Cuprins:

3.2 Clasificari de probabilitati pentru modele economice neliniare.

3.2.1 Valori medii ale functiilor de utilitate si comparatii pe termen lung.

3.2.2 Alte proprietati statistice pentru masuri invariante ale unor sisteme dinamice economice.

Rezumat:

In economie exista numeroase modele de procese definite implicit. Pentru aceste modele exista asadar mai multe echilibre la momentul t care pot genera un acelasi echilibru la momentul t+1. In consecinta ecuatia de evolutie va fi definita implicit la momentul t + 1 in functie de starea la momentul t. Aceasta da nastere unei dinamici de tip invers (backwards). In aceasta teza de cercetare postdoctorala vom descrie diferite aplicatii ale dinamicii neinversabile la procese economice si financiare complexe si definite implicit. De o deosebita importanta vor fi notiunile de dinamica si teorie ergodica, in special cele de formalism termodinamic.

Formalismul termodinamic a aparut in anii 1970' si 1980' prin lucrarile fundamentale ale lui Bowen, Ruelle, Sinai, Manning, etc. Initial formalismul termodinamic a raspuns nevoii de abstractizare si formalizare riguroasa a notiunilor de fizica statistica si teoria haosului, ce tocmai atunci incepeau sa se cristalizeze. Trebuie mentionata si opera de pionierat a lui Benoit Mandelbrot, care a fost printre primii care au introdus notiuni de teoria haosului si a fractalilor in analiza matematica si in aplicatii.

Problema principala pe care o vom studia in aceasta teza se refera la determinarea unor proprietati metrice si statistice pentru unele modele dinamice economice sau financiare. De multe ori procesele economice sunt date implicit si au un comportament haotic pe termen lung. Aceasta inseamna ca nu se supun unor abordari deterministe, adica orice mica schimbare in conditiile initiale poate genera in timp schimbari semnificative ale sistemului. Aceasta este in contradictie cu unele abordari strict deterministe si care presupun aproximari ale sistemului si ale starilor de echilibru. Intr-adeavar comportamentul haotic se poate baza pe ecuatii implicite, si totusi rezultatele sa fie susceptibile la cele mai mici perturbatii. Comportamentul haotic presupune atat un caracter aleatoriu si imprecis, si anume relativitatea predictiilor pe termen lung, cat si un caracter fix, determinat de obiecte invariante in timp, cum ar fi atractorii de sistem, masurile invariante, coeficientii Liapunov, proprietatea de tranzitivitate topologica, entropia sistemului, valorile medii ale unor functii in raport cu unele masuri invariante, proprietatea de mixing a unor masuri, etc.

Aparitia metodelor de formalism termodinamic, originare din fizica statistica, dar formalizate mathematic, conduce la posibilitatea utilizarii unor metode extreme de puternice pentru studiul evolutiei unor sisteme cu character neliniar. De exemplu proprietatile metrice cum ar fi dimensiunea Hausdorff, dimensiunea box, dimensiunea Liapunov, etc. furnizeaza diferite informatii despre complexitatea atractorului fractal obtinut ca multime invarianta a sistemului, si despre diferitele traiectoriile stabile sau instabile. Proprietatile

ergodice asociate masurilor invariante ale sistemului furnizeaza informatii despre comportamentul statistic in raport cu diverse distributii suportate pe multimea fractala invarianta.

Deasemenea se studiaza comportamentul sistemului la perturbatii ale parametrilor, stiut fiind ca in practica este aproape imposibil ca parametrii sa fie cunoscuti cu foarte multa precizie, si in plus se pot schimba in timp. Exista diferite modele economice care prezinta un character neinversabil, in sensul ca sistemul este definit implicit. Astfel echilibrul de la momentul t este determinat de echilibrul de la momentul t+1 si pentru un anumit nivel de consum optim la momentul t pot exista mai multe nivele de consum optimal la momentul t+1. Se determina astfel o dinamica de tip backwards, cu metode si rezultate specifice. Printre modelele de mare interes pe plan mondial care prezinta o astfel de dinamica, mentionam modelul overlapping generations (OLG) 1-dimensional si generalizarile sale la mai multe dimensiuni, modelul cash-in-advance, modelul pietelor eterogene sau modelul cobweb cu ajustari adaptate. Contributia esentiala a actualului proiect de cercetare postdoctorala este de a folosi metode modern si puternice de formalism termodinamic si teorie ergodica pentru a studia asemenea modele economice neliniare cu dinamica de tip invers.

Aplicatii ale sistemelor dinamice si teoriei ergodice exista si in studiul proceselor financiare, in special la serii temporale discrete care redau indicatori gen indicele de actiuni SP 500 (SUA), cotatii de indici agregati de actiuni din alte tari, sau rate de schimb valutar. Si in unele din aceste cazuri s-a demonstrate experimental pe baza colectarii unui mare numar de date, ca exista un caracter neliniar puternic si chiar haotic uneori.In aceste cazuri se urmareste estimarea coeficientilor Liapunov, care redau comportamentul pe termen lung pe anumite directii, si deasemenea identificarea si studierea unor atractori fractali sau alte multimi invariante ale sistemului. O masura probabilistica importanta care exista in unele cazuri este masura Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) care descrie distributia orbitelor unei multimi de masura Lebesgue totala intr-o vecinatate a atractorului Λ. O alta masura importanta invariant pe atractor este si masura de entropie maximala; masura de entropie maximal exista intotdeauna, pe cand cea SRB nu exista intotdeauna ci doar in anumite cazuri speciale. In general masura de entropie maximala nu coincide cu masura SRB (atunci cand aceasta din urma exista). In cazul repelorilor hiperbolici Λ, am introdus in [M-JSP] si o masura inversa SRB μ^-, care descrie distributia preimaginilor consecutive (adica ale traiectoriilor posibile in trecut) pentru Lebesgue-aproape orice punct dintr-o vecinatate a lui Λ.

Pentru modelele economice definite implicit de mai sus, sunt importante in practica *functiile de utilitate*, care sunt definite pe limita inversa $\hat{\Lambda}$ a lui Λ, si care modeleaza evolutia utilitatii unui anumit bun de consum in timp, pentru un agent reprezentativ. In proiectul de fata am gasit metode de comparare a functiilor de utilitate si a spatiilor de echilibre intertemporale respective $\hat{\Lambda}$; aceasta comparatie se face in raport cu unele masuri invariante pe $\hat{\Lambda}$. Am introdus doua optiuni de comparare: prima optiune este de a compara valorile

medii ale functiei de utilitate W in raport cu masura de entropie maximala pe $\hat{\Lambda}$, care descrie starea de dezordine maximala a sistemului; a doua optiune este in raport cu masura de echilibru a lui W pe $\hat{\Lambda}$. In al doilea caz masura de echilibru $\hat{\mu}_W$ descrie starea in care *simultan* avem valoarea medie a lui W cat mai mare posibila, si un control cat mai bun al sistemului adica entropia de masura cat mai mica posibil.

Am aratat ca cele doua optiuni se pot folosi de exemplu pentru o clasificare a diverselor politici guvernamentale legate de fluxul monetar pe piata.

Deasemenea pentru sisteme care genereaza anumite serii financiare putem aplica metodele de formalism termodinamic pentru a face un studiu metric si statistic pe atractorii respectivi obtinuti prin metoda de reconstructie a lui Takens.

Abstract:

In economics there exist numerous models of processes which are defined implicitly. For these models there exist therefore several equilibria at time t which can generate the same equilibrium at time t+1. Consequently the evolution equation will be defined implicitly at time t+1 in raport to the status at time t. This gives birth to a dynamics of inverse type, called also backwards dynamics. In this postdoctoral research thesis we shall describe various applications of noninvertible dynamics to economic and financial processes which are complex and defined implicitly. Of a remarkable importance in our study there will be the notions of dynamical systems and ergodic theory, especially those of thermodynamical formalism.

Thermodynamical formalism appeared in the 1970âĂŹs and the 1980âĂŹs through the fundamental works of Bowen, Ruelle, Sinai, Manning, etc. Initially, thermodynamic formalism responded to the need of abstractization and rigorous formalization of notions in statistical physics and chaos theory, fields that were just starting to appear. We mention also the pioneering and very important work of Benoit Mandelbrot, who was among the first researchers that introduced the notions of chaos theory and fractal theory in mathematical analysis and applications in many fields.

The main problem that we will study in this thesis refers to the determination of metric and statistical properties for certain economic or financial dynamical models. Many times economic processes are given implicitly and have a chaotic behavior in the long term. This means that they do not obey a purely deterministic rule, i.e any small perturbation in initial conditions can generate in time significant changes of the system. This in contradiction with some strictly deterministic approaches which suppose approximations of the system and the equilibrium states. Indeed the chaotic behavior can be based on implicit equations and yet the results can be susceptible to the slightest perturbations. The chaotic behavior assumes both a random and not precise character, as well as a fixed behavior determined by the invariant objects of the system,

like attractors, repellers, invariant measures, Liapunov exponents, the topological transitivity property, the entropy of the system, the average values of certain functions with respect to invariant measures, the mixing property of some measures, etc.

The appearance of the methods of thermodynamic formalism, originating in statistical physics, but formalized mathematically, leads to the possibility of employing very powerful methods for the study of the evolution of nonlinear systems. For instance, the metric properties such as Hausdorff dimension, box counting dimension, Liapunov dimension, etc. give various information about the complexity of the fractal attractor which was obtained as an invariant set of the system, and about the various stable or unstable trajectories. The metric properties associated to the invariant measures of the system provide information about the statistical behavior with respect to different distributions supported on the invariant fractal set. Moreover we study the behavior of the system towards perturbations of the parameters. In practice it is almost impossible to know the parameters of the system with any degree of precision, let alone that they may vary slightly but significantly over time.

There exist many economic models which present a non-invertible character, in the sense that the system is defined implicitly. Thus the equilibrium at time t is determined by the equilibrium at time t+1 and for a certain level of optimal consumption at time t there may exist several different levels of optimal consumption at time t+1. Exista diferite modele economice care prezinta un character neinversabil, in sensul ca sistemul este definit implicit. We obtain in this way a backwards dynamical system which has specific methods and results. Among the models of great interest on an international scale which present such a dynamics, we will mention the 1-dimensional overlapping generations model (OLG) and its generalizations to higher dimensions, the cash-in-advance model, the heterogeneous markets model, and the cobweb model with adaptive adjustments. The essential contribution of the current project of postdoctoral research is to use modern and powerful methods of thermodynamic formalism and ergodic theory, in order to study such economic nonlinear models with a backward type dynamics. There are applications of dynamical systems and ergodic theory also in the study of financial processes especially to discrete time series which describe indicators such as the SP 500 index, or stock indexes of other countries, or tables of values for the rates of exchange of various currencies. Also in some of these cases it has been experimentally shown, by collecting large quantities of data, that there exists a strongly nonlinear character, and even a chaotic type behavior in certain instances. In these cases one wishes to estimate the Liapunov exponents which describe the long term behavior on various directions, and also the determination and the careful study of fractal attractors, basic saddle sets or other invariant sets of the system. An important probabilistic measure that exist in certain cases is the Sinai-Ruelle-Bowen measure (SRB) which describes the distribution of the orbits of points in a set of total Lebesgue measure in a neighbourhood of the attractor ÎŻ. Another important invariant measure on the attractor is the measure of maximal entropy; the measure of maximal entropy always exists, whereas the SRB measure does not exist always but only in special cases. In general the measure of maximal entropy does not coincide with the SRB measure (when the SRB measure exists). In the case of hyperbolic repellers Λ, we have introduced in [M-JSP]an inverse SRB measure μ^-, which describes the distribution of the consecutive preimages (i.e the allowed past trajectories) of Lebesgue-almost all points in a neighbourhood of Λ.

For the economic models implicitly defined above, a great practical importance is held by the *utility functions* which are defined on the inverse limit $\hat{\Lambda}$ of Λ, and which model the evolution of the utility of a certain comodity in time, for a representative agent. In this project we found effective comparison methods for utility functions and spaces of intertemporal equilibria $\hat{\Lambda}$; this compariosn is done with respect to certain invariant measures on $\hat{\Lambda}$. We introduced two compariosn options: the first option is to compare the average values of the utility function W with respect to the measure of maximal entropy on $\hat{\Lambda}$ which describes the state of maximal disorder in the system; the second option is with respect to the equilibrium measure of W on $\hat{\Lambda}$. In the second case, the equilibrium measure $\hat{\mu}_W$ describes the state in which simultaneously we have as big an average value of W as possible, and a control of the system as good as possible meaning that the measure theoretic entropy is as small as possible.

We proved that the two options can be used for instance for a classification of the diverse governmental policies related to the monetary flow on the market.

Also for systems that generate certain financial series, by using the thermodynamic formalism approach, we can perform a metric and statistical study of the attractors of the system obtained from Takens reconstruction method.

Cuvinte cheie: Tehnici de optimizare, analiza dinamica, existenta si stabilitatea conditiilor de echilibru, modele de serii temporale, modele economice definite implicit.

Keywords: Optimization techniques, dynamic analysis, existence and stability conditions of equilibrium, time series models, implicitly defined economic models.

Introducere:

Sistemele dinamice au o bogata si indelungata traditie de aplicatii in teoria modelelor economice si financiare (de exemplu din Bibliografie lucrarile [BH], [Br], [G], [FG], [GHT], [Ho], [H], [KSY], [L], [MM], [O], [Z], etc.) Sistemele dinamice si teoria ergodica ofera metode puternice de studiu al evolutiei unor sisteme complexe, cum sunt deseori cele economice si financiare, in timp. Avem de a face in numeroase cazuri cu procese economice sau financiare definite prin formule dar care nu se comporta determinist, ci au un caracter haotic. Prin analiza dinamica insa se identifica in acest comportament haotic, anumite structuri invariante si fixe, care au o deosebita importanta pentru evolutia si predictiile pe termen mediui sau lung, ale sistemului respective.

Astfel dorim sa identificam si sa studiem multimile invariante ale sistemului, de exemplu puncte periodice, atractori sau multimi de respingere (repellers), multimi de tip sa (saddle) pe care avem atat directii de atractie cat si directii de respingere, puncte periodice homoclinice sau heteroclinice si intersectiile asociate ale varietatilor globale stabile sau instabile. Avem apoi structura laminara a multimilor invariante in prezenta hiperbolicitatii, cu intersectii intre varietatile locale stabile/instabile si fractali, intersectii care pot fi studiate din punct de vedere al dimensiunii Hausdorff, al dimensiunii box, etc.

