre exemplu Zvonkin [Zv74], sau [KaSh91], pag. 301 – 302), exemplu care arată că există ecuaţii diferenţiale stochastice care nu admit soluţii tari (dar admit soluţie slabă, şi în plus aceasta este unică în distribuţie).

Exemplul 1.1.6 (Exemplul lui H. Tanaka)**.** *Considerăm cazul particular al ecuaţiei diferenţială stochastică (1.1.1) în care* $\sigma(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ *şi* $b(x) \equiv 0$*, adică*

$$X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s, \qquad t \geq 0. \tag{1.1.3}$$

Cum funcţia $\sigma^2(x) = \operatorname{sgn}^{-2}(x)$ *este integrabilă local pe* $\mathbb{R}$ *şi nu are zerouri, avem* $I(\sigma) = \varnothing = Z(\sigma)$ *în notaţia Teoremei 1.1.7. Conform acestei teoreme rezultă că ecuaţia diferenţială stochastică (1.1.3) admite o soluţie slabă şi că aceasta este unică în sensul distribuţiei.*

Cum X_t *şi* $-X_t$ *sunt simultan soluţii tari ale ecuaţiei (1.1.3), unicitatea tare nu poate avea loc pentru această ecuaţie (evident* X_t *şi* $-X_t$ *nu sunt identice decât în cazul* $X_t \equiv 0$*, care nu este însă soluţie a ecuaţiei (1.1.3)).*

Dacă (1.1.3) ar admite o soluţie tare X_t *(adică dacă* $\mathscr{F}_t^X \subset \mathscr{F}_t^B$ *pentru orice* $t \geq 0$*), observăm că*

$$\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dX_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s = \int_0^t dB_s = B_t, \qquad t \geq 0,$$

şi deci are loc şi incluziunea contrară $\mathscr{F}_t^B \subset \mathscr{F}_t^X$*, adică* $\mathscr{F}_t^X = \mathscr{F}_t^B$*.*

Conform formulei Tanaka avem de asemenea $\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dX_s = |X_t| - L_t^0$*, unde*

$$L_t^0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,\varepsilon)}(|X_s|) ds$$

este timpul local al procesului X în origine, ceea ce arată că $B_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dX_s$ *este o funcţie măsurabilă de* $|X_s|$*,* $0 \leq s \leq t$*, şi deci* $\mathscr{F}_t^B \subset \mathscr{F}_t^{|X|}$*.*

Aceasta conduce însă la contradicţia $\mathscr{F}_t^X \subset \mathscr{F}_t^{|X|}$*, care arată că ecuaţia diferenţială stochastică (1.1.3) nu admite soluţie tare.*

Se poate arăta (a se vedea exemplul anterior, sau [KaSh91], pag. 301) că existenţa slabă nu implică în general existenţa tare, că unicitatea în sensul distribuţiei nu implică unicitatea traiectorială; de asemenea, conform unei teoreme datorată lui T. Yamada şi S.Watanabe ([YaWa71b]), unicitatea traiectorială implică unicitatea în sensul distribuţiei.

Începând cu munca de pionierat a lui Kiyoshi Itô (a se vedea spre exemplu [It46]), mai mulţi autori au studiat problema existenţei şi unicităţii ecuaţiilor diferenţiale stochastice (de tipul ecuaţiei (1.1.1), sau al altor variante mai complicate, multidimensionale, sau care permit dependenţa de timp a coeficienilor ecuaţiei, etc).

În cazul în care coeficientul de drift b din ecuaţia (1.1.1) este identic nul, problema existenţei şi a unicităţii slabe a fost complet rezolvat de către H. J. Engelbert şi W. Schmidt ([EnSc85]), după cum urmează.

Considerăm mulţimea $Z(\sigma)$ a zerourilor funcţiei de drift σ, definită prin

$$Z(\sigma) = \{x \in \mathbb{R} : \sigma(x) = 0\}, \tag{1.1.4}$$

şi mulţimea $I(\sigma)$ de ne-integrabilitate locală a funcţiei σ^{-2}, definită prin

$$I(\sigma) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dy}{\sigma^2(x+y)} = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0 \right\}. \tag{1.1.5}$$

Rezultatul este următorul.

Teorema 1.1.7 ([EnSc84])**.** *Ecuaţia diferenţială stochastică*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s, \qquad t \geq 0 \tag{1.1.6}$$

are o soluţie care nu explodează pentru orice distribuţie iniţială a lui X_0 dacă şi numai dacă

$$I(\sigma) \subset Z(\sigma). \tag{1.1.7}$$

Mai mult, pentru orice distribuţie iniţială a lui X_0 soluţia este unică în sensul distribuţiei dacă şi numai dacă

$$I(\sigma) = Z(\sigma). \tag{1.1.8}$$

Observaţia 1.1.8. *Într-o altă lucrare ([EnSc85]) autorii extind acest rezultat şi arată că dacă σ este o funcţie măsurabilă ce verifică $I(\sigma) = \varnothing$, atunci toate soluţiile ecuaţiile (1.1.6) pot fi construite din soluţia din teorema anterioară, prin "întârzierea" soluţiei (Engl., "delay") când aceasta se află în mulţimea $Z(\sigma)$.*

Dacă în ceea ce priveşte problema existenţei şi unicităţii slabe (în cazul fără drift) este complet rezolvată de teorema anterioară, în cazul soluţiilor tari sunt cunoscute numai condiţii suficiente (nu şi necesare) care asigură existenţa şi unicitatea tare.

Sunt cunoscute în literatura de specialitate mai multe condiţii suficiente care asigură existenţa şi/sau unicitatea tare a ecuaţiei (1.1.1). Astfel, în munca sa de pionierat în domeniul proceselor stochastice, K. Itô (1942a, 1946 in Karatzas) arată că dacă coeficienţii σ şi b ai ecuaţiei stochastice (1.1.1) sunt local funcţii Lipschitz, atunci unicitatea tare este verificată pentru (1.1.1). Dacă în plus σ şi b sunt funcţii Lipschitz globale, şi verifică o condiţie suplimentară de creştere, atunci este verificată şi existenţa tare pentru (1.1.1).

Alte rezultate privind existenţa şi unicitatea tare a soluţiilor ecuaţiilor stochastice 1-dimensionale au fost obţinute de către T. Yamada şi S. Watanabe ([YaWa71b]), S. Nakao ([Na72]), J. F. Le Gall ([Ga83]), M. T. Barlow şi E. Perkins ([BaPe84]), şi mai recent de către T. S. Zhang ([Zh94]) şi R. Bass şi M. F. Chen ([BaCh01]).

Spre exemplu, condiţii suficiente generale (care conţine ca şi cazuri particulare rezultate anterior obţinute de diverşi autori) sunt datorate lui J. F. Le Gall ([Ga83]), după cum urmează.

Considerăm următoarele ipoteze:

(A) Există o funcţie crescătoare $\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ astfel încât $\int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = \infty$ şi

$$(\sigma(x) - \sigma(y))^2 \leq \rho(|x-y|), \qquad x,y \in \mathbb{R}. \tag{1.1.9}$$

(B) Există o funcţie crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$(\sigma(x) - \sigma(y))^2 \leq |f(x) - f(y)|, \qquad x,y \in \mathbb{R}. \tag{1.1.10}$$

Rezultatul este următorul.

Teorema 1.1.9 ([Ga83]). *Presupunem că σ, b sunt funcţii mărginite şi măsurabile ce verifică una din următoarele ipoteze*

1. *σ verifică condiţia (A) şi b este o funcţie Lipschitz;*
2. *σ verifică condiţia (A) şi există $\varepsilon > 0$ astfel încât $|\sigma| \geq \varepsilon$;*
3. *σ verifică condiţia (B) şi există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\sigma \geq \varepsilon$.*

Atunci unicitatea tare este verificată pentru ecuaţia (1.1.1).

Observăm în această teoremă faptul că ipoteza (A) implică continuitatea coeficientului de difuzie σ, iar ipoteza (B) poate fi folosită doar dacă coeficientul de difuzie σ este mărginit inferior de o constantă pozitivă. În cazul în care coeficientul de difuzie σ are discontinuităţi şi nu este mărginit inferior de o constantă pozitivă, este posibil ca ecuaţia (1.1.1) sa nu aibă soluţie tare, sau, dacă aceasta există, este posibil ca soluţia să nu fie unică.

Pentru cazul ecuaţiilor diferenţiale stochastice cu singularităţi (funcţie de difuzie discontinuă), există în literatură diverse rezultate ce asigură (în anumite ipoteze) existenţa şi/sau unicitatea soluţiei. Prezentăm în continuare un astfel de rezultat recent care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei.

Teorema 1.1.10 ([BaCh05]). *Fie σ o funcţie măsurabilă pe $\mathbb{R}$, mărginită superior şi inferior de constante pozitive, ce verifică condiţia (B) de mai sus. Atunci, pentru orice $x_0, w_0 \in \mathbb{R}$, ecuaţia diferenţială stochastică*

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \widehat{L}_t^{w_0}(X), \qquad t \geq 0, \tag{1.1.11}$$

admite o soluţie tare continuă, şi soluţia este unică în sens tare. Aceeaşi concluzie are loc şi pentru ecuaţia diferenţială stochastică

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s - \widehat{L}_t^{w_0}(X), \qquad t \geq 0. \tag{1.1.12}$$

Mai mult, dacă soluţia unică a ecuaţiei (1.1.11) (respectiv, (1.1.12)) este limita crescătoare (respectiv, limita descrescătoare) a soluţiilor tari X_n ale ecuaţiei

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \int_{\mathbb{R}} L_t^w(X)\, \nu(dw), \qquad t \geq 0, \tag{1.1.13}$$

cu $\beta_n \delta_{w_0}$ (respectiv, $-\beta_n \delta_{w_0}$) în loc de ν, pentru orice $\beta_n \uparrow 1$ pentru $n \to \infty$.

Observaţia 1.1.11. *În teorema anterioară, $\widehat{L}_t^w(X)$ reprezintă timpul local simetric al procesului X la nivelul w, adică procesul definit prin*

$$\widehat{L}_t^w(X) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{[w-\varepsilon, w+\varepsilon)}(X_s)\, d\langle X \rangle_s, \qquad t \geq 0,$$

iar $\langle X \rangle$ reprezintă variaţia pătratică a procesului X (pentru detalii a se vedea spre exemplu [ReYo94]).

1.1.2 Teoreme limită

Teoremele limită reprezintă rezultate fundamentale în Teoria probabilităţilor, ce dau condiţii necesare şi/sau suficiente pentru convergenţa unei sume de variabile aleatoare corespunzător normată (în medie, aproape sigur sau în distribuţie).

Între primele rezultate de acest tip obţinute este de menţionat cel al lui J. Bernoulli (*Ars Conjectandi*, 1713), în care aceste obţine o primă lege a numerelor mari pentru variabile aleatoare binare, numite ulterior variabile aleatoare Bernoulli. Aproximativ o sută de ani mai tărziu (*Probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilitiés*, 1837), S. D. Poisson numeşte pentru prima dată acest rezultat sub numele de "la loi des grands nombres" (Legea Numerelor Mari, abreviat LLN în litearatură, de la traducerea în Engleză Law of Large Numbers).

Ulterior, mulţi matematicieni de seamă au adus contribuţii la obţinerea de teoreme limită. Menţionăm câteva nume sonore cum ar fi A. Moivre, P. L. Cebâşev, P. Laplace, C. F. Gauss, A. A. Markov, E. Borel, F. P. Cantelli, A. N. Kolmogorov, A. Y. Khinchin, G. Pólya, J. W. Lindeberg sau P. Lévy.

Există în literatură două variante a legii numerelor mari: Legea Slabă a Numerelor Mari (abreviată WLLN, de la traducerea în Engleză Weak Law of Large Numbers) şi Legea tare a Numerelor Mari (abreviată SLLN, de la traducerea în Engleză Strong Law of Large Numbers). Prima se referă la condiţiile în care are loc convergenţa în probabilitate, iar cea de a doua se referă la convergenţa aproape sigură.

Menţionăm o variantă a Legii Slabe a Numerelor Mari pentru variabile aleatoare independente şi identic distribuite (a se vedea spre exemplu [Du96], pag. 41 –44).

Teorema 1.1.12 (WLLN)**.** *Dacă $(X_n)_{n\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite cu moment de ordin întâi finit şi medie $E(X_1) = \mu$, atunci are loc convergenţa în probabilitate*

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \rightarrow_P m. \tag{1.1.14}$$

Demonstraţie. În ipoteza suplimentară că dispersia variabilelor aleatoare $(X_n)_{n\geq 1}$ este finită, teorema rezultă imediat din inegalitatea lui Cebâşev. Pentru cazul general se poate consulta spre exemplu [Du96], pag. 44. □

Observaţia 1.1.13. *Reamintim că un şir de variabile aleatoare $(Y_n)_{n\geq 1}$ definite pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ converge în probabilitate către o variabilă aleatoare Y definită pe acest spaţiu de probabilitate dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ are loc*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|Y_n - Y| \geq \varepsilon\right) = 0, \tag{1.1.15}$$

şi notăm în acest caz $Y_n \to_P Y$.

Mai reamintim că dacă Y_n converge aproape sigur către Y, adică dacă $P\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = Y\right) = 1$, atunci Y_n converge în probabilitate către Y.

Prezentăm următoarea variantă a Legii Tari a Numerelor Mari datorată lui A. N. Kolmogorov (a se vedea spre exemplu [Wi91], pag. 119).

Teorema 1.1.14 (SLLN)**.** *Dacă $(X_n)_{n\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite cu moment de ordin întâi finit şi medie $E(X_1) = \mu$, atunci*

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \mu \qquad a.s. \tag{1.1.16}$$

Demonstraţie. A se vedea spre exemplu [Wi91], pag. 119 – 120. □

Observaţia 1.1.15. *Există în literatură şi alte versiuni ale celor două legi ale numerelor mari prezentate mai sus. Spre exemplu, se ştie că Legea Tare a Numerelor Mari are loc şi în ipoteza că variabilele aleatoare $(X_n)_{n\geq 1}$ sunt numai independente două câte două (în loc de independente), sau dacă sunt asimptotic independente (a se vedea spre exemplu conceptele de mixingale sau $*$-mixing din [HaHe80] pentru mai multe detalii).*

Unul din rezultatele remarcabile ale Teoriei probabilităţilor legate de convergenţa sumei de variabile aleatoare corespunzător normate este Teorema Limită Centrală (abreviat CLT, de la traducerea în Engleză Central Limit Theorem), care asigură convergenţa în distribuţie. Reamintim că un şir de funcţii de distribuţie F_n converge slab către o funcţie F dacă

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

în toate punctele $x \in \mathbb{R}$ de continuitate ale funcţiei F. Spunem că un şir de variabile aleatoare X_n definite pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ converge slab / converge în distribuţie către o variabilă aleatoare X definită pe acest spaţiu de probabilitate, dacă funcţiile de distribuţie corespunzătoare $F_n(x) = P(X_n \le x)$ converg slab către funcţia de distribuţie $F(x) = P(X \le x)$ a variabilei aleatoare X. Notăm în acest caz $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$.

Cu această pregătire putem acum enunţa următoarea.

Teorema 1.1.16 (CLT). *Dacă $(X_n)_{n\ge1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite cu medie $E(X_1) = \mu$ şi dispersie $E\left((X_1-\mu)^2\right) = \sigma^2 > 0$ finite, atunci are loc convergenţa în distribuţie*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}} Z, \tag{1.1.17}$$

unde $Z \in \mathscr{N}(0,1)$ este o variabilă aleatoare nromală standard.

Demonstraţie. A se vedea spre exemplu [JaPr03], pag. 181 – 182. □

Există în literatura de specialitate şi alte variante ale acestui rezultat clasic, spre exemplu varianta Lindeberg-Feller a Teoremei Limită Centrale, varianta Liapunov a teoremei Limită Centrale, Teorema Limită Centrală în cazul variabilelor aleatoare slab dependente, sau varianta Martingală a Teoremei Limită Centrale (pentru detalii a se vedea spre exemplu [Du96], pag. 116, [JaPr03], pag. 235, sau [HaHe80], pag. 58)

Un ultim tip de teoremă limită pe care îl prezentăm în continuare este aşa numita variantă Funcţională a Teoremei Limită Centrală (abreviat FCLT, de la traducerea în Engleză Functional Central Limit Theorem). Acest rezultat poate fi privit ca o extensie a Teoremei Limită Centrale, în următorul sens. Această teoremă arată că distribuţia şirului de sumei de variabile aleatoare corespunzător normate converge către o variabilă aleatoare normală. Construind în mod corespunzător un proces continuu care interpolează liniar aceste sume, se poate arăta că distribuţiile finit dimensionale ale acestui proces converg slab către distribuţiile finit dimensionale ale unei mişcări Browniene 1-dimensionale $(B_t)_{0\le t\le1}$. Mai mult, se poate arăta că că distribuţiile acestui proces converg slab către distribuţiile unei mişcări Browniene 1-dimensionale $(B_t)_{0\le t\le1}$, rezultat cunoscut sub numele de varianta Funcţională a Teoremei Limită Centrale, sau Principiul de

Invarianţă (aceste tip de rezultate au fost iniţial obţinute de P. Erdös şi M. Kaç în [ErKa46], şi D. M. Donsker în [Do51], şi apoi dezvoltate de mai mulţi autori).

Fie $\{S_n, \mathscr{F}_n, n = 1, 2, \ldots\}$ o martingală pe spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, cu $S_0 = 0$ şi $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Pentru $n \geq 1$ definim

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= E\left(X_n \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right), && (1.1.18)\\ V_n^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, && (1.1.19)\\ s_n^2 &= E\left(V_n^2\right) = E\left(S_n^2\right), && (1.1.20) \end{aligned}$$

şi considerăm procesul $(\xi_n(t))_{0 \leq t \leq 1}$ ce interpolează liniar între punctele $\left(\frac{s_k^2}{s_n^2}, \frac{S_k}{s_n}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, adică

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n}\left(S_k + X_{k+1}\frac{t s_n^2 - s_k^2}{s_{k+1}^2 - s_k^2}\right), \qquad \frac{s_k^2}{s_n^2} \leq t \leq \frac{s_{k+1}^2}{s_n^2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.1.21}$$

Prespunem că martingala S_n verifică următoarea ipoteză

$$\frac{V_n^2}{s_n^2} \to_P 1, \tag{1.1.22}$$

şi spunem că S_n verifică condiţia Lindeberg dacă

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2 1_{\{|X_i| \geq \varepsilon s_n^2\}}\right) \to_P 1 \tag{1.1.23}$$

pentru orice $\varepsilon > 0$.

Cu această pregătire, putem enunţa varianta Funcţională a Teoremei Limită Centrale, după cum urmează.

Teorema 1.1.17 (FCLT, [Br71]). *Dacă condiţia (1.1.22) şi condiţia Lindeberg (1.1.23) sunt verificate, atunci*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n}{s_n} \leq x\right) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1.24}$$

şi toate distribuţiile finit dimensionale ale procesului $\xi_n(t)$ dat de (1.1.21) converg slab, pentru $n \to \infty$, către cele ale unei mişcări Browniene 1-dimensionale standard $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$.

Mai mult, dacă P_n sunt măsurile de probabilitate pe $(\mathscr{C}[0,1],\mathscr{B})$ determinate de distribuţiile proceselor $\{\xi_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$, şi P este măsura de probabilitate determinată de distribuţia unei mişcări Browniene 1-dimensionale standard pe $(\mathscr{C}[0,1],\mathscr{B})$, atunci P_n converge slab către P pentru $n \to \infty$.

Demonstraţie. A se vedea demonstraţia Teoremelor 1, 2 şi 3 din [Br71]. □

1.2 Ecuaţii diferenţiale stochastice cu singularităţi

1.2.1 Mişcarea Browniană sticky

Punctul de plecare al acestor cercetări este studiul unei ecuaţii diferenţiale stochastice degenerate, pentru care funcţia difuzie se anulează, şi pentru care rezultatele clasice din domeniu nu se pot aplica.

Considerăm ecuaţia diferenţială stochastică

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s, \tag{1.2.1}$$

în care funcţia de difuzie este definită de

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

şi $(B_t)_{t\geq 0}$ este o mişcare Browniană 1-dimensională standard pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ fixat.

Este uşor de observat că dacă $x = 0$, $X_t \equiv 0$ şi $X_t = B_t$ sunt ambele soluţii ale ecuaţiei (1.2.1), şi deci nu are loc unicitatea traiectorială pentru această ecuaţie.

Mai mult, conform teoremei Engelbert-Schmidt (Teorema 1.1.7), cum în acest caz mulţimea zerourilor lui σ este $\mathscr{Z}(\sigma) = \{0\}$ şi σ^{-2} este o funcţie local integrabilă pe $\mathbb{R}$, avem $I(\sigma) = \mathbb{R} \neq \mathscr{Z}(\sigma)$, soluţia acestei ecuaţii nu este unică nici în distribuţie.

În lucrarea [EnSc85], autorii au arătat că soluţia generală a ecuaţiei (1.2.1) se poate obţine din mişcarea Browniană B_t prin *întârzierea* acesteia când se află în origine ("*time delay*" în

Engleză, a se vedea [EnSc85], Definiţia 4.1 şi Teorema 5.5*)*, şi deci poate fi privită ca o *mişcare Browniană sticky* pe $\mathbb{R}$ cu punct sticky 0.

Acest proces se comportă la fel ca o mişcare Browniană când se află în afara originii, şi petrece în origine (spre deosebire de mişcarea Browniană) o durată de timp de măsură Lebesgue pozitivă în origine (de aici provine şi numele procesului: mişcarea Browniană aderă/se lipeşte de origine). Mişcarea Browniană sticky a fost considerată şi de alţi autori (a se vedea spre exemplu [Am91], [Wa99], [Wa97]), şi are aplicaţii practice în modelare în Computer Science (a se vedea spre exemplu [HaLe81] sau [Ya94]).

Observaţia 1.2.1. *Ecuaţia (1.2.1) este legată şi de cercetările recente ale autorului privind extensia cuplajului în oglindă ("mirror coupling" în Engleză) introdus K. Burdzy şi de co-autorii săi (a se vedea [AtBu08] şi referinţele din acest articol). În încercarea de a extinde acest cuplaj la cazul când cele două procese au domenii de definiţie diferite, am fost conduşi la problema construcţiei a două mişcări Browniene* 1*-dimensionale ce au aceeaşi incremenţi când coincid, şi incremenţi opuşi când sunt diferite, adică la rezolvarea ecuaţiei diferenţiale stochastice*

$$W_t = w + \int_0^t G(W_t - B_t)\, dB_t, \qquad t \geq 0,$$

unde B_t este o mişcare Browniană dată şi $G(y) = 1 - 2\sigma(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Folosind substituţia $X_t = -\frac{1}{2}(W_t - B_t)$, ecuaţia anterioară se reduce la ecuaţia (1.2.1) pentru $x = -\frac{w}{2}$.

Rezultatul central al acestei secţiuni este Teorema 1.2.3, în care se obţine o nouă reprezentare a soluţiilor ecuaţiei (1.2.1), diferită de cea obţinută de către Engelbert şi Schmidt, şi care foloseşte noţiunea de time delay. Ca o consecinţă a acestui rezultat, în Consecinţa 1.2.6, obţinem unicitatea traiectorială a soluţiilor ecuaţiei (1.2.1) pentru care timpul Lebesgue Lebesgue petrecut în origine este 0.

Pentru a prezenta rezultatul central, introducem mai întâi noţiunea de soluţie care petrece timp zero în origine (conform [BaBuCh07]), după cum urmează.

Definiţia 1.2.2. *Dată fiind o mişcare Browniană* 1*-dimensională $B = (B_t)_{t \geq 0}$ cu $B_0 = 0$ pe un* *spaţiu de probabilitate* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, o soluţie tare a ecuaţiei*

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s \tag{1.2.3}$$

care petrece timp zero în 0 *este un proces continuu* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *adaptat filtraţiei generate de* B*, care verifică ecuaţia (1.2.3) şi pentru care* $\int_0^\infty 1_{\{0\}}(X_s)\, ds = 0$ *aproape sigur.*

Spunem că are loc unicitatea traiectorială pentru ecuaţia (1.2.3) în mulţimea funcţiilor care petrec timp zero în origine 0 *dacă oricare ar fi* X *şi* $\widetilde{X}$ *două soluţii ale acestei ecuaţii, definite pe acelaşi spaţiu de probabilitate şi corespunzătoare aceleiaşi mişcări Browniane* B *(dar în raport cu filtraţii posibil diferite), avem*

$$P(X_t = \widetilde{X}_t, \quad t \geq 0) = 1.$$

Cu această pregătire putem acum enunţa rezultatul principal al acestei secţiuni, după cum urmează.

Teorema 1.2.3 ([PaPa11a])**.** *dacă* B_t *este o mişcare Browniană* 1*-dimensională cu* $B_0 = 0$ *şi* X_t *este un proces continuu care verifică ecuaţia (1.2.1), atunci* X_t *admite reprezentarea*

$$X_t = B_t - B_{t_\Lambda}, \qquad t \geq 0, \tag{1.2.4}$$

unde t_Λ *este primul punct de creştere al funcţionalei* $\Lambda_s = \int_0^s 1_{\{0\}}(X_u)\, du$ *după timpul* t*, adică*

$$t_\Lambda = \inf\{s \geq t : \Lambda_s > \Lambda_t\} \in [0, \infty], \tag{1.2.5}$$

şi în cazul $t_\Lambda = \infty$ *definim*

$$B_\infty = \begin{cases} -x, & t_\infty = 0 \\ B_{t_\infty}, & t_\infty > 0 \end{cases}, \tag{1.2.6}$$

unde $t_\infty = \inf\{s \geq 0 : \Lambda_s = \Lambda_\infty\}$ *reprezintă ultimul punct de creştere al funcţionalei* Λ*.*

Demonstraţie. Fie X o soluţie a ecuaţiei (1.2.1) şi să notăm cu $(\mathscr{F}_s)_{s\geq 0}$ filtraţia în raport cu care X şi B sunt adaptate.