De multe ori insa studiul multimilor fractale din punct de vedere metric este prea dificil sau nu ofera suficiente informatii despre diversele distributii suportate pe fractali. In acest caz se poate utiliza o abordare statistica din punct de vedere al unor masuri probabuilistice suportate pe fractalii respectivi. Ideea de baza este aceeasi ca si in cadrul fizicii statistice, adica studierea unor proprietati pe care le au âĂIJmajoritateaâĂİ punctelor, cu alte cuvinte puncte din multimi de masura totala in fractal. Aceasta abordare are sens si in cadrul economic sau financiar, unde conteaza de multe ori media statistica, comportamentul generic si nu neaparat comportamentul prÃľcis al fiecarei traiectorii. Astfel sunt importante din punct de vedere economic si al descrierii complexitatii si caracterului predictibil al unui process economic, media unor functii de utilitate U(x, y) in raport cu diverse masuri invariante Îij pe fractalul ÎŻ, entropia topologica si cea a masurilor, existenta masurilor Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) sau inverse SRB, coeficientii Liapunov care determina caracterul pe termen lung al unor directii in raport cu o anumita masura, dimensiunile punctuale ale masurilor invariante, etc.

In domeniul vast al dinamicii economice exista numeroase cazuri de procese economice definite implicit, care prezinta o dinamica de tip invers (backward dynamics). Pentru aceste procese evolutia in timp a sistemului este de fapt determinata de siruri de preimagini consecutive, numite preistorii. Dintre aceste procese economice mentionam modelul generatiilor suprapuse al lui Grandmont ([G], [GHT]), unele generalizari ale acestuia la cazul bi-dimensional ([GHT], [KS], [KSY], [MeR], etc.), modelul cobweb cu ajustari adaptate si hedging ([Ho], [O]), modelul pietelor eterogene ([FG], [BH]), modelul cash-in-advance ([MR]), etc. Aceste modele economice desi date prin ecuatii precise prezinta multimi invariante cu un caracter haotic si pentru care se pot aplica metodele de mai sus ale sistemelor dinamice si in special ale formalismului termodinamic si teoriei ergodice diferentiabile.

Exista deasemenea multe procese financiare date prin serii temporale discrete, cum ar fi cotatiile indicelui SP 500 sau ale altor piete financiare, sau diverse cotatii ale ratelor de schimb valutar. Si in aceste cazuri avem de a face deseori cu un comportament haotic si din tabelele de cotatii se poate extrage un atractor haotic prin metoda lui Takens. Pe acest atractor se pot studia coeficientii Liapunov, dimensiunea Hausdorff si alti invarianti numerici care descriu complexitatea fenomenului si pot face predictii pe termen scurt sau mediu.

Pentru modelele economice si financiare de mai sus se pot investiga si proprietatile statistice, determinate de anumite masuri probabilistice invariante, ca spre exemplu masura de entropie maximala pe o multime fractala ÎŻ, masuri de echilibru ale unor potentiali Holder reprezentati de functii de utilitate, masura SRB (in caz ca exista) sau masura inversa SRB (in caz ca exista), sau masuri absolut continue. Studiul acestora poate fi important pentru stabilirea unor politici guvernamentale pe termen lung, prin compararea valorilor medii in raport cu anumite distributii. Astfel se pot compara valoarea medie in raport cu masura de entropie maximala a sistemului cu valoarea medie a masurii de echilibru μ_U a unei functii de utilitate $U(x,y)$, care masura de echilibru maximizeaza valoarea medie a lui U pastrand in acelasi timp sistemul cat de mult sub control cu putinta, in sensul de a minimiza expresia $P(U) - \int U d\mu_U$.

In acest mod se pot compara efectele unor distributii pe spatiul de echilibre intertemporale din punct de vedere al diverselor functii de utilitate si in conditii variate, pastrand sistemul cat mai controlat cu putinta (entropie minimala) sau lasand sistemul intr-un grad maxim de dezordine (entropie maximala), etc. In cazul unor procese financiare date de serii temporale se poate determnina in unele cazuri un comportament puternic neliniar sau chiar haotic, folosind dimensiunea de corelare Grassberger-Procaccia, si apoi aproximand atractorul de system. Si in acest caz sunt utile din punct de vedere al predictiilor pe termen scurt sau mediu, proprietatile metrice si statistice ale procesului.

Capitolul 1. Sisteme dinamice neliniare si teorie ergodica.

1.1 Exemple de comportamente de sisteme dinamice.

1.1.1 Aplicatii torale.

Unul din cele mai importante exemple de sisteme dinamice este dat de o aplicatie $f_A : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ determinata de o matrice A cu coeficienti intregi, unde determinantul lui A, $det(A)$ este nenul, dar poate fi de modul 1 (cazul inversabil) sau de modul mai mare decat 1. Aceste sisteme sunt exemple de sisteme Anosov. In cazul cand $|det(A)| = 1$, avem de a face cu automorfisme Anosov, iar in cazul cand $|det(A)| > 1$, avem de a face cu endomorfisme Anosov. Intr-adeavar daca $|det(A)| = 1$, atunci putem considera matricea A^{-1} care va avea deasemenea coeficienti intregi, si va determina automorfismul f_A^{-1}, adica inversul automorfismului f_A.

Aplicatia liniara determinata de matricea A pe spatiul Euclidian $\mathbb{R}^m$ transporta punctele de tipul $x+y$, unde y este cu coordinate intregi, in $Ax+z$, unde din nou z are coordinate intregi. Asadar daca se considera catul $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ care este de fapt torul $\mathbb{T}^m$, atunci aplicatia f_A este bine definita.

Definitie 1.1.1.1

Vom spune ca aplicatia torala f_A este hiperbolica daca matricea A are toate valorile proprii nenule si de valoare absoluta diferita de 1.

□

Data fiind o matrice hiperbolica A care determina endomorfismul toral f_A se poate defini un spatiu tangent stabil E^s asociat valorilor proprii de valoare absoluta mai mica decat 1, si un spatiu tangent instabil E^u asociat valorilor proprii de valoare absoluta mai mare decat 1.

Teorema 1.1.1.2 ([R])

Fie f_A o aplicatie torala hiperbolica pe torul m-dimensional $\mathbb{T}^m$. Atunci urmatoarele sunt adevarate:

a) Punctele periodice ale lui f_A sunt dense in $\mathbb{T}^m$. Exista deci o infinitate de puncte periodice.

b) f_A are o structura hiperbolica pe intregul spatiu $\mathbb{T}^m$, adica exista spatii tangente stabile si instabile. Mai precis

$$E^s_x = E^s, x \in \mathbb{T}^m, \text{ si } E^u_y = E^u, y \in \mathbb{T}^m$$

□

Sa notam acum cu $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{T}^m$ proiectia canonica de la $\mathbb{R}^m$ la $\mathbb{T}^m$ definitya prin

$$\pi(\bar{x}) = x, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^m,$$

unde x se obtine din $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ prin considerarea fiecarei coordonate x_i modulo $\mathbb{Z}$.

In acest caz putem defini varietatile stabile si instabile printr-un punct arbitrar $x \in \mathbb{T}^m$ in modul urmator:

$$W^s(x) = \pi(\bar{x} + E^s), \text{ si } W^u(x) = \pi(\bar{x} + E^u), \ \forall \pi(\bar{x}) = x, \bar{x} \in \mathbb{R}^m$$

Cum tangentele unghiurilor liniilor E^s si E^u sunt irationale in $\mathbb{R}^m$ rezulta imediat ca liniile infasurate pe torul $\mathbb{T}^m$ sunt dense in $\mathbb{T}^m$, in concluzie avem urmatorul

Corolar 1. 1. 1. 3

Pentru fiecare punct $x \in \mathbb{T}^m$ varietatile globale stabile si instabile ale lui x, namely $W^s(x)$ si $W^u(x)$ sunt dense in $\mathbb{T}^m$.

$\square$

Definitia 1.1.1.4

Fie doua spatii metric X,Y si aplicatii continue $f : X \to X$ si $g : Y \to Y$. Vom spune ca sistemele dinamice $(X, f), (Y, g)$ sunt conjugate topologic daca exista un homeomorfism $h : X \to Y$ astfel incat sa avem $h \circ f = g \circ h$.

$\square$

In general cum am spus mai sus, exista doua cazuri principale in ceea ce priveste aplicatiile torale liniare f_A:

cazul I. cand $|det(A)| = 1$, si

cazul II. cand $|det(A)| \neq 1$.

In primul caz aplicatia f_A este un automorfism al lui $\mathbb{T}^m$, si se poate arata ca orice perturbatie $g : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ de clasa C^2 a lui f_A este conjugata topologic cu f_A, in consecinta are aceleasi proprietati dinamice ca si f_A.

In al doilea caz aplicatia f_A este un endomorfism al lui $\mathbb{T}^m$ si se poate arata ca orice punct $x \in \mathbb{T}^m$ are exact d f_A-preimagini in $\mathbb{T}^m$, unde $d := |det(A)|$. Intr-adevar volumul unui poliedru drept cu latura de 1 in $\mathbb{R}^m$ este transformat intr-un volum de $det(A)$, si colturile poliedrului sunt transportate in puncte cu coordonate intregi. Asadar atunci cand luam fiecare coordonata modulo 1, pentru a obtine torul $\mathbb{T}^m$, rezulta ca f_A acopera torul T^m cu el insuri de d ori. Asadara fiecare punct din $\mathbb{T}^m$ este atins de aplicatia f_A de d ori.

Trebuie insa sa facem o distinctie clara intre automorfismele liniare torale si endomorfismele torale liniare. Daca in cazul primelor orice perturbatie este conjugata topologic cu f_A, in cazul celorlalte acest lucru nu este adevarat. De fapt pentru o perturbatie de clasa $\mathscr{C}^2$ a lui f_A varietatile instabile pot sa nu fie translatii ale aceleiasi linii, si de fapt pot depinde de intreaga traiectorie inversa aleasa a punctului respectiv.

Teorema 1.1.1.5[Pr]

Fie A o matrice cu coeficienti intregi si f_A endomorfismul liniar asociat pe torul m-dimensional $\mathbb{T}^m$ Fie si λ_1 o valoare proprie a lui A de valoare absoluta maximala. si $\mu_1 \in \text{spec}a, |\mu_1| = \sup_{\lambda \in \text{spec}a, |\lambda|<1} \lambda$. Fie si

$d := |detA|$. Atunci daca $d-1 > \lambda_1/\mu_1$, avem ca pentru orice $\varepsilon > 0$ si orice puinct $x \in \mathbb{T}^m$, there exists a $\mathscr{C}^{\in}$ function $g : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ a.i familia de multimi $\{W_r^u(\hat{x}), \hat{x}\text{preistorie a lui } x\}$ contine o submultime homeomorfa cu intervalul $(0,1)$.

□

Teorema de mai sus ne spune deci in particular ca perturbatiile unor endomotrfisme torale liniare nu sunt neaparat conjugate topologic cu ele si ca de fapt pot avea o dinamica complet diferita.

Definitia 1.1.1.6

Fie o aplicatie $f \in \mathscr{C}^1(M,M)$ pe varietatea Riemann M. Vom spune ca f este stabila structural daca exista o vecinatate U a lui f in topologia $\mathscr{C}^1(M,M)$ astfel incat daca g este o functie din U, atunci f si g sunt conjugate topologic.

□

Definitia 1.1. 1. 7

O aplicatie $f : M \to M$ de clasa $\mathscr{C}^1$ pe varietatea Riemann M se numeste endomorfism Anosov daca f are o structura hiperbolica pe intreaga varietate M, adica exista o splitare a fibratului tangent TM astfel incat pentru fiecare traiectorie inversa $\hat{x}$ a oricarui punct $x \in M$ sa avem $T_xM = E_x^s \oplus E_{\hat{x}}^u$ iar distributiile stabile si instabile sunt invariate de Df, i.e $Df_x(E_x^s) \subset E_{f(x)}^s$ si $Df_x(E_{\hat{x}}^u) \subset E_{\hat{f}\hat{x}}^u$.

□

Se stie ca endomorfismele Anosov si aplicatiile de dilatare sunt stabile structural ([KH], [Ma], etc.). Totusi pentru endomorfismele Anosov acest lucru nu mai este adevarat.

Teorema 1.1.1.8

Pentru orice endomorfism Anosov $f \in \mathscr{C}^1(M,M)$ care nu este difeomorfism si nici aplicatie de dilatare, si pentru orice vecinatate U a lui f in topologia $\mathscr{C}^1$ exista o multime nenumarabila A_U de endomorfisme $g \in U$ such that g nu este conjugata topologic cu f si oricare ar fi $g, g' \in A_U$ avem ca endomorfismele g and g' nu sunt conjugate topologic.

□

1.1.2 Sisteme tip horseshoe.

Un alt tip de sisteme dinamice pe care il vom studia si care are o deosebita importanta in dinamica hiperbolica este dat de sistemele tip horseshoe (potcoava). Aceste sisteme dinamice au fost introduse de S. Smale. Ele se caracterizeaza prin existenta simyultana a directiilor de atractie si a directiilor de respingere pe multimea fractala invarianta obtinuta prin iterari succesive.

Sa luam $P=[0,1]\times[0,1]$ patratul unitate din $\mathbb{R}^2$ si fie H_1,H_2 doua benzi orizontale disjuncte din P, date de $H_1=[0,1]\times[a_1,b_1], H_2=[0,1]\times[a_2,b_2]$ unde $0\le a_1<b_1<a_2<b_2<1$. Sa luam deasemenea si doua benzi verticale V_1,V_2 date prin $V_1=[c_1,d_1]\times[0,1], V_2=[c_2,d_2]\times[0,1]$, unde avem $0<c_1<d_1<c_2<d_2<1$.