Să observăm că pentru $t \geq 0$ arbitrar fixat, $t_\Lambda = \inf\{s \geq t : \Lambda_s > \Lambda_t\} \in [t, \infty]$ este un timp de oprire în raport cu filtraţia $\mathscr{F}_s$, deoarece

$$\{t_\Lambda < u\} = \begin{cases} \varnothing, & u \leq t \\ \{\Lambda_t < \Lambda_u\}, & t < u \end{cases} \in \mathscr{F}_u, \qquad u \geq 0.$$

UNIUNEA EUROPEANĂ MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI EGALITĂŢII DE ŞANSE AMPOSDRU FONDUL SOCIAL EUROPEAN POS DRU 2007-2013 INSTRUMENTE STRUCTURALE 2007-2013 MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI OIPOSDRU INSTITUTUL NAŢIONAL DE CERCETĂRI ECONOMICE "COSTIN C. KIRIŢESCU"

Pentru $s \geq t$, $t_\Lambda \wedge s$ este un timp de oprire mărginit, şi folosind ecuaţia (1.2.1) obţinem

$$X_{t_\Lambda \wedge s} - X_t = \int_t^{t_\Lambda \wedge s} \sigma(X_u)\, dB_u = B_{t_\Lambda \wedge s} - B_t + \int_t^{t_\Lambda \wedge s} 1_{\{0\}}(X_u)\, dB_u. \tag{1.2.7}$$

Termenul corespunzător integralei stochastice din mebrul drept este nul. Pentru a arăta aceasta, observăm că

$$\int_t^{t_\Lambda \wedge s} 1_{\{0\}}(X_u)\, dB_u = \int_0^\infty 1_{[t, t_\Lambda \wedge s]}(u) 1_{\{0\}}(X_u)\, dB_u, \tag{1.2.8}$$

că integrandul din membrul drept este un proces adaptat în raport cu filtraţia $\mathscr{F}_s$, şi

$$E \int_0^\infty \left(1_{[t, t_\Lambda \wedge s]}(u) 1_{\{0\}}(X_u)\right)^2 du = E \int_t^{t_\Lambda \wedge s} 1_{\{0\}}(X_u) du \leq s - t < \infty.$$

Considerând şirul $f^{(n)} \equiv 0$ $(n \geq 1)$ de procese stochastice identic nule, cum $\Lambda_{t_\Lambda} = \Lambda_t$ conform definiţiei timpului de oprire t_Λ, obţinem

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} E \int_0^\infty \left(f_u^{(n)} - 1_{[t, t_\Lambda \wedge s]}(u) 1_{\{0\}}(X_u)\right)^2 du = E\left(\Lambda_{t_\Lambda \wedge s} - \Lambda_t\right) \leq 0,$$

şi deci $f^{(n)}$ este un şir de aproximare ce poate fi folosit pentru a defini integrala stochastică din (1.2.8). Cum $\int_0^\infty f_u^{(n)} dB_u = 0$ pentru orice $n \geq 1$, rezultă că $\int_t^{t_\Lambda \wedge s} 1_{\{0\}}(X_u)\, dB_u = 0$, încheiând demonstraţia.

Din (1.2.7) rezultă că

$$X_{t_\Lambda \wedge s} - X_t = B_{t_\Lambda \wedge s} - B_t, \qquad \text{a.s. for any } s \geq t, \tag{1.2.9}$$

şi distingem următoarele cazuri.

i) Pe mulţimea $\{t_\Lambda < \infty\}$, trecând la limită cu $s \to \infty$ îm egalitatea anterioară şi folosind continuitatea proceselor X şi B, obţinem $X_{t_\Lambda} - X_t = B_{t_\Lambda} - B_t$. Cum t_Λ este prin definiţie un punct de creştere a funcţionalei Λ, rezultă că $X_{t_\Lambda} = 0$, şi obţinem $X_t = B_t - B_{t_\Lambda}$, care încheie demonstraţia în acest caz.

ii) Pe mulţimea $\{t_\Lambda = \infty\}$, egalitatea (1.2.9) devine $X_s - X_t = B_s - B_t$ pentru orice $s \geq t$, care arată că $X_\cdot - X_t - (B_\cdot - B_t)$ este un proces identic zero pe intervalul $[t, \infty)$.

Cum $\{s_\Lambda = \infty\} \subset \{t_\Lambda = \infty\}$ pentru orice $s \leq t$, un argument similar (cu s în loc de t) arată că procesul $X_\cdot - X_t - (B_\cdot - B_t)$ este de asemenea identic zero pe orice interval $[s, \infty)$ cu $s_\Lambda = \infty$.

Nu este dificil de observat că $\inf\{s \in \mathbb{Q}^+ : s_\Lambda = \infty\} = t_\infty$, şi folosind din nou continuitatea proceselor X şi B rezultă că $X_{t_\infty} - X_t - (B_{t_\infty} - B_t) = 0$ pe mulţimea $\{t_\infty < \infty\} \subset \{t_\Lambda = \infty\}$.

Dacă $t_\infty = 0$, atunci $X_{t_\infty} = X_0 = x$ şi $B_{t_\infty} = B_0 = 0$, şi relaţia anterioară devine $X_t = B_t + x$, care coincide cu (1.2.4) datorită convenţiei $B_{t_\Lambda} = B_\infty := -x$.

Dacă $t_\infty > 0$, din definiţia lui t_∞ rezultă că $X_{t_\infty} = 0$, şi deci obţinem $X_t = B_t - B_{t_\infty}$, care coincide cu (1.2.4) datorită convenţiei $B_{t_\Lambda} = B_\infty := B_{t_\infty}$, încheiând astfel demonstraţia teoremei.

□

Observaţia 1.2.4. *Reprezentarea (1.2.4) a soluţiei ecuaţiei (1.2.1) dată în teorema anterioară este diferită de cea clasică, datorată lui Engelbert şi Schmidt, care foloseşte noţiunea de time delay (a se vedea [EnSc85], Definiţia 4.1 şi Teorema 5.5). Pentru a observa aceasta, prezentăm în continuare această reprezentare clasică a soluţiei.*

Să observăm că orice soluţie a ecuaţiei (1.2.1) este o martingală continuă cu variaţie pătratică dată de

$$A_t = \int_0^t \sigma(X_s)\,ds = t - \int_0^t 1_{\{0\}}(X_s)\,ds = t - \Lambda_t,$$

unde

$$\Lambda_t = \int_0^t 1_{\{0\}}(X_s)\,ds$$

reprezintă măsura Lebesgue a timpului petrecut de X în origine.

dacă $\Lambda_t \not\equiv 0$, atunci inversa continuă la dreapta $\alpha_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}$ a procesului nedescrescător A_t poate avea salturi. Observând însă că

$$t \wedge A_\infty - s \wedge A_\infty = A_{\alpha_t} - A_{\alpha_s} = \int_{\alpha_s}^{\alpha_t} \sigma(X_u)\,du, \qquad 0 \leq s \leq t, \tag{1.2.10}$$

obţinem

$$\lim_{s \nearrow t} \int_{\alpha_s}^{\alpha_t} \sigma(X_u)\,du = 0, \qquad t > 0, \tag{1.2.11}$$

şi folosind continuitatea procesului X_t rezultă că procesul $(X_{\alpha_t})_{t \geq 0}$ este continuu în $t \geq 0$.

Conform teoremei Lévy de caracterizare a mişcării Browniene, rezultă că X_{α_t} este o mişcare Browniană 1-dimensională $(\widetilde{B}_t)_{t \geq 0}$ (posibil oprită) în raport cu filtraţia $\widetilde{\mathscr{F}}_{\alpha_t}$, cu $\widetilde{B}_0 = x$, şi deci

$$X_t = \widetilde{B}_{A_t}, \qquad t \geq 0. \tag{1.2.12}$$

O soluţie arbitrară a ecuaţiei (1.2.1) este deci o mişcare Browniană 1*-dimensională având schimbarea de timp* A_t*. În cazul particular* $x = 0$*, soluţiile* $X_t \equiv 0$ *şi* $X_t \equiv B_t$ *corespund alegerilor* $A_t \equiv 0$*, respectiv* $A_t \equiv t$*.*

În general, mişcarea Browniană $\widetilde{B}_t$ *este definită pe o extensie standard* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{P})$ *a spaţiului de probabilitate* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*. Este remarcabil faptul că în reprezentarea (1.2.4) din teorema anterioară am obţinut o descriere explicită a soluţiei* $X_t = \widetilde{B}_{A_t}$ *în funcţie de mişcarea Browniană* B_t*, diferită de reprezentarea clasică (1.2.12) datorată lui Engelbert şi Schmidt.*

Observaţia 1.2.5. *Să observăm că dacă în particular soluţia* X_t *a ecuaţiei (1.2.1) petrece timp zero în origine, atunci* $\Lambda_t \equiv 0$ *şi* $t_\Lambda \equiv \infty$ *în notaţia teoremei anterioare, şi deci reprezentarea (1.2.4) din această teoremă devine în acest caz*

$$X_t = B_t - B_\infty = x + B_t, \qquad t \geq 0,$$

care demonstrează unicitatea traiectorială a soluţiilor ecuaţiei (1.2.1) care petrec timp zero în origine.

Observaţia anterioară conduce la următoarea.

Consecinţa 1.2.6. *Unicitatea traiectorială are loc pentru soluţiile ecuaţiei difereniale stochastice (1.2.1) care petrec timp zero în origine. Mai mult, o soluţie tare este dată explicit de* $X_t = x + B_t$*,* $t \geq 0$*.*

Demonstraţie. Rămâne numai de verificat că $X_t = x + B_t$ este o soluţie tare a ecuaţiei (1.2.1). Aceasta rezultă folosind aceleaşi argumente ca în demonstraţia teoremei anterioare. □

Observaţia 1.2.7. *Considerăm ecuaţia stochastică degenerată*

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha \, dB_s, \qquad t \geq 0, \tag{1.2.13}$$

unde B_t *este o mişcare Browniană* 1*-dimensională cu* $B_0 = 0$*.*

Conform unui rezultat clasic datorat lui Yamada şi Watanabe ([YaWa71a]), unicitatea traiectorială are loc pentru ecuaţia (1.2.13) dacă şi numai dacă $\alpha \in [1/2, \infty)$*. Extinzând acest rezultat, în [BaBuCh07] autorii au arătat că unicitatea traiectorială are loc şi în cazul* $\alpha \in$

$(0,1/2)$ *dacă mulţimea soluţiilor se restrânge la clasa funcţiilor care pretrec timp zero în* 0, *şi au arătat de asemenea existenţa unei soluţii tari în acest caz.*

Observând că pentru $\alpha \searrow 0$ *avem* $\sigma_\alpha(x) = |x|^\alpha \to 1_{\mathbb{R}-\{0\}}(x) = \sigma(x)$, *Consecinţa 1.2.6 de mai sus arată că acest rezultat este de asemenea valabil şi în cazul limită* $\alpha = 0$.

1.2.2 O ecuaţie diferenţială stochastică degenerată

Considerăm ecuaţia diferenţială stochastică

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \int_0^t b(X_s)\, ds, \qquad t \geq 0, \tag{1.2.14}$$

unde B_t este o mişcare Browniană 1-dimensională cu $B_0 = 0$ şi $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii măsurabile date.

Una din problemele fundamentale în studiul proceselor stochastice este de a determina condiţii necesare şi/sau suficiente asupra funcţiilor σ şi b care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei (1.2.14).

Teorema obţinută de Le Gall în [Ga83] (Teorema 1.1.9) este probabil cel mai general rezultat privind condiţiile suficiente care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei stochastice diferenţiale (1.2.14), şi conţine ca şi cazuri particulare rezultate obţinute anterior de alţi autori. Observăm însă că, condiţia (A) din această teoremă implică faptul că σ este o funcţie continuă, iar condiţia (B) implică faptul că σ are cel mult o mulţime numărabilă de discontinuităţi, dar aceasta din urmă condiţie poate fi folosită doar dacă σ este mărginită inferior de o constantă strict pozitivă. Urmează aşadar că dacă σ are o mulţime ne-numărabilă de discontinuităţi sau σ nu este mărginită inferior de o constantă strict pozitivă, atunci teorema lui Le Gall nu se poate aplica ecuaţiei (1.2.14), şi este deci posibil ca această ecuaţie să nu aibă soluţie, dau dacă ecuaţia admite soluţie, este posibil ca aceasta nu este unică.

În încercarea de a înţelege mai bine condiţiile ce determină existenţa şi unicitatea tare a soluţiei ecuaţiilor diferenţiale, am studiat mai îndeaproape cazul unei ecuaţii diferenţiale stochastice degenerate clasice (în care funcţia de difuzie σ este discontinuă şi nu este mărginită inferior de o constantă strict pozitivă), pentru care existenţa şi unicitatea tare nu este asigurată, dar pentru care putem descrie în mod explicit mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei.

Considerăm ecuaţia diferenţială stochastică

$$X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s, \qquad t \geq 0, \tag{1.2.15}$$

unde $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ este funcţia semn.

Observaţia 1.2.8. *Aşa cum s-a arătat în Secţiunea 1.1.1, acesta este un exemplu clasic de ecuaţie diferenţială stochastică, atribuit lui Hiroshi Tanaka, şi considerat ulterior şi de alţi autori (a se vedea spre exemplu [KaSh91] sau [Zv74]).*

În Exemplul 1.1.6 s-a arătat că are loc existenţa şi unicitatea slabă pentru ecuaţia (1.2.15), dar că această ecuaţie nu admite o soluţie tare (nu are loc existenţa tare pentru această ecuaţie). În această secţiune vom examina mai îndeaproape această ecuaţie diferenţială stochastică, şi vom arăta că este posibil să descriem explicit mulţimea tuturor soluţiilor slabe, explicând astfel lipsa existenţei unei soluţii tari a acestei ecuaţii.

Pentru a putea prezenta rezultatul central, introducem mai întâi următoarea.

Definiţia 1.2.9 ([PaPa11b]). *Dat fiind un proces continuu ne-negativ $(Y_t)_{t\geq 0}$, numim alegere de semn ("sign choice" în Engleză) pentru Y_t un proces $(U_t)_{t\geq 0}$ ce ia valori ± 1, astfel încât $(U_t Y_t)_{t\geq 0}$ este un proces continuu.*

Exemplul 1.2.10. *Putem construi o alegere de semn pentru un proces dat după cum urmează. Pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ fixat, considerăm procesul V_t ce ia valori ± 1 cu probabilităţi $P(V_t = 1) = 1 - P(V_t = -1) = p \in [0,1]$, oricare ar fi $t \geq 0$. Definim procesul U_t prin*

$$U_t = \begin{cases} V_t, & \text{dacă } Y_t = 0 \\ V_s, & \text{dacă } V_t \neq 0 \end{cases}, \tag{1.2.16}$$

unde $s = \sup\{u \leq t : Y_u = 0\}$ este ultima vizită a procesului Y în origine înainte de timpul $t \geq 0$. Este uşor de observat că procesul $(U_t)_{t\geq 0}$ este o alegere de semn pentru procesul $(Y_t)_{t\geq 0}$. Dacă în plus procesele Y şi V sunt independente, alegerea de semn U_t este independentă de Y_t.

Cu această pregătire, putem enunţa acum rezultatul central, după cum urmează.

Teorema 1.2.11 ([PaPa11b]). *Oricare ar fi mişcarea Browniană B_t cu $B_0 = 0$, $\left(U_tY_t, B_t, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ este o soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.15), unde Y_t mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t, U_t este o alegere de semn pentru Y_t ce ia valorile ± 1 cu probabilităţi egale, şi $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ filtraţia generată de B_t şi U_t ce verifică condiţiile uzuale.*

Reciproc, orice soluţie slabă $\left(X_t, B_t, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ a ecuaţiei (1.2.15) admite reprezentarea $X_t = U_tY_t$, în care procesele U_t şi Y_t sunt definite ca mai sus.

În particular, orice soluţie a ecuaţiei (1.2.15) este unică până la o alegere de semn, adică dacă X_t^1 şi X_t^2 sunt verifică (1.2.15), atunci are loc

$$P\left(\left|X_t^1\right| = \left|X_t^2\right| \text{ oricare ar fi } t \geq 0\right) = 1.$$

Demonstraţie. Dacă X_t verifică (1.2.15), din formula Tanaka-Itô aplicată funcţieie $f(x) = |x|$ şi procesului X_t obţinem

$$|X_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dX_s + L_t^0(X) = B_t + L_t^0(X), \tag{1.2.17}$$

unde $L_t^0(X) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(X_s)\, d\langle X\rangle_s$ reprezintă timpul local semimartingal (simetric) petrecut de procesul X în origine (conform [ReYo94]).

Considerăm procesul $Y_t = |X_t|$ şi observăm că $1_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(Y_s) = 1_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(|X_s|) = 1_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(X_s)$ oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi $t \geq 0$. Conform teoremei Lévy de caracterizare a mişcării Browniene (a se vedea spre exemplu [KaSh91], Teorema 3.16) rezultă că procesul X_t este o schimbare de timp a unei mişcări Browniene, având variaţie pătratică

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}^2(X_s)\, ds = \int_0^t 1 ds = t,$$

şi deci în particular $d\langle X\rangle_t$ este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue.

Rezultă că procesul X_t petrece timp Lebesgue zero în origine, şi deci obţinem

$$\begin{aligned} L_t^0(Y) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(Y_s)\, d\langle Y\rangle_s \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(Y_s)\, ds \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(X_s)\, d\langle X\rangle_s \\ &= L_t^0(X). \end{aligned}$$

Din (1.2.17) rezultă că procesul $Y_t = |X_t|$ verifică ecuaţia diferenţială stochastică

$$Y_t = B_t + L_t^0(Y), \qquad t \geq 0,$$

şi deci Y_t este mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t. În particular, procesul $Y_t = |X_t|$ este adaptat în raport cu filtraţia $\mathscr{F}^B$ a mişcării Browniene B_t şi este unic în sens traiectorial.

Demonstrăm acum existenţa unei soluţii slabe a ecuaţiei (1.2.15). Pentru o mişcare Browniană B_t fixată, definim Y_t ca fiind mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t, si definim U_t ca fiind o alegere de semn pentru Y_t.

Definim procesul $X_t = U_t Y_t$, $t \geq 0$, şi arătăm că $\left(X_t, B_t, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ este o soluţie slabă pentru ecuaţia (1.2.15), unde $\mathscr{F}_t$ este σ-algebra generată de B_s şi U_s, $0 \leq s \leq t$, ce verifică condiţiile uzuale, adică completarea σ-algebrei $\sigma(B_s, U_s : 0 \leq s \leq t)$ ce conţine mulţimile P-nule din $\mathscr{F}_\infty^B \cup \mathscr{F}_\infty^U$.

Observăm că datorită construcţiei avem $\operatorname{sgn}(X_s) = U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s) + 1_{\{0\}}(X_s)$, şi deci $\operatorname{sgn}(X_s) = U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s) + 1_{\{0\}}(X_s)$ oricare ar fi $s \geq 0$. Cum procesele Y (şi deci X) petrec timp Lebesgue zero în origine, aproape sigur are loc relaţia

$$\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s = \int_0^t U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\, dB_s$$

oricare ar fi $t \geq 0$.

Cum Y_t este mişcarea Browniană reflectată construită din mişcarea Browniană B_t, obţinem în continuare

$$\begin{aligned}\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s &= \int_0^t U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\, dY_s - \int_0^t U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\, dL_s^0(Y) \\ &= \int_0^t U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\, dY_s,\end{aligned}$$

ultima egalitate rezultând din faptul că timpul local $L_s^0(Y)$ al lui Y în origine creşte numai când Y_s (şi deci X_s) este în origine.

Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, considerăm timpii de oprire τ_n şi σ_n definiţi recursiv prin $\tau_0 = 0$ şi

$$\sigma_n = \inf\{s \geq \tau_{n-1} : Y_s = \varepsilon\} \quad \text{şi} \quad \tau_n = \{s \geq \sigma_n : Y_s = 0\}, \qquad n \geq 1.$$

Considerând $D_t(\varepsilon)=\sup\{i\geq 0:\tau_i<\infty\}$ numărul de traversări descrescătoare ale intervalului $[0,\varepsilon]$ de către procesul Y_t, obţinem

$$\begin{aligned}
\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\,dB_s &= \int_0^t U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s\\
&= \sum_{i\geq 1}\int_{\sigma_i\wedge t}^{\tau_i\wedge t} U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s+\sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t} U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s\\
&= \sum_{i\geq 1} U_{\sigma_i\wedge t}\left(Y_{\tau_i\wedge t}-Y_{\sigma_i\wedge t}\right)+\sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t} U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s\\
&= -\varepsilon\sum_{i=1}^{D_t(\varepsilon)} U_{\sigma_i}+U_t\left(Y_t-\varepsilon\right)\sum_{i\geq 1}1_{[\sigma_i,\tau_i)}(t)+\sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t} U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s,
\end{aligned}$$

şi deci

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s-U_tY_t &= -\varepsilon\sum_{i=1}^{D_t(\varepsilon)} U_{\sigma_i}+U_tY_t\sum_{i\geq 1}1_{[\tau_{i-1},\sigma_i)}(t) \qquad (1.2.18)\\
&\quad -\varepsilon U_t\sum_{i\geq 1}1_{[\sigma_i,\tau_i)}(t)+\sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t} U_s 1_{R^*}(X_s)\,dY_s.
\end{aligned}$$

Pentru a demonstra că X_t verifică ecuaţia (1.2.15), vom arăta că termenii din membrul drept al egalităţii anterioare converg în L^2 la zero pentru $\varepsilon\searrow 0$.

Din construcţie rezultă că $(U_{\sigma_i})_{i\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, cu medie $EU_{\sigma_i}=0$ şi dispersie $EU_{\sigma_i}^2=1$. Folosind a doua identitate a lui Wald (a se vedea spre exemplu [Du96], pag. 182) obţinem

$$E\left(\varepsilon\sum_{i=1}^{D_t(\varepsilon)} U_{\sigma_i}\right)^2=\varepsilon^2 ED_t(\varepsilon)\,EU_{\sigma_1}^2=\varepsilon^2 ED_t(\varepsilon)\to 0$$

pentru $\varepsilon\searrow 0$, deoarece conform caracterizării Lévy a timpului local avem $\varepsilon D_t(\varepsilon)\to L_t^0(Y)$ aproape sigur şi de asemenea în L^2 (a se vedea spre exemplu [KaSh91], pag. 416). Aceasta demonstrează convergenţa aproape sigură la zero pentru $\varepsilon\searrow 0$ a primului termen din membrul drept al ecuaţiei (1.2.18).

În continuare, să observăm că dacă $t\in[\tau_{i-1},\sigma_i)$ pentru $i\geq 1$, conform construcţie timpilor de oprire τ_{i-1} şi σ_i avem $Y_t\in[0,\varepsilon)$, şi deci obţinem

$$E\left(U_tY_t\sum_{i\geq 1}1_{[\tau_{i-1},\sigma_i)}(t)\right)^2\leq \varepsilon^2 E\sum_{i\geq 1}1_{[\tau_{i-1},\sigma_i)}(t)\leq \varepsilon^2 t\to 0$$

pentru $\varepsilon \searrow 0$. Aceasta demonstrează convergenţa aproape sigură la zero pentru $\varepsilon \searrow 0$ al celui de-al doilea termen din membrul drept al ecuaţiei (1.2.18). Demonstraţia fiind similară pentru cel de-al treilea termen, o omitem.

Pentru a demonstra că şi ultimul termen din membrul drept al ecuaţiei (1.2.18) converge la yero pentru $\varepsilon \searrow 0$, folosim din nou a doua identitate a lui Wald şi faptul că $\sigma_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ sunt variabile aleatoare independente (a se vedea spre exemplu [KaSh91], Teorema 2.6.16) cu medie $E(\sigma_1 - \tau_0) = E\sigma_1 = \varepsilon^2$, şi obţinem

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t} U_s 1_{R^*}(X_s)\,dY_s\right)^2 &\leq E\int_0^t \sum_{i\geq 1} 1_{[\tau_{i-1},\sigma_i]}(s)\,d\langle Y\rangle_s \\
&\leq E\sum_{i=1}^{D_t(\varepsilon)+1}(\sigma_i - \tau_{i-1}) \\
&= E(\sigma_1 - \tau_0)\,E(D_t(\varepsilon)+1) \\
&= \varepsilon^2 E(D_t(\varepsilon)+1) \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

şi deci ultimul termen din membrul drept al ecuaţiei (1.2.18) converge de asemenea la zero pentru $\varepsilon \searrow 0$.

Am arătat că toţi termenii din membrul drept al ecuaţiei (1.2.18) converg la zero pentru $\varepsilon \searrow 0$. Trecând deci la limită cu $\varepsilon \searrow 0$ în (1.2.18) obţinem că $\int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s = U_tY_t = X_t$, încheiând prima parte a demonstraţiei.

Pentru a demonstra a doua concluzie a teoremei, să observăm că din demonstraţia anterioară, o soluţie (slabă) X_t admite reprezentarea $X_t = U_t|X_t| = U_tY_t$, unde Y_t este mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t şi U_t reprezintă o alegere de semn pentru Y_t. Să observăm că dacă $X_t = 0$, în ecuaţia anterioară putem alege $U_t = 1$ sau $U_t = -1$, şi deci $U_t = \pm 1$ oricare ar fi $t \geq 0$.

Cum valorile lui U_t se schimbă numai când $|X_t| = Y_t = 0$, U_t este o alegere de semn pentru Y_t, şi deci rămâne de arătat că $P(U_t = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Din demonstraţia anterioară rezultă că X_t este o mişcare Browniană cu $X_0 = 0$, şi deci $P(U_t = 1) = P(X_t \geq 0) = \frac{1}{2}$ oricare ar fi $t \geq 0$, încheiând astfel demonstraţia. $\square$

Încheiem această secţiune cu următoarea observaţie ce explică lipsa existenţei unei soluţii tari a ecuaţiei (1.2.15).

Observaţia 1.2.12. *Teorema anterioară explică lipsa existenţei (şi unicităţii) unei soluţii tari a ecuaţiei (1.2.15): o soluţie slabă a acestei ecuaţii este de forma $X_t = U_t Y_t$, unde procesul Y_t este determinat de B_t (este mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t), dar alegerea semnului U_t nu este în mod necesar determinată de mişcarea Browniană B_t. Aceasta implică faptul că soluţia nu este adaptată în raport cu filtraţia $\mathscr{F}^B$, adică lipsa unei soluţii tari a ecuaţiei (1.2.15). Alegeri de semn diferite U_t produc soluţii diferite (cu toate că ele coincid în valoare absolută), şi aceasta determină lipsa unicităţii soluţiei ecuaţiei (1.2.15).*

1.2.3 φ-soluţii tari ale ecuaţiilor diferenţiale stochastice

Introducere

Continuând studiul problemelor de existenţă şi unicitate prezentate în secţiunile anteroare, în lucrarea [Pa13b], autorul a obţinut rezultate generale privind existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor stochastice cu singularităţi de forma

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s + \int_0^t b(X_s)\,ds, \qquad t \geq 0, \tag{1.2.19}$$

rezultate pe care le vom prezenta în continuare.

Punctul de plecare în acest studiu este că rezultatele clasice de existenţă şi unicitate din domeniu sunt aplicabile numai dacă coeficienţii σ şi b ai ecuaţiei sunt netezi (spre exemplu dacă σ este o funcţie Lipschitz continuă cu exponent $\frac{1}{2}$ şi b este o funcţie Lipschitz continuă, rezultat datorat lui Yamada şi Watanabe, [YaWa71b]), sau dacă σ şi b sunt funcţii măsurabile mărginite, σ este o funcţie netedă şi $|\sigma|$ este mărginită inferior de o constantă strict pozitivă (Teorema 1.1.9, [Ga83]). Rezultatul obţinut de Le Gall (Teorema 1.1.9) se poate aplica şi în cazul în care funcţia σ are discontinuităţi, dar în acest caz este necesar ca σ (în loc de $|\sigma|$) să fie mărginită inferior de o constantă strict pozitivă. Aşa cum se arată în [Ga83], aceste condiţii sunt aproape exacte, deoarece relaxând oricare dintre ele se pot construi ecuaţii diferenţaile stochastice pentru care unicitatea nu are loc (a se vedea spre exemplu [Ba82], sau Exemplul 1.1.6).

În această secţiune vom studia cazul ecuaţiilor diferenţiale fără drift, pentru care coeficientul de difuzie σ verifică condiţia lui Le Gall (1.1.10) şi $|\sigma|$ este mărginită inferior de o constantă strict pozitivă. Ca un prim pas în soluţionarea problemei, vom considera cazul particular în care funcţia de difuzie σ are o singură discontinuitate în origine, σ este o funcţie impară pe $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (sau o funcţie în scară), şi verifică condiţia $x\sigma(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Aşa cum vom arăta în continuare, cu toate că este posibil ca în aceste ipoteze ecuaţia diferenţială stochastică corespunzătoare să nu aibă soluţie tare, sau aceasta să nu fie unică, este posibil să descriem explicit mulţimea tuturor soluţiilor slabe ale ecuaţiei.

Soluţia slabă generică este descrisă în termenii unei *alegeri de semn* (*sign choice* în Engleză), în sensul Definiţiilor 1.2.16 şi 1.2.17, şi este unic determinată de o astfel de alegere. Aceasta arată că, chiar dacă nu putem determina în mod unic "ieşirea" X_t pentru o "intrare" B_t din ecuaţia (1.2.19), poate fi posibil să determinăm în mod unic o anumită funcţie $\varphi(X_t)$ ce depinde de X_t.

Aceasta justifică introducerea noţiunii de φ-*soluţie tare* (φ-*strong solution* în Engleză) a unei ecuaţii diferenţiale stochastice (a se vedea Definiţia 1.2.13), noţiune care aparţine autorului şi care interpolează între noţiunile clasice de soluţie slabă şi soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale stochastice (în cazul particular în care φ este o funcţien injectivă, noţiunea de φ-soluţie tare coincide cu noţiunea clasică de soluţie tare).

Preliminarii

Aşa cum s-a arătat în Exemplul 1.1.6, ecuaţia

$$X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s, \qquad t \geq 0. \tag{1.2.20}$$

nu admite soluţie tare, dar admite soluţie slabă, şi aceasta este unică în sensul distribuţiei. De asemenea, s-a arătat că dacă X_t este o soluţie slabă a acestei ecuaţii, atunci procesul $|X_t|$ este unic determinat (este mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t)

Deci, cu toate că procesul X_t nu este unic determinat de B_t, valoarea sa absolută $|X_t|$ este unic determinată. Aceasta a motivat autorul la introducerea următoarei definiţii.

Definiţia 1.2.13 ([Pa13b]). *Considerăm $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă. O φ-soluţie tare a ecuaţiei diferenţiale satochastice (1.2.19) pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ în raport cu o mişcare Browniană B_t este un proces continuu X_t pentru care (1.2.19) are loc aproape sigur, şi astfel încât $\varphi(X_t)$ este un proces adaptat în raport cu filtraţia augmentată generată de B_t şi $P\left(\int_0^t (|b(X_s)| + \sigma^2(X_s))ds < \infty\right) = 1$ are loc oricare ar fi $t \geq 0$.*

Spunem că φ-unicitatea tare are loc pentru (1.2.19) dacă oricare ar fi X_t şi $\widetilde{X}_t$ două φ-soluţii tari relative la aceeaşi mişcare Browniană B_t, atunci

$$P\left(\varphi(X_t) = \varphi(\widetilde{X}_t), \quad t \geq 0\right) = 1.$$

Să observăm că în definiţia anterioară procesul X_t nu este neapărat adaptat în raport cu filtraţia mişcării Browniene B_t. Dacă X_t este adaptat în raport cu σ-algebra generată de $\sigma(B_s : s \leq t) \cup \mathscr{G}_t$, atunci σ-algebra $\mathscr{G}_t$ poate fi privită ca sursa suplimentară de informaţie necesară pentru a determina soluţia ecuaţiei (1.2.19).

Observaţia 1.2.14. *Este uşor de observat că definiţiile anterioare sunt o extensie naturală a noţiunilor clasice de soluţie tare şi unicitate tare, în sensul că dacă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie injectivă, atunci noţiunea de φ-soluţie tare coincide cu noţiunea de soluţie tare, şi φ-unicitatea tare coincide cu unicitatea tare.*

Observaţia 1.2.15. *Exemplul lui Tanaka (1.1.6) arată că, chiar dacă unicitatea şi existenţa tare nu are loc pentru (1.2.20), $|x|$-unicitatea are loc, şi vom arăta demonstra existenţa unei $|x|$-soluţii tari.*

Vom considera mai general ecuaţia diferenţială stochastică

$$X_t = \int_0^t \sigma_{a,b}(X_s)\,dB_s, \qquad t \geq 0, \tag{1.2.21}$$

unde funcţia $\sigma_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de

$$\sigma_{a,b}(x) = \begin{cases} a, & x \geq 0 \\ b, & x < 0 \end{cases}, \tag{1.2.22}$$

iar $a, b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ sunt constante arbitrare.

Introducem mai întâi noţiunea de *alegere de semn* pentru un proces nenegativ, după cum urmează.

Definiţia 1.2.16 ([Pa13b]). *dat fiind un proces nenegativ $(Y_t)_{t\geq 0}$, o* alegere de semn *pentru Y_t este un proces $(U_t)_{t\geq 0}$ ce ia valorile ± 1, astfel încât $(U_tY_t)_{t\geq 0}$ este un proces continuu.*

Alegerile $U_t \equiv 1$, respectiv $U_t \equiv -1$, corespund proceselor $U_tY_t = Y_t$, respectiv procesului reflectat $-Y_t$. Alegerile interesante în definiţia anterioară sunt în general cele pentru care U_t ia ambele valori ± 1 cu probabilităţi strict pozitive, astfel încât procesul U_tY_t este o combinaţie între procesul original Y_t şi procesul reflectat $-Y_t$. Între aceste alegeri, o alegere importantă este alegerea de semn i.i.d (*i.i.d. sign choice* în Engleză), ce corespunde noţiunii intuitive de aruncare a unei monede pentru a decide semnul U_t al unei excursii a lui Y ce conţine pe t. Pentru a face precisă această definiţie intuitivă, introducem mai întâi câteva notaţii şi definiţii pregătitoare

Dat fiind un proces continuu nenegativ $(Y_t)_{t\geq 0}$ cu $Y_0 = 0$, definit pe un spaţiu filtrat $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$, considerăm mulţimea zerourilor lui $Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, definită prin

$$\mathscr{Z} = \mathscr{Z}(\omega) = \{t \geq 0 : Y_t(\omega) = 0\},$$

iar pentru a simplifica notaţia, în continuare vom renunţa la dependenţa de $\omega \in \Omega$ şi vom scrie $\mathscr{Z}$ în loc de $\mathscr{Z}(\omega)$.

Cum Y este un proces continuu, $\mathscr{Z}^c = (0, \infty) - \mathscr{Z}$ este o mulţime deschisă, şi deci este formată dintr-o reuniune numărabilă (posibil finită, sau chiar vidă) de intervale deschise, numite *intervale de excursie* a lui Y în afara lui 0. Notând prin $\mathscr{I}$ mulţimea tuturor acestor intervale de excursie, avem $\mathscr{Z}^c = \cup_{I\in\mathscr{I}} I$.

În continuare, vom ordona intervalele de excursie din $\mathscr{I}$ după lungimea şi poziţia lor, după cum urmează. Considerăm $(\mathscr{F}_t)$-timpii de oprire definiţi recursiv prin $\xi_0 = 0$ şi

$$\xi_{i+1} = \inf\{t \geq \xi_i + 1 : Y_t = 0\}, \qquad i \geq 1, \tag{1.2.23}$$

considerând ca de obicei $\inf \varnothing = \infty$. Să observăm că este posibil ca $\xi_{i+1} = \infty$, şi în acest caz avem $\xi_j = \infty$ oricare ar fi $j \geq i+1$.

Considerăm mulţimile $\mathscr{I}_i = \{I \in \mathscr{I} : I \subset (\xi_{i-1}, \xi_i)\}$, $i \geq 1$, şi observăm că din definiţia timpilor de oprire ξ_i, $\{\mathscr{I}_i\}_{i\geq 1}$ formează o partiţie disjunctă a lui $\mathscr{I}$. Este posibil ca anumite mulţimi din această partiţie să fie vide: dacă $j = \min\{i : \xi_i = \infty\}$, atunci $\xi_k = \infty$ oricare ar fi $k \geq j$, şi deci $\mathscr{I}_k = \varnothing$ oricare ar fi $k > j$.

Pentru un interval de excursie $I = (a,b) \in \mathscr{I}$, vom nota lungimea intervalului I prin $|I| = b - a$, şi prin $I^l = a$ capătul stâng al intervalului I.

Introducem pe $\mathscr{I}$ relaţia de ordine $\preceq$ definind $I \preceq \widetilde{I}$ dacă $|I| > |\widetilde{I}|$, sau dacă $|I| = |\widetilde{I}|$ şi $I^l < \widetilde{I}^l$.

Nu este dificil de observat că $(\mathscr{I}, \preceq)$ este o mulţime total ordonată, şi se poate arăta de asemenea că $(\mathscr{I}_i, \preceq)$ este o mulţime bine ordonată, oricare ar fi $i \geq 1$ pentru care $\mathscr{I}_i \neq \varnothing$. Cum mulţimea $\mathscr{I}_i$ este o mulţime numărabilă, putem indexa elementele ei cu numere naturale astfel încât $\mathscr{I}_i = \{I_{i,j} : 1 \leq j \leq N(i)\}$ pentru un anumit $N(i) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, şi în plus

$$I_{i,1} \preceq \ldots \preceq I_{i,N(i)}. \tag{1.2.24}$$

Pentru a simplifica notaţia (dependenţa de $N(i)$), în cazul în care mulţimea $\mathscr{I}_i \neq \varnothing$ este finită vom considera $I_{i,j} = \varnothing$ pentru $j > N(i)$, şi extindem definiţia relaţiei de ordine definind $I \preceq \varnothing$ pentru orice interval $I \in \mathscr{I}$. De asemenea, în cazul $\mathscr{I}_i = \varnothing$ pentru un anumit $i \geq 1$, definim $I_{i,j} = \varnothing$ oricare ar fi $j \geq 1$.

Discuţia anterioară arată că pentru orice $\omega \in \Omega$ pute scrie în mod unic mulţimea $\mathscr{Z}^c(\omega)$ a complementarei mulţimii zerourilor lui $Y(\omega)$ ca o reuniune disjunctă de intervale de excursie

$$\mathscr{Z}^c(\omega) = \{t \geq 0 : Y_t > 0\} = \bigsqcup_{i,j\geq 1} I_{i,j}(\omega), \tag{1.2.25}$$

cu $I_{i,1}(\omega) \preceq I_{i,2}(\omega) \preceq \ldots$ oricare ar fi $i \geq 1$, şi $I^l_{i,j}(\omega) < I^l_{i',j'}(\omega)$ oricare ar fi $1 \leq i < i'$ şi $j, j' \geq 1$ pentru care $I_{i,j}(\omega), I_{i',j'}(\omega) \neq \varnothing$.

De asemenea, să observăm că ordonarea intervalelor de excursie Y_t construită mai sus induce o ordonare corespunzătoare a excursiilor procesului Y_t. Urmând referinţa clasică [ReYo94] (Chap. XII), definim *excursia lui Y ce conţine t* (excursion of Y straddling t, în Engleză) prin $e_t(u) = 1_{\{u \leq d_t - g_t\}} Y(g_t + u)$ dacă $d_t - g_t > 0$ şi δ în rest, unde $g_t = \inf\{s \leq t : Y_s = 0\}$ este ultima vizită a lui Y în origine înainte de timpul t, iar $d_t = \sup\{s > t : Y_s = 0\}$ este prima vizită a lui Y

în origine după timpul t. Construcţia anterioară arată că mulţimea E a excursiilor lui Y_t poate fi partiţionată în mulţimi disjuncte $E_i = \{e_{i,j} : j \geq 1\}$, $i \geq 1$, unde $e_{i,j}$ reprezintă excursia lui Y_t corespunzătoare intervalului de excursie $I_{i,j}$, adică $e_{i,j} = e_t$ pentru t ales astfel încât $(g_t, d_t) = I_{i,j}$. Definim $e_{i,j} \preceq e_{i',j'}$ dacă $I_{i,j} \preceq I_{i',j'}$, şi definim *lungimea* $R(e_{i,j})$ a excursiei $e_{i,j}$ ca fiind lungimea intervalului de excursie $I_{i,j}$ corespunzător, adică $R(e_{i,j}) = |I_{i,j}|$.

Cu această pregătire putem acum introduce noţiunea importantă de alegere de semn i.i.d.

Definiţia 1.2.17 ([Pa13b]). *Dat fiind un proces continuu nenegativ şi adaptat $(Y_t)_{t\geq 0}$ pe un spaţiu de probabilitate filtrat $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, o* alegere de semn i.i.d *(i.i.d. sign choice în Engleză) pentru $(Y_t)_{t\geq 0}$ este un proces adaptat $(U_t)_{t\geq 0}$ definit prin*

$$U_t(\omega) = \begin{cases} U_{i,j}(\omega), & t \in I_{i,j}(\omega) \\ 1, & t \in \mathscr{Z}(\omega) \end{cases}, \qquad t \geq 0,\ \omega \in \Omega, \tag{1.2.26}$$

unde $\mathscr{Z}(\omega)$ este mulţimea zerourilor lui $Y_\cdot(\omega)$, $(I_{i,j}(\omega))_{i,j\geq 1}$ sunt intervalele de excursie a lui $Y_t(\omega)$ orderonate ca mai sus, şi $(U_{i,j})_{i,j\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite pe $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ce iau valori ± 1, şi care sunt de asemenea independente de filtraţia $\mathscr{F}^Y$.

Să observăm că procesul U_t din definiţia de mai sus nu este în general adaptat în raport cu filtraţia $\mathscr{F}^Y$ a lui Y_t, ci în raport cu filtraţia sa naturală $\mathscr{F}^U$; spaţiul de probabilitate din definiţia anterioară este presupus suficient de larg pentru a putea acomoda procesul independente U_t, adică $\mathscr{F}_t^U \subset \mathscr{F}_t$, $t \geq 0$. De asemenea să observăm că o alegere de semn i.i.d. pentru un proces continuu nenegativ este un caz particular a unei alegeri de semn în sensul Definiţiei 1.2.16.

Exemplul 1.2.18. *Cel mai simplu şi de asemenea interesant exemplu de o alegere de semn i.i.d. U_t este în cazul în care procesul Y_t este mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ şi distribuţia variabilelor aleatoare $U_{i,j}$ este $P(U_{i,j} = \pm 1) = \frac{1}{2}$. În acest caz, din demonstraţia Teoremei 1.2.20 în cazul particular $a = -b = 1$, rezultă că procesul U_tY_t este o mişcare Browniană 1-dimensională. După cum se ştie, dată fiind o mişcare Browniană 1-dimensională B_t, valoarea sa absolută $|B_t|$ are distribuţia unei mişcări Browniene reflectate pe $[0,\infty)$. Rezultatul obţinut este o reciprocă a acestui fapt: alegerea de semn i.i.d. este instrumentul necesar pentru a reconstrui (în distribuţie, nu traiectorial) mişcarea Browniană din mişcarea Browniană reflectată.*

Rezultatul următor arată că în ipoteze suficient de generale, distribuţia unei alegeri de semn evaluate la un timp de oprire are aceeaşi distribuţie ca şi şirul de alegeri de semn.

Propoziţia 1.2.19 ([Pa13b])**.** *Dacă $(Y_t)_{t\geq 0}$ este un proces continuu nenegativ şi adaptat, U_t este o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t, şi τ este un $\left(\mathscr{F}_t^Y\right)$-timp de oprire aproape sigur finit, cu $P(Y_\tau = 0) = 0$, atunci variabila aleatoare U_τ este independentă de Y, şi are aceeaşi distribuţie ca şi variabilele aleatoare $U_{i,j}$ din definiţia lui U_t.*

Demonstraţie. Folosind notaţia din Definiţia 1.2.17, avem

$$\{U_\tau = 1\} = \{\tau \in \mathscr{Z}\} \bigsqcup \left(\bigsqcup_{i,j\geq 1} \{U_{i,j} = 1, \tau \in I_{i,j}\} \right). \tag{1.2.27}$$

Din definiţia (1.2.23) a $\left(\mathscr{F}_t^Y\right)$-timpilor de oprire ξ_i, nu este dificil de observat că evenimentul $\{\tau \in I_{i,j}\}$ aparţine σ-algebrei $\mathscr{F}_{\xi_i}$: pe mulţimea $\{\xi_i \leq t\}$, se "ştie" ordonarea intervalelor de excursie $\{I_{i,j}\}_{j\geq 1}$ din (ξ_{i-1}, ξ_i) la momentul t, şi deci $\{\tau \in I_{i,j}\} \cap \{\xi_i \leq t\} \in \mathscr{F}_t^Y$.

Cum $U_{i,j}$ sunt prin definiţie variabile aleatoare independente de $\mathscr{F}^Y$, şi $P(\tau \in \mathscr{Z}) = P(Y_\tau = 0) = 0$ din ipoteză, obţinem

$$\begin{aligned} P(U_\tau = 1) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} P(U_{i,j} = 1) P(\tau \in I_{i,j}) \\ &= P(U_{1,1} = 1) \sum_{i,j=1}^{\infty} P(\tau \in I_{i,j}) \\ &= P(U_{1,1} = 1) P(\tau < \infty, \tau \in \mathscr{Z}^c) \\ &= P(U_{1,1} = 1), \end{aligned}$$

şi deci U_τ are aceeaşi distribuţie ca şi şirul de variabile aleatoare $U_{i,j}$. O demonstraţie similară arată că variabila aleatoare U_τ este de asemenea independentă de $\mathscr{F}^Y$, încheiând demonstraţia. □

În cazul particular când Y_t este un proces continuu nenegativ pentru care $P(Y_t = 0) = 0$ oricare ar fi $t > 0$, considerând $\tau \equiv t > 0$ în propoziţia anterioară, rezultă că pentru orice $t > 0$ alegerea de semn i.i.d. U_t are aceeaşi distribuţie ca şi şirul de variabile aleatoare $U_{i,j}$ din Definiţia 1.2.17. Cum $P(U_{i,j} = 1) = 1 - P(U_{i,j}) = p$, vom spune că alegerea de semn i.i.d U_t pentru Y_t *ia valoarea* 1 *cu probabilitate* p.

Rezultate principale

Cu această pregătire putem demonstra următorul rezultat.

Teorema 1.2.20 ([Pa13b]). *Pentru orice $a>0>b$, are loc $\varphi_{a,b}$-unicitatea tare pentru (1.2.21), unde funcţia $\varphi_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită de*

$$\varphi_{a,b}(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}x, & x\geq 0\\ \frac{1}{b}x, & x<0\end{cases}. \tag{1.2.28}$$

Există o $\varphi_{a,b}$-soluţie tare (şi o soluţie slabă) a ecuaţiei diferenţiale stochastice (1.2.21), şi este dată de $\left(\sigma_{a,b}(U_t)Y_t, B_t, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}\right)$, unde Y_t este mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t, U_t este o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t ce ia valoarea 1 cu probabilitate $\frac{b}{b-a}$, iar $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ este filtraţia generată de B_t şi U_t ce verifică condiţiile uzuale.

Reciproc, orice soluţie slabă $\left(X_t, B_t, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ a ecuaţiei stochastice (1.2.21) are reprezentarea $X_t=\sigma_{a,b}(U_t)Y_t$, unde U_t şi Y_t sunt ca mai sus.

Demonstraţie. Dacă X_t verifică (1.2.21), variaţia sa pătratică este dată de

$$\langle X\rangle_t=\int_0^t \sigma_{a,b}^2(X_s)\,ds=\int_0^t \left(a^2 1_{[0,\infty)}(X_s)+b^2 1_{(-\infty,0)}(X_s)\right)ds.$$

În particular, aceasta arată că măsura $d\langle X\rangle_t$ este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue, şi din Consecinţa VI.I.6 din [ReYo94] rezultă că măsura Lebesgue a timpului petrecut de X_t în origine este zero. Din Consecinţa VI.1.9 din [ReYo94] şi din faptul că X_t este o martingală locală, rezultă că $L_t^0(X)=L_t^0(-X)$, unde $L_t^0(X)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[0,\varepsilon)}(X_s)\,d\langle X\rangle_s$ reprezintă timpul local semimartingal al lui X_t în origine.

Aplicând formula Tanaka-Itô funcţiei convexe $\varphi_{a,b}$ şi procesului X_t, obţinem

$$\begin{aligned}\varphi_{a,b}(X_t) &= \int_0^t \varphi_{a,b}'(X_s)\,dX_s+\frac{1}{2}\left(\varphi_{a,b}'(0+)-\varphi_{a,b}'(0-)\right)L_t^0(X) \\ &= B_t+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)L_t^0(X),\end{aligned} \tag{1.2.29}$$

care arată că procesul $Y_t=\varphi_{a,b}(X_t)$ este o semimartingală cu variaţie pătratică $\langle Y\rangle_t=t$. Să observăm că $1_{[0,\varepsilon)}(Y_s)=1_{[0,a\varepsilon)}(X_s)+1_{(b\varepsilon,0)}(X_s)$ oricare ar fi $\varepsilon>0$ şi $t\geq 0$. Rezultă timpul local semimartingal a lui Y_t în origine este dat de

$$\begin{aligned}
L_t^0(Y) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,\varepsilon)}(Y_s)\, d\langle Y \rangle_s \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,a\varepsilon)}(X_s)\, ds + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(b\varepsilon,0)}(X_s)\, ds \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,a\varepsilon)}(X_s)\, \frac{1}{a^2} d\langle X \rangle_s + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{(b\varepsilon,0)}(X_s)\, \frac{1}{b^2} d\langle X \rangle_s \\
&= \frac{1}{a} L_t^0(X) - \frac{1}{b} L_t^0(-X) \\
&= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) L_t^0(X).
\end{aligned}$$

Din relaţia (1.2.29) rezultă că procesul $Y_t = \varphi_{a,b}(X_t)$ verifică ecuaţia diferenţială stochastică

$$Y_t = B_t + \frac{1}{2} L_t^0(Y), \qquad t \geq 0,$$

şi deci procesul Y_t este mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t. În particular, procesul $Y_t = \varphi_{a,b}(X_t)$ este adaptat în raport cu filtraţia $\mathscr{F}^B$ a mişcării Browniene B_t şi este unic în sens traiectorial. Aceasta arată că are loc $\varphi_{a,b}$-unicitatea tare pentru (1.2.21).