Acum vom considera un difeomorfism f pe o vecinatate a lui P care transporta benzile orizontale in benzi verticale, i.e

$$f(H_i)=V_i, i=1,2, P\cap f^{-1}(P)=H_1\cup H_2,$$

si pentru $x\in H_1\cup H_2$ avem

$$Df_x=\left(\begin{array}{ll} a(x) & 0 \\ 0 & b(x) \end{array}\right),$$

unde $|a(x)|=\lambda_1<1/2$ si $|b(x)|=\lambda_2>2$. Aplicatia f se extinde apoi la intregul $\mathbb{R}^2\cup\infty$ astfel: sa notam cu D reuniunea intre patratul P si doua semi-discuri pe laturile de jos si de sus ale lui P, notate cu S_1,S_2. Scriem P ca o reuniune $H_0\cup H_1\cup H_2\cup H_3\cup H$, unde H_0,H_3 sunt benzile orizontale in P de jos si de sus, iar H este banda intermediara intre H_1 si H_2.

Vom presupune ca

$$f(H)\subset S_2, f(H_0\cup H_3)\subset S_1,$$

si ca $f(H)$ conecteaza partea de sus a lui V_1 cu partea de sus a lui V_2. Presupunem si ca $f(S_1)\subset S_1$ si ca f este o contractie pe S_1. In consecinta din Teorema de punct fix, exista un unic punct fix x_0 al lui f in S_1. In modul de mai sus am extins aplicatia f la discul topologic D. Pentru a o extinde la $\mathbb{R}^2$, vom presupune ca toate punctele din $\mathbb{R}^2$ intra in D prin iterari succesive. Deasemenea vom lua $f(\infty)=\infty$ ceea ce extinde f la compactificatul lui $\mathbb{R}^2$.

Din constructie vedem ca pe D aplicatia f este de fapt o contractie in directia orizontala urmata de o dilatare in directia verticala. Benzile H_1,H_2 sunt contractate in directia orizontala si dilatate in directia verticala. In consecinta la a doua iterare a lui f pe D, vom avea 4 benzi verticale dar care sunt mai subtiri. Daca iteram inversa f^{-1} atunci vom obtine la primul pas doua benzi orizontale in P si la al doilea pas 4 benzi orizontale mai subtiri.

Sa definim multimea invarianta a sistemului dinamic de mai sus

$$\Lambda:=\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(P) \tag{1}$$

Sa definim si multimea obtinuta printr-un numr finit de iterari ale lui f si f^{-1},

$$P_m^n:=\bigcap_{i=m}^{n} f^i(P)$$

Dupa cum am vazut mai sus, P_0^1 este reuniunea celor doua benzi verticale V_1, V_2, in timp ce P_1^0 este reuniunea celor doua benzi orizontaleH_1, H_2. Vedem deci ca P_0^n este reuniunea a 2^n benzi verticale de latime λ_1^2. In consecinta

$$P_0^\infty = \bigcap_{i \geq 0} f^i(P) = C_1 \times [0,1],$$

unde C_1 este o multime Cantor. Deasemenea P_0^∞ este multimea punctelor ale caror iterate inverse raman in P. Similar obtinem

$$P_{-\infty}^0 = \bigcap_{i \leq 0} f^i(P) = [0,1] \times C_2,$$

where C_2 is again a Cantor set in the line. $P_{-\infty}^0$ este multimea punctelor ale caror iterari pozitive raman in P.

Intersectand cele doua multimi Cantor in plan de mai sus obtinem multimea horseshoe

$$\Lambda = P_0^\infty \cap P_{-\infty}^0 = C_1 \times C_2$$

care este deci un produs de multimi Cantor C_1, C_2.

Deoarece multimile C_1, C_2 sunt ambele perfecte rezulta ca Λ este perfecta, adica este inchisa si orice punct $y \in \Lambda$ este limita unui sir de puncte $z_n \in \Lambda$ cu $z_n \neq y$. Mai mult, cum $\Lambda = \cap_n P_{-n}^n$, rezulta ca Λ este continuta in reuniunea a 2^{2n} dreptunghiuri de laturi λ_1^n si λ_2^{-n}, asadar componentele conexe ale lui Λ sunt puncte, deci Λ este total ne-conexa. Obtinem deci

Teorema 1.1.2.1

Multimea horseshoe Λ este o multime Cantor in planul $\mathbb{R}^2$.

$\square$

In cazul multimii fractale Λ vrem sa determinam varietatile stabile si instabile ale punctelor. Daca $y \in f^i(P), i \leq 0$ inseamna ca $f^i(y) \in P, i \geq 0$, asadar punctul y se afla in multimea stabila a lui Λ. Pe de alta parte stim ca $P_{-\infty}^0 = \bigcap_{j \leq 0} P_j^0$ si ca $P_{-\infty}^0 = [0,1] \times C_2$. IN consecinta rezulta ca segmentele orizontale sunt varietatile local stabile ale punctelor din Λ, definite prin:

$$W_r^s(y) := \{z \in \mathbb{R}^2, d(f^j z, f^j y) < r, j \geq 0\} \tag{2}$$

Similarly if a point $y \in f^j(P), j \geq 0$, then all the inverse iterates $f^{-j}(y)$ belong to P, so the point y is in the unstable set of Λ. Deasemenea stim ca

$$P_0^\infty = \bigcap_{j \geq 0} P_0^j = C_1 \times [0,1]$$

In consecinta rezulta ca segmentele verticale sunt varietatile locale instabile ale punctelor din Λ, definite prin

$$W_r^u(y) := \{z \in \mathbb{R}^2, d(f^{-j} z, f^{-j} y) < r, j \geq 0\} \tag{3}$$

Vom vedea mai tarziu ca multimea de tip horseshoe sau o multime homeomorfa cu ea, apare in mod natural si este generata de intersectiile transverse ale varietatilor stabile si instabile ale punctelor periodice hiperbolice. O multime de tip horseshoe se poate obtine si pentru aplicatiile de tip Henon ([R]), si anume putem lua aplicatia pe $\mathbb{R}^2$,

$$f_{ab}(x,y) = (a - by - x^2, x),$$

unde a, b sunt parametrii reali. Se observa ca $det(Df_{ab})(x,y) = b$, deci aplicatia Henon are determinant constant al derivatei. Se poate demonstra ca $f_{a,b}$ are o multime de tip horseshoe ca multime invarianta maximala.

Teorema 1.1.2.2

Fie parametrul $b \neq 0$ si $a > (5+2\sqrt{5})(1+|b|)^2/4$. Fie si $R = \frac{1+|b|+\sqrt{(1+|b|)^2+4a}}{2}$ si patratul

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq R, |y| \leq R\}$$

Consideram multimea invarianta compacta

$$\Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f_{ab}^i(P)$$

Atunci Λ este o multime Cantor in plan si f_{ab} are o structura hiperbolica data de directii stabile si instabile pe Λ.

□

1.2 Codare simbolica a dinamicii si elemente de dinamica topologica.

1.2.1 Elemente de dinamica topologica.

Definitia 1.2.1.1

Prin sistem dinamic topologic vom intelege un cuplu (X, f) format dintr-un spatiu topologic X si o aplicatie continua $f : X \to X$.

Sistemul dinamic topologic (X, f) se numeste tranzitiv topologic daca exista un punct $x \in X$ astfel incat orbita completa a lui x, $O_f(x) := \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ este densa in X.

□

Definitia 1.2.1.2

Sistemul dinamic topologic (X, f) se numeste minimal daca orbita completa a fiecarui punct $x \in X$ este densa in X.

□

Propozitia 1.2.1.3

Fie rotatia pe cercul unitate $R_\alpha : S^1 \to S^1$ definita prin $R_\alpha(x) = x + \alpha$ unde am folosit notatia aditiva pe cercuil unitate S^1. Atunci daca α este irational rezulta ca R_α este minimala.

$\square$

Se poate demonstra (vezi [KH]) ca tranzitivitatea implica o proprietate de transport intre diversele multimi deschise ale lui X.

Propositia 1.2.1.4

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua pe un spatiu metric local compact si separabil X. Atunci f este topologic tranzitiva daca si numai daca pentru orice doua multimi deschise nevide U, V, exista un intreg $N(U,V)$ asa incat $f^{N(U,V)}(U) \cap V \neq \emptyset$.

$\square$

Corolar 1.2.1.5

Fie o aplicatie topologic tranzitiva $f : X \to X$. Atunci orice functie $\phi : X \to \mathbb{R}$ care satisface $\phi \circ f = \phi$ trebuie sa fie constanta pe X.

$\square$

Demonstratie:

Sa presupunem ca $\phi(f(x) = \phi(x), x \in X$. Dar atunci daca x este unul din punctele cu orbita densa in X, rezulta ca pentru orice $y \in f^{-j}(x)$ avem $\phi(y) = \phi(x)$ si la fel pentru orice $j \geq 0$ avem $\phi(x) = \phi(f^j x)$. Asadar cum ϕ este continua pe X si $O_f(x)$ este densa in X rezulta ca ϕ este constanta pe X.

$\square$

In cele ce urmeaza vom da definitia *multimii non-wandering*, adica a punctelor ale caror orbite pozitive se apropie oricat de mult de pozitia initiala.

Definitia 1.2.1.6

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul topologic X. Un punct x se numeste wandering (hoinar) daca exista o vecinatate descisa U a lui x astfel incat multimile $f^{-n}(U), n \geq 0$ sa fie disjuncte mutual. Multimea non-wandering se defineste atunci ca

$$\Omega(f) := \{x \in X, \text{pentru orice vecinatate } U \text{ a lui } x \exists n \geq 1, \text{ cu } f^{-n}U \cap U \neq \emptyset\}$$

Multimea non-wandering $\Omega(f)$ este de fapt multimea invarianta maximala a lui f pe care avem o dinamica interesanta. Se poate demonstra usor urmatoarea:

Teorema 1.2.1.7

Fie o aplicatie $f : X \to X$ continua. Avem atunci urmatoarele afirmatii:

a) multimea $\Omega(f)$ este inchisa in X.

b) $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ si daca f este un homeomorfism atunci $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$.

c) daca pentru fiecare $x \in X$ definim multimea punctelor de acumulare $\omega(x) := \{y, \exists (n_i)_i, f^{n_i}(x) \to y\}$ atunci $\omega(x) \subset \Omega(f), x \in X$.

d) toate punctele periodice ale lui f sunt incluse in $\Omega(f)$.

□

In cazul in care X este un spatiu metric compact avem urmatoarea

Teorema 1.2.1.8

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua pe spatiul metric compact X. Atunci

$$\Omega(f) = \{x \in X, \text{pentru orice vecinatate } U \text{a lui } x \text{si orice } m \geq 1, \text{exista } n \geq m \text{cu } f^{-n}U \cap U \neq \emptyset\}$$

□

De exemplu daca R_α este rotatia cercului unitate introdusa mai sus, si daca α este irational, atunci $\Omega(R_\alpha) = S^1$.

Avem deasemenea o notiune similara celei de tranzitivitate topologica, si anume cea de tranzitivitate pozitiva topologica.

Definitia 1.2.1.9

O aplicatie continua $f : X \to X$ se numeste pozitiv tranzitiva topologic daca exista un punct $x \in X$ a carui orbita pozitiva $O_f^+(x) := \{f^i x, i \geq 0\}$ este densa in X.

□

De multe ori tranzitivitatea pozitiva este mai usor de verificat decat tranzitivitatea topologica propriu-zisa. Urmatoarea Teorema este simuilara Teoremei corespunzatoare tranzitivitatii topologice de mai sus.

Teorema 1.2. 1. 10

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pentru care $f(X) = X$. Atunci f este pozitiv tranzitiva topologic daca si numai daca pentru orice doua multimi deschise nevide V_1, V_2 exista $n \geq 1$ astfel incat $f^{-n}(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$.

□

Evident pozitiv tranzitivitatea este o proprietate mai restrictiva decat tranzitivitatea topologica simpla. Legatura intre tranzitivitatea topologica si pozitiv tranzitivitatea topologica in cazul unui homeomorfism este data de urmatoarea

Propozitia 1.2.1.11

Fie $f : X \to X$ un homeomorfism; atunci f este pozitiv tranzitiva topologic daca si numai daca f este tranzitiva topologic si $\Omega(f) = X$.

□

Sa studiem acum exemplul translatiilor pe toruri $\mathbb{T}^m$ definite pentru un $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{T}^m$ prin:

$$T_\alpha(x_1, \ldots, x_m) = (x_1 + \alpha_1, \ldots, x_m + \alpha_m), \text{ mod}1$$

Se poate demonstra urmatoarea

Propozitia 1.2.1.12

Translatia $T_\alpha : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ este tranzitiva topologic daca si numai daca numerele $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 1$ sunt independente peste $\mathbb{Q}$, i.e $\sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i$ nu este intreg pentru niciun m-uplu de numere intregi $(k_1, \ldots, k_m)$ cu exceptia cazului cand $k_1 = \ldots = k_m = 0$.

□

In demonstratia acestei Propozitii se doreste gasirea unei functii T_α-invariante dar care nu este constanta, si aceasta functie va fi $\phi(x) = sin2\pi(\sum_i k_i x_i)$. Din cauza periodicitatii este bine definita pe intregul tor $\mathbb{T}^m$ si satisface deasemenea si $\phi \circ T_\alpha = \phi$.

O notiune mai puternica de recurenta decat cea de tranzitivitate toplogica este cea de mixing topologic. Daca in primul caz se cerea ca iteratele unui punct sa ajunga din cand in cand intr-o multime deschisa arbitrara V, acum cerem ca de la nivel toate iteratele unei multimi U sa intersecteze multimea V.

Definitia 1.2. 1. 13

O aplicatie continua $f : X \to X$ se numeste mixing topologic daca pentru orice doua multimi deschise nevide U, V exista un intreg pozitiv $N(U,V)$ astfel incat pentru orice $n > N(U,V)$ intersectia $f^n(U) \cap V$ sa fie nevida.

□

Din Definitie se vede imediat ca o aplicatie care este mixing topologic, este deasemenea tranzitiva topologic. Mixing-ul topologic este insa mult mai restrictiv decat tranzitivitatea topologica din cauza conditiei ca toate iteratele lui U sa intersecteze V. Intr-adevar avem urmatoarea

Propozitia 1.2.1.14

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua pe spatiul metric X. Atunci daca f este o izometrie a lui X rezulta ca f nu poate fi mixing topologic.