Demonstrăm acum existenţa unei $\varphi_{a,b}$-soluţii tari (şi a unei soluţii slabe) a ecuaţiei (1.2.21). Fie B_t o mişcare Browniană 1-dimensională şi fie Y_t mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t. Considerăm procesul $X_t = \sigma_{a,b}(U_t) Y_t$, unde U_t este o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t ce ia valoarea 1 cu probabilitate $\frac{b}{b-a}$.

Vom arăta că $\left(X_t, B_t, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ este o $\varphi_{a,b}$-soluţie tare (şi o soluţie slabă) a ecuaţiei (1.2.21), unde $\mathscr{F}_t$ este completarea σ-algebrei $\sigma(B_s, U_s : 0 \leq s \leq t)$ generate de B şi U ce verifică condiţiile uzuale.

Cum $\varphi_{a,b}(X_t) = Y_t \varphi_{a,b}(\sigma_{a,b}(U_t)) = Y_t$ şi Y_t este adaptat în raport cu filtraţia generată de B_t, rămâne de arătat că X_t este o soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.21).

Din definiţia (1.2.26) alegerii de semn i.i.d. U_t pentru Y_t, rezultă că $U_t = 1$ când $Y_t = 0$, şi $\operatorname{sgn}(X_t) = \operatorname{sgn}\left(\sigma_{a,b}(U_t) Y_t\right) = U_t$, şi deci $\sigma_{a,b}(X_t) = \sigma_{a,b}(U_t)$ oricare ar fi $t \geq 0$. Cum procesul Y_t (şi X_t) petrece o măsură de timp Lebesgue nulă în origine, obţinem aproape sigur egalitatea

$$\int_0^t \sigma_{a,b}(X_s)\, dB_s = \int_0^t \sigma_{a,b}(U_s)\, 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\, dB_s,$$

oricare ar fi $t \geq 0$.

Folosind faptul că Y_t este mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t, obţinem

$$\begin{aligned}\int_0^t \sigma_{a,b}(X_s)\,dB_s &= \int_0^t \sigma_{a,b}(U_s)\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_{a,b}(U_s)\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dL_s^0(Y)\\ &= \int_0^t \sigma_{a,b}(U_s)\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s,\end{aligned}$$

unde ultima egalitate rezultă din faptul că timpul local semimartingal $L_s^0(Y)$ a lui Y în origine creşte numai când Y_s (şi X_s) sunt în origine.

Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, considerăm şirurile de $(\mathscr{F}_t^Y)$-timpi de oprire τ_i şi σ_i definiţi inductiv prin $\tau_0 = 0$,

$$\sigma_i = \inf\{s \geq \tau_{i-1} : Y_s = \varepsilon\} \quad \text{şi} \quad \tau_i = \inf\{s \geq \sigma_i : Y_s = 0\}, \qquad i \geq 1.$$

Notând cu $D_t(\varepsilon) = \sup\{i \geq 0 : \tau_i \leq t\}$ numărul de traversări descrescătoare ale intervalului $[0,\varepsilon]$ de către procesul $(Y_s)_{0\leq s\leq t}$, obţinem

$$\begin{aligned}&\int_0^t \sigma_{a,b}(X_s)\,dB_s = \\ &= \int_0^t \sigma_{a,b}(U_s)\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)dY_s\\ &= \sum_{i\geq 1}\int_{\sigma_i\wedge t}^{\tau_i\wedge t}\sigma_{a,b}(U_s)\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)dY_s + \sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t}\sigma_{a,b}(U_s)\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)dY_s\\ &= \sum_{i\geq 1}\sigma_{a,b}(U_{\sigma_i\wedge t})(Y_{\tau_i\wedge t} - Y_{\sigma_i\wedge t}) + \sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t}\sigma_{a,b}(U_s)\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)dY_s\\ &= -\varepsilon\sum_{i=1}^{D_t(\varepsilon)}\sigma_{a,b}(U_{\sigma_i}) + \sigma_{a,b}(U_t)(Y_t-\varepsilon)\sum_{i\geq 1}1_{[\sigma_i,\tau_i)}(t)\\ &\quad + \sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t}\sigma_{a,b}(U_s)\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s,\end{aligned}$$

şi deci

$$\begin{aligned}\int_0^t \sigma_{a,b}(X_s)\,dB_s - \sigma_{a,b}(U_t)Y_t = &-\varepsilon \sum_{i=1}^{D_t(\varepsilon)} \sigma_{a,b}(U_{\sigma_i}) \\ &- \sigma_{a,b}(U_t)Y_t \sum_{i\geq 1} 1_{[\tau_{i-1},\sigma_i)}(t) \\ &- \varepsilon\sigma_{a,b}(U_t) \sum_{i\geq 1} 1_{[\sigma_i,\tau_i)}(t) \\ &+ \sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t} \sigma_{a,b}(U_s)\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s.\end{aligned} \tag{1.2.30}$$

Vom arăta în continuare că toţi termenii din membrul drept al egalităţii anterioare converg la zero în L^2 atunci când $\varepsilon \searrow 0$.

Din construcţie, σ_i sunt $(\mathscr{F}_t^Y)$-timpi de oprire aroape sigur finiţi, şi $Y_{\sigma_i} = \varepsilon \neq 0$ aroape sigur oricare ar fi $i \geq 1$, şi deci ei verifică ipotezele Propoziţiei 1.2.19. Rezultă că $(U_{\sigma_i})_{i\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare identic distribuite, ce iau valorile ± 1 cu probabilitate $P(U_{\sigma_i} = 1) = 1 - P(U_{\sigma_i} = -1) = \frac{b}{b-a}$ oricare ar fi $i \geq 1$.

Să observăm de asemenea că din cosntrucţia timpilor de oprire σ_i, procesul Y vizitează originea în fiecare din intervalele de timp (σ_i, σ_{i+1}), şi deci pentru orice $1 \leq i < j$, σ_i şi σ_j aparţin la intervale de excursie ale Y în afara originii distincte. Reamintindu-ne definiţia (1.2.26) a alegerii de semn i.i.d. U_t pentru Y_t, şi folosind faptul că variabilele aleatoare $(U_{i,j})_{i,j\geq 1}$ ce defines procesul U_t sunt independente şi identic distribuite, şi independente de $\mathscr{F}^Y$, pentru orice $u, v \in \{\pm 1\}$ şi orice $1 \leq i < j$ obţinem

$$\begin{aligned} P(U_{\sigma_i} = u, U_{\sigma_j} = v) &= \sum_{(m,n)\neq(p,q)} P\left(U_{m,n} = u, U_{p,q} = v, \sigma_i \in I_{m,n}, \sigma_j \in I_{p,q}\right) \\ &= \sum_{(m,n)\neq(p,q)} P(U_{m,n} = u)P(U_{p,q} = v)P(\sigma_i \in I_{m,n}, \sigma_j \in I_{p,q}) \\ &= P(U_{1,1} = u)P(U_{1,1} = v) \sum_{(m,n)\neq(p,q)} P(\sigma_i \in I_{m,n}, \sigma_j \in e_{p,q}) \\ &= P(U_{\sigma_i} = u)P(U_{\sigma_j} = v)P((\sigma_i, \sigma_j) \cap \mathscr{Z} \neq \varnothing) \\ &= P(U_{\sigma_i} = u)P(U_{\sigma_j} = v). \end{aligned}$$

Aceasta artă că pentru orice $1 \leq i < j$, variabilele aleatoare U_{σ_i} şi U_{σ_j} sunt independente. O demonstraţie similară arată că $(U_{\sigma_i})_{i\geq 1}$ formează un şir de variabile aleatoare independente, şi deci $(U_{\sigma_i})_{i\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite.

Din definiţia funcţiei $\sigma_{a,b}$ rezultă că $\left(\sigma_{a,b}\left(U_{\sigma_i}\right)\right)_{i\geq 1}$ sunt de asemenea variabile aleatoare cu medie 0 şi dispersie $-ab$, şi deci folosind a doua identitate a lui Wald obţinem

$$E\left(-\varepsilon\sum_{i=1}^{D_t(\varepsilon)}\sigma_{a,b}\left(U_{\sigma_i}\right)\right)^2=\varepsilon^2E\left(\sigma_{a,b}\left(U_{\sigma_1}\right)\right)ED_t\left(\varepsilon\right)=-ab\varepsilon^2ED_t\left(\varepsilon\right)\to 0$$

pentru $\varepsilon\searrow 0$, deoarece datorită caracterizării Lévy a timpului local avem $\varepsilon D_t\left(\varepsilon\right)\to L_t^0\left(Y\right)$ aproape sigur şi de asemenea în L^2 (a se vedea spre exemplu [KaSh91], pag. 416). Aceasta demonstrează convergenţa la zero în L^2 pentru $\varepsilon\searrow 0$ a primului termen din membrul drept al relaţiei (1.2.30).

În continuare, să observăm că dacă $t\in[\tau_{i-1},\sigma_i)$ pentru un anumit $i\geq 1$, din construcţie avem $Y_t\in[0,\varepsilon)$, şi deci obţinem

$$\begin{aligned}E\left(\sigma_{a,b}\left(U_t\right)Y_t\sum_{i\geq 1}1_{[\tau_{i-1},\sigma_i)}\left(t\right)\right)^2 &\leq \max\left\{a^2,b^2\right\}\varepsilon^2E\sum_{i\geq 1}1_{[\tau_{i-1},\sigma_i)}\left(t\right)\\ &\leq \max\left\{a^2,b^2\right\}\varepsilon^2\\ &\to 0\end{aligned}$$

pentru $\varepsilon\searrow 0$. Aceasta demonstrează convergenţa la zero în L^2 pentru $\varepsilon\searrow 0$ a celui de-al doilea termen din membrul drept al relaţiei (1.2.30). Demonstraţia fiind similară pentru cel de-al treilea termen, o omitem.

Folosind din nou a doua identitate a lui Wald şi faptul că $\sigma_i-\tau_{i-1}$, $i=1,2,\ldots$ sunt variabile aleatoare independente şi identic distribuite (a se vedea Teorem 2.6.16 din [KaSh91]), cu medie $E\left(\sigma_1-\tau_0\right)=E\sigma_1=\varepsilon^2$, obţinem

$$\begin{aligned}E\left(\sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\sigma_i\wedge t}\sigma_{a,b}\left(U_s\right)1_{\mathbb{R}^*}\left(X_s\right)dY_s\right)^2 &\leq \max\left\{a^2,b^2\right\}E\int_0^t\sum_{i\geq 1}1_{[\tau_{i-1},\sigma_i]}\left(s\right)d\langle Y\rangle_s\\ &\leq \max\left\{a^2,b^2\right\}E\sum_{i=1}^{D_t(\varepsilon)+1}\left(\sigma_i-\tau_{i-1}\right)\\ &= \max\left\{a^2,b^2\right\}E\left(\sigma_1-\tau_0\right)E\left(D_t\left(\varepsilon\right)+1\right)\\ &= \max\left\{a^2,b^2\right\}\varepsilon^2E\left(D_t\left(\varepsilon\right)+1\right)\\ &\to 0,\end{aligned}$$

şi deci şi ultimul termen din membrul drept al relaţiei (1.2.30) converge la zero în L^2 pentru $\varepsilon \searrow 0$.

Am arătat că toţi termenii din membrul drept al relaţiei (1.2.30) converg la zero pentru $\varepsilon \searrow 0$. Trecând la limită cu $\varepsilon \searrow 0$ în relaţia (1.2.30) obţinem $\int_0^t \sigma_{a,b}(X_s)\,dB_s = \sigma_{a,b}(U_t)Y_t = X_t$, încheiând prima parte a demonstraţiei.

Pentru a demonstra a doua concluzie a teoremei, să observăm că dacă $\left(X_t, B_t, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ este o soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.21), din prima parte a demonstraţiei rezultă că $Y_t = \varphi_{a,b}(X_t)$ este mişcarea Browniană pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t.

Din definiţia funcţiilor $\sigma_{a,b}$ şi $\varphi_{a,b}$ rezultă că procesul X_t poate fi scris sub forma

$$X_t = \sigma_{a,b}(U_t)Y_t, \qquad t \geq 0, \tag{1.2.31}$$

unde $U_t = \operatorname{sgn}(X_t) = 1_{[0,\infty)}(X_t) - 1_{(-\infty,0)}(X_t)$.

Continuitatea proceselor X_t şi Y_t (şi discontinuitatea în origine a funcţiei $\sigma_{a,b}$) arată că procesul U_t poate schimba semnul doar cînd $Y_t = 0$, şi deci U_tY_t este un proces continuu, de unde rezultă că U_t este o alegere semn pentru Y_t în sensul Definiţiei 1.2.16.

Pentru a arăta că U_t ete o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t, conform Definiţiei 1.2.17 trebuie să arătăm că restricţia lui U_t la intervalele de excursie ale lui Y_t formează un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, independente de aemenea de procesul Y. Pentru aceasta, ordonăm intervalele de excursie $(I_{i,j})_{i,j\geq 1}$ ale lui Y_t în afara originii, ca în dinaintea Definiţiei 1.2.17, şi definim variabilele aleatoare $(U_{i,j})_{i,j\geq 1}$ prin $U_{i,j}(\omega) = U_t(\omega)$ pentru $t \in I_{i,j}(\omega)$; $U_{i,j}$ reprezintă deci semnul lui X_t în timpul intervalului de excursie $I_{i,j}$ a lui Y_t (să observăm că datorită relaţiei (1.2.31), intervalele de excursie ale lui X_t şi Y_t sunt aceleaşi).

Cum Y_t este o mişcare Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ începută în origine, avem $I_{i,j} \neq \varnothing$ aproape sigur oricare ar fi $i, j \geq 1$ (reamintim că în ordonarea intervalelor de excursie a lui Y_t, dacă $\mathscr{I}_i \neq \varnothing$ este o mulţime finită, am definit $I_{i,j} = \varnothing$ pentru $j > N(i)$; pentru mişcarea Browniană $I_i \neq \varnothing$ este aproape sigur o mulţime infinită, deoarece începând din origine mişcarea Browniană vizitează originea de o infinitate de ori, la momente de timp arbitrar de apropiate de 0). Din acest motiv, precum şi datorită faptului că X_t are semn constant în timpul fiecui interval de excursie $I_{i,j}$, rezultă că variabilele aleatoare $U_{i,j}$ introduse mai sus sunt bine definite până la o mulţime de probabilitate nulă, pe care considerăm $U_{i,j} = 1$.

Cum X_t este o soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.21), din caracterizarea by Lévy a mişcării Browniene rezultă că $W_t = X_{\alpha_t}$ este o mişcare Browniană, unde schimbarea de timp α_t este inversa procesului crescător şi continuu $A_t = \langle X \rangle_t$. Refăcând schimbarea de timp, putem scrie procesul X_t sub forma

$$X_t = W_{A_t}, \qquad t \geq 0, \tag{1.2.32}$$

unde W_t este o mişcare Browniană 1-dimensională începută în origine şi $A_t = \int_0^t \sigma_{a,b}^2(X_s)ds$.

Comparând reprezentările (1.2.31) şi (1.2.32) ale lui X_t, se poate observa că excursiile lui Y_t, scalate în spaţiu cu factorul $\sigma_{a,b}(U_t)$, coincid cu excursiile lui W_t, scalate în timp cu factorul $\sigma_{a,b}^2(X_t)$. Mai precis, notând cu e_t^Y excursia lui Y ce conţine t, şi cu $e_{A_t}^W$ excursia lui W ce conţine pe $A_t = \int_0^t \sigma_{a,b}^2(X_s)ds$, avem

$$e_t^Y(u) = \frac{1}{\sigma_{a,b}(X_t)} e_{A_t}^W(\sigma_{a,b}^2(X_t)u) = \left| s_{a,b}\left(e_{A_t}^W\right)(u) \right|, \tag{1.2.33}$$

unde $s_{a,b}$ este transformarea definită pe spaţiul excursiilor prin

$$s_{a,b}(e)(u) = \frac{1}{|\sigma_{a,b}(e)|} e\left(\sigma_{a,b}^2(e)u\right), \qquad u \geq 0, \tag{1.2.34}$$

sau printr-un abuz de notaţie scriem $\sigma_{a,b}(e) = a$ dacă e este o excursie pozitivă, şi $\sigma_{a,b}(e) = b$ dacă e este o excursie negativă.

Observaţia 1.2.21. *În discuţia premergătoare Definiţiei 1.2.17, am partiţionat intervalele de excursie ale lui Y_t în mulţimi disjuncte $\mathscr{I}_i = \{I_{i,j} : I_{i,j} \subset (\xi_{i-1}, \xi_i)\}$, respectiv $E_i = \{e_t^Y : \xi_{i-1} \leq t < \xi_i\}$, folosind timpii de oprire definiţie de $\xi_0 = 0$ şi $\xi_{i+1} = \inf\{t \geq \xi_i + 1 : Y_t = 0\}$.*

Pentru a partiţiona excurssile lui W_t în mulţimi disjucnte $\widetilde{E}_i$ astfel încât prin (1.2.33) corespondenţa între excursiile lui Y_t din E_i şi ale lui W_t din $\widetilde{E}_i = \{e_s^W : \widetilde{\xi}_{i-1} \leq s < \widetilde{\xi}_i\}$ este bijectivă, vom folosi aceeaşi construcţie, dar cu următoarea modificare. În locul timpilor de oprire ξ_i vom folosi timpii de oprire $\widetilde{\xi}_i$ a lui W_t corespunzători lui ξ_i prin schimbarea de timp A_t, adică $\widetilde{\xi}_0 = 0$ şi $\widetilde{\xi}_{i+1} = \inf\{t \geq A_{\widetilde{\xi}_i+1} : W_t = 0\}$. Cu această alegere, există o corespondenţa (1.2.33) dintre excursille lui Y_t din E_i şi excursiile lui W_t din $\widetilde{E}_i$ este bijectivă.

Împreună cu (1.2.33) – (1.2.34), discuţia anterioară arată excursiile lui Y_t din E_i sunt obţinute din excursiile lui W_t din $\widetilde{E}_i$ prin scalarea excursiilor pozitive cu a şi a celor negative cu b, şi luând valoarea absolută a rezultatului. Dacă $\{\widetilde{e}_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ sunt excursiile ordonate ale lui $(W_t)_{t\geq 0}$ în afara originii (folosind timpii de oprire $\widetilde{\xi}_i$ în loc de ξ_i, aşa cum am indicat în observaţia anterioară), să observăm că prin scalarea excursiilor lui W_t, ordonarea $\preceq$ a excursiilor pozitive este păstrată, şi de asemeni ordonarea excursiilor negative este păstrată. Este însă posibil ca dacă $a \neq |b|$, ordonarea excursiilor pozitive şi a celor negative să nu fie păstrată; spre exemplu, dacă $a > |b|$, şi dacă $i \geq 1$ şi $1 \leq j < k$ sunt aleşi astfel încât $\widetilde{e}_{i,j}$ este o excursie pozitivă şi $\widetilde{e}_{i,k}$ este o excursie negativă a lui W_t cu $1 < R(\widetilde{e}_{i,j})/R(\widetilde{e}_{i,k}) < a^2/b^2$, atunci $\widetilde{e}_{i,j} \preceq \widetilde{e}_{i,k}$ şi după scalare lungimile celor două excursii verifică

$$R(s_{a,b}(\widetilde{e}_{i,j})) = \frac{1}{a^2}R(\widetilde{e}_{i,j}) < \frac{1}{b^2}R(\widetilde{e}_{i,k}) = R(s_{a,b}(\widetilde{e}_{i,k})),$$

şi deci ordonarea excursiilor scalate este schimbată: $s_{a,b}(\widetilde{e}_{i,k}) \preceq s_{a,b}(\widetilde{e}_{i,j})$.

dacă $(V_{i,j})_{i,j\geq 1}$ este şirul de variabile aleatoare reprezentând şirul semnelor lui W_t în timpul excursiilor corespunzătoare $(\widetilde{e}_{i,j})_{i,j\geq 1}$, discuţia anterioară arată că $U_{i,j}$ (semnul lui X_t în timpul celei a j^{a} cea mai lungă excursie din E_i) este $V_{i,k}$ (semnul lui W_t în timpul celei a k^{a} cea mai lungă excursie din $\widetilde{E}_i$), cu condiţia ca după scalarea excursiilor lui W_t, $\widetilde{e}_{i,k}$ devine a j^{a} cea mai lungă excursie din $\widetilde{E}_i$.

Vom demonstra mai întâi că $(U_{1,n})_{n\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite.

În continuare, vom presupune cunoscute şi vom folosi rezultatele de bază şi notaţia din [ReYo94] (Chap. XII) în legătură cu teoria Itô a excursiilor mişcării Browniene. Procesul excursiilor $\widetilde{e} = (\widetilde{e}_t)_{t>0}$ mişcării Browniene W_t este un $(\mathscr{F}_{\tau_t})$-proces punctual Poisson (Poisson point process în Engleză, abreviat PPP), cu măsură caracteristică

$$n(\Gamma) = \frac{1}{t}E(N_t^{\Gamma}), \qquad t > 0, \tag{1.2.35}$$

pentru orice mulţime $\Gamma \in \mathscr{U}_\delta$ în spaţiul măsurabil $(U_\delta, \mathscr{U}_\delta)$ al excursiilor lui W_t.

Procesul $(R(\widetilde{e}_t))_{t>0}$ al lungimilor excursiilor este de asemenea un $(\mathscr{F}_{\tau_t})$-proces punctual Poisson, cu distribuţie n dată de

$$n(R > x) = \frac{1}{t}E(N_t^{(x,\infty)}) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}, \qquad t, x > 0. \tag{1.2.36}$$

Mai mult, pentru orice mulţime $\Gamma \in \mathscr{U}_\delta$ cu $n(\Gamma) < \infty$, $N_t - tn(\Gamma)$ este o $(\mathscr{F}_{\tau_t})$-martingală. Timpul local în origine al lui W_t poate fi descris ca inversul continuu la dreapta al lui τ_t, adică $L_t = \inf\{s > 0 : \tau_s > t\}$, şi este deci în particular un $(\mathscr{F}_{\tau_t})$-timp de oprire; cum $\tau_t = \inf\{s > t : W_s = 0\} \geq t$, obţinem $L_t \leq t$, şi deci L_t este de asemenea mărginit. Din Teorema Doob a timpului de oprire rezultă că $EN^{\Gamma}_{L_t} = n(\Gamma)EL_t$, care arată că pentru orice $t > 0$, intensitatea variabilei aleatoare Poisson $N^{\Gamma}_{L_t}$ este de asemenea $n(\Gamma)$.

Considerăm procesul

$$N_1(x) = N_{L_1}^{\{R>a^2x^{-2}\}\cap\mathscr{U}_\delta^+} \quad \text{şi} \quad N_2(x) = N_{L_1}^{\{R>b^2x^{-2}\}\cap\mathscr{U}_\delta^-}, \qquad x > 0, \tag{1.2.37}$$

reprezentând numărul de excursii pozitive, respectiv numărul de excursii negative ale lui W_t începute înainte de timpul 1, cu lungime mai mare decât $(\frac{a}{x})^2$, respectiv $(\frac{b}{x})^2$.

Procesele $N_1(x)$ şi $N_2(x)$ sunt nedescrescătoare, continue la dreapta, şi au incremenţi independenţi. Pentru $0 < x < y$, incrementul $N_1(y) - N_1(x)$ este o variabilă aleatoare Poisson cu medie

$$\begin{aligned} E(N_1(y) - N_1(x)) &= E\left(N_{L_1}^{\{a^2y^{-2}<R<a^2x^{-2}\}\cap\mathscr{U}_\delta^+}\right) \\ &= n_+(a^2y^{-2} < R < a^2x^{-2})EL_1 \\ &= \frac{1}{2}n(a^2y^{-2} < R < a^2x^{-2})EL_1 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{y}{a} - \frac{x}{a}\right)EL_1, \end{aligned}$$

şi similar

$$E(N_2(y) - N_2(x)) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{y}{|b|} - \frac{x}{|b|}\right)EL_1. \tag{1.2.38}$$

Rezultă că $N_1(x)$ şi $N_2(x)$ sunt procese Poisson, cu intensităţi

$$\lambda_1 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}EL_1 \qquad \text{şi} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{|b|}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}EL_1, \tag{1.2.39}$$

ce pot fi scrise sub forma $\lambda_1 = p_1\lambda$ şi $\lambda_2 = p_2\lambda$, unde

$$p_1 = \frac{|b|}{a+|b|}, \qquad p_2 = \frac{a}{a+|b|}, \qquad \lambda = \frac{a+|b|}{a|b|}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}EL_1. \tag{1.2.40}$$

Cum mulţimile $\{R > a^2x^{-2}\} \cap \mathscr{U}_\delta^+$ şi $\{R > b^2x^{-2}\} \cap \mathscr{U}_\delta^-$ din definiţia lui $N_1(x)$ şi $N_2(x)$ sunt disjuncte, $N_1(x)$ şi $N_2(x)$ sunt procese Poisson Poisson independente cu intensităţi λ_1 şi respectiv λ_2.

Rezultă (a se vedea spre exemplu [Sh04], Teorema 11.3.3) că procesul Q definit prin $Q(0) = 0$ şi

$$Q(x) = (+1) \cdot N_1(x) + (-1) \cdot N_2(x), \qquad x > 0, \tag{1.2.41}$$

este un proces Poisson compus, cu salturi ± 1. Mai mult, dacă $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots$ reprezintă salturile succesive ale lui Q, şi dacă $N(x) = N_1(x) + N_2(x)$ reprezintă numărul total de salturi ale lui $(Q(y))_{0 \le y \le x}$, atunci Q poate fi scris sub forma

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{N(x)} \widetilde{U}_j, \qquad x > 0, \tag{1.2.42}$$

unde $N(x)$ este un proces Poisson cu intensitate λ şi $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, ce iau valoarea $+1$ cu probabilitatea p_1 şi valoarea -1 cu probabilitatea p_2, dată de relaţiile (1.2.40) de mai sus.

Reamintim discuţia premergătoare relaţiei (1.2.33): cea de a j^{a} cea mai lungă excursie $e_{i,j}^Y$ a lui Y_t din E_i este valoarea absolută a celei de a j^{a} cea mai lungă excursie scalată a lui W din $\widetilde{E}_i$, unde scalarea $s_{a,b}$ scalează excursiile pozitive cu a, şi pe cele negative cu b. Aceasta înseamnă că dacă $\widetilde{e}_{i,k}$ devine a j^{a} cea mai lungă excursie a lui W_t din $\widetilde{E}_i$ după scalare, atunci

$$e_{i,j}^Y(u) = \left| s_{a,b}\left(e_{i,k}^W(u)\right) \right| = \frac{1}{\left|\sigma_{a,b}\left(e_{i,k}^W\right)\right|} \left| e_{i,k}^W\left(\sigma_{a,b}^2\left(e_{i,k}^W\right) u\right) \right|,$$

şi mai mult, conform (1.2.32) avem de asemenea că semnul $U_{i,j}$ al lui X_t în timpul excursiei $e_{i,j}^Y$ este acelaşi cu semnul $V_{i,k}$ al lui W_t în timpul excursiei corespunzătoare $e_{i,k}^W$. Folosind aceasta, şi definiţiile lui $N_1(x), N_2(x), N(x)$ şi $Q(x)$ de mai sus, obţinem

$$\begin{aligned}
Q(x) &= N_1(x) - N_2(x) \\
&= N_{L_1}^{\{R>a^2x^{-2}\}\cap\mathscr{U}^+} - N_{L_1}^{\{R>b^2x^{-2}\}\cap\mathscr{U}^-} \\
&= N_{L_1}^{\{a^{-2}R>x^{-2}\}\cap\mathscr{U}^+} - N_{L_1}^{\{b^{-2}R>x^{-2}\}\cap\mathscr{U}^-} \\
&= N_{L_1}^{\{R\circ s_{a,b}>x^{-2}\}\cap\mathscr{U}^+} - N_{L_1}^{\{R\circ s_{a,b}>x^{-2}\}\cap\mathscr{U}^-} \\
&= \sum_{j=1}^{N(x)} U_{1,j},
\end{aligned}$$

unde ultima egalitate arată faptul că suma semnelor primelor celor mai lungi $N(x)$ excursii ale lui X_t concide cu numărul $N_1(x)$ de excursii pozitive scalate ale lui W_t cu lungime mai mare decât x^{-2} minus numărul $N_2(x)$ de excursii negative scalate ale lui W_t cu lungime mai mare decât x^{-2}, care conform discuţiei anterioare este acelaşi.

Cum $N(x)$ este un proces Poisson, în particular creşte numai prin salturi de lungime 1, şi din definiţie avem $N(\infty) = N_{L_1}^{(0,\infty)} = \infty$. Folosind aceasta, şi comparând reprezentarea anterioară a lui $Q(x)$ cu (1.2.42), rezultă că $U_{1,j} = \widetilde{U}_j$ pentru $j \geq 1$, şi deci $(U_{1,j})_{j\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite ce iau valoarea $+1$ şi -1 cu probabilităţi $p_1 = \frac{|b|}{a+|b|}$, respectiv $p_2 = \frac{a}{a+|b|}$.

Folosind proprietatea Markov tare a lui X_t şi Y_t şi timpul de oprire

$$\xi_1 = \inf\{t > 1 : Y_t = 0\} = \inf\{t > 1 : X_t = 0\},$$

argumentul anterior arată că $(U_{2,j})_{j\geq 1}$ este de asemenea un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, cu aceeaşi ditribuţie ca şirul $(U_{1,j})_{j\geq 1}$, şi de asemenea independente de acesta. Inductiv, folosind proprietatea Markov tare la timpii de oprire

$$\xi_{i+1} = \inf\{t > \xi_i + 1 : Y_t = 0\} = \inf\{t > \xi_i + 1 : X_t = 0\},$$

obţinem că $(U_{i+2,j})_{j\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, cu aceeaşi distribuţie ca şirul $(U_{i',j})_{1\leq i'\leq i+1, j\geq 1}$, şi de asemenea independent de acesta. Aceasta arată că $(U_{i,j})_{i,j\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, având distribuţia din concluzia teoremei.

Pentru a încheia demonstraţia, avem de arătat că variabilele aleatoare $U_{i,j}$ sunt de asemenea independente de Y. Vom arăta mai întâi că oricare ar fi $t>0$, $U_t=\operatorname{sgn}(X_t)$ este independent de σ-algebra $\mathscr{F}^Y$ a lui Y. Să observăm că din (1.2.31), σ-algebra $\mathscr{F}_t^Y=\sigma(Y_s:s\le t)$ coincide cu σ-algebra

$$\sigma\left(\frac{1}{\sigma_{a,b}(X_s)}X_s:s\le t\right)=\sigma\left(\left|\frac{1}{\left|\sigma_{a,b}(X_s)\right|}X_s\right|:s\le t\right)=\sigma\left(\left|\widetilde{W}_s\right|:s\le t\right)=\mathscr{F}_t^{|\widetilde{W}|},$$

unde $\widetilde{W}_t$ reprezintă procesul

$$\widetilde{W}_t=\frac{1}{\left|\sigma_{a,b}(X_t)\right|}X_t,\qquad t\ge 0. \tag{1.2.43}$$

Aplicând formula Itô-Tanaka funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{|\sigma_{a,b}(x)|}x$ (o diferenţă de două funcţii convexe) şi procesului X_t, obţinem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left|\sigma_{a,b}(X_t)\right|}X_t &= \int_0^t\frac{1}{\left|\sigma_{a,b}(X_s)\right|}dX_s+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{|b|}\right)L_t^0(X)\\ &= \int_0^t\frac{1}{\left|\sigma_{a,b}(X_s)\right|}\sigma_{a,b}(X_s)dB_s+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{|b|}\right)L_t^0(X)\\ &= \int_0^t\operatorname{sgn}(X_s)dB_s+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{|b|}\right)L_t^0(X),\end{aligned}$$

unde $L_t^0(X)$ reprezintă timpul local semimartingal a lui X_t în origine.

The above shows that $\widetilde{W}_t$ is a continuous semimartingale, and since

$$\langle\widetilde{W}\rangle_t=\int_0^t\operatorname{sgn}^2(X_s)d\langle B\rangle_s=\int_0^t 1ds=t,$$

the martingale part of $\widetilde{W}_t$ is a Brownian motion $\widetilde{B}_t$. The previous equation is thus equivalent to

$$\widetilde{W}_t=\widetilde{B}_t+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{|b|}\right)L_t^0(X). \tag{1.2.44}$$

Să observăm că deoarece $\widetilde{W}$ este o semimartingală continuă cu $\langle\widetilde{W}\rangle_t=t$, petrece timp Lebesgue nul în origine (a se vedea Consecinţa VI.1.6 din [ReYo94]). Rezultă că timpul local semimartingal simetric $\widehat{L}_t^0\left(\widetilde{W}\right)$ a lui $\widetilde{W}$ în origine este dat de

$$
\begin{aligned}
\widehat{L}_t^0\left(\widetilde{W}\right) &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\left(\widetilde{W}_s\right)d\left\langle\widetilde{W}\right\rangle_s \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[0,\varepsilon)}\left(\widetilde{W}_s\right)ds+\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{(-\varepsilon,0]}\left(\widetilde{W}_s\right)ds\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[0,\varepsilon)}\left(a^{-1}X_s\right)ds+\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{(-\varepsilon,0]}\left(|b|^{-1}X_s\right)ds\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[0,a\varepsilon)}\left(X_s\right)\frac{1}{a^2}d\langle X\rangle_s+\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{(-|b|\varepsilon,0]}\left(X_s\right)\frac{1}{b^2}d\langle X\rangle_s\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}L_t^0(X)+\frac{1}{|b|}L_t^0(-X)\right),
\end{aligned}
$$

unde în penultima egalitate am folosit faptul că variaţia pătratică a lui X_t este $\langle X\rangle_t=\int_0^t\sigma_{a,b}^2(X_s)ds$.

Cum X_t este o martingală locală continuă ce petrece timp Lebesgue nul în origine, conform Consecinţei VI.1.9 din [ReYo94] rezultă că $L_t^0(X)=L_t^0(-X)$, şi deci obţinem $\widehat{L}_t^0\left(\widetilde{W}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{|b|}\right)L_t^0(X)$. Rezultă că ecuaţia (1.2.44) poate fi rescrisă sub forma echivalentă

$$
\widetilde{W}_t=\widetilde{B}_t+\frac{|b|-a}{|b|+a}\widehat{L}_t^0\left(\widetilde{W}\right), \tag{1.2.45}
$$

care arată că $\widetilde{W}_t$ este o mişcare Browniană oblică (skew, în Engleză) cu parametru $\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{|b|-a}{|b|+a}\right)=\frac{|b|}{a+|b|}$ (a se vedea spre exemplu pag. 401 din [ReYo94], sau [HaSh81] şi referinţele citate în această lucrare pentru mai multe detalii asupra acestui proces).

Se ştie că mişcarea Browniană oblică cu parametru $\alpha\in(0,1)$ este un proces Markov care se comportă ca şi mişcarea Browniană obişnuită în fiecare din intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$, şi că începând în origine ea intră în intervalul $(0,\infty)$ cu probabilitate α. Mai mult, densităţile de tranziţie ale acestui proces sunt cunoscute (a se vedea spre exemplu [ReYo94], pag. 82).

Folosind densităţile de tranziţie ale lui $\widetilde{W}_t$ şi propiretatea Markov, se poate verifica faptul că pentru orice $0\le t_1<\ldots<t_n$, pentru orice mulţimi Borel $B_1,\ldots,B_n\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, $n\ge 1$, şi orice $t>0$ avem

$$
\frac{P\left(\widetilde{W}_t>0,\left|\widetilde{W}_{t_1}\right|\in B_1,\ldots,\left|\widetilde{W}_{t_n}\right|\in B_n\right)}{P\left(\widetilde{W}_t<0,\left|\widetilde{W}_{t_1}\right|\in B_1,\ldots,\left|\widetilde{W}_{t_n}\right|\in B_n\right)}=\frac{|b|}{a}=\frac{P\left(\widetilde{W}_t>0\right)}{P\left(\widetilde{W}_t<0\right)}, \tag{1.2.46}
$$

care arată independenţa dintre semnul lui $\widetilde{W}_t$ (pentru $t>0$ arbitrar fixat) şi σ-algebra $\mathscr{F}^{|\widetilde{W}|}=\sigma\left(\left|\widetilde{W}_t\right|:t\ge 0\right)$ generată de $\left|\widetilde{W}\right|$.

Reamintind definiţia (1.2.43) a lui $\widetilde{W}_t$ şi (1.2.31), observăm că $U_t = \operatorname{sgn}(\widetilde{W}_t)$ şi $|\widetilde{W}_t| = Y_t$, şi deci U_t este independent de $\mathscr{F}^Y$ pentru orice $t > 0$. De asemenea să observăm că ecuaţia anterioară arată că

$$P(U_t = 1) = P(\widetilde{W}_t > 0) = \frac{|b|}{a+|b|}, \qquad t > 0. \tag{1.2.47}$$

Să considerăm acum $i, j \geq 1$ arbitrar fixaţi. Conform definiţiei, variabilele aleatoare $U_{i,j}(\omega)$ reprezintă semnul $U_t(\omega)$ al lui $X_t(\omega)$ în timpul excursiei $e_{i,j}(\omega)$ a lui $Y_t(\omega)$, şi pot fi reprezentate după cum urmează:

$$U_{i,j}(\omega) = \frac{1}{R(e_{i,j}(\omega))} \int_0^\infty U_t(\omega) 1_{I_{i,j}(\omega)}(t)\,dt, \qquad \omega \in \Omega, \tag{1.2.48}$$

unde $I_{i,j}(\omega)$ este intervalul corespunzător excursiei $e_{i,j}(\omega)$ (intervalul de timp când excursia $e_{i,j}(\omega)$ are loc), şi $R(e_{i,j}(\omega))$ reprezintă lungimea excursiei $e_{i,j}(\omega)$, care este aceeaşi cu lungimea intervalului de excursie $I_{i,j}(\omega)$.

Să observăm că $R(e_{i,j})$ şi intervalul de excursie $I_{i,j}$ sunt variabile aleatoare $\mathscr{F}^Y$-măsurabile. De asemenea, folosind (1.2.47) şi independenţa lui U_t şi $\mathscr{F}^Y$, obţinem $E\left(U_t(\omega)\,\middle|\,\mathscr{F}^Y\right) = E(U_t) = \frac{|b|-a}{|b|+a}$.

Deoarece

$$E\left(\int_0^\infty \left|\frac{1}{R(e_{i,j}(\omega))} U_t(\omega) 1_{I_{i,j}(\omega)}(t)\right| dt \,\middle|\, \mathscr{F}^Y\right) = E\left(1\,\middle|\,\mathscr{F}^Y\right) = 1 < \infty,$$

din teorema Fubini obţinem

$$\begin{aligned}
E\left(U_{i,j}|\mathscr{F}^Y\right) &= \int_0^\infty E\left(\frac{1}{R(e_{i,j}(\omega))} U_t(\omega) 1_{I_{i,j}(\omega)}(t)\,\middle|\,\mathscr{F}^Y\right) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{R(e_{i,j}(\omega))} 1_{I_{i,j}(\omega)}(t) E\left(U_t(\omega)\,\middle|\,\mathscr{F}^Y\right) dt \\
&= \frac{|b|-a}{|b|+a} \int_0^\infty \frac{1}{R(e_{i,j}(\omega))} 1_{I_{i,j}(\omega)}(t)\,dt \\
&= \frac{|b|-a}{|b|+a},
\end{aligned}$$

şi deci variabila aleatoare $U_{i,j}$ este independentă de $\mathscr{F}^Y$, oricare ar fi $i, j \geq 1$.

Aceasta, împreună cu partea anterioară a ademonstraţiei arată că U_t este o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t în sensul Definiţiei 1.2.17, încheiând astfel demonstraţia teoremei. □

Extensii

Rezultatele prezentate în secţiunea anterioară pot fi extinse şi la alte tipuri de ecuaţii diferenţiale stochastice. Spre exemplu, are loc următoarea.

Teorema 1.2.22 ([Pa13b]). *Fie $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă încât that $|\sigma|$ este mărginită de constante strict pozitive, şi să presupunem că există o funcţie crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq |f(x) - f(y)|, \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.2.49}$$

Mai mult, presupunem că σ este o funcţie impară pe $\mathbb{R}^*$ şi că $x\sigma(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Dată fiind o mişcare Browniană 1-dimensională B_t, are loc $|x|$-unicitatea tare pentru ecuaţia diferenţială stochastică

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s, \qquad t \geq 0. \tag{1.2.50}$$

Există o $|x|$-soluţie tare (şi o soluţie slabă), şi este dată explicit de $(U_t Y_t, B_t, \mathscr{F}_t)$ unde Y_t este soluţia traiectorial unică a ecuaţiei

$$Y_t = \int_0^t |\sigma(Y_s)|\, dB_s + \widehat{L}_t^0(Y), \qquad t \geq 0, \tag{1.2.51}$$

şi U_t este o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t (în sensul Definiţiei 1.2.17) ce ia valori ± 1 cu probabilităţi egale.

Mai mult, orice soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.50) admite reprezentarea $X_t = U_t Y_t$, unde U_t şi Y_t sunt ca mai sus.

Demonstraţie. Dacă $(X_t, B_t, \mathscr{F}_t)$ este o soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.50), aplicând formula Itô-Tanaka obţinem

$$|X_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, \sigma(X_s)\, dB_s + L_t^0(X), \qquad t \geq 0,$$

care, în ipotezele suplimentare asupra funcţiei σ, este echivalentă cu

$$|X_t| = \int_0^t |\sigma(|X_s|)|\, dB_s + \widehat{L}_t^0(|X|), \qquad t \geq 0, \tag{1.2.52}$$

unde $\widehat{L}_t^0(|X|)$ reprezintă timpul local semimartingal simetric a lui $|X|$ în origine (să observăm că deoarece X_t verifică (1.2.50), X_t este o martingală locală continuă, şi din Consecinţa VI.1.9 din [ReYo94] obţinem $L_t^0(X) = L_t^0(-X)$, şi deci $\widehat{L}_t^0(|X|) = L_t^0(X)$).

Ecuaţia diferenţială anterioară verifică ipotezele Teoremei 4.1 din [BaCh05] (cu $a = |\sigma|$), şi aplicând această teoremă rezultă că ecuaţia (1.2.52) admite o soluţie tare Y_t care este unică traiectorial. Aceasta arată că procesul $|X_t| = Y_t$ este adaptat filtraţiei $\mathscr{F}^B$ a mişcării Browniene B_t şi este unic traiectorial, şi deci are loc $|x|$-unicitatea tare pentru ecuaţia (1.2.50).

Dacă Y_t este unica soluţia tare a ecuaţiei (1.2.51) (să observăm că această ecuaţie coincide cu ecuaţia (1.2.52) de mai sus) şi U_t este o alegere de semn i.i.d. pentry Y_t (în sensul Definiţiei 1.2.17) ce ia valori ± 1 cu probabilităţi egale, vom arăta că $(U_tY_t, B_t, \mathscr{F}_t)$ este o $|x|$-soluţie tare (şi o soluţie slabă) a ecuaţiei (1.2.50).

Să observăm mai întâi că deoarece $|X_t| = |U_tY_t| = Y_t$ şi Y_t sunt procese adaptate în raport cu filtraţia generată de B_t, este suficient să arătăm că $X_t = U_tY_t$ este o soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.50). Pentru aceasta, observăm că din Definiţia 1.2.17 a alegerii de semn i.i.d. U_t avem $\operatorname{sgn}(X_t) = U_t$ (când $Y_t = 0$ avem $U_t = 1$, care coincide cu cu $\operatorname{sgn}(X_t) = \operatorname{sgn}(0) = 1$). Folosind ipotezele suplimentare asupra funcţiei σ şi faptul că $Y \geq 0$ (Y este o schimbare de timp a unei mişcări Browniene reflectate pe $[0,\infty)$), obţinem

$$\sigma(X_t) = U_t\,|\sigma(Y_t)|\,1_{\mathbb{R}^*}(X_t) + \sigma(0)\,1_{\{0\}}(X_t), \qquad t \geq 0.$$

Cum $|\sigma|$ este mărginită de constante pozitive, procesul Y (şi X) petrec o măsură Lebesgue de timp nulă în origine, şi deci obţinem aproape sigur

$$\int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s = \int_0^t U_s\,|\sigma(Y_s)|\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dB_s,$$

oricare ar fi $t \geq 0$. Folosind faptul că Y_t este o soluţie a ecuaţiei (1.2.51), obţinem

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s &= \int_0^t U_s\,|\sigma(Y_s)|\,1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dB_s \\
&= \int_0^t U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s - \int_0^t U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,d\widehat{L}_s^0(Y) \\
&= \int_0^t U_s 1_{\mathbb{R}^*}(X_s)\,dY_s,
\end{aligned}$$

unde ultima egalitate rezultă din faptul că timpul local $\widehat{L}_s^0(Y)$ a lui Y în origine creşte numai când Y_s (şi X_s) este în origine.

Procedând ca în demonstraţia Teoremei 1.2.20 în cazul $a=-b=1$ (să observăm că $\sigma_{a,b}(U_s)=\sigma_{1,-1}(U_s)=U_s$ în acest caz), obţinem

$$\int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s = U_tY_t = X_t,$$

încheiând demonstraţia primei afirmaţii din concluzia teoremei.

Pentru a demonstra cea de a doua afirmaţie, să observăm că dacă $(X_t, B_t, \mathscr{F}_t)$ este o soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.50), din prima parte a demonstraţiei rezultă că $Y_t=|X_t|$ este unica soluţia tare a ecuaţiei (1.2.51). Rezultă că procesul X_t poate fi scris sub forma $X_t=U_tY_t$, unde $U_t=\operatorname{sgn}(X_t)$ este un proces ce ia valori ± 1. Cum $U_tY_t=X_t$ este un proces continuu, rezultă că U_t este o alegere de semn pentru Y_t în sensul Definiţiei 1.2.16.

Pentru a arăta că U_t este o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t, ordonăm intervalele de ecursie $(I_{i,j})_{i,j\geq 1}$ a lui Y_t (ca în discuţia premergătoare Definiţiei 1.2.17), şi considerăm $U_{i,j}$ ca fiind restricţia procesului U_t la intervalul de excursie $I_{i,j}$ (să observăm că deoarece $X_t=U_tY_t$, intervalele de excursie ale lui X_t şi Y_t sunt aceleaşi, şi deci procesul U_t este constant în timpul oricărui astfel de interval). Avem de arătat că $(U_{i,j})_{i,j\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite ce iau valorile ± 1 cu probabilităţi egale, şi că sunt de asemenea independente de $\mathscr{F}^Y$.

Cum X_t este o soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.50) şi $|\sigma|$ este prin ipoteză mărginită de cosntante strict pozitive, din teorema Lévyde caracterizare a mişcării Browniene rezultă că X_t este o schimbare de timp a unei mişcări Browniene, adică $X_t=\widetilde{X}_{A_t}$, unde $\widetilde{X}_t$ este o mişcare Browniană şi $A_t=\int_0^t\sigma^2(X_s)ds$. Să observăm de asemenea că datorită ipotezei că σ este o funcţiei impară pe $\mathbb{R}^*$, avem $A_t=\int_0^t\sigma^2(|X_s|)ds$, care arată că schimbarea de timp A_t depinde numai de valoarea absolută a lui X_t, şi nu de semnul lui X_t.

Datorită simetriei mişcării Browniene, $-\widetilde{X}_t$ şi $\widetilde{X}_t$ au aceeaşi distribuţie, şi cum schimbarea de timp A_t nu depinde de semnul lui X_t, distribuţia lui X_t este aceeaşi cu distribuţia lui $-X_t$. Alternativ, aceasta se poate observa din faptul că soluţia ecuaţiei (1.2.50) este unică în sensul distribuţiei (Teorem 5.5.7 din [KaSh91]), şi deoarece X_t şi $-X_t$ sunt simultan soluţii ale ecuaţiei

(1.2.50).

Deoarece X_t este o schimbare de timp a unei mişcări Browniene, se poate arăta că procesul excursiilor $(e_t^X)_{t>0}$ este un $(\mathscr{F}_{\tau_t})$-proces punctual Poisson (demonstraţia este similară celei pentru mişcarea Browniană, a se vedea [ReYo94], pag. 448 – 457). Dacă n este măsura Itô a excursiilor lui X_t, faptul că X_t şi $-X_t$ au aceeaşi distribuţie implică faptul că excursiile pozitive şi excursiile negative ale X_t sunt distribuite la fel de către n, şi în particular $n_+(R>x)=n_-(R>x)$, pentru orice $x>0$, unde n_+ şi n_- reprezintă restricţia lui n la mulţimea excursiilor pozitive, respectiv la mulţimea excursiilor negative ale lui X_t.

Putem acum proceda ca demonstraţia Teoremei 1.2.20 în cazul particular $a=-b=1$ (pag. 57). Considerăm $Q(x)=N_1(x)-N_2(x)$, unde $N_1(x)=N_{L_1}^{(x^{-2},\infty)\cap\mathscr{U}_\delta^+}$ şi $N_2(x)=N_{L_1}^{(x^{-2},\infty)\cap\mathscr{U}_\delta^-}$ reprezintă numărul excursiilor pozitive, respectiv numărul excursiilor negative ale lui X_t începute înainte de timpul 1, cu lungimi mai mari decât x^{-2}. O demonstraţie similară arată că $N_1(x)$ şi $N_2(x)$ sunt procese Poisson independente cu aceeaşi intensitate $\lambda=n_+(R>x^{-2})=n_-(R>x^{-2})$, şi deci $Q(x)$ este un proces Poisson compus cu salturi egale cu ±1. De asemenea, dacă $N(x)=N_1(x)+N_2(x)$ reprezintă numărul total de salturi al procesului $(Q(y))_{0\le y\le x}$ şi $\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2,\ldots$ sunt salturile succesive ale lui Q, atunci

$$Q(x)=\sum_{j=1}^{N(x)}\widetilde{U}_j,\qquad x>0,\tag{1.2.53}$$

unde $N(x)$ este un proces Poisson cu intensitate 2λ şi $\left(\widetilde{U}_j\right)_{j\ge1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite ce iau valori ±1 cu probabilităţi $\frac{1}{2}$.

Reamintim că am definit $U_{i,j}$ ca fiind semnul lui X_t în timpul celei a j^{a} cea mai lungă excursie a lui Y_t începută înainte de timpul 1. Cum $X_t=U_tY_t$, intervalele de excursie ale lui X_t şi Y_t sunt aceleaşi. Comparând cu reprezentarea anterioară, şi folosind faptul că $N(\infty)=N_{L_1}^{(0,\infty)}=\infty$, obţinem că $U_{1,j}=\widetilde{U}_j$ oricare ar fi $j\ge1$, şi deci $(U_{1,j})_{j\ge1}$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite ce iau valorile ±1 cu probabilităţi egale. Demonstraţia faptului că întregul şir $(U_{i,j})_{i,j\ge1}$ are aceeaşi proprietate fiind similară demonstraţiei din Teorem 1.2.20, o omitem.

Pentru a încheia demonstraţia, rămâne de arătat că şirul $(U_{i,j})_{i,j\ge1}$ este de asemenea independent de filtraţia $\mathscr{F}^Y$ generată de Y.