□

Demonstratie:

Sa presupunem ca metrica pe X este notata cu $d(\cdot,\cdot)$. Sa luam deasemenea trei puncte diferite $x, y, z \in X$ si o multime deschisa $U = B(x, \varepsilon)$ for some small $\varepsilon > 0$. Sa presupunem ca $\varepsilon < \frac{d(y,z)}{6}$. Atunci $f^n(U)$ are acelasi diametru ca si U deoarece f este o izometrie.

Deci diametrul lui $f^n U()$ este egal cu 2ε pentru orice $n \geq 0$ si deci conditia din definitia mixingului topologic nu poate fi indeplinita fie pentru $B(y,\varepsilon)$ fie pentru $B(z,\varepsilon)$ intrucat distanta intre ele este mai mare decat 4ε.

$\square$

In consecinta rezulta ca translatia $T_\alpha : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ care este o izometrie cu metrica euclidiana, nu poate fi mixing topologic, desi este tranzitiva topologic pentru $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 1$ independente peste $\mathbb{Q}$.

1.2.2 Sisteme dinamice simbolice standard.

Unul din cele mai importante sisteme dinamice, si care are numeroase aplicatii in descrierea dinamicii altor sisteme, cat si in teoria informatiei, il reprezinta sistemele dinamice simbolice.

Definitia 1.2.2.1

Sa notam spatiul sirurilor bi-infinite pe m simboluri cu

$$\Sigma_m := \{\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots), \omega_i \in \{1, \ldots, m\}, i \in \mathbb{Z}\},$$

si spatiul sirurilor pozitiv-infinite pe m simboluri cu

$$\Sigma_m^+ := \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots), \omega_i \in \{1, \ldots, m), i \geq 0\}$$

Pe spatiul Σ_m vom considera aplicatia shift (de translatare) definita prin

$$\sigma_m : \Sigma_m \to \Sigma_m, \sigma_m(\omega) = \omega' = (\ldots, \omega'_{-1}, \omega'_0, \omega'_1, \ldots), \text{si } \omega'_i = \omega_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$$

Similar definim aplicatia shift si pe Σ_m^+ prin

$$\sigma_m^+ : \Sigma_m^+ \to \Sigma_m^+, \sigma_m(\omega) = \omega' = (\omega'_0, \omega'_1, \ldots), \text{si } \omega'_i = \omega_{i+1}, i \geq 0$$

$\square$

Vom considera pe spatiile de siruri Σ_m^+ si Σ_m topologia indusa de pe spatiul produs infinit. O baza de vecinatati pentru aceasta topologie pe Σ_m este data de multimile

$$C_{i_1,\ldots,i_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} := \{\omega \in \Sigma_m, \omega_{i_j} = \alpha_j, j = 1, \ldots, k\},$$

unde $i_1, \ldots, i_k$ sunt numere intregi iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sunt din $\{1, \ldots, m\}$. Multimile de tipul $C_{i_1,\ldots,i_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ se numesc *cilindrii simbolici*. Similar obtinem o baza de vecinatati a topologiei produs pe Σ_m^+ cu cilindrii $C_{i_1,\ldots,i_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ cu intregii $i_1, \ldots, i_k \geq 0$. Sa observam ca cilindrii simbolici sunt si multimi inchise deoarece complementara lor este o reuniune de cilndrii.

Aceeasi topologie este compatibila si cu metrica urmatoare pe Σ_m definita pentru un $\lambda > 1$ fixat:

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\omega_j - \omega'_j|}{\lambda^{|j|}} \tag{4}$$

Desi aceste metrici definesc aceeasi topologie pentru toti $\lambda > 1$, ele nu sunt echivalente ca metrici. Se observa ca spatiul Σ_m este perfect, total ne-conex si compact, asadar este homeomorf cu o multime Cantor.

Propozitia 1.2.2.2

Punctele periodice ale aplicatiilor shift pe Σ_m si pe Σ_m^+ sunt dense in spatiile Σ_m, respectiv Σ_m^+. Mai mult, pentru orice $j > 0$ exista m^j puncte periodice de perioada j (adica puncte fixe ale aplicatiei iterate de j ori), atat in Σ_m, cat si in Σ_m^+.

Ambele aplicatii de translatare $\sigma_m : \Sigma \to \Sigma_m$ si $\sigma_m^+ : \Sigma_m^+ \to \Sigma_m^+$ au proprietatea de mixing topologic.

□

Demonstratia Propozitie de mai sus este simpla si se bazeaza pe faptul ca punctele periodice pentru σ_m, σ_m^+ sunt de fapt siruri periodice. Pentru a demonstra proprietatea de mixing topologic este suficient sa o verificam pe multimi cilindrice de tip $C_{i_1,\dots,i_k}^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}$.

Un alt exemplu de sistem dinamic simbolic este un subshift de tip finit.

Definitia 1.2.2.3

Fie o matrice $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{m-1}$ o matrice patrata $m \times m$ cu elemente 0 sau 1. O astfel de matrice se mai numeste si matrice 0-1. Vom defini submultimea lui Σ_m,

$$\Sigma_A := \{\omega \in \Sigma_m, a_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1, i \in \mathbb{Z}\}$$

Se observa ca Σ_A este σ_m-invarianta. Restrictia shift-ului σ_m la Σ_A se noteaza cu σ_A si se numeste **subshift de tip finit**.

□

Sirurile din Σ_A reprezinta traiectoriile in graful asociat care sunt admise de A, adica putem trece de la ω_i la ω_{i+1} doar daca $a_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1$.

Se poate demonstra ca numarul drumurilor admise de lungime $n+1$ care incep in varful i al grafului asociat $\mathscr{G}_A$ si se termina la varful j al lui $\mathscr{G}_A$ este egal cu elementul a_{ij}^n al matricii A^n. Astfel rezulta ca numarul punctelor periodice de perioada n al lui σ_A este egal cu urma matricii A^n. O notiune importanta este cea de matrice care permite ajungerea din orice varf i al lui $\mathscr{G}_A$ intr-un alt varf j intr-un numar finit de pasi.

Definitia 1.2.2.4

Matricea A cu elemente 0, 1 se numeste tranzitiva daca exista un numar natural m astfel incat toate elementele matricii A^m sunt numere strict pozitive. Shift-ul σ_A se numeste tranzitiv daca este dat de o matrice 0-1 A tranzitiva.

$\square$

Avem atunci urmatoarea Teorema care asigura proprietatea de mixing topologic in cazul subshift-ului de tip finit σ_A.

Teorema 1.2.2.5

Daca A este o matrice 0-1 tranzitiva, atunci subshift-ul de tip finit σ_A este mixing topologic si punctele sale periodice sunt dense in Σ_A.

$\square$

Sa notam acum cu $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ valorile proprii ale matricii A. Cum am aratat mai sus, numarul de puncte periodice ale lui σ_A de perioada n este egal cu $tr(A^n)$, adica este egal cu suma $\sum_i \lambda_i^n$. Vom da acum o Teorema importanta (vezi [Wa]) despre comportamentul valorilor proprii ale matricii A, si mai general ale unei matrici cu elemente non-negative.

Teorema 1.2.2.6

Fie A o matrice $m \times m$ cu elemente non-negative astfel incat exista o putere A^n a lui A, care are toate elementele pozitive. Atunci A are un vector propriu cu coordonate pozitive, si nici un alt vector propriu cu coordonatele non-negative. Valoarea proprie λ asociata acestui vector propriu cu coordonate pozitive, este pozitiva, de multiplicitate 1, si mai mare decat valoarea absoluta a oricarei alte valori proprii a lui A.

$\square$

Demonstratia acestui rezultat este tehnica si se gaseste in orice text de sisteme dinamice sau teorie ergodica (de exemplu [Wa]).

1.2.3 Codarea unor sisteme neliniare. Partitii Markov.

Sistemele dinamice simbolice mentionate in 1.2.2 sunt deosebit de importante in codarea unor sisteme dinamice neliniare. Mai precis vom cauta conjugari sau semi-conjugari intre anumite sisteme dinamice neliniare si unele subshift-uri de tip finit. In acest mod se transfera multe dintre proprietatile, in special cele topologice, de la sistemul simbolic la sistemul neliniar studiat.

Sa luam un difeomorfism $f : M \to M$ pe o varietate Riemann si o multime invarianta Λ. Ideea este de a partitiona Λ (sau o vecinatate a sa) cu un numar finit de multimi $X_1, \dots, X_m$ si apoi sa urmarim in care din aceste multimi ajung iteratele pozitive si negative ale unui punct oarecare $x \in \Lambda$. Astfel putem defini functia $h : \Lambda \to \Sigma_m$ prin expresia

$$h(x) := \omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots), \text{ unde } f^i(x) \in X_{\omega_i}, i \in \mathbb{Z}$$

Definitia 1.2.3.1

Fie o aplicatie continua $h : X \to Y$ intre doua spatii metrice pe care avem aplicatiile continue $f : X \to X$ si $g : Y \to Y$. Vom spune ca h este o semi-conjugare daca $g \circ h = h \circ f$ si h este surjectiva.

□

Ideea este de a gasi o partitie $\mathscr{X}$ ca mai sus, pentru care aplicatia h^{-1} sa fie o conjugare topologica sau o semi-conjugare topologica. Spre exemplu ar trebui sa avem ca o intersectie de tipul

$$\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(X_{\omega_i}),$$

sa se reduca la un punct. Obtinem atunci o aplicatie de codare a sistemului dinamic

$$h^{-1} : \Sigma_m \to \Lambda, h^{-1}(\omega) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(X_{\omega_i})$$

Sa consideram exemplul multimii de tip horseshoe discutat mai sus. Am vazut ca daca notam cu V_1, V_2 cele doua benzi verticale, atunci multimea fractala invarianta care se obtine satisface:

$$\Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i(V_1 \cup V_2)$$

Asadar pentru multimea horseshoe o patrtitie cu proprietatile de mai sus este data de

$$\mathscr{X} := \{V_1, V_2\}$$

Intr-adevar intersectia $\cap_{i \geq 0} f^i(V_1 \cup V_2)$ este de tipul $C \times [0,1]$ pentru o multyime Cantor, adica este o reuniune de segmente verticale, in timp ce intersectia $cap_{i \geq 0} f^i(V_1 \cup V_2)$ este egala cu $[0,1] \times C'$ pentru o multime Cantor C' si este reprezentata de o reuniune de segmente orizontale. Intersectia acestor doua multimi ne de Λ.

Asadar pentru multimea de tip horseshoe Λ obtiinuta mai sus, avem o conjugare topologica h cu shift-ul $\sigma_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_2$. Obtinem astfel proprietati topologice importante ale aplicatiei $f : \Lambda \to \Lambda$.

Propozitia 1.2.3.2

Punctele periodice ale lui f sunt dense in Λ si avem 2^n puncte periodice de perioada n (i.e puncte fixe ale iteratei f^n). Deasemenea restrictia $f|_\Lambda$ este mixing topologic.

□

Codarea simbolica este importanta si fiindca este invarianta la perturbatii netede ale sistemului; intr-adeavar vedem ca expresia aplicatiei f nu este importanta in gasirea unei codari, ci mai mult proprietatile calitative dinamice.

Vom da definitia partitiei Markov generale mai tarziu cand vom vorbi despre multimi hiperbolice.

1.3 Moduri de masurare a complexitatii si gradului de dezordine al unui sistem.

1.3.1 Entropia topologica

Entropia topologica masoara gradul de neprevazut si dezordine introdus intr-un sistem care evolueaza in timp. Vom da mai jos o definite precisa matematica. Mentionam ca entropia topologica este foarte importanta si utila in dinamica economica deoarece da gradul de complexitate al unui proces economic; astfel sisteme cu o entropie mai mica sunt mai usor de controlat decat sisteme cu entropie mare.

Definitia 1.3.1.1

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact (X,d). Definim un sir de metrici $d_n(\cdot,\cdot), n \geq 1$ astfel:

$$d_n(x,y) := \sup_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i x, f^i y)$$

Sa definim si notiunea de bila Bowen in metrica d_n pentru $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n(y,\varepsilon) := \{z \in X, d_n(y,z) < \varepsilon\},\ y \in X, \varepsilon > 0$$

O multime $E \subset X$ se numeste (n,ε)-generatoare in X daca $X = \cup_{y \in E} B_n(y,\varepsilon)$. Multimea $E \subset X$ se numeste (n,ε)-separata daca $d_n(x,y) > \varepsilon, \forall x,y \in E$.

□

Se observa asadar ca numarul minimal de bile Bowen in metrica d_n necesare pentru a acoperi X reprezinta numarul de conditii initiale care sunt pastrate cu o eroare de ε dupa n iterari. Sa notam acum cu $G(f,n,\varepsilon)$ cadrinalul unei multimi minimale (n,ε)-generatoare in X pentru aplicatia f.

Definitia 1.3.1.1

Pentru aplicatia continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X si pentru $\varepsilon > 0$ fixat, sa consideram limita superioara

$$h(f,\varepsilon) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log G(f, n\varepsilon)$$

Cum $S(f,n,\varepsilon)$ creste atunci cand $\varepsilon > 0$ scade, pentru n fixat, rezulta ca $h(f,\varepsilon)$ creste daca $\varepsilon \to 0$. Putem defini atunci entropia topologica a lui f pe X ca

$$h(f) := \lim_{\varepsilon\to 0} h(f,\varepsilon)$$

Vom mai nota entropia topologica si cu $h_{top}(f)$.

□

Datorita faptului ca definitia entropiei topologice este in esenta una topologica, avem urmatoarea

Propozitia 1.3.1.2

Doua metrici care definesc aceeasi topologie pe X definesc si aceeasi entropie topologica.

$\square$

Deasemenea o proprietate importanta a entropiei topologice este cea de invarianta la conjugarea topologica. Intr-adeavar pentru aceasta folosim faptul ca o conjugare topologica h transporta metrica d de pe X la o metrica pe Y care da aceeasi topologie. Astfel folosind Propozitia 1.3.1.2, obtinem

Propozitia 1.3.1.3

Daca $h : X \to Y$ este o conjugare topologica intre aplicatiile continue $f : X \to X$ si $g : Y \to Y$, atunci $h(f) = h(g)$.