Să observăm mai întâi că deoarece X şi $-X$ au aceeaşi distribuţie şi $|X_t| = Y_t$, avem

$$P(X_t > 0, Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n) = P(X_t < 0, Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n),$$

oricare ar fi $t > 0$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, şi oricare ar fi mulţimile Borel $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, $n \geq 1$, relaţie ce demonstrează independenţa lui $U_t = \operatorname{sgn}(X_t)$ de filtraţia $\mathscr{F}^Y$ a lui Y.

În continuare, pentru indici $i, j \geq 1$ arbitrar fixaţi, putem reprezenta variabila aleatoare $U_{i,j}$ ca în relaţia (1.2.48). Folosind faptul că $E(U_t) = 0$, şi procedând ca în demonstraţia Teoremei 1.2.20, obţinem $E\left(U_{i,j} \middle| \mathscr{F}^Y\right) = 0$. Rezultă că variabila aleatoare $U_{i,j}$ este independentă de $\mathscr{F}^Y$, şi deci U_t este o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t în sensul Definiţiei 1.2.17, încheiând astfel demosntraţia. □

Încheiem această secţiune cu câteva observaţii privind posibilitatea extinderii teoremei anterioare prin renunţarea la cele două ipoteze suplimentare asupra funcţiei de difuzie: σ este o funcţie impară pe $\mathbb{R}^*$ şi $x\sigma(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Dacă funcţia σ verifică condiţia (1.1.10) din teorema lui Le Gall (1.1.9), atunci σ are o mulţime cel mult numărabilă de discontinuităţi. Dacă această mulţime nu are un punct limită, atunci folosind argumente bazate pe timpi de oprire pentru a reduce problema la cazul când σ are o singură discontinuitate, care, fără a restrânge generalitatea poate fi presupusă ca fiind originea. Sau σ are acelaşi semn de ambele părţi ale originii (şi în acest caz rezultatul lui Le Gall se poate aplica), sau σ are semne diferite la stânga şi la dreapta originii. Aceasta arată că ipoteza $x\sigma(x) \geq 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$ nu este esenţială.

Condiţia ca σ să fie o funcţie impară pe $\mathbb{R}^*$ (dacă $\sigma(0) = 0$ atunci soluţia ecuaţiei (1.2.50) nu este nici măcar unică în distribuţie, de aceea nu am mai considerat acest caz) nu pare să fie o ipoteză esenţială pentru validitatea rezultatului din Teorema 1.2.22, dar este un element cheie al demonstraţiei. Ar putea fi posibil să renunţăm şi la aceasta ipoteză, folosind următoarea idee.

Dacă X_t este o soluţie slabă a ecuaţiei (1.2.50), atunci $|X_t|$ este o soluţie a ecuaţiei

$$|X_t| = \int_0^t |\sigma(X_s)|\, dB_s + L_t^0(Y), \qquad t \geq 0. \tag{1.2.54}$$

Este uşor de observat că admite o soluţie nenegativă $X_t^1 \geq 0$ (adică $\left|X_t^1\right| = X_t^1$ oricare ar fi $t \geq 0$) şi o soluţie nepozitivă X_t^2. Soluţia "generică" a ecuaţiei (1.2.54) (şi deci şi a ecuaţiei

UNIUNEA EUROPEANĂ MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI EGALITĂŢII DE ŞANSE AMPOSDRU FONDUL SOCIAL EUROPEAN POS DRU 2007-2013 INSTRUMENTE STRUCTURALE 2007-2013 MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI OIPOSDRU INSTITUTUL NAŢIONAL DE CERCETĂRI ECONOMICE "COSTIN C. KIRIŢESCU"

(1.2.50)) poate fi construită alegând cu anumite probabilităţi între excursiile lui X_t^1 şi X_t^2, şi “lipindu-le” împreună.

Astfel construită, o soluţie a ecuaţiei (1.2.54) ar trebui să fie o soluţie tare a ecuaţiei diferenţiale stochastice

$$U_t Y_t = \int_0^t |\sigma(Y_s)|\, dB_s + L_t^0(Y),$$

unde U_t este o anumită alegere de semn pentru Y_t, şi $U_t Y_t \geq 0$ oricare ar fi $t \geq 0$. Cu toate acestea, nu am reuşit până în prezent să implementăm aceste idei pentru a obţine un rezultat similar celui din Teorema 1.2.22, dar fără ipotezele suplimentare asupra funcţiei de difuzie din această teoremă, această problemă rămânând în continuare deschisă.

UNIUNEA EUROPEANĂ
MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI EGALITĂŢII DE ŞANSE AMPOSDRU
FONDUL SOCIAL EUROPEAN POS DRU 2007-2013
INSTRUMENTE STRUCTURALE 2007-2013
MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
OIPOSDRU
INSTITUTUL NAŢIONAL DE CERCETĂRI ECONOMICE "COSTIN C. KIRIŢESCU"

Capitolul 2

APLICAŢII

2.1 Un model probabilist pentru circulaţia banilor

2.1.1 Modelul

Circulaţia banilor este esenţială într-o economie viabilă. Eventualele blocaje ce pot apare în circulaţia banilor pot duce la falimentarea unor firme, la imposibilitatea de plată (şi ca urmare la executarea silită), fapte ce nu sunt de dorit şi care ar trebui evitate. Pentru a putea înţelege mai bine factorii care intervin în circulaţia banilor, precum şi modul în care aceştia afectează circulaţia banilor, este deosebit de importantă elaborarea de modele matematice pentru circulaţia banilor, care să dea informaţii precise despre comportamentul acestui proces complicat al circulaţiei banilor.

Pentru a elabora un model matematic, vom simplifica problema concentrându-ne atenţia asupra circulaţia unei unităţi singure unităţi monetare, a unui "*cent*" (unitate monetară egală în valoare cu $1/100$ din moneda de referinţă). Odată înţeles modelul matematic pentru circulaţia unui cent, putem înţelege circulaţia unei sume mai mari de bani, considerând că această sumă este constituită din numărul corespunzător n de cenţi, şi urmărind n copii (independente) ale modelul matematic pentru un singur cent.

Recent, în lucrarea [Pa13a] autorul a obţinut un model probabilist pentru circulaţia banilor, pe care îl prezentăm în continuare.

Mai mulţi autori au considerat implicaţiile convingerilor morale personale (aşa numitele "*golden rules*" – a se vedea spre exemplu [Be09], [Be07], [Be95] şi referinţele din aceste articole) în interacţiunile dintre membrii unei societăţii. Inspirat de aceste lucrări, am elaborat un model probabilist pentru circulaţia banilor (adică pentru traiectoria descrisă de o monedă, un cent spre exemplu) într-o societate în care indivizii folosesc una din regulile: "*dăruieşte vecinului tău*" (generoşi) sau "*păstrează pentru tine*" (ne-generoşi). Presupunem de asemenea că deciziile indivizilor sunt independente una de cealaltă, au loc cu aceeaşi probabilitate, şi că sunt de asemenea independente de deciziile anterioare. Acest model este de asemenea adecvat pentru o Economie în care firmele adoptă, la fiecare moment de timp, una din două strategii posibile: să plătească sau să păstreze banii acumulaţi.

Pentru a da o formulare precisă a modelului, considerăm o populaţie ce ocupă poziţiile întregi de pe axa numerelor reale, şi presupunem că un cent se află iniţial în posesia persoanei aflată în origine. Presupunem că atunci când se află în posesia monedei, membrii populaţiei decid să o păstreze sau să o cheltuiască, mai precis să o dea unuia din cei doi vecini adiacenţi. Presupunem de asemenea că tranziţiile monedei au loc în timp discret, şi construim modelul bazat pe următoarele ipoteze.

Indivizii decid să păstreze sau să dea monedă cu aceeaşi probabilitate (constantă în timp), decizia fiind independentă de deciziile anterioare, precum şi de deciziile restului populaţiei. Dacă un individ decide să dea moneda, el o dă unuia din cei doi vecinii ai săi, cu probabilităţi egale.

Din punct de vedere matematic, în aceste ipoteze, drumul aleator S_n reprezentând poziţia monedei la momentul $n \in \mathbb{N}$ poate fi descrisă după cum urmează.

Pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ fixat, considerăm următoarele şiruri de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, independente de asemenea unele de altele:

i) $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ - variabile aleatoare ce iau valori ± 1 cu probabilităţi egale (Y_i reprezintă incrementul poziţiei monedei la momentul de timp i, dacă individul ce are moneda la acest moment de timp este de acord să o dea unuia din vecinii săi)

ii) $(U_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}, j\in\mathbb{N}}$ - variabile aleatoare Bernoulli ce iau valoarea 1 cu probabilitate $p \in (0,1)$

($U_{i,j}=1$ dacă individul i are moneda la momentul de timp j şi este de acord să dea moneda unuia din vecinii săi, şi $U_{i,j}=0$ în rest)

Considerând că moneda se află iniţial în origine poziţia monedei în acest model este dată de drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde

$$S_n=\begin{cases}0, & n=0\\ X_1+\ldots+X_n, & n\geq 1\end{cases}, \tag{2.1.1}$$

şi

$$X_{n+1}=U_{S_n,n}Y_{n+1}=\begin{cases}Y_{n+1}, & \text{dacă } U_{S_n,n}=1\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.1.2}$$

Considerăm de asemenea filtraţia $\mathscr{F}=(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $\mathscr{F}_0=\sigma\left(U_{i,0}:i\in\mathbb{Z}\right)$ şi $\mathscr{F}_n=\sigma\left(U_{i,j},Y_k:i\in\mathbb{Z},j<n,k\leq n\right)$, $n\geq 1$ reprezintă σ-algebra evenimentelor cunoscute la timpul $n\in\mathbb{N}^*$.

Să observăm că în acest model considerăm că decizia unui individ de a da (sau a nu da) moneda vecinului său adiacent este luată la momentul de timp "$n+1/2$", adică este cunoscută la momentul discret de timp $n+1$ dar nu este cunoscută la momentul de timp n. De asemenea, să observăm că în conformitate cu definiţia dată, variabilele aleatoare $U_{i,n-1}$ şi Y_n sunt $\mathscr{F}_n$-măsurabile, iar $U_{i,n}$ şi Y_{n+1} sunt independente de $\mathscr{F}_n$, pentru orice $i\in\mathbb{Z}$ şi $n\in\mathbb{N}$.

Considerăm de asemenea procesul V_n definit de

$$V_n=\sum_{j=1}^{n}1_{\{S_j\neq S_{j-1}\}}=\sum_{j=0}^{n-1}U_{S_j,j}, \qquad n\geq 1, \tag{2.1.3}$$

ce reprezintă numărul de tranziţii distincte ale drumului aleator corespunzător monedei până la momentul de timp n.

2.1.2 Proprietăţi ale modelului

Cu această pregătire putem acum enunţa o primă proprietate a modelului studiat, după cum urmează.

Lema 2.1.1 ([Pa13a]). *Are loc convergenţa aproape sigură* $\lim_{n\to\infty}V_n=\infty$.

Demonstraţie. Cum $\left(U_{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}}$ este un şir de variabile aleatoare Bernoulli independente, obţinem

$$\begin{aligned} P\left(U_{S_j,j}=1\right) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} P\left(U_{i,j}=1,S_j=i\right) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} P\left(U_{i,j}=1\right)P\left(S_j=i\right) \\ &= p\sum_{i\in\mathbb{Z}} P\left(S_j=i\right) \\ &= p, \end{aligned}$$

pentru orice $j\in\mathbb{N}$, deoarece variabilele aleatoare $U_{i,j}$ şi S_j sunt independente (variabila aleatoare S_j este $\mathscr{F}_j$-măsurabilă, iar $U_{i,j}$ este independentă de $\mathscr{F}_j$).

Cum din ipoteză $p>0$, obţinem

$$\sum_{j=0}^{\infty} P\left(U_{S_j,j}=1\right)=\infty,$$

şi concluzia lemei rezultă din lemma Borel-Cantelli dacă arătăm că $A_j=\left\{U_{S_j,j}=1\right\}$, $j\in\mathbb{N}$, formează un şir de evenimente independente.

Aceasta rezultă folosind independenţa şirului de variabile aleatoare $U_{i,j}$, după cum urmează. Pentru orice $0\leq i<j$ avem

$$\begin{aligned} P\left(U_{S_i,i}=1,U_{S_j,j}=1\right) &= \sum_{k,\mathbb{Z}} P\left(U_{S_i,i}=1,U_{k,j}=1,S_j=k\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} P\left(U_{S_i,i}=1,S_j=k\right)P\left(U_{k,j}=1\right), \end{aligned}$$

deoarece $U_{S_i,i}$ şi S_j sunt variabile aleatoare $\mathscr{F}_j$-măsurabile (reamintim că $U_{k,i}$ este o variabilă aleatoare $\mathscr{F}_{i+1}$-măsurabilă, şi conform ipotezei $i+1\leq j$), şi $U_{k,j}$ este o variabilă aleatoare independentă de $\mathscr{F}_j$. Obţinem

$$\begin{aligned} P\left(U_{S_i,i}=1,U_{S_j,j}=1\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} P\left(U_{S_i,i}=1,S_j=k\right)P\left(U_{k,j}=1\right) \\ &= p\sum_{k\in\mathbb{Z}} P\left(U_{S_i,i}=1,S_j=k\right) \\ &= pP\left(U_{S_i,i}=1\right) \\ &= P\left(U_{S_i,i}=1\right)P\left(U_{S_j,j}=1\right), \end{aligned}$$

ce demonstrează că evenimentele $A_i = \left\{U_{S_i,i} = 1\right\}$, $i = 1,2,\ldots$, sunt independente două câte două. Folosind un argument similar şi inducţia matematică, se poate demonstra că evenimentele $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ formează un şir de evenimente independente, încheiând demonstraţia. □

Lema anterioară arată că în afara unei mulţimi de probabilitate zero putem defini inversul la dreapta α_n al procesului V_n prin

$$\alpha_n = \min\{m \geq 0 : V_m \geq n\}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.4}$$

Reamintim (a se vedea spre exemplu [No98]) că un lanţ Markov se numeşte *ireductibil* dacă începând dintr-un punct arbitrar al spaţiului stărilor poate ajunge în orice alt punct al spaţiului stărilor cu probabilitate pozitivă, şi se numeşte *recurent* dacă se reîntoarce aproape sigur la punctul iniţial de plecare (pentru orice alegere a acestuia în spaţiul stărilor).

Câteva din proprietăţile drumului aleator S_n sunt conţinute în următoarea.

Propoziţia 2.1.2. *Drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingală recurentă şi ireductibilă.*

Demonstraţie. Din definiţia proceselor S_n şi α_n obţinem

$$S_{\alpha_n} = \ldots = S_{\alpha_{n+1}-1} \neq S_{\alpha_{n+1}}$$

şi

$$P\left(S_{\alpha_{n+1}} - S_{\alpha_n} = \pm 1\right) = \frac{1}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi deci procesul $(S_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ este un drum aleator simetric simplu pe $\mathbb{Z}$.

Conform unei teoreme a lui Pólya, drumul aleator simetric simplu pe $\mathbb{Z}$ este recurent (a se vedea spre exemplu [Bi95], pag. 117 – 118). Folosind acest rezultat şi Lemma 2.1.1 (care arată că procesul V_n creşte aproape sigur către infinit, şi deci şi inversul său α_n are această proprietate), rezultă că drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de asemenea recurent.

Cum S_n este recurent, pentru a demonstra că este şi ireductibil, este suficient să arătăm că începând din origine, S_n atinge orice punct $k \in \mathbb{Z}^*$ cu probabilitate pozitivă.

Aceasta rezultă însă uşor folosind următoarea inegalitate:

$$\begin{aligned}P\left(\exists n\geq 1:S_n=k\right) &\geq P\left(S_1=1,\ldots,S_k=k\right)\\ &= P\left(U_{0,0}=U_{1,1}=\ldots=U_{k-1,k-1}=1,Y_1=\ldots=Y_k=1\right)\\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^k\\ &> 0,\end{aligned}$$

oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţia în cazul $k<0$ fiind similară, o omitem.

Pentru a demonstra că S_n este o $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingală, considerăm σ-algebra

$$\widetilde{\mathscr{F}_n}=\sigma\left(U_{i,j},Y_j:i\in\mathbb{Z},j\leq n\right)=\sigma\left(\mathscr{F}_n\cup\{U_{i,n}:i\in\mathbf{N}\}\right)\supset\mathscr{F}_n$$

generată de $\mathscr{F}_n$ şi de variabilele aleatoare $(U_{i,n})_{i\in\mathbb{Z}}$, şi observăm că S_n este o variabilă aleatoare $\mathscr{F}_n$-măsurabilă, $U_{S_n,n}$ este $\widetilde{\mathscr{F}_n}$-măsurabilă, şi Y_{n+1} este independentă de $\widetilde{\mathscr{F}_n}$.

Folosind proprietăţile aşteptării condiţionate, obţinem

$$\begin{aligned}E\left(S_{n+1}|\mathscr{F}_n\right) &= S_n+E\left(X_{n+1}|\mathscr{F}_n\right)\\ &= S_n+E\left(E\left(U_{S_n,n}Y_{n+1}\middle|\widetilde{\mathscr{F}_n}\right)\middle|\mathscr{F}_n\right)\\ &= S_n+E\left(U_{S_n,n}E\left(Y_{n+1}\middle|\widetilde{\mathscr{F}_n}\right)\middle|\mathscr{F}_n\right)\\ &= S_n+E\left(U_{S_n,n}E\left(Y_{n+1}\right)\middle|\mathscr{F}_n\right)\\ &= S_n+E\left(Y_{n+1}\right)E\left(U_{S_n,n}\middle|\mathscr{F}_n\right)\\ &= S_n+0\cdot E\left(U_{S_n,n}\middle|\mathscr{F}_n\right)\\ &= S_n,\end{aligned}$$

încheiând astfel demonstraţia. □

Rezultatele principale ale acestei secţiuni sunt conţinute în următoarea teoremă, ce conţine trei legi limită pentru drumul aleator S_n ce descrie traiectoria monedei în modelul construit.

Teorema 2.1.3. *Drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit de (2.1.1) – (2.1.2) verifică următoarele.*

*(**SLLN**) Are loc convergenţa aproape sigură*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0. \tag{2.1.5}$$

*(**CLT**) Are loc de asemenea convergenţa în distribuţie*

$$\frac{S_n}{\sqrt{np}} \xrightarrow{\mathscr{D}} Z, \tag{2.1.6}$$

unde Z este o variabilă aleatoare normală standard.

*(**FCLT**) Mai mult, dacă $(\xi_n(t))_{0\le t\le 1}$ este procesul continuu*

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{np}}\left(S_k + X_{k+1}(nt-k)\right), \qquad \frac{k}{n} \le t \le \frac{k+1}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

obţinut prin interpolare liniară între puncte consecutive din şirul de puncte $\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{\sqrt{np}}\right)_{0\le k\le n}$, atunci toate distribuţiile finit dimensionale ale procesului $\xi_n(t)$ converg slab pentru $n\to\infty$ către distribuţiile finit dimensionale corespunzătoare ale unei mişcări Browniene standard $(B_t)_{0\le t\le 1}$ cu $B_0 = 0$.

Demonstraţie. Din demonstraţia propoziţiei anterioare rezultă că $(S_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ este un drum aleator simetric simplu pe $\mathbb{Z}$. Conform SLLN (a se vedea spre exemplu [Bi95, Theorem 6.1]) are loc convergenţa aproape sigură

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{\alpha_n}}{n} = 0. \tag{2.1.7}$$

Conform Lemei 2.1.1 V_n este un proces ce creşte aproape sigur către ∞, şi deci convergenţa anterioară are loc în particular pentru subşirul de indici V_n, adică aproape sigur are loc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{\alpha_{V_n}}}{V_n} = 0.$$

Să observăm că în relaţia anterioară este posibil ca $V_n = 0$ pentru anumiţi indici $n = 1, 2, \ldots$, şi deci termenii corespunzători ai şirului $\frac{S_{\alpha_{V_n}}}{V_n}$ nu sunt definiţi pentru aceste valori ale lui n. Conform Lemei 2.1.1 însă, V_n creşte aproape sigur către infinit, şi deci numai un număr finit de termeni ai şirului $\frac{S_{\alpha_{V_n}}}{V_n}$ nu sunt (eventual) bine definiţi; pentru aceştia putem defini $\frac{S_{\alpha_{V_n}}}{V_n} = 0$ dacă $V_n = 0$, fără a afecta comportamentului limitei şirului.

Din definiţia procesului nedescrescător V_n şi a inversului său α_n rezultă că dacă $\alpha_{V_n} = m$ pentru un anumit indice $m = m(\omega) \in \mathbb{N}$, atunci $V_m = \ldots = V_n$, şi deci $S_m = \ldots = S_n$; aceasta arată că $S_{\alpha_{V_n}} = S_m = S_n$, şi combinând cu relaţia anterioară obţinem convergenţa aproape sigură

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{V_n} = 0. \tag{2.1.8}$$

În demonstraţia Lemei 2.1.1 am arătat că evenimentele $\left(\{U_{S_i,i}=1\}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ sunt independente. O demonstraţie similară arată că şi evenimentele $\left(\{U_{S_i,i}=a_i\}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ sunt independente pentru orice alegere a lui $a_i\in\{0,1\}$, $i\in\mathbb{N}$, şi deci $\left(U_{S_i,i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ formează un şir de variabile aleatoare independente. Cum $\left(U_{S_i,i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ sunt de asemenea şi identic distribuite (variabile aleatoare Bernoulli cu medie $E\left(U_{S_0,0}\right)=p$), folosind din nou SLLN obţinem convergenţa aproape sigură

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}U_{S_i,i}}{n}=EU_{S_0,0}=p. \tag{2.1.9}$$

Folosind relaţiile (2.1.8) and (2.1.9) obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{V_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}=0\cdot p=0$$

cu probabilitate 1, încheiând prima parte a demonstraţiei.

Propoziţia 2.1.2 arată că S_n este o $\mathscr{F}_n$-martingală, şi deci $\{S_{ni},\mathscr{F}_{ni},1\le i\le k_n,n\ge 1\}$ este o matrice martingală ("martingale array" în Engleză), unde $k_n=n$, $s_n=\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}$, $\mathscr{F}_{ni}=\mathscr{F}_i$ şi $S_{ni}=s_n^{-1}S_n$ (pentru notaţia şi terminologia clasică a se vedea spre exemplu [HaHe80, Ch. 3]).

Obţinem

$$s_n^2=\operatorname{Var}(S_n)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n}U_{S_{i-1},i-1}^2Y_i^2\right)=E\left(\sum_{i=0}^{n-1}U_{S_i,i}\right)=np,$$

şi deci incremenţii martingali corespunzători sunt $X_{ni}=S_{ni}-S_{n,i-1}=s_n^{-1}X_i=\frac{1}{\sqrt{np}}X_i$, $1\le i\le k_n$, $n\ge 1$.

Pentru a demonstra a doua concluzie a teoremei, vom aplica varianta Martingală a Teoremei limită Centrale (MCLT) matricei martingale S_{ni} (Teorema 3.2).

Pentru $\varepsilon>0$ arbitrar fixat avem

$$\begin{aligned}
P\left(\max_{1\le i\le k_n}|X_{ni}|>\varepsilon\right) &= P\left(\max_{1\le i\le k_n}\left|\frac{1}{\sqrt{np}}X_i\right|>\varepsilon\right)\\
&= P\left(\max_{1\le i\le k_n}\left|U_{S_{i-1},i-1}Y_i\right|>\varepsilon\sqrt{np}\right)\\
&= P\left(\max_{1\le i\le k_n}U_{S_{i-1},i-1}>\varepsilon\sqrt{np}\right)\\
&\le P\left(\max_{1\le i\le k_n}U_{S_{i-1},i-1}>1\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

oricare ar fi $n \geq \frac{1}{p\varepsilon^2}$, de unde obţinem convergenţa în probabilitate

$$\max_{1\leq i\leq k_n} |X_{ni}| \xrightarrow{P} 0. \tag{2.1.10}$$

Din prima parte a demonstraţiei rezultă că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} U_{S_i,i} = p$ aproape sigur, şi deci obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n} U_{S_{i-1},i-1}^2 Y_i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{np}\sum_{i=0}^{n-1} U_{S_{i-1},i-1} = 1$$

aproape sigur, şi în particular

$$\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2 \xrightarrow{P} 1. \tag{2.1.11}$$

De asemenea, pentru orice $n \geq 1$ avem

$$E\left(\max_{1\leq i\leq k_n} X_{ni}^2\right) = \frac{1}{np} E\left(\max_{1\leq i\leq k_n} U_{S_{i-1},i-1}^2 Y_i^2\right) = \frac{1}{np} E\left(\max_{1\leq i\leq k_n} U_{S_{i-1},i-1}\right) \leq \frac{1}{np},$$

ceea ce arată că

$$E\left(\max_{1\leq i\leq k_n} X_{ni}^2\right) \text{ este mărginită în } n. \tag{2.1.12}$$

Relaţiile (2.1.10) – (2.1.12) arată că ipotezele MCLT sunt verificate (a se vedea spre exemplu [HaHe80, Theorem 3.2]), şi deci obţinem

$$S_{nk_n} = \frac{S_n}{\sqrt{np}} \xrightarrow{\mathscr{D}} Z,$$

unde Z este o variabilă aleatoare normală standard $\mathscr{N}(0,1)$, încheiând demonstraţia celei de a doua concluzii a teoremei.