$\square$

Mai sus in Definitia 1.3.1.1 am definit si notiunea de multime separata. Se poate arata ca de fapt si aceasta notiune se poate folosi la definirea entropiei topologice, intrucat orice multime (n,ε)-separata maximala este si (n,ε)-generatoare, si orice multime (n,ε)-generatoare minimala este si $(n,\varepsilon/2)$-separata. Deci daca notam cu

$$S(f,n,\varepsilon) = \text{cardinalul unei multimi } (n,\varepsilon) - \text{separata maximala},$$

vom obtine urmatoarea formula

$$h(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log S(f,n,\varepsilon)$$

Teorema 1.3.1.4

Fie un spatiu metric compact X si o aplicatie continua $f : X \to X$. Urmatoarele afirmatii sunt atunci adevarate:

a) Daca $Y \subset X$ este o submultime compacta si f-invarianta, atunci $h(f|_Y) \leq h(f)$.

b) Daca $X = \cup_{1\leq i\leq k} X_i$ si daca $X_i, 1 \leq i \leq k$ sunt multimi compacte f-invariante, atunci $h(f) = \max_{1\leq i\leq k} h(f|_{X_i}$.

c) $h(f^m) = |m|h(f), \forall m \in \mathbb{Z}$.

d) entropia topologica a produsului este suma entropiilor topologice, i.e $h(f \times g) = h(f) + h(g)$, unde pentru $f : X \to X, g : Y \to Y$, aplicatia produs este definita de $f \times g(x,y) : X \times Y \to X \times Y, f \times g(x,y) = (f(x), g(y))$.

$\square$

Exemplu.

Un exemplu simplu de calculare a entropiei topologice este functia $f : S^1 \to S^1, f(z) = z^2$. In acest caz se observa ca aplicatia este de dilatare, i.e $|f'(z)| > 1$ pentru orice $z \in S^1$. Acest lucru implica existenta a 2^n puncte intr-o multime (n,ε)-generatoare, pentru ε suficient de mic. Deci $h(f) = \log 2$. $\square$

Un rezultat important este acela ca entropia topologica ia in considerare doar punctele non-wandering (de exp. [KH], [Wa], etc.).

Teorema 1.3.1.5

Fie o aplicatie $f : X \to X$ continua, pe spatiul metric X si fie multimea non-wandering $\Omega(f)$ a lui f in X. Atunci $h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$.

In consecinta daca multimea non-wandering $\Omega(f)$ este o multime finita de orbite periodice, atunci $h(f) = 0$.

$\square$

Nu doar conjugarea topologica pastreaza entropia, ci si o semiconjugare cu numar finit de preimagini. Fie o semiconjugare $h : X \to Y$ intre aplicatiile $f : X \to X$ si $g : Y \to Y$. Vom spune ca h este *uniform finita-la-1* daca pentru orice $y \in Y$ numarul de preimagini din $h^{-1}(y)$ este finit si daca este marginit superior de un numar fixat M. Pentru demonstratia urmatoarei Teoreme vezi [MS].

Teorema 1.3.1.6 (Bowen)

Fie $f : X \to X$ si $g : Y \to Y$ doua aplicatii continue si o semiconjugare surjectiva intre ele. Vom presupune si ca h este o semiconjugare uniform finita-la-1. Atunci $h(f) = h(g)$.

$\square$

Un alt exemplu este spatiul standard de siruri Σ_m. Se observa ca o multime (n, ε)-generatoare pentru shift-ul σ_m, este data de multimea sirurilor de lungime n, asadar

$$h(\sigma_m) = \log m$$

La fel se poate demonstra si ca entropia spatiului de siruri unilaterale Σ_m^+ este egala cu $\log m$.

Mentionam acum o teorema care trateaza entropia topologica in cazul multimilor σ_m-invariante Y din Σ_m (a se vedea de exp. [Wa]):

Teorema 1.3.1.7

Fie $\sigma_m : \Sigma_m \to \Sigma_m$ aplicatia shift pe m simboluri si sa consideram o multime inchisa σ_m-invarianta Y in Σ_m. Fie si c_n cardinalul multimii de siruri truncate de lungime n provenind din siruri ale lui Y, i.e

$$c_n := Card\{(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}), \exists \bar{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n_1}, \omega_n, \dots) \in Y\}$$

Atunci entropia lui $\sigma_m|_Y$ este data de cresterea logaritmica a lui c_n, i.e

$$h(\sigma_m|_Y) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log c_n}{n}$$

$\square$

Un exemplu important al Teoremei 1.3.1.7 este dat de aplicatia shift pe un subshift de tip finit Σ_A. Dupa cum am spus si mai sus, subshift-ul de tip finit Σ_A este inchis si σ_m-invariant, asadar ramane de stabilit doar rata de crestere logaritmica a multimii de n-cuvinte permise de matricea de trecere A. Se obtine urmatoare teorema ([Wa], [KH], [Ma], etc.)

Teorema 1.3.1.8

Fie matricea $m \times m$ A de tip 0-1 si $\sigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ subshift-ul de tip finit asociat. Atunci entropia topologica este data de formula

$$h(\sigma_A) = \log |\lambda_{max}|,$$

unde λ_{max} este valoarea proprie de modul maxim, a lui A.

$\square$

1.3.2 Masuri invariante probabilistice.

Vom studia acum unele elemente de teorie ergodica, foarte utile in studiul proceselor dinamice economice si al masurilor lor asociate. Vom considera in cele ce urmeaza un spatiu metric cu masura $(X, \mathscr{B}, \mu)$ unde $\mathscr{B}$ reprezinta σ-algebra multimilor boreliene, si μ este o masura probabilistica boreliana. Vom considera deasemenea o aplicatie $f : X \to X$ care este $\mathscr{B}$-masurabila si care invariaza masura μ. Aceasta este detaliat in Definita urmatoare:

Definitia 1.3.2.1

Aplicatia masurabila $f : X \to X$ invariaza masura μ (sau spunem ca μ este f-invarianta) daca $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ pentru orice multime $A \in \mathscr{B}$.

$\square$

Definitia 1.3.2.2

Spunem ca aplicatia $f : (X, \mathscr{B}, \mu) \to (Y, \mathscr{B}', \nu)$ este un izomorfism de spatii cu masura daca $\mathscr{B}' = f(\mathscr{B})$ modulo ν, daca $\nu = f_* \mu$ si daca f este inversabila in afara eventual a unei multimi de masura μ nula, si imaginea $f(X)$ este de masura totala in Y.

Daca $(X, \mathscr{B}, \mu) = (Y, \mathscr{B}', \nu)$ atunci spunem ca f este un automorfism.

$\square$

Exemple de masuri invariante:

1) Fie $R_\alpha : S^1 \to S^1, R(z) = \alpha z, z \in S^1$ rotatia de unghi α. Atunci se observa usor ca R_α invariaaza masura Haar pe S^1 (care este echivalenta cu masura Lebesgue pe S^1.

2) Mai general, putem defini o aplicatie de rotatie $R_\alpha(z) = \alpha z, z \in G$ pe orice grup compact G. Masura Haar este unica masura probabilistica invarianta la aplicatiile de inmultire din grup.

3) Aplicatia $T : S^1 \to S^1, T_n(z) = z^n, n \geq 2$ pastreaza masura Haar pe cercul unitate S^1. Intr-adeavar daca avem A o multime Borel de diametru mic si luam $T_n^{-1}(A)$, vom obtine n multimi A_i de diametru egal cu $\mathrm{diam}(A)/n$, asadar masura Haar se pastreaza la aplicatia T_n.

Se observa ca daca f este inversabila, pentru a verifica invarianta lui μ este suficient sa avem $\mu(f(A)) = \mu(A)$ pentru orice multime boreliana A.

Se pune problema insa daca masuri invariante exista intotdeauna. Urmatoarea Teorema arata ca da.

Teorema 1.3.2.3, Krylov-Bogoliubov, [KH]

Orice aplicatie continua pe un spatiu metric compact are cel putin o masura probabilistica invarianta.

□

Demonstratie.

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua pe spatiul metric compact X. Sa luam un punct oarecare $x \in X$ si un sir dens g_n in spatiul $C(X)$ al functiilor continue pe X cu convergenta uniforma. Exista atunci un subsir convergent al sirului $(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(f^i(x))$ si notam limita lui cu $\mathscr{F}(g_i)$. Prin procesul diagonal putem lua atunci un acelasi subsir petru toate functiile g_i, si deci pentru o functie continua arbitrara g rezulta ca exista limita sirului de sume corespunzator, pe care o vom nota cu $\mathscr{F}(g)$.

Obtinem astfel o functionala pe spatiul $C(X)$, care este liniara, pozitiva si marginita. Din Teorema de Reprezentare a lui Riesz rezulta atunci ca $\mathscr{F}$ este data de o masura Borel probabilistica μ. Cum obtinem $\mathscr{F}(g) = \mathscr{F}(g \circ f)$, rezulta ca μ este f-invarianta.

□

Vom da acum o importanta Teorema clasica a lui Birkhoff, care ne da o legatura intre media aritmetica pe orbita unui punct si media in raport cu o masura probabilistica (de exp. [Wa], [Ma], etc.)

Teorema 1.3.2.4, Teorema Ergodica a lui Birkhoff.

Fie $f : X \to X$ o aplicatie ce pastreaza masura probabilistica μ, si $\phi \in L^1(X, \mu)$ o functie integrabila in raport cu μ. Atunci pentru μ-aproape orice $x \in X$, urmatoarea limita exista

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0 \leq i \leq n-1} \phi(f^i x)$$

Vom nota aceasta limita prin $\phi_f(x)$. Functia $\phi_f(x)$ este in $LL^1(X, \mu)$, si $int_X \phi(x) d\mu(x) = \int_X \phi_f(x) d\mu(x)$.

□

Putem aplica acum Teorema lui Birkhoff unei functii continue f si pentru un sir dens $(\phi_n)_n$ de functii continue pe X, si sa obtinem o multime de masura totala a.i pentru fiecare punct al acestei multimi sa existe limita din Teorema 1.3.2.4. Atunci putem trece la limita pentru orice functie continua ϕ si vom obtine urmatorul:

Corolar 1.3.2.5

Fie $f : X \to X$ o functie continua pe spatiul metric compact X. Atunci multimea

$$\{x \in X, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x))\text{exista pentru orice functie continua } \phi\},$$

are μ-masura totala in X, i.e complementara ei are μ-masura zero in X.

□

Evident daca f este inversabila pe X, atunci acelasi lucru il putem aplica si functiei inverse f^{-1}, obtinand distributia iteratelor inverse in raport cu μ. Totusi sa observam ca acest lucru nu mai este posibil in cazul unei functii f neinversabile, care are un numar variabil de preimagini in fiecare multime $f^{-n}(x), n > 0$.

Un alt exemplu important de masura invarianta este cel dat pe spatiul simbolic Σ_m de un vector probabilistic $p = (p_0, \dots, p_{m-1})$ unde $\sum_{i=0,\dots,m-1} p_i = 1$.

Intr-adeavar se poate defini atunci o masura μ_p pe Σ_m daca punem

$$\mu_p(C^{\omega_1,\dots,\omega_k}_{i_1,\dots,i_k}) = p_{\omega_1} \cdot \ldots p_{\omega_k}, \tag{5}$$

pentru orice $k > 0$, si $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$ si $\omega_1, \dots, \omega_k \in \{1, \dots, m\}$. Se observa ca μ_p este bine definita si putem extinde definitia ei la orice multime boreliana din Σ_m. In plus, cum p este un vector probabilistic, rezulta ca μ_p este o masura probabilistica. In plus din definitia (5) de mai sus rezulta ca indicii $i_1, \dots, i_k$ nu conteaza, ci doar $\omega_1, \dots, \omega_k$. Asadar masura μ_p este σ_m-invarianta, i.e

$$\mu_p(\sigma_m^{-1}(A)) = \mu_p(A),$$

pentru orice multime boreliana A din Σ_m.

Se observa ca aceeasi masura μ_p se poate defini si pe spatiul sirurilor unilaterale Σ_m^+.

1.3.3 Ergodicitate, mixing si comportament statistic.

Sa luam un spatiu metric cu o masura probabilistica (care este deci boreliana in particular), notat cu (X, μ). Se pune problema daca masura μ este minimala intr-un anumit sens, adica daca nu este formata ca o suma convexa de alte doua masuri invariante. Avem deci posibilitatea de a scrie $\mu = \alpha\mu_1 + (1 - alpha)\mu_2$ cu μ_1, μ_2 f-invariante?

Vom vedea ca cele mai mici masuri invariante, intr-un sens, sunt masurile ergodice, definite mai jos:

Definitia 1.3.3.1

Fie aplicatia masurabila $f : X \to X$ care pastreaza masura probabilistica μ. Vom spune ca μ este **ergodica** in raport cu f daca pentru orice multime boreliana A pentru care $f^{-1}(A) = A$, rezulta ca fie $\mu(A) = 0$, fie $\mu(A) = 1$.

$\square$

Avem imediat urmatoarea Propozitie care arata ca singurele functii reale f-invariante sunt constante μ-aproape peste tot, daca μ este ergodica.

Propozitia 1.3.3.2

Fie $f : X \to X$ care pastreaza masura probabilistica μ pe X. Atunci daca pentru o functie $\phi : X \to \mathbb{R}$ avem $\phi \circ f = \phi$ μ-aproape peste tot in X, rezulta ca ϕ este constanta μ-a.p.t pe X.

$\square$

Ca o consecinta a Teoremei lui Birkhoff si a Propozitiei de mai sus avem urmatorul:

Corolar 1.3.3.3

Fie o functie $f : X \to X$ care pastreaza masura probabilistica ergodica μ. Sa consideram si functia definita in Teorema lui Birkhoff 1.3.2.4 de mai sus, definita μ-a.p.t prin:

$$\phi_f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\le i\le n-1} \phi(f^i(x))$$

Atunci rezulta ca functia ϕ_f este constanta a.p.t si avem $\phi_f \equiv \int_X \phi d\mu$ μ-a.p.t.

$\square$

Vom studia acum multimea masurilor ergodice ca submultime in multimea tuturor masurilor invariante in raport cu f pe spatiul metric compact fixat X.

Fie deci aplicatia continua $f : X \to X$ si sa definim:

$$\mathscr{M} := \{\mu,\ \mu \text{ masura probabilistica pe } X\},$$

dotat cu topologia slaba. Si anume avem $\mu_n \to \mu$ daca si numai daca $\mu_n(\phi) = \int_X \phi d\mu_n \underset{n\to\infty}{\to} \mu(\phi) = \int_X \phi d\mu$. Se observa ca, conditia $\mu(X) = 1$ implica faptul ca $\mathscr{M}$ este un spatiu compact in topologia slaba.

Sa definim si spatiul masurilor probabilistice f-invariante:

$$\mathscr{M}(f) := \{\mu,\ \mu \in \mathscr{M} si\ \mu\ f-\text{invarianta}\}$$

Avem urmatoarea Lema care se poate demonstra usor:

Lema 1.3.3.4

Daca o masura $\mu \in \mathscr{M}(f)$ nu este ergodica, atunci o putem scrie ca

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2,$$

unde $\alpha \in (0,1)$ si μ_1, μ_2 sunt doua masuri f-invariante diferite.

$\square$

Demonstratie:

Daca μ nu este ergodica, atunci exista o multime boreliana A asa incat $f^{-1}(A) = A$ si $0 < \mu(A) < 1$. Astfel, putem lua masura conditionala a lui μ pe A, notata cu μ_1; si masura conditionala a lui μ pe $X \setminus A$, notata cu μ_2. Avem deci masurile conditionale definite prin:

$$\mu_1(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)}, \;\; \mu_2(B) = \frac{\mu(X \setminus B)}{\mu(X \setminus A)}, \; \forall\, B \text{ boreliana in } \; X$$

Atunci cum $f^{-1}(A) = A$ si $0 < \mu(A) < 1$, rezulta ca cele doua masuri μ_1, μ_2 sunt bine definite, probabilistice si f-invariante, cee ce trebuia demonstrat.

$\square$

Vom arata acum ca masurile ergodice sunt puncte extreme in $\mathscr{M}(f)$.

Definitia 1.3.3.5

Fie X un spatiu liniar si C o multime convexa a lui X. Vom spune ca $v \in C$ este *un punct extrem* al lui C daca v nu se poate scrie ca o combinatie de alte elemente din C, adica daca $v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2, v_1, v_2 \in C$, atunci fie $\alpha \in \{0,1\}$, fie $v_1 = v_2 = v$.

$\square$

Sa notam cu $ex(C)$ multimea punctelor extreme ale multimii convexe C. Vom spune si ca X este un spatiu local convex daca orice punct are o vecinatate convexa. Dam acum urmatoarea Teorema clasica (de exemplu [KH], [Ma], etc.)

Teorema 1.3.3.6, Choquet

Sa presupunem ca x este un punct al unei multimi metrizabile convexe C in spatiul vectorial topologic local convex X. Atunci exista o masura probabilistica μ pe multimea punctelor extreme $ex(C)$ astfel incat

$$x = \int_{ex(C)} y d\mu(y)$$

$\square$

Printr-un procedeu similar celui din demonstratia Teoremei Krylov-Bogoliubov, obtinem urmatoarea:

Teorema 1.3.3.7

Orice functie continua $F : X \to X$ pe un spatiu metric compact are cel putin o masura probabilistica f-invarianta ergodica.

$\square$

Folosind Teorema Choquet, obtinem urmatoarea Teorema (vezi [Wa], [Ma], [KH] etc.):

Teorema 1.3.3.8, Teorema de Descompunere Ergodica.

Fie o functie contijnua $f : X \to X$ pe un spatiu metric compact si fie μ o masura probabilistica f-invarianta pe X. Atunci exista un spatiu Lebesgue (A, ν) si o partitie a lui X modulo μ cu multimi indexate de A,

$$X = \underset{\alpha \in A}{\cup} X_\alpha,$$

astfel incat fiecare X_α este f-invariant si are o masura probabilistica ergodica $\mu_\alpha, \alpha \in A$ si asa incat pentru orice functie continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ sa avem descompunerea:

$$\int_X \phi d\mu = \int_A \left(\int_{X_\alpha} \phi d\mu_\alpha \right) d\nu(\alpha)$$

□

Teorema de Descompunere Ergodica se foloseste in demonstrarea multor rezultate in teoria masurilor invariante, prin reducerea intai la cazul ergodic mai simplu. Asadar studiul masurilor ergodice este deosebit de important, ele fiind un fel de blocuri-unitate a masurilor invariante generale.

Sa consideram acum mai multe caracterizari ale masurilor ergodice:

Teorema 1.3.3.9. Caracterizari ale Ergodicitatii.

Fie $f : X \to X$ o aplicatie masurabila care pastreaza masura probabilistica μ. Atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) μ este ergodica pentru f.

b) pentru orice multime boreliana A cu $\mu(A) > 0$, avem ca $\mu(\underset{n \geq 1}{\cup} f^{-n}(A)) = 1$.

c) pentru orice doua multimi boreliene $A, B \subset X$ cu $\mu(A) > 0, \mu(B) > 0$, exista un $n > 0$ astfel incat $\mu(f^{-n}(A) \cap B) > 0$.

□

Pentru o aplicatie $f : X \to X$ care pastreaza masura probabilistica μ, se poate defini o aplicatie liniara pe spatiul de functii p-integrabile in raport cu μ, $U_f : L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu)$, pentru orice $p \geq 1$ prin:

$$U_f(\phi) = \phi \circ f, \ \phi \in L^p(X, \mu) \tag{6}$$

Teorema 1.3.3.10

Fie o aplicatie $f : X \to X$ care pastreaza masura probabilistica μ. Cu notatia din (6) rezulta ca pentru orice $p \geq 1$ avem $U_f(L^p(X, \mu)) \subset L^p(X, \mu)$ si U_f este o izometrie liniara,

$$||U_f(\phi)||_p = ||\phi||_p, \ \forall \phi \in L^p(X, \mu)$$

□

Studiul operatorului U_f se numeste *studiu spectral* si este important in legaturile cu notiuni ca ergodicitatea, mixing-ul de masuri, etc.

Avem atunci urmatoarea Teorema care exprima ergodicitatea in termeni de U_f ([Wa], [Ma], etc.):

Teorema 1.3.3.11

Fie o aplicatie masurabila $f : X \to X$ care pastreaza masura probabilistica μ. Atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) μ este ergodica.

b) pentru orice $\phi \in L^2(X,\mu)$ care satisface $U_f(\phi)(x) = \phi(x)$ pentru μ-aproape orice $x \in X$, rezulta ca ϕ este constanta μ-a.p.t.

c) pentru orioce functie masurabila ϕ care satisface $U_f(\phi) = \phi$ μ-a.p.t, rezulta ca ϕ este constanta μ-a.p.t.

$\square$

Avem si urmatoarea generalizare a Teoremei lui Birkhoff:

Teorema 1.3.3.12 Teorema lui Von Neumann.

Fie $f : X \to X$ o aplicatie masurabila care pastreaza masura probabilistica μ si fie $p \geq 1$. Atunci pentru orice functie $\phi \in L^p(X,\mu)$ exista o functie $\phi^* \in L^p(X,\mu)$ astfel incat $\phi^* \circ f = \phi^*$ μ-a.p.t si

$$||\frac{1}{n}\sum_{0\leq i<n}\phi(f^i x) - \phi^*(x)||_p \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$\square$

Aplicand Teorema Birkhoff rezulta si urmatorul Corolar, care ne da o alta caracterizare a ergodicitatii:

Corolar 1.3.3.13

Fie o aplicatie masurabila $f : X \to X$ care pastreaza masura probabilistica μ. Atunci μ este ergodica in raport cu f daca si numai daca pentru orice doua multimi boreliene A, B avem:

$$\frac{1}{n}\sum_{0\leq i<n}\mu(f^{-i}(A)\cap B) \underset{n\to\infty}{\to} \mu(A)\mu(B)$$

$\square$

Vom investiga acum cateva proprietati legate de recurenta.

Definitia 1.3.3.14

Fie un spatiu metric X si un punct $x \in X$. Vom spune ca x este *pozitiv recurent* daca $x \in \omega(x)$, i.e x apartine multimii punctelor de acumulare ale orbitei sale pozitive. Vom spune ca x este *negativ recurent* daca x apartine multimii $\omega^-(x)$, adica multimii punctelor limita ale orbitei sale negative. Punctul x se numeste *recurent* daca este pozitiv si negativ recurent. In cazul neinversabil, se inlocuieste orbita negativa cu multimea tuturor preimaginilor lui x.

$\square$

Pentru o masura boreliana μ pe un spatiu metric X definim **suportul** lui μ prin:

$$supp(\mu) := \{x \in X, \mu(V) > 0, \, \forall \, V \text{ vecinatate a lui } x\}$$

Se demonstreaza imediat ca $supp(\mu)$ este o multime inchisa in X, ca $\mu(X \setminus supp(\mu)) = 0$ si ca orice multime de masura totala in X este densa in $supp(\mu)$.

Vom da acum Teorema de Recurenta Poincare (de exp. [Wa], etc.) care spune ca in orice multime de masura pozitiva, avem un numar infinit de iterate pentru aproape orice punct din acea multime.

Teorema 1.3.3.15, Teorema de Recurenta a lui Poincare.

Fie un spatiu metric X cu masura probabilistica μ si o aplicatie masurabila $f : X \to X$ care invariaza masura μ. Fie si A o multime boreliana oarecare in X. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\{y \in A, (f^n(y))_{n \geq m} \subset X \setminus A\}) = 0$$

$\square$

Demonstratie:

Putem lua $m = 1$, cazul general functioneaza daca luam o iterata f^m. Multimea

$$\hat{A} := \{y \in A, (f^n(y))_{n \geq m} \subset X \setminus A\}$$

este boreliana si $f^{-n}(\hat{A}) \cap \hat{A} = \emptyset, \forall n > 0$. Aceasta inseamna ca toate preimaginile $f^{-n}(\hat{A})$ sunt mutual disjuncte, adica $f^{-n}(\hat{A}) \cap f^{-n'}(\hat{A}) = \emptyset$ for any $n \neq n'$. Pe de alta parte $\mu(f^{-n}(A)) = \mu(A), n > 0$ deoarece μ este f-invarianta. Dar din mutual disjunctia de mai sus obtinem

$$\sum_{n \geq 0} \mu(f^{-n}(A)) = \mu(\cup_{n \geq 0} f^{-n}(A)) \leq 1,$$

deci cum toate masurile $\mu(f^{-n}(A), n > 0$ sunt identice, ar rezulta o contradictie daca $\mu(\hat{A})$ ar fi pozitiva. Rezulta deci ca $\mu(\hat{A}) = 0$.

$\square$

Teorema lui POincare ne ajuta sa demonstram urmatoarea:

Propozitia 1.3.3.16

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua pe un spatiu metric complet si separabil X. Atunci:

a) pentru orice masura probabilistica μ care este f-invarianta pe X, avem $supp(\mu) \subset \mathscr{R}(f)$, unde $\mathscr{R}(f)$ reprezinta multimea punctelor recurente ale lui f.

b) daca μ este ergodica, atunci $f|_{supp(\mu)}$ are o orbita densa.

□

Vom da acum o notiune mai puternica si mai restrictiva decat cea de ergodicitate. o notiune care este paralela (desi nu echivalenta) cu cea de mixing topologic.

Definitia 1.3.1.17

Fie un spatiu probabilistic (X, μ) si o aplicatie $f : X \to X$ care invariaza masura μ. Spunem atunci ca f este **mixing in raport cu masura** μ, daca pentru orice doua multimi boreliene A, B avem

$$\mu(f^{-n}(A) \cap B) \underset{n\to\infty}{\to} \mu(A) \cdot \mu(B)$$

□

Se observa ca daca h este un izomorfism de de conjugare de spatii cu masura intre $f : X \to X$ care invariaza μ, si $g : Y \to Y$ care invariaza ν, atunci h pastreaza proprietatea de mixing.

Sa observam si ca daca μ este mixing, atunci este si ergodica in raport cu f. Intr-adevar sa luam o multime total invarianta A adica $f^{-1}(A) = A$. Atunci $f^{-n}(A) = A$ si deci daca μ este mixing, avem

$$\mu(f^{-n}(A) \cap A) \to \mu(A)^2$$

Dar atunci rezulta ca $\mu(A) = \mu(A)^2$ deci $\mu(A)$ este egala cu 0 sau 1.

Propozitia 1.3.1.18

Daca f este o aplicatie ce invariaza masura probabilistica μ pe X si daca este mixing in raport cu μ, atunci μ este si ergodica.

□

O legatura intre mixing topologic si mixing in raport cu o masura este data de urmatoarea:

Propozitia 1.3.1.19

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua pe spatiul metric compact X care invariaza masura probabilistica μ. Atunci, daca μ este mixing, rezulta ca $f|_{supp(\mu)}$ este mixing topologic.

□

Reciproca Propozitiei de mai sus nu este insa neaparat valida.

Proprietatea de ergodicitate conform celor de mai sus, spune ca orice doua multimi masurabile devin asimptotic independente (in raport cu μ) in medie. Pe de alta parte, proprietatea de mixing spune ca orice doua multimi masurabile devin asimptotic independente.

Sa dam acum definitia unei familii suficiente de multimi ([KH]):

Definitia 1.3.1.20

O colectie $\mathscr{C}$ de multimi masurabile in spatiul cu masura $(X,\mathscr{B},\mu)$ se numeste densa daca pentru orice multime masurabila A si orice $\varepsilon > 0$ exista $B \in \mathscr{C}$ asa incat $\mu(A\Delta B) < \varepsilon$. O colectie $\mathscr{C}$ se numeste suficienta daca familia reuniunilor disjuncte finite de multimi din $\mathscr{C}$ este densa.

$\square$

Avem atunci urmatoarea Propozitie care spune ca este suficient sa verificam conditia de mixing pe o familie de multimi mai mica:

Propozitia 1.3.1.21

Pentru o masura probabilistica μ care este invariata de f este suficient sa avem conditia $\mu(f^{-n}(A)\cap B) \to \mu(A)\mu(B)$ pentru multimi A,B dintr-o colectie suficienta.