Pentru a încheia demonstraţia, vom folosi o variantă Martingală a Teoremei Limită Centrale Funcţionale (MFCLT). Conform Propoziţiei 2.1.2, S_n este o $\mathscr{F}_n$-martingală cu $S_0 = 0$, şi pentru orice $n \geq 1$ avem

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= E\left(X_n^2 \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right) \\
&= E\left(U_{S_{n-1},n-1} \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} E\left(U_{k,n-1} 1_{\{S_{n-1}=k\}} \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 1_{\{S_{n-1}=k\}} E\left(U_{k,n-1} \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 1_{\{S_{n-1}=k\}} E\left(U_{k,n-1}\right) \\
&= p \sum_{k\in\mathbb{Z}} 1_{\{S_{n-1}=k\}} \\
&= p.
\end{aligned}$$

Rezultă că $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = np$ şi $s_n^2 = E\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right) = np$, de unde obţinem

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{E\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)} = 1 \xrightarrow{P} 1. \tag{2.1.13}$$

Să observăm de asemenea că

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^n E\left(X_i^2 1_{\{|X_i|\geq\varepsilon s_n\}}\right) &= \frac{1}{np}\sum_{i=1}^n E\left(U_{S_{i-1},i-1}^2 Y_i^2 1_{\left\{U_{S_{i-1},i-1}\geq\varepsilon\sqrt{np}\right\}}\right) \\
&= \frac{1}{np}\sum_{i=1}^n E\left(U_{S_{i-1},i-1} 1_{\left\{U_{S_{i-1},i-1}\geq\varepsilon\sqrt{np}\right\}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

oricare ar fi $n > \frac{1}{\varepsilon^2 p}$ (deoarece $U_{i,j} \in \{0,1\}$ oricare ar fi $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}$).

În particular obţinem că, condiţia Lindeberg este verificată pentru S_n, adică are loc convergenţa în probabilitate

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^n E\left(X_i^2 1_{\{|X_i|\geq\varepsilon s_n\}}\right) \xrightarrow{P} 0. \tag{2.1.14}$$

Ultima concluzie din teoremă rezultă acum din MFCLT (a se vedea spre exemplu [Br71, Theorem 2], sau Teorema 1.1.17) folosind (1.2.54) – (2.1.14), încheiând demonstraţia teoremei. $\square$

2.1.3 Concluzii

Pe lângă importanţa de sine stătătoare (legi limită ale un drumuri aleatoare în medii aleatoare), rezultatele obţinute în secţiunea anterioară au de asemenea importanţă Economică practică. Spre exemplu, faptul că, conform Propoziţiei 2.1.2 drumul aleator corespunzător traiectoriei monedei este recurent arată că dacă un individ este în posesia monedei la un anumit moment de timp, atunci cu siguranţă el va primi din nou moneda în viitor (de o infinitate de ori). Din punct de vedere Economic acesta este un deziderat, pentru că arată o bună circulaţie a banilor în interiorul societăţii.

Faptul că drumul aleator ale monedei este ireductibil arată că modelul considerat este corect (nepărtinitor), în sensul că fiecare individ al societăţii va fi în posesia monedei la un anumit moment de timp. De asemenea, faptul că drumul aleator este o martingală arată din nou că modelul considerat este corect (nu există o tendinţă particulară a monedei de a favoriza o anumită regiune a societăţii). De asemenea, rezultatele de convergenţă din Teorema 2.1.3 pot fi folosite pentru scopuri practice, pentru a calcula diverse probabilităţi legate de drumul aleator descris de monedă. Ideea principală este aici că prin scalarea corespunzătoare (timpul cu un factor de $\frac{1}{n}$, spaţiul cu un factor de $\frac{1}{\sqrt{np}}$), pentru valori mari ale lui n, probabilităţile legate de drumul aleator S_n pot fi aproximate prin probabilităţile corespunzătoare ale unei mişcări Browniene 1-dimensionale standard.

2.2 Extensii ale modelului

2.2.1 Modelul extins

În construcţia modelului din secţiunea anterioară am presupus că deciziile membrilor populaţiei de a păstra/da moneda unuia din vecinii adiacenţi sunt modelate de variabile aleatoare Bernoulli cu acelaşi parametru $p \in (0,1)$, adică am presupus că populaţia este omogenă din punctul de vedere al luării deciziilor. În practică, populaţia este însă în general neomogenă, şi deci este de interes să studiem cazul în care deciziile membrilor populaţiei sunt modelate de variabile aleatoare Bernoulli, dar nu neapărat cu acelaşi parametru pentru toţi indivizii, conducând astfel la următorul model extins, studiat de autor în [Pa12].

Membrii populaţiei decid să păstreze sau să dea monedă cu o anumită probabilitate (nu neapărat aceeaşi pentru toţi membrii, dar constantă în timp), decizia fiind independentă de deciziile anterioare, precum şi de deciziile restului populaţiei. Dacă un individ decide să dea moneda, el o dă unuia din cei doi vecinii ai săi, cu probabilităţi egale.

Drumul aleator reprezentând poziţia monedei poate fi descris după cum urmează. Pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ fixat, considerăm şirurile de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, independente de asemenea unele de altele:

i) $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ - variabile aleatoare ce iau valori ± 1 cu probabilităţi egale (Y_i reprezintă incrementul poziţiei monedei la momentul de timp i, dacă individul ce are moneda la acest moment de timp este de acord să o dea unuia din vecinii săi)

ii) $\left(U_{i,j}\right)_{i\in\mathbb{Z}, j\in\mathbb{N}}$ - variabile aleatoare Bernoulli ce iau valoarea 1 cu probabilitate $p_i \in (0,1)$ ($U_{i,j} = 1$ dacă individul i are moneda la momentul de timp j şi este de acord să dea moneda unuia din vecinii săi, şi $U_{i,j} = 0$ în rest).

În ipotezele modelul extins prezentat, poziţia monedei la momentul de timp $n \in \mathbb{N}$ este dată de drumul aleator $S_n(\mathbf{p})$, unde $\mathbf{p} = (\ldots, p_{-1}, p_0, p_1, \ldots)$, iar p_i reprezintă probabilitatea (constantă în timp) ca dacă individul aflat în poziţia $i \in \mathbb{Z}$ este în posesia monedei, el este de acord să o dea unuia din vecinii adiacenţi. Pentru a simplifica notaţia, în această secţiune vom renunţa la a indica explicit dependenţa de $\mathbf{p}$ a drumului aleator corespunzător traiectoriei monedei, şi vom scrie S_n în loc de $S_n(\mathbf{p})$.

Considerând că moneda se află iniţial în origine, poziţia monedei în acest model extins este dată de drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ X_1 + \ldots + X_n, & n \geq 1 \end{cases}, \tag{2.2.1}$$

şi

$$X_{n+1} = U_{S_n,n} Y_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1}, & \text{dacă } U_{S_n,n} = 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.2}$$

UNIUNEA EUROPEANĂ MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI EGALITĂŢII DE ŞANSE AMPOSDRU FONDUL SOCIAL EUROPEAN POS DRU 2007-2013 INSTRUMENTE STRUCTURALE 2007-2013 MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI OIPOSDRU INSTITUTUL NAŢIONAL DE CERCETĂRI ECONOMICE "COSTIN C. KIRIŢESCU"

Considerăm filtraţia $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ şi $\mathscr{F}_n = \sigma\left(U_{i,j}, Y_k : i \in \mathbb{Z}, j < n, k \leq n\right)$, $n \geq 1$ reprezintă σ-algebra evenimentelor cunoscute la timpul $n \in \mathbb{N}^*$. Ca şi în cazul secţiunii anterioare, observăm că în conformitate cu definiţia dată, variabilele aleatoare $U_{i,n-1}$ şi Y_n sunt $\mathscr{F}_n$-măsurabile, iar $U_{i,n}$ şi Y_{n+1} sunt independente de $\mathscr{F}_n$, pentru orice $i \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}$.

Ca şi în secţiunea anterioară, introducem procesul

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} 1_{\{S_j \neq S_{j-1}\}} = \sum_{j=0}^{n-1} U_{S_j,j}, \qquad n \geq 1, \tag{2.2.3}$$

reprezintând numărul de tranziţii distincte ale drumului aleator corespunzător monedei până la momentul de timp n.

O primă problemă ce apare în cadrul acestui model extins este că fără ipoteze suplimentare asupra parametrilor variabilelor aleatoare Bernoulli respective, este posibil ca drumul aleator corespunzător traiectoriei monedei să nu fie ireductibil/recurent. Spre exemplu, dacă $p_i = 0$ pentru un anumit $i \in \mathbb{Z}$, atunci drumul aleator S_n corespunzător traiectoriei monedei este oprit la momentul de timp $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n\}$, şi studiul comportamentului limită al drumului aleator S_n este trivial. Din punct de vedere economic, aceasta arată că în acest model banii sunt acumulaţi de anumiţi membrii ai populaţiei şi rămân în posesia acestora pentru totdeauna, fapt ce nu este evident de dorit.

Este însă posibil ca, chiar dacă $p_i \neq 0$ pentru orice $i \in \mathbb{Z}$, drumul aleator S_n să nu rămână ireductibil şi/sau recurent. Spre exemplu dacă $\inf_{i\in\mathbb{Z}} p_i = 0$, atunci drumul aleator S_n este încetinit foarte mult (membrii populaţiei tind să păstreze moneda o perioadă foarte mare de timp înainte de a o da unuia din vecinii adiacenţi), fapt ce poate conduce la pierderea proprietăţilor de ireductibilitate şi/sau recurenţă.

Aşa cum vom vedea în secţiunea următoare, o condiţie suficientă care asigură că drumul aleator S_n corespunzător traiectoriei monedei în modelul extins este ireductibil şi recurent este ca $p_i > 0$ oricare ar fi $i \in \mathbb{Z}$.

2.2.2 Proprietăţi ale modelului extins

În această secţiune vom arăta că în ipoteza suplimentară $p_i = p > 0$, drumul aleator S_n corespunzător modelului extins are aceleaşi proprietăţi ca drumul aleator din modelul prezentat în

Secţiunea 2.1. Ipoteza $\inf_{i\in\mathbb{Z}} p_i = p > 0$ este necesară pentru a arăta că drumul aleator S_n este ireductibil şi recurent.

Un prim rezultat este următorul.

Lema 2.2.1 ([Pa12])**.** *Dacă $p_i > 0$ oricare ar fi $i \in \mathbb{Z}$, atunci are loc convergenţa aproape sigură* $\lim_{n\to\infty} V_n = \infty$.

Demonstraţie. Din definiţia procesului V_n se observă uşor că acesta este un proces nedescrescător, şi deci există limita $\lim_{n\to\infty} V_n$. Avem de asemenea

$$\begin{aligned}
\left\{\lim_{n\to\infty} V_n < \infty\right\} &\subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \{V_j = V_{j+1} = \dots\} \\
&= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \{0 = U_{S_j,j} = U_{S_{j+1},j+1} = \dots\} \\
&= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \{0 = U_{S_j,j} = U_{S_j,j+1} = \dots\} \\
&\subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{i=-j}^{j} \{0 = U_{i,j} = U_{i,j+1} = \dots\},
\end{aligned}$$

deoarece $U_{S_j,j} = 0$ implică $S_{j+1} = S_j$, şi $S_j \in \{-j,\dots,j\}$ oricare ar fi $j \in \mathbb{N}^*$.

Conform ipotezei, pentru orice $i \in \mathbb{Z}$ fixat $\left(U_{i,j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ este un şir de variabile aleatoare Bernoulli independente cu $P\left(U_{i,j} = 1\right) = 1 - P\left(U_{i,j} = 0\right) = p_i > 0$, de unde obţinem

$$\begin{aligned}
P\left(0 = U_{i,j} = U_{i,j+1} = \dots\right) &= \lim_{n\to\infty} P\left(0 = U_{i,j} = U_{i,j+1} = \dots = U_{i,n+j-1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (1-p_i)^n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

datorită ipotezei $p_i > 0$ oricare ar fi $i \in \mathbb{Z}$.

Obţinem

$$P\left(\lim_{n\to\infty} V_n < \infty\right) \le \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \sum_{i=-j}^{j} P\left(0 = U_{i,j} = U_{i,j+1} = \dots\right) = 0,$$

sau echivalent $P\left(\lim_{n\to\infty} V_n = \infty\right) = 1$, încheiând astfel demonstraţia. $\square$

Lema anterioară arată că în afara unei mulţimi de probabilitate zero putem defini inversul la dreapta α_n al procesului V_n prin

$$\alpha_n = \min\{m \geq 0 : V_m \geq n\}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.4}$$

Cu această pregătire putem arăta că şi în cadrul modelului extins drumul aleator S_n este o martingală. Similar Propoziţiei 2.1.2, are loc următoarea.

Propoziţia 2.2.2 ([Pa12])**.** *Dacă $p_i > 0$ oricare ar fi $i \in \mathbb{Z}$, atunci drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingală recurentă şi ireductibilă.*

Demonstraţie. Demonstraţia faptului că S_n este drum aleator ireductibil este aceeaşi cu cea din Propoziţia 2.1.2, folosind Lema 2.2.1 în locul Lemei 2.1.1.

Cum S_n este un drum aleator recurent, pentru a demonstra că este şi ireductibil este suficient să arătăm că pornind din origine, S_n va atinge lua orice valoare $k \in \mathbb{Z}^*$ cu probabilitate pozitivă. Aceasta rezultă însă din independenţa variabilelor aleatoare $U_{i,j}$ şi Y_k, şi din ipoteza $p_i > 0$ oricare ar fi $i \in \mathbb{Z}$, după cum urmează:

$$\begin{aligned} P(\exists n \geq 1 : S_n = k) &\geq P(S_1 = 1, \ldots, S_k = k) \\ &= P\left(U_{0,0} = U_{1,1} = \ldots = U_{k-1,k-1} = 1, Y_1 = \ldots = Y_k = 1\right) \\ &= \frac{1}{2^k} \prod_{i=0}^{k-1} p_i \\ &> 0, \end{aligned}$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţia fiind similară în cazul $k < 0$, o omitem.

Demonstraţia faptului că $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingală fiind identică cu cea din Propoziţia 2.1.2, o omitem. □

Ca şi în cazul modelului din secţiunea anterioară, putem obţine o Lege Tare a Numerelor Mari pentru drumul aleator S_n corespunzător traiectoriei monedei în cazul modelul extins, în ipoteza suplimentară $\inf_{i\in\mathbb{N}} p_i = p > 0$. Rezultatul este următorul.

Teorema 2.2.3 ([Pa12],(**SLLN**))**.** *Dacă $\inf_{i\in\mathbb{N}} p_i = p > 0$ şi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este drumul aleator definit de (2.2.1) – (2.2.2), atunci are loc convergenţa aproape sigură*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0. \tag{2.2.5}$$

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 2.2.2, S_n este o $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingală cu $S_0 = 0$. Cum $ES_n^2; \leq n < \infty$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, procesul S_n^2 este o $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-submartingală.

Notând cu $A_n = \langle S \rangle_n$ variaţia pătratică a lui S_n (unicul proces previzibil şi nedescrescător cu $A_0 = 0$ pentru care $S_n^2 - A_n$ este o martingală), avem

$$E\left(S_{n+1}^2 + A_{n+1} \middle| \mathscr{F}_n\right) = S_n^2 - A_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

care datorită faptului că procesul A_n este previzibil (şi deci A_{n+1} este o variabilă aleatoare $\mathscr{F}_n$-măsurabilă), se poate scrie echivalent sub forma

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= E\left(S_{n+1}^2 - S_n^2 \middle| \mathscr{F}_n\right) \\ &= E\left((S_{n+1} - S_n)^2 \middle| \mathscr{F}_n\right) \\ &= E\left(X_{n+1}^2 \middle| \mathscr{F}_n\right). \end{aligned}$$

Cum $X_{n+1} = U_{S_n,n} Y_{n+1}$, şi folosind faptul că $S_n \in \{-n, \ldots, n\}$ este o variabilă aleatoare $\mathscr{F}_n$-măsurabilă, iar $U_{i,n} \in \{0, 1\}$ sunt variabilele aleatoare independente de $\mathscr{F}_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, din relaţia anterioară obţinem

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= E\left(U_{S_n,n}^2 Y_{n+1}^2 \middle| \mathscr{F}_n\right) \\ &= E\left(U_{S_n,n} \middle| \mathscr{F}_n\right) \\ &= E\left(\sum_{i=-n}^{n} U_{i,n} 1_{\{S_n = i\}} \middle| \mathscr{F}_n\right) \\ &= \sum_{i=-n}^{n} 1_{\{S_n = i\}} E\left(U_{i,n} \middle| \mathscr{F}_n\right) \\ &= \sum_{i=-n}^{n} 1_{\{S_n = i\}} E\left(U_{i,n}\right) \\ &= \sum_{i=-n}^{n} p_i 1_{\{S_n = i\}}. \end{aligned}$$

Sumând relaţiile anterioare pentru $n = 0, 1, \ldots$, şi folosind faptul că $A_0 = 0$, obţinem

$$A_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=-j}^{j} p_i 1_{\{S_j = i\}}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.6}$$

Folosind ipoteza $\inf_{i\in\mathbb{N}} p_i = p > 0$, obţinem

$$A_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=-j}^{j} p_i 1_{\{S_j=i\}} \geq \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=-j}^{j} p 1_{\{S_j=i\}} = p\sum_{j=0}^{n} 1_{\{S_j=\{-i,\ldots,i\}\}} = p\sum_{j=0}^{n} 1 = (n+1)\,p, \tag{2.2.7}$$

care în particular arată că $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$ aproape sigur.

Aplicând o variantă martingală a Legii Tari a Numerelor Mari (a se vedea [Wi91], pag. 123 – 124), obţinem convergenţa aproape sigură

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{A_n} = 0. \tag{2.2.8}$$

Să observăm că din relaţia (2.2.6) obţinem

$$A_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=-j}^{j} p_i 1_{\{S_j=i\}} \leq \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=-j}^{j} 1_{\{S_j=i\}} = \sum_{j=0}^{n} 1_{\{S_j=\{-i,\ldots,i\}\}} = \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1,$$

şi deci

$$\left|\frac{S_n}{n}\right| = \left|\frac{S_n}{A_n}\right| \frac{A_n}{n} \leq \left|\frac{S_n}{A_n}\right|, \qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

Combinând cu relaţia (2.2.7) obţinem deci convergenţa aproape sigură

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0,$$

încheiând astfel demonstraţia. □

Observaţia 2.2.4. *Aşa cum se poate observa uşor din demonstraţie, teorema anterioară rămâne valabilă dacă înlocuim ipoteza* $\inf_{i\in\mathbb{N}} p_i = p > 0$ *cu ipoteza mai generală*

$$\lim_{n\to\infty} \left(n\cdot \min\{p_{-n},\ldots,p_n\}\right) = \infty \tag{2.2.9}$$

(cazul $\inf_{i\in\mathbb{N}} p_i = p > 0$ *este un caz particular al acestei condiţii mai generale, deoarece* $\lim_{n\to\infty} \left(n\cdot \min\{p_{-n},\ldots,p_n\}\right) \geq \lim_{n\to\infty}(np) = \infty$*).*

2.2.3 Concluzii

Să observăm că în cazul alegerii particulare a probabilităţilor

$$\mathbf{p} = (\ldots, p_{-1}, p_0, p_1, \ldots) = (\ldots, p, p, p, \ldots),$$

drumul aleator $S_n = S_n(\mathbf{p})$ din modelul extins devine drumul aleator S_n din modelul din Secţiunea 2.1, şi în particular din Lema 2.2.1, Propoziţia 2.2.2 şi Teorema 2.2.3 se regăsesc Lema 2.1.1, Propoziţia 2.1.2 şi respectiv prima parte a Teoremei 2.1.3.

În cadrul modelului extins, studiul comportamentului drumului aleator S_n este mult mai dificil deoarece în acest caz variabilele aleatoare $\left(U_{S_n,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nu mai sunt independente. Spre exemplu, se poate observa că

$$\begin{aligned} P\left(U_{S_0,0}=1,U_{S_1,1}=1\right) &= P\left(U_{0,0}=1,U_{1,1}=1,Y_1=1\right)+P\left(U_{0,0}=1,U_{1,1}=-1,Y_1=1\right)\\ &= \frac{1}{2}p_0p_1+\frac{1}{2}p_0p_{-1}\\ &= \frac{p_0}{2}\left(p_{-1}+p_1\right) \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} & P\left(U_{S_0,0}=1\right)P\left(U_{S_1,1}=1\right)=\\ =\; & P\left(U_{0,0}=1\right)\left(P\left(U_{0,0}=0,U_{0,1}=1\right)+P\left(U_{0,0}=1,U_{1,1}=1,Y_1=1\right)+P\left(U_{0,0}=1,U_{1,1}=-1,Y_1=-1\right)\right)\\ =\; & p_0\left(\left(1-p_0\right)p_0+\frac{1}{2}p_0p_1+\frac{1}{2}p_0p_{-1}\right)\\ =\; & \frac{p_0^2}{2}\left(2-2p_0+p_{-1}+p_1\right), \end{aligned}$$

şi deci în general $P\left(U_{S_0,0}=1,U_{S_1,1}=1\right)\neq P\left(U_{S_0,0}=1\right)P\left(U_{S_1,1}=1\right)$, ceea ce arată că variabilele aleatoare $U_{S_0,0}$ şi $U_{S_1,1}$ nu sunt independente (cu excepţia alegerii particulare a probabilităţilor p_{-1}, p_0 şi p_1 astfel încât $p_0 = \frac{p_{-1}+p_1}{2}$). Un calcul similar arată că $\left(U_{S_n,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este în general un şir de variabile aleatoare dependente.

De asemenea, în cazul modelului extins variabilele aleatoare $\left(U_{S_n,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nu mai sunt nici identic distribuite. Spre exemplu, se poate observa că

$$P\left(U_{S_0,0}=1\right)=P\left(U_{0,0}=1\right)=p_0,$$

iar

$$\begin{aligned} & P\left(U_{S_1,1}=1\right)= \\ = \; & P\left(U_{0,0}=0, U_{0,1}=1\right)+P\left(U_{0,0}=1, U_{1,1}=1, Y_1=1\right)+P\left(U_{0,0}=1, U_{1,1}=-1, Y_1=-1\right) \\ = \; & \left(1-p_0\right) p_0+\frac{1}{2} p_0 p_1+\frac{1}{2} p_0 p_{-1} \\ = \; & p_0\left(1-p_0+\frac{p_{-1}+p_1}{2}\right), \end{aligned}$$

şi deci în general $P\left(U_{S_0,0}=1\right) \neq P\left(U_{S_1,1}=1\right)$, ceea ce arată că variabilele aleatoare $U_{S_0,0}$ şi $U_{S_1,1}$ nu sunt identic distribuite (cu excepţia alegerii particulare a probabilităţilor p_{-1}, p_0 şi p_1 astfel încât $p_0=\frac{p_{-1}+p_1}{2}$). Un calcul similar arată că $\left(U_{S_n,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este în general un şir de variabile aleatoare cu distribuţii diferite.

Faptul că variabile aleatoare $\left(U_{S_n,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt dependente, şi nu au aceeaşi distribuţie, face mult mai dificilă obţinerea unei Teoreme Limită Centrale (sau a variantei funcţionale a acesteia) pentru drumul aleator S_n în cadrul modelului extins din această secţiune, şi rămâne o problemă deschisă care urmează a fi studiată în continuare.

Aşa cum am arătat, în ipoteza minimală $p_i>0$ oricare ar fi $i\in\mathbb{N}$, drumul aleator S_n corespunzător traiectoriei monedei în modelul extins este (ca şi în modelul din Secţiunea 2.1) o martingală recurentă şi ireductibilă. De asemenea, în ipotea suplimentară $\inf_{i\in\mathbb{Z}} p_i=p>0$, sau mai general dacă este verificată ipoteza (2.2.9), atunci are loc şi Legea Tare a Numerelor Mari pentru acest model.

Pe lângă importanţa de sine stătătoare (proprietăţi martingale şi legi limită ale unui drum aleator în medii aleatoare), aceste rezultate dau informaţii Economice cu privire la traseul descris de o monedă în cadrul acestui model extins. Spre exemplu, faptul că, conform Propoziţiei 2.2.2 drumul aleator corespunzător traiectoriei monedei este recurent arată că dacă un individ este în posesia monedei la un anumit moment de timp, atunci cu siguranţă el va primi din nou moneda în viitor (de o infinitate de ori). Din punct de vedere Economic acesta este un deziderat, pentru că arată o bună circulaţie a banilor în interiorul societăţii.

Faptul că drumul aleator corespunzător traiectorie monedei este ireductibil arată că modelul considerat este corect, în sensul că fiecare individ al societăţii va fi în posesia monedei la un anumit moment de timp. De asemenea, faptul că drumul aleator este o martingală arată din nou că modelul considerat este corect (nu există o tendinţă particulară a monedei de a favoriza o anumită regiune a societăţii).

Capitolul 3

CONCLUZII

3.1 Rezultate aşteptate şi rezultate obţinute

În aceasta secţiune vom analiza comparativ rezultatele obţinute şi cele estimate a fi obţinute, prin prisma obiectivele proiectului de cercetare (conform Planului de lucru al proiectului, din Secţiunea 5.5 a propunerii de proiect), respectiv a existenţei şi unicităţii proceselor studiate, a proprietăţilor şi a diferitelor reprezentări ale acestora, respectiv a aplicaţiilor economice sau în domenii conexe. Pentru fiecare din acestea a fost planficată elaborarea câte unei lucrări (ISI sau BDI), fiind realizate un total de 5 lucrări (ISI sau BDI), ce acoperă fiecare din obiectivele menţionate, aşa cum se poate vedea detaliat din secţiunile următoare. Considerăm deci că au fost îndeplinite obiectivele proiectului de cercetare depus.