$\square$

Proprietatea de mixing se poate verifica si pe functii integrabile:

Propozitia 1.3..1.22

Fie o masura probabilistica f-invarianta μ. Atunci μ este mixing in raport cu f daca pentru orice doua functii $\phi,\psi \in L^2(X,\mu)$ avem

$$\int_X \phi \circ f^n(x)\psi(x)d\mu(x) \underset{n\to\infty}{\to} (\int_X \phi(x)d\mu(x)) \cdot (\int_X \psi(x)d\mu(x))$$

Aceasta este echivalent, in limbajul operatorului asociat, cu:

$$< U_f^n\phi, \psi >_{L^2(X,\mu)} \underset{n\to\infty}{\to} < \phi, 1 >_{L^2(X,\mu)} \cdot < 1, \psi >_{L^2(X,\mu)},$$

pentru orice doua functii $\phi,\psi \in L^2(X,\mu)$.

$\square$

Exemple.

1) Nicio translatie T_α a torului $\mathbb{T}^m$ nu este mixing in raport cu masura Haar, desi exista astfel de translatii care sunt ergodice. Intr-adevar T_α este o izometrie; daca presupunem ca este si ergodica, rezulta ca, daca V este suficient de mica in diametru, atunci exista o infinitate de n_k astfel incat $T_\alpha^{-n_k}(V)\cap V = \emptyset$. Asadar nu putem avea ca masura Haar a lui lui $T_\alpha^{-n}(V)\cap V$ tinde catre $m(V)^2 > 0$.

2) Orice aplicatie de dilatare $F_m : S^1 \to S^1, F_m(z) = z^m, z \in S^1, m \geq 2$ este mixing in raport cu masura Haar pe S^1.

3) Aplicatia shift $\sigma_m : \Sigma_m \to \Sigma_m$ este mixing in raport cu masura μ_p asociata unui vector probabilistic $p = (p_1, \dots, p_m)$.

Similar shift-ul pe spatiul sirurilor unilaterale $\sigma_m^+ : \Sigma_m^+ \to Sigma_m^+$ este mixing in raport cu masura indusa de μ_p pe Σ_m^+.

1.3.4 Entropia de masura si Principiul Variational.

Entropia topologica este importanta pentru a descrie gradul de complexitate al evolutiei unui sistem in timp, din punct de vedere metric si global, insa de multe ori avem de a face cu distributii/masuri care dau o proportie mai mare anumitor regiuni ale spatiului. Este deci important sa avem si o notiune de entropie care depinde de masura. Pentru acest tip de notiune vom introduce *entropia de masura*.

Entropia de masura va fi definita printr-un sir de pasi, fiind o notiune mai elaborata decat entropia topologica. Totusi anumite elemente se pastreaza; si aici, chiar daca nu lucram cu bile Bowen, vom considera partitii ale spatiului in multuimi masurabile, si apoi vom urmari multimea punctelor ale caror iterate apartin unui anumit sir de asemenea multimi ale partitiei.

Sa consideram un spatiu metric cu masura probabilistica (X, μ); σ-algebra multimilor masurabile este data de multimile boreliene. Sa luam o partitie finita $\xi = \{A_1, \dots, A_k\}$ a lui X modulo μ; acesteia ii putem asocia o σ-algebra finita notata cu $\mathscr{A}(\xi)$ data de reuniunile de elemente ale lui ξ.

Reciproc, daca $\mathscr{A}$ este o sub-σ-algebra finita a σ-algebrei borelienelor, atunci ii putem asocia o partitie masurabila finita formata cu intersectii de tipul $B_1 \cap \dots B_m$ unde B_j este o multime $C \in \mathscr{A}$ sau complementara ei $X \setminus C$.

Definitia 1.3.4.1

Fie doua partitii finite ale lui (X, μ), $\xi = \{A_1, \dots, A_k\}$ si $\eta = \{B_1, \dots, B_m\}$. *Uniunea* lor (*join*) este partitia finita

$$\xi \vee \eta = \{A_i \cap B_j, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m\}$$

□

Definitia 1.3.4.2

Fie o aplicatie ce pastreaza masura f pe spatiul probabilistic (X, μ), si o partitie finita ξ a lui (X, μ). Atunci daca $\xi = \{A_1, \dots, A_k\}$, definim pentru orice $n \geq 1$ partitia preimagine de ordin n, $f^{-n}\xi$ prin:

$$f^{-n}\xi = \{f^{-n}(A_1), \dots, f^{-n}(A_k)\}$$

□

Putem defini acum notiunea de entropie a unei partitii:

Definitia 1.3.4.3

Fie o partitie masurabila finita $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$. Atunci entropia lui ξ este numarul

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \log(\mu(A_i))$$

$\square$

Se poate arata urmatoarea Propozitie care da o valoare maxima a entropiei unei partitii ([KH], [Wa], etc.)

Propozitia 1.3.4.4

Daca $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$, atunci $H(\xi) \leq \log k$ si $H(\xi) = \log k$daca si numai daca $\mu(A_i) = \frac{1}{k}, 1 \leq i \leq k$.

$\square$

Exista si o notiune de entropie conditionala a unei partitii in raport cu o alta partitie.

Definitia 1.3.4.5

Fie doua partitii finite $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ si $\eta = \{B_1, \ldots, B_m\}$. Atunci entropia lui ξ data fiind η este media, dupa η a entropiilor calculate pentru masurile conditionale induse in fiecare din multimile lui η, adica

$$H(\xi/\eta) = -\sum_{i=1}^{m} \mu(B_i) \sum_{j=1}^{k} \frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} \log \frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} =$$

$$= -\sum_{i,j} \mu(A_j \cap B_i) \log \frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)}$$

Fiind data o aplicatie $f : X \to X$ care invariaza masura probabilistica μ putem defini si o notiune de entropie a lui f in raport cu o partitie ξ (de exp. [Wa], [Ma], etc.):

Definitia 1.3.4.6

Daca $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ atunci definim *entropia lui f in raport cu* ξ prin

$$h_f(\mu, \xi) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\xi)$$

$\square$

Existenta limitei din Definitia de mai sus nu este triviala, si se bazeaza pe urmatoarele doua rezultate care se demonstreaza relativ usor (vezi [Wa], [KH], etc.):

Lema 1.3.4.7

Daca $(a_n)_n$ este un sir subaditiv de numere reale, adica astfel incat $a_{n+k} \leq a_n + a_k, \forall n, k$, atunci rezulta ca limita $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$ exista si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$$

$\square$

Lema 1.3.4.8

Daca $f : X \to X$ pastreaza masura probabilistica μ si ξ este o partitie masurabila finita, rezulta ca sirul $(H(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\xi)))_n$ este un sir subaditiv. In consecinta acest sir satisface conditiile Lemei 1.3.4.8 si deci exista limita $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\xi))$.

$\square$

Putem defini acum in cele din urma entropia de masura, printr-un proces de maximizare dupa toate partitiile finite masurabile.

Definitia 1.3.4.9

Daca $f : X \to X$ este o aplicatie masurabile ce invariaza masura probabilistica μ pe X, vom defini entropia masurii μ in raport cu f prin:

$$h_f(\mu) := \sup\{h_f(\mu, \xi),\ \xi \text{ partitie masurabila finita a lui } X\}$$

Cu alte cuvinte din punct de vedere euristic, entropia masurii μ este maximul cantitatii medii de informatie zilnica obtinuta prin efectuarea experimentului/distributiei μ zilnic, la infinit.

Atunci cand aplicatia f este *fixata*, vom mai nota entropia de partitie si cea de masura si cu $h(\mu, \xi)$, respectiv $h(\mu)$.

Entropia unei masuri si entropia topologica sunt notiuni extrem de importante nu numai in matematica, ci si in teoria haosului, fizica statistica, dinamica economica, teoria informatiei, etc.

Se observa usor din definitie, ca entropia de masura este un invariant fata de conjugarea de spatii cu masura (care dupa cum am spus mai sus, este un izomorfism definit aproape peste tot in raport cu masurile respective).

Dam acum mai jos cateva proprietati importante ale entropiei de masura ([Wa], [Ma], etc.).

Teorema 1.3.4.10

Fie o aplicatie masurabila f ce invraiaza masura probabilistica μ pe spatiul X. Atunci daca ξ, η sunt partitii masurabile finite in raport cu μ rezulta ca:

a) $h_f(\mu, \xi) \leq H(\xi)$.

b) $h_f(\mu, \xi \vee \eta) \leq h_f(\mu, \xi) + h_f(\mu, \eta)$.

c) daca ξ este mai fina decat η rezulta ca $h(\mu, \eta) \leq h(\mu, \xi)$.

d) $h(\mu, \xi) \leq h(\mu, \eta) + H(\xi/\eta)$.

e) pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem $h(\mu, \xi) = h(\mu, \bigvee_{0 \leq i \leq n-1} f^{-i}(\xi)$.

$\square$

Entropia de masura are deasemenea proprietatea de multiplicare la iterare, adica avem urmatoarea (a se vedea [Wa] pentru demonstratie):

Teorema 1.3.4.11

Daca f este o aplicatie ce invariaza masura probabilistica μ, atunci

a) pentru orice $n > 0$, $h_{f^n}(\mu) = nh_f(\mu)$.

b) daca f este inversabila ca aplicatie pe un spatiu cu masura, atunci $h_{f^{-1}}(\mu) = h_f(\mu)$.

□

In urmatorul Corolar se prezinta in ce caz vom avea entropia de masura nula; acesta este cazul in care efectuarea unui experiment este complet determinata (modulo μ) de experimentele trecute.

Corolar 1.3.4.12

Fie o aplicatie f ce pastreaza masura probabilistica μ si fie o partitie masurabila finita ξ. Atunci $h_f(\mu,\xi) = 0$ daca si numai daca $\xi \subset \bigvee_{i\geq 1} f^{-i}\xi$.

□

In acest fel se obtin conditii necesare si suficiente in care aplicatia este inversabila modulo μ ([Wa], [Ma], etc.):

Corolar 1.3.4.13

Fie o aplicatie masurabila f ce pastreaza masura probabilistica μ pe X. Atunci $h_f(\mu) = 0$ daca si numai daca pentru orice partitie masurabila finita ξ avem

$$\xi \subset \bigvee_{i\geq 1} f^{-i}(\xi), \text{ modulo } \mu$$

□

O Teorema care face legatura intre multimile Bowen folosite in definitia entropiei topologice, si entropia de masura este data de urmatorul rezultat al lui Brin si Katok (de exp. [Ma], [KH], etc.)

Teorema 1.3.4.14, Teorema entropiei locale a lui Brin-Katok

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X, care invariaza masura probabilistica μ. Atunci pentru μ-aproape orice $x \in X$ avem

$$h_f(\mu) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu(B_n(x,\varepsilon))$$

□

Sa ne amintim ca entropia unei masuri in raport cu o sub-algebra finita $\mathscr{A}$, notata cu $h_f(\mu,\mathscr{A})$, este de fapt entropia partitiei masurabile formata cu intersectii finite de multimi din $\mathscr{A}$ si complementare ale lor. Deasemenea daca $(\mathscr{A}_n)_n$ este un sir de sub-σ-algebre ale borelienelor $\mathscr{B}$, atunci $\bigvee_n \mathscr{A}_n$ reprezinta intersectia tuturo sub-σ-algebrelor lui $\mathscr{B}$ care contin fiecare $\mathscr{A}_n$.

Urmatoarea Teorema si Corolarul sau ne dau uhn mod de a calcula efectiv entropia unei masuri in multe cazuri:

Teorema 1.3.4.15, Teorema Kolmogorov-Sinai

Fie $f : X \to X$ o aplicatie masurabila inversabila care invariaza masura probabilistica μ. Atunci daca $\mathscr{A}$ este o sub-algebra finita a σ-algebrei borelienelor $\mathscr{B}$ si daca $\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$ modulo μ, rezulta ca

$$h_f(\mu) = h_f(\mu, \mathscr{A})$$

□

Corolar 1.3.4.16

Daca f este o aplicatie care pastreaza μ dar nu este neaparat inversabila, si daca $\mathscr{A}$ este o sub-algebra finita a lui $\mathscr{B}$ care satisface $\bigvee_{n\geq 0} f^{-n}(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$ modulo μ, atunci

$$h_f(\mu) = h_f(\mu, \mathscr{A})$$

□

Un exemplu concret la care putem aplica Teorema lui Kolmogorov si Sinai este dat de masura μ_p asociata unui vector probabilistic $p = (p_0, \dots, p_{m-1})$ pe spatiul simbolic Σ_m. Se observa ca daca luam partitia ξ cu clindrii determinati la pozitia 0, $\xi = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}, A_i = \{\omega \in \Sigma_m, \omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots), \omega_0 = i\}, 0 \leq i \leq m-1$, atunci sub-algebra $\mathscr{A}(\xi)$ satisface

$$\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} (\sigma_m)^n(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$$

Utilizand Teorema Kolmogorov-Sinai si Corolarul sau 1.3.4.16, se obtine deci entropia masurii μ_p pe spatiul sirurilor bi-laterale Σ_m prin formula:

Corolar 1.3.4.17

Fie vectorul probabilistic $p = (p_0, \dots, p_{m-1})$ si masura asociata μ_p pe spatiul Σ_m. Atunci

$$h_{\sigma_m}(\mu_p) = -\sum_{0\leq i\leq m-1} p_i \log p_i$$

Similar daca consideram aceeasi masura μ_p indusa pe spatiul sirurilor uni-laterale Σ_m^+, obtinem:

$$h_{\sigma_m^+}(\mu_p) = -\sum_{0\leq i\leq m-1} p_i \log p_i$$

□

Un spatiu de tip (Σ_m, μ_p) si cu aplicatia shift σ_m se numeste *shift Bernoulli bi-lateral*. Aplicatia σ_m^+ pe spatiul cu masura (Σ_m^+, μ_p) se numeste *shift Bernoulli uni-lateral*.

O teorema celebra a lui Ornstein (vezi de exp. [Wa], [Ma], etc.) spune ca doua shift-uri Bernoulli sunt izomorfe daca si numai daca au aceeasi entropie de masura. Evident acest lucru nu este adevarat pentru alte spatii decat shift-urile Bernoulli. IN [M-PAMS13] am demonstrat ca singurele endomorfisme ale totului $\mathbb{T}^m$ care sunt uni-lateral Bernoulli sunt cele asociate unei matrici A cu elemente intregi care are *toate* valorile proprii de valoare absoluta supraunitara. Astfel exista legaturi puternice intre Bernoullicitate si proprietatea de dilatare.