3.1.1 Existenţă şi unicitate pentru procesele studiate

Unul din obiectivele proiectului este studiul existenţei şi unicităţii pentru diversele ecuaţii diferenţiale stochastice reprezentând perturbări ale mişcării Browniene.

Ca o consecinţă a Teoremei 1.2.3 obţinută de autor în [PaPa11a], în Consecinţa 1.2.6 s-a obţinut existenţa şi unicitatea tare a soluţiilor acestei ecuaţii în clasa funcţiilor ce petrec timp Lebesgue nul în origine. Aşa cum s-a arătat în Observaţia 1.2.7, acest rezultat poate fi privit ca şi caz limită $\alpha \searrow 0$ al rezultatului obţinut de autori în [BaBuCh07], şi completează acest rezultat cu cazul $\alpha = 0$.

În Teorema 1.2.11 ([PaPa11b]), autorul a demonstrat existenţa soluţiilor slabe a ecuaţiei diferenţiale stochastice (1.2.15), şi a demonstrat unicitatea în modul (unicitatea $|x|$-soluţiilor tari, în sensul Definiţiei 1.2.13) a soluţiilor acestei ecuaţii.

În lucrarea [Pa13b], autorul a introdus noţiunea de φ-soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale stochastice, şi noţiunile corespunzătoare de φ-existenţă tare şi φ-unicitate tare. Noţiunea de φ-soluţie tare interpolează între noţiunile clasice de soluţie slabă şi soluţie tare, iar în cazul particular când φ este o funcţie injectivă, o φ-soluţie tare coincide cu noţiunea clasică de soluţie tare. În Teorema 1.2.20 autorul a demonstrat existenţa unei $\varphi_{a,b}$-soluţii tari a soluţiei ecuaţiei (1.2.21), pentru o anumită funcţie $\varphi_{a,b}$ ce depinde de parametrii ecuaţiei diferenţiale considerate, precum şi $\varphi_{a,b}$-unicitatea acesteia.

În Teorema 1.2.22 ([Pa13b]), autorul a demonstrat existenţa unei $|x|$-soluţii tari a ecuaţiei diferenţiale stochastice (1.2.50), precum şi a $|x|$-unicităţii acesteia. Aşa cum se arată în discuţia de la sfârşitul Secţiunii 1.2.3, acest rezultat este un prim pas în înlocuirea condiţiei "$\sigma > \varepsilon$" din teorema lui Le Gall (Teorema 1.1.9), cu condiţia mai generală "$|\sigma| \geq \varepsilon$".

3.1.2 Reprezentări şi proprietăţi ale proceselor studiate

În Teorema 1.2.3 ([PaPa11a]) s-a obţinut o nouă reprezentare a soluţiei ecuaţiei diferenţiale (1.2.1) ce corespunde unei mişcări Browniene sticky. Aşa cum se arată în Observaţia 1.2.4, această reprezentare este diferită cea clasică datorată lui Engelbert şi Schmidt, care foloseşte noţiunea de time delay (a se vedea [EnSc85], Definiţia 4.1 şi Teorema 5.5).

În Teorema 1.2.11 obţinută de autor în [PaPa11b], s-a obţinut o *reprezentare explicită a tuturor soluţiilor slabe* ale ecuaţiei diferenţiale stochastice (1.2.15). Această reprezentare foloseşte noţiunea de *alegere de semn* introdusă de autor în Definiţia 1.2.9, şi explică existenţa unei soluţii tari a acestei ecuaţii, precum şi unicitatea în distribuţie a tuturor soluţiilor slabe.

În Teorema 1.2.20 ([Pa13b]), autorul a obţinut o *reprezentare a tuturor soluţiilor slabe* ale ecuaţiei (1.2.21), în funcţie de o alegere de semn independentă şi identic distribuită. Acest rezultat explică pe de o parte inexistenţa unei soluţii tari a acestei ecuaţii, iar pe de altă parte poate fi privită (în cazul particular $a = -b = 1$) ca un mod de a reconstrui (în distribuţie, nu traiectorial) mişcarea Browniană din mişcarea Browniană reflectată, folosind o alegere de semn, adică schimbând aleator semnul excursiilor mişcării Browniene reflectate.

În Teorema 1.2.22 din [Pa13b], autorul a ob'inut o *reprezentare a tuturor soluţiilor slabe* ale ecuaţiei diferenţiale stochastice (1.2.50), în funcţie de noţiunea de alegere de semn independentă şi identic distribuită.

3.1.3 Aplicaţii ale proceselor studiate

Recent, în lucrarea [Pa13a], autorul a introdus un model probabilist pentru circulaţia banilor, într-o societate în care membrii decid să păstreze sau să dea moneda unui vecin adiacent cu o anumită probabilitate. Alternativ, modelul este adecvat pentru o economie în care firmele iau una din două decizii posibile: să păstreze banii obţinuţi sau să îi dea uneia din firmele adiacente (să îi investească, spre exemplu). În Propoziţia 2.1.2 s-a arătat că drumul aleator corespunzător traiectoriei unei monede în acest model este o martingală recurentă şi ireductibilă, iar în Teorema 2.1.3 s-au obţinut trei legi limită ce dau comportamentul asimptotic pentru acest drum aleator: Legea Tare a Numerelor Mari, Teorema Limită Centrală, şi varianta Funcţională a Teoremei Limită Centrală. Această teoremă arată că drumul aleator corespunzător traiectoriei monedei în acest model poate fi aproximat printr-o mişcare Browniană cu o anumită schimbare de timp, şi este identificată explicit această schimbare de timp (în funcţie de probabilitatea p ca un membru al populaţiei să decidă să dea moneda unuia din vecinii săi adiacenţi). Aşa cum s-a arătat în Secţiunea 2.1.3, aceste rezultate dau informaţii de interes economic, putând fi folosite pentru luarea de decizii sau măsuri economice cu privire la circulaţia banilor în societate.

Extinzând aceste rezultate, în lucrarea [Pa12], autorul a extins modelul anterior, considerând o populaţie neomogenă din punctul de vedere al luării deciziilor. Mai precis, dacă în varianta anterioară decizia de a da moneda unuia din vecinii adiacenţi era aceeaşi pentru toţi membrii populaţiei (populaţie omogenă), în modelul extins această probabilitate poate diferi de la individ la individ. Ca şi în modelul anterior, şi în acest model extins am arătat că drumul aleator al monedei este o martingală recurentă şi ireductibilă (Prpoziţia 2.2.2), şi în ipoteza că probabilităţile din modelul extins sunt uniform mărginite inferior de o constantă pozitivă, am obţinut o Lege Tare a Numerelor Mari pentru drumul aleator al monedei în interiorul populaţiei.

3.2 Evidenţierea rezultatelor proprii obţinute

Cecetarea ştiinţifică efectuată a vizat în principal două categorii: cercetarea teoretică originală şi cercetarea aplicativă originală. Prezentăm în continuare contribuţiile originale proprii obţinute în fiecare din aceste categorii.

3.2.1 Cercetare teoretică originală

Cercetarea teoretică efectuată a vizat studiul proceselor înrudite mişcării Browniene, din perspectiva existenţei şi unicităţii soluţiilor ecuaţiilor stochastice diferenţiale ce definesc aceste procese, precum şi a proprietăţilor şi a reprezentărilor acestora.

Rezultatele proprii obţinute au constat în introducerea unui nou tip de soluţie a unei ecuaţii stochastice diferenţiale (φ-*soluţie tare* a unei ecuaţii stochastice diferenţiale), a două noi noţiuni ce permit descrierea în anumite condiţii a tuturor soluţiilor slabe ale ecuaţiilor stochastice diferenţiale (*alegere de semn* şi *alegere de semn independentă şi identic distribuită*), şi a mai multor rezultate privind existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor stochastice diferenţiale. Astfel:

– în lucrarea [PaPa11a] (Teorema 1.2.3) a fost obţinută o reprezentare a soluţiei ecuaţiei diferenţiale stochastice (1.2.1), diferită de reprezentarea clasică datorată lui Engelbert-Schmidt (a se vedea Observaţia 1.2.4).

– în lucrarea [PaPa11a] (Consecinţa 1.2.6), ca o consecinţă a reprezentării obţinute în Teorema 1.2.3, s-a obţinut un rezultat de existenţă şi unicitate pentru soluţiile ecuaţiei (1.2.1), în clasa funcţiilor ce petrec timp Lebesgue nul în origine.

– în lucrarea [PaPa11b] (Teorema 1.2.11) s-a demonstrat existenţa soluţiilor slabe ale ecuaţiei (1.2.15), s-a obţinut reprezentarea tuturor soluţiilor slabe ale ecuaţiei în funcţie de o alegere de semn (noţiune introdusă de autor), şi s-a demonstrat $|x|$-unicitatea tare a soluţiei (în sensul Definiţiei 1.2.13). Acest rezultat completează un rezultat obţinut anterior de alţi autori ([BaBuCh07]) cu cazul limită $\alpha \searrow 0$.

– în lucrarea [Pa13b] autorul a introdus noţiunile de *alegere de semn* (Definiţia 1.2.9) şi *alegere de semn independentă şi identic distribuită* (Definiţia 1.2.17), noţiuni importante ce permit descrierea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale.

– în lucrarea [Pa13b], autorul a introdus noţiunea importantă de φ-soluţie tare (Definiţia 1.2.13), noţiune ce interpolează între noţiunile clasice de soluţie slabă şi soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale stochastice. Autorul a demonstrat (Teorema 1.2.20) existenţa şi unicitatea $\varphi_{a,b}$-soluţiilor tari ale ecuaţiei (1.2.21) pentru o anumită funcţie $\varphi_{a,b}$ ce depinde de parametrii a şi b ai acestei ecuaţii, şi a obţinut reprezentarea explicită a tuturor soluţiilor slabe ale acestei ecuaţii, în funcţie de o alegere de semn.

– în lucrarea [Pa13b], autorul a obţinut existenţa şi unicitatea $|x|$-soluţiilor tari pentru ecuaţia diferenţială stochastică (1.2.50), precum şi o reprezentare explicită a tuturor soluţiilor slabe a acestei ecuaţii în funcţie de o alegere de semn.

3.2.2 Cercetare aplicativă originală

Cercetarea aplicativă a vizat în principal mediul economic, mai precis circulaţia banilor. Circulaţia banilor în societate în general, sau în mediul economic, în particular, este un factor esenţial al bunei funcţionări a acesteia. Dacă membrii societăţii (sau firmele) păstrează banii pentru perioade mari de timp, şi nu asigură o circulaţie suficient de bună a acestora, rezultatul este apariţia blocajelor financiare, ce au impact negativ asupra întregii societăţi (şi a bunăstării individuale a fiecăruia din membrii săi). Este aşadar de dorit înţelegerea factorilor ce determină circulaţia banilor, şi modul în care aceasta se realizează. Inspirat de o serie de articole (a se vedea [Be09], [Be07], [Be95] şi referinţele citate în aceste articole) care plecând de la convingerile personale ale indivizilor modelează şi analizează diverse procese economice sau jocuri între membrii societăţii, am construit un model pentru circulaţia banilor (o monedă) într-o societate în care indivizii păstrează sau dau moneda unuia din vecinii adiacenţi cu o anumită probabilitate fixată. În modelul astfel construit, traiectoria descrisă de monedă reprezintă din punct de vedere matematic un drum aleator într-un mediu aleator (populaţia ce poate opri sau nu moneda la un anumit moment de timp), şi am analizat proprietăţile acesteia.

În lucrarea [Pa13a] am arătat că drumul aleator al monedei este o martingală recurentă şi ireductibilă (Propoziţia 2.1.2), fapt ce arată că circulaţia banilor în societate este "corectă" (proprietatea de martingală arată că aşteptarea condiţionată a poziţiei viitoare a monedei dat fiind prezentul coincide cu poziţia curentă a monedei), că este "nepărtinitoare" (proprietatea de ireductibilitate arată că toţi membrii societăţii vor fi la un moment dat de timp în posesia monedei), şi că este de asemenea "trainică" (proprietatea de recurenţă arată că dacă un individ este la un moment dat în posesia monedei, el va fi şi în viitor în posesia ei, chiar de o infinitate de ori).

Am obţinut de asemenea şi comportamentul limită al traseului monedei, prin obţinerea unei Legi tari a Numerelor Mari, a Teoremei Limită Centrale, şi a variantei Funcţionale a Teoremei Limită Centrale (Teorema 2.1.3). Ultimul dintre aceste rezultate arată spre exemplu că drumul aleator al monedei poate fi aproximat printr-o schimbare de timp a unei mişcări Browniene, schimbare de timp ce depinde de parametrii modelului considerat, şi care este determinată în mod explicit. Aceste rezultate pot fi folosite de specialiştii în domeniu pentru a calcula diverse probabilităţi referitoare la drumul aleator al monedei, şi pentru a lua măsurile financiare necesare pentru a preîntâmpina unele neajunsuri, sau pentru a favoriza circulaţia banilor în sensul creşterii economice, şi implicit a creşterii bunăstării generale a populaţiei.

În lucrarea [Pa12], am extins acest model considerând o populaţie neomogenă, în sensul că dacă în modelul anterior membrii populaţiei luau decizia de a da moneda unuia din vecini cu aceeaşi probabilitate (populaţie omogenă), în modelul extins am considrat că această probabilitate este variabilă de la individ la individ (populaţia este deci neomogenă).

În Propoziţia 2.2.2, în ipoteza că probabilităţile de a da moneda unuia din vecini sunt pozitive pentru toţi membrii populaţiei, am arătat că drumul aleator al monedei rămâne, ca şi în modelul anterior, o martingală recurentă şi ireductibilă, având aceleaşi interpretări şi implicaţii economice.

În ipoteza suplimentară că probabilităţile de a da moneda unuia din vecini sunt mărginite inferior de o constantă pozitivă pentru toţi membrii populaţiei, am obţinut şi Legea Tare a Numerelor Mari (2.2.3) pentru drumul aleator corespunzător traiectoriei monedei.

3.3 Impactul posibil al rezultatelor obţinute

3.3.1 În domeniul matematic

Este de aşteptat ca noţiunile introduse şi rezultatele obţinute să fie urmărite şi dezvolatet de către alţi cercetători de specialitate din domeniu. Avem în vedere aici în special noţiunile de φ-soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale stochastice (Definiţia 1.2.13), ce interpolează între noţiunile clasice soluţie slabă şi cea de soluţie tare a unei ecuaţii diferenţiale stochastice , noţiunea de alegere de semn (1.2.16) şi de alegere de semn independentă şi identic distribuită (1.2.17), ce permit (ca în Teorema 1.2.11,Teorema 1.2.20, sau Teorema 1.2.22) descrierea tutror soluţiilor slabe ale unei ecuaţii diferenţiale stochastice.

Simplificând mult lucrurile, situaţia este oarecum asemănătoare ecuaţiilor algebrice, spre exemplu a ecuaţiei $x^2 = 1$, în care nu avem unicitate (ecuaţia are două soluţii posibile, $x = 1$ şi $x = -1$), dar este posibilă descrierea tuturor soluţiilor plecând de la soluţia $x = 1$ prin înmulţire cu ± 1 (o alegere de semn). După cunoştinţa noastră, acest fapt este nou şi unic: posibilitatea determinării tuturor soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale stochastice, şi credem că va avea un impact favorabil asupra cercetărilor din domeniu.

Ca şi element specific, dat fiind că în comunitatea de cercetători specialişti în domeniul matematic producerea şi consumul de informaţie este cel mai important tip de activitate, şi poate deci fi privită ca o societate informaţională, aceasta se poate încadra în sens larg în obiectivul transveral al proiectului *societate informaţională şi tehnologia informaţiei şi comunicării (TIC)*.

3.3.2 În domeniul economic

În domeniul economic, este de aşteptat ca cercetările aplicative legate de circulaţia banilor în societate (sau între firme) să fie utilizate pentru studiul efectiv al acestui proces şi al luării deciziilor financiare necesare de organele competente să facă aceasta. Rezultatele cercetărilor efectuate indică un comportament Brownian al circulaţiei banilor (cu o anumită schimbare de timp, ce poate fi privită ca parametru al modelului), şi este deci posibil să se studieze ştiinţific acest comportament, în scopul creşterii economice şi implicit a bunăstării membrilor populaţiei. Spre exemplu, se pot calcula probabilităţile ca moneda să se afle într-o anumită regiune a populaţiei la un anumit moment de timp, şi dacă valorile obţinute nu trec de un prag minim stabilit, se pot determine valorile minimale ale parametrilor din modelul elaborat care duc la trecerea pragului necesar. Ca urmare a acetui studiu, se pot pune în funcţiune pârghiile financiare necesare care duc la modificarea convenabilă a parametrilor astfel încât circulaţia banilor să se încadreze în marjele dorite. Aceasta poate fi încadrată în obiectivul transversal de *dezvoltare durabilă* a proiectului.

3.3.3 În domeniul social

Modelul economic elaborat poate (şi ar trebui sa aibă) şi impact în domeniul social, în sensul în care el arată, chiar în situaţia de criză economică şi/sau financiară prin care trecem, că dacă nu se menţine un prag minim al probabilităţilor din modelul din Secţiunea 2.2, atunci circulaţia banilor în societate îşi poate pierde proprietăţile dorite. Astfel, dacă membrii societăţii hotărăsc să "nu mai dea bani", aceasta poate duce la pierderea proprietăţii de recurenţă, ireductibilitate şi/sau martingală a drumului aleator al monedei, cu implicaţii negative asupra întregii societăţii.

Ideea generală este că, chiar dacă trecem cu toţii printr-o perioadă dificilă, trebuie să menţinem un circuit minimal al banilor în societate, altfel riscăm să ajungem la un colaps financiar general (blocaje financiare în lanţ, imposibilitate de plată, etc).

Aceasta poate fi încadrată în obiectivul transversal al proiectului privind *egalitatea de şanse* (a tuturor membrilor societăţii) sau a *dezvoltării durabile*.

Bibliografie

[Am91] Amir, M., 2003. Sticky Brownian motion as the strong limit of a sequence of random walks. Stochastic Process. Appl., 39, pag. 221 – 237.

[AtBu08] Atar, R. and Burdzy, K., 2008. Mirror couplings and Neumann eigenfunctions. Indiana Univ. Math. J., **57** (3), pag. 1317 – 1351.

[Ba82] Barlow, M. T., 1982. One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution. J. London Math. Soc., 26 (2), pag. 335 – 347.

[BaPe84] Barlow, M. T. and Perkins, E., 1984. One-dimensional stochastic differential equations involving a singular increasing process. Stochastics **12**, pag. 229 – 249.

[BaSa03] Barro, R. J. and Sala-i-Martin, X., 2003. Economic Growth. 2nd edition. Cambridge: MIT Press.

[BaBuCh07] Bass, R. F. , Burdzy, K. and Chen, Z. Q. , 2007. Pathwise uniqueness for a degenerate stochastic differential equation. Ann. Probab. **35** (6), pag. 2385 – 2418.

[BaCh01] Bass, R. and Chen, Z. Q. 2001. Stochastic differential equations for Dirichlet processes. Probab. Theory Relat. Fields, **121**, pag. 422 – 446.

[BaCh05] Bass, R. F. and Chen, Z. Q. , 2003. Brownian motion with singular drift. Ann. Probab. **31** (2), pag. 791 – 817.

[BaCh05] Bass, R. F. and Chen, Z. Q. , 2005. One-dimensional stochastic differential equations with singular and degenerate coefficients. Sankhyā, **67** (1),pag. 19 – 45.

[Be09] Berstrom, T. C., 2009. Ethics, evolution, and games among family and neighbors. Disponibil la: http://works.bepress.com/ted_bergstrom/106 [Accesat 29 Octombrie 2012].

[Be07] Bergstrom, T. C. , 2007. Some Evolutionary Economics of Family Partnerships. Am. Econ. Rev., **97** (2), pag. 482 – 486.

[Be95] Bergstrom, T. C., 1995. On the evolution of altruistic ethical rules for siblings. Am. Econ. Rev. **85** (1), pag. 58 – 81.

[Bi95] Billingsley, P., 1995. Probability and measure. 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[BlSc73] Black, F. and Scholes, M., 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy. **81** (3), pag. 637 – 654.

[Br71] Brown, B. M., 1971. Martingale central limit theorems. Ann. Math. Statist., 42 (1), pag. 59 – 66.

[Do51] Donsker, M., 1951. An invariance principle for certain probability limit theorems. Mem. Amer. Math. Soc., **1951**(6), 12 pag.

[Du96] Durrett, R. , 1996. Probability: theory and examples. 2nd edition. Belmont: Duxbury Press.

[EnSc84] Engelbert, H. J. and Schmidt, W., 1984. On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift. Berlin: Springer-Verlag. Lecture Notes in Control and Information Sciences, **69**, pag. 143 – 155. .

[EnSc85] Engelbert, H. J. and Schmidt, W., 1985. On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 68 (3), pag. 287 – 314.

[ErKa46] Erdös, P. and Kaç, M., 1946. On certain limit theorems of probability. Bull. Amer. Math. Soc., **53**, pag. 1011 – 1020.

[Fe68] Feller, W. , 1968. An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 1. 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[Ga83] Le Gall, J. F., 1983. Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. Berlin: Springer. Lecture Notes in Math. 986, pag. 15 – 31.

[Gu10] Guerrini, L. , 2010. The Solow-Swan model with AK technology and bounded population growth rate. Int. J. Pure Appl. Math., 60 (2), pag. 211 – 215.

[HaHe80] Hall, P. and Heyde, C. C., 1980. Martingale Limit Theory and Its Application. New York-London: Academic Press, Inc.

[HaLe81] Harrison, J.M. and Lemoine, A. J., 1981. Sticky Brownian motion as the limit of storage processes. J. Appl. Probab., 18, pag. 216 – 226.

[HaSh81] Harrison, J. M. and Shepp, L. A. , 1981. On skew Brownian motion. Ann. Probab., **9**(2), pag. 309 – 313.

[It46] Itô, K., 1946. On a stochastic integral equation. Proc. Japan Acad., **22** (1-4), pag. 32 – 35.

[HuWh87] Hull, J. and White, A., 1987. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. The Journal of Finance, 42 pag. 281 – 300.

[JaPr03] Jacod, J. and Protter, P., 2003. Probability essentials. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag.

[KaSh91] Karatzas, I. and Shreve, S. E., 1991. Brownian motion and stochastic calculus. 2nd edition. New York: Springer-Verlag.

[Na72] Nakao, S. 1972. On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations. Osaka J. Math., **9**, pag. 513 – 518.

[No98] Norris, J. R., 1998. Markov Chains. Cambridge: Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.

[Pa11] Pascu, M. N., 2011. Mirror couplings of reflecting Brownian motions and an application to Chavel's conjecture. Electron. J. Probab., **16**(18), pag. 504 – 530.

[PaPa11a] Pascu, M. N. and Pascu, N. R., 2011. A note on the sticky Brownian motion on $\mathbb{R}$. Bull. Transilvania Univ. of Braşov (Series III), **4**(2), pag. 57 – 62.

[PaPa11b] Pascu, M. N. and Pascu, N. R., 2011. A closer look at the solutions of a degenerate stochastic differential equation. Bull. Transilvania Univ. of Braşov (Series III), **4**(1), pag. 59 – 66.

[Pa12] Pascu, M. N., Pascu, N. R., 2012. A Strong Law of Large number for a probabilistic cash flow model. Bull. Transilvania Univ. of Braşov (va apare).

[Pa13a] Pascu, M. N., 2013. A probabilistic model for cash flow. Math. Rep. (va apare).

[Pa13b] Pascu, M. N. 2013. φ-strong solutions and uniqueness of 1-dimensional stochastic differential equations. (va apare).

[Ro09] Sheldon, R., 2009. A first course in probability. 8th edition. Upper Saddle River: Prentice Hall Press.

[RoVaYo09] Roynette, B., Vallois, P. and Yor, M., 2009. Brownian penalisations related to excursion lengths VII. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **45** (2), pag. 421 – 452.

[ReYo94] Revuz, D. and Yor, M., 1994. Continuous martingales and Brownian motion. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften No. 293.

[Sh04] Shreve, S. E., 2004. Stochastic calculus for finance II. Continuous-time models. New York: Springer-Verlag.

[Sk] Skorohod, A. V. , 1965. Studies in the theory of random processes. Boston: Addison-Wesley.

[So56] Solow, R. M., 1965. A Contribution to the Theory of Economic Growth. Quarterly Journal of Economics, **70**(1), pag. 65 – 94.

[Ya94] Yamada, K., 1994. Reflecting or sticky Markov processes with Levy generators as the limit of storage processes. Stochastic Process. Appl., **52**(1), pag. 135–164.

[YaWa71a] Yamada, T. and Watanabe, S. 1971. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. **11**, pag. 155 – 167.

[YaWa71b] Yamada, T. and Watanabe, S., 1971. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations II. J. Math. Kyoto Univ., **11**, pag. 553 – 563.

[Zh94] Zhang, T. S., 1994. On the strong solutions of one-dimensional stochastic differential equations with reflecting boundary. Stochastic Process Appl., **50**, pag. 135 – 147.

[Zv74] Zvonkin, A. K., 1974. A transformation of the phase space of a diffusion process that will remove the drift. Mat. Sb., **93**(135), pag. 129 – 149.

[Wa97] Warren, J., 1997. Branching processes, the Ray-Knight theorem, and sticky Brownian motion. Lecture Notes in Math., **1655**, pag. 1 – 15.

[Wa99] Warren, J., 1999. On the joining of sticky Brownian motion. Lecture Notes in Math., **1709**, pag. 257 – 266.

[Wi91] Williams, D., 1991. Probability with martingales. Cambridge: Cambridge University Press.