Sa consideram acum un spatiu metric compact (X,d) si o aplicatie $f : X \to X$ continua. Vom nota cu $\mathscr{M}(X,f)$ spatiul tuturor masurilor probabilistice pe X care sunt invariate de aplicatia f. Atunci din Teorema Alaoglu-Bourbaki rezulta ca $\mathscr{M}(X,f)$ este un spatiu compact in topologia slaba a masurilor. Deasemenea se observa usor ca $\mathscr{M}(X,f)$ este un spatiu nevid si convex, iar punctele extreme ale sale sunt reprezentate de masurile ergodice.

Vom studia dependenta entropiei de masura $h_f(\mu)$ de masura probabilistica μ. Pentru aceasta sa introducem notiunea de

Definitia 1.3.4.18

Aplicatia definita pe $\mathscr{M}(X,f)$ prin

$$\mu \mapsto h_f(\mu)$$

se numeste *functia de entropie* a lui f pe spatiul X.

□

Urmatoarea Teorema spune ca functia de entropie este afina (vezi demonstratie in [Wa]):

Teorema 1.3.4.19

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua pe spatiul metric compact X. Atunci functia de entropie a lui f este afina, adica pentru orice doua masuri probabilistice μ, ν si $\alpha \in [0,1]$, avem

$$h_f(\alpha\mu + (1-\alpha)\nu) = \alpha h_f(\mu) + (1-\alpha)h_f(\nu)$$

□

Se pune intrebarea acum daca functia de entropie isi atinge maximul. Pentru aceasta avem nevoie de notiune de aplicatie expansiva.

Definitia 1.3.4.20

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X. Spunem ca f este *expansiva* daca exista un $\varepsilon_0 > 0$ astfel incat, daca pentru doua puncte arbitrare $x, y \in X$ exista siruri corespunzatoare de preimagini succesive $(x_n)_{n\leq 0}, (y_n)_{n\leq 0}$ cu $f(x_n) = x_{n-1}, f(y_n) = y_{n-1}, n \leq 0$ satisfacand $d(x_i, y_i) < \varepsilon_0, i \leq 0$ si $d(f^i x, f^i y) < \varepsilon_0, i \geq 0$, atunci rezulta ca $x = y$.

□

Urmatoarea Teorema spune ca daca f este expansiva, atunci functia sa de entropie este superior semicontinua ([Ma], [Wa], etc.):

Teorema 1.3.4.21

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X, asa incat f este expansiva. Atunci rezulta ca functia sa de entropie este superior semicontinua, adica daca $\mu \in \mathscr{M}(X, f)$ si $\varepsilon > 0$ exista o vecinatate U a lui μ in $\mathscr{M}(X, f)$ asa incat $h_f(\nu) < h_f(\mu) + \varepsilon$ pentru orice $\nu \in U$.

□

Utilitatea majora a acestei Teoreme consta in faptul ca daca functia de entropie este superior semicontinua pe spatiul compact (in topologia slaba) $\mathscr{M}(X, f)$, atunci ea isi va atinge maximul, existand deci masuri de entropie maximala.

In urmatoarea Teorema se vor vedea conditii care permit aproximarea entropiei de masura ([Wa]); reamintim ca diametrul unei partitii finite este maximul diametrelor multimilor componente ale partitiei.

Teorema 1.3.4.22

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X si un sir de partitii $(\xi_n)n$ ale lui X cu diametre care converg spre 0, i.e diam$(\xi_n) \to 0$. Atunci

$$h_f(\mu) = \lim_{n\to\infty} h_f(\mu, \xi_n)$$

□

Vom da acum o teorema celebra, deosebit de importanta in teoria ergodica, si anume:

Teorema 1.3.4.23, Principiul Variational pentru Entropie

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe un spatiu metric compact X. Atunci

$$h_{top}(f) = \sup\{h_f(\mu),\ \mu \in \mathscr{M}(X, f)\}$$

□

Demonstratia acestei Teoreme se gaseste in toate textele clasice de teorie ergodica, de exemplu [Wa], [KH], etc. Ca o consecinta a acestei teoreme, putem calcula entropia topologica si ca supremumul entropiei de masura dupa toate masurile ergodice, intrucat masurile ergodice sunt punctele extreme ale lui $\mathscr{M}(X, f)$.

In demonstratia Pincipiului Variational pentru Entropie, se gaseste o masura de entropie maximala ca limita slaba a unui sir de masuri discrete. Sa notam cu $\mathscr{M}_{max}(X, f)$ spatiul masurilor probabilistice de entropie maximala pe X.

Avem urmatoarea

Teorema 1.3.4.24

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X. Atunci:

a) $\mathscr{M}_{max}(X, f)$ este un spatiu convex.

b) daca $h_{top}(f) < \infty$, then the extreme points of $\mathscr{M}_{max}(X, f)$ sunt exact masurile ergodice de entropie maximala.

c) daca functia de entropie este superior semicontinua, atunci $\mathscr{M}_{max}(X, f)$ este nevida si compacta. In particular aceasta se intampla daca f este expansiva pe X.

$\square$

Exemplu:

Pe spatiul simbolic bi-lateral Σ_m exista o unica masura de entropie maximala, si anume masura μ_p asociata vectorului probabilistic $p = (\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$. Entropia acestei masuri, este egala cu entropia topologica a shift-ului σ_m si anume $\log m$.

$\square$

Finalizam aceasta sectiune cu un ultim exemplu important, si anume entropia pentru endomorfisme (liniare) torale ([KH]):

Teorema 1.3.4.25

Fie matricea $n \times n$ cu elemente intregi A si endomorfismul toral indus $f_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$. Atunci masura Haar m pe $\mathbb{T}^n$ este o masura de entropie maximala si

$$h_{top}(f_A) = h_{f_A}(m) = \sum_{i, |\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|,$$

unde λ_i, i sunt valorile proprii ale matricii A.

$\square$

1.4 Sisteme dinamice hiperbolice.

1.4.1 Multimi compacte hiperbolice.

In cele ce urmeaza vom defini o notiune deosebit de importanta in dinamica sistemelor diferentiabile, si anume cea de *hiperbolicitate*. Vom da notiunea generala in cazul aplicatiilor neinversabile, deoarece acestea apar deseori in aplicatiile la dinamica economica, si deoarece cazul inversabil se obtine ca un caz particular.

Vom urma definitia lui Ruelle a hiperbolicitatii pentru endomorfisme (aplicatii neinversabile), a se vedea [Ru-1989], [M-DCDS06], etc.

Fie deci o functie diferentiabila de clasa $\mathscr{C}^2$ pe varietatea Riemanniana M, $f : M \to M$ si sa luam Λ o multime compacta f-invarianta, adica $f(\Lambda) = \Lambda$.

Definitia 1.4.1.1

Spatiul *limita inversa* (sau *extensia naturala*) a perechii (Λ, f) este spatiul tuturor preistoriilor $\hat{x} = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x)$ unde $x_i \in \Lambda, i \leq 0$, $x_0 = x$ si pentru orice $i \leq -1$ avem $f(x_{-i-1}) = x_{-i}$. Vom nota limita inversa cu $\hat{\Lambda}$ (sau $\hat{\Lambda}_f$ daca vrem sa subliniem dependenta de f).

Pe spatiul $\hat{\Lambda}$ luam topologia indusa de pe spatiul produs $\Lambda^{\mathbb{N}}$. In aceasta topologie $\hat{\Lambda}$ devine un spatiu compact si nevid.

$\hat{\Lambda}$ este un spatiu metrizabil cu metrica compatibila cu topologia de mai sus, definita prin:

$$d(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i \leq 0} \frac{d(x_{-i}, y_{-i})}{2^{|i|}}$$

Pe spatiul $\hat{\Lambda}$ introducem si *aplicatia shift* asociata endomorfismului f, definita prin:

$$\hat{f} : \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}, \hat{f}(\hat{x}) = (\ldots, x_{-1}, f(x)),\ \forall \hat{x} \in \hat{\Lambda}$$

Se observa ca $\hat{f}$ este un homeomorfism de la $\hat{\Lambda}$ in el insusi, in raport cu topologia de mai sus.

$\square$

Pentru o functie neinversabila f pe o multime compacta invarianta Λ se poate introduce o notiune de hiperbolicitate care va lua in considerare toate preistoriile $\hat{x} \in \hat{\Lambda}$ ale lui x in Λ. Acest lucru este necesar deoarece spatiile tangente instabile se obtin ca intersectie de iterari de conuri in dierctie instabila, si aceste intersecti depind de preistoria (adica traiectoria in trecut) aleasa. Asadar hiperbolicitatea pe $\hat{\Lambda}$ este o notiune necesara care apare in mod natural.

Definitia 1.4.1.2

Fie o functie de clasa $\mathscr{C}^2$ pe varietatea M si Λ o multime compacta f-invarianta. Atunci spunem ca f este **hiperbolica** pe Λ daca exista o splitare invarianta a fibratului tangent peste $\hat{\Lambda}$ in subspatii tangente stabile si subspatii tangente instabile, adica pentru

$$T_{\hat{\Lambda}}M := \{(\hat{x}, v), \hat{x} \in \hat{\Lambda}, v \in T_x M\},$$

putem scrie $T_{\hat{x}}M = E^s_x \oplus E^u_{\hat{x}}, \forall \hat{x} \in \hat{\Lambda}$, unde exista $\lambda \in (0,1)$ asa incat

$$\forall x \in \Lambda, \hat{x} \in \hat{\Lambda}, \text{si } \forall v \in E^s_x, \forall w \in E^u_{\hat{x}},\ \text{avem } |Df_x(v)| \leq \lambda |v|,\ |Df_x(w)| \geq \lambda^{-1} |w|,$$

si in plus avem invarianta acestei splitari fata de aplicatia derivata,

$$Df_x(E^s_x) \subset E^s_{fx},\ Df_x(E^u_{\hat{x}}) \subset E^u_{\hat{f}\hat{x}},\ \forall x \in \Lambda, \hat{x} \in \hat{\Lambda}$$

$\square$

In Definitia de mai sus, putem avea ca spatiul instabil $E^u_{\hat{x}}$ este egal cu intregul spatiu tangent in x, pentru fiecare $x \in \Lambda$. Spunem atunci ca f este o aplicatie de *dilatare* pe Λ. Daca insa exista atat directii stabile, cat si directrii instabile, spunem ca Λ este o multime de tip *saddle* (*sa*).

Exemple:

1) Unul din primele, si cele mai importante exemple de multimi hiperbolice este multimea de tip horseshoe a lui Smale, introdusa mai sus (vezi [KH], [R], etc.) In acest caz, aplicatia f este un difeomorfism pe o vecinatate a lui Λ si prezinta directii de contractia (cele orizontale) si de dilatare (cele verticale).

2) Endomorfisme torale hiperbolice (de exp. [Wa], [KH], etc.). In acest caz aplicatia este indusa de o matrice cu elemente intregi A de tip $m \times m$. Avem deci

$$f_A : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$$

Aceasta aplicatie este $|det(A)|$-to-1 pe intregul tor $\mathbb{T}^m$. Daca A are toate valorile proprii de modul diferit de 1, atunci rezulta ca aplicatia f_A este hiperbolica pe $\mathbb{T}^m$.

Acesta este un exemplu important de *endomorfism Anosov*, adica o aplicatie diferentiabila $f : M \to M$ definita pe varietatea compacta M si care este hiperbolica pe intreaga varietate M. Daca toate valorile proprii ale lui A sunt de modul mai mare decat 1, atunci f_A este o aplicatie de dilatare; iar daca exista atat valori proprii de modul mai mare decat 1, cat si valori proprii de modul mai mic decat 1, atunci f_A are directii stabile, si directii instabile si $\mathbb{T}^m$ este de tip saddle.

3) Horseshoe pentru difeomorfisme Henon (de exp. [R], [Ma], etc.). Sa luam parametrii reali A, B si functia

$$F_{A,B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F_{A,B}(x,y) = (A - By - x^2, x)$$

Se observa ca $F_{A,B}$ este intr-adevar un difeomorfism pe $\mathbb{R}^2$, si derivata sa $DF_{A,B}$ are determinant constant egal cu B. Pentru anumite valori ale parametrilor A, B s-a demonstrat ([R], etc.) ca aplicatia $F_{A,B}$ este hiperbolica pe o multime compacta invarianta de tip horseshoe, iar dinamica sa este conjugata cu un shift bi-lateral. Acestea sunt cuprinse in urmatoarea:

Teorema 1.4.1.3

Fie $B \neq 0$ si sa presupunem ca $A \geq \frac{(5+2\sqrt{5})(1+|B|^2)}{4}$. Atunci exista un $R = R(A,B) > 0$ asa incat daca notam cu $S = [-R,R] \times [-R,R]$, atunci exista multimea compacta

$$\Lambda_{A,B} = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} F_{A,B}^{i}(S)$$

In plus functia $F_{A,B}$ este hiperbolica pe $\Lambda_{A,B}$ si $F_{A,B}|_{\Lambda_{A,B}}$ este conjugata cu shift-ul σ_2 pe spatiul sirurilor bi-laterale Σ_2.

In particular rezulta si ca multimea non-wandering a lui $F_{A,B}$ este egala cu $\Lambda_{A,B}$.

□

Daca Λ este o multime hiperbolica pentru endomorfismul f, se pot asocia varietati locale stabile si instabile pentru orice directie tangenta stabila sau instabila. Astfel se poate demonstra ca exista $r > 0$ si **varietatile locale stabile, respectiv instabile**:

$$W_r^s(x) := \{y \in M, d(f^n x, f^n y) < r, n \geq 0\},\ \forall x \in \Lambda$$

$$W_r^u(\hat{x}) := \{y \in M, \exists \text{ a prehistory} \hat{y} = (\dots, y_{-1}, y) \in \hat{M}, d(y_{-i}, x_{-i}) < r, i \geq 0\},\ \forall \hat{x} \in \hat{\Lambda}$$

Date fiind varietatile locale putem defini **multimi stabile/instabile globale**. Acestea nu mai sunt varietati per se, dar sunt totusi varietati scufundate; asadar sunt imagini ale unor varietati scufundate in M.

$$W^s(x) := \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_r^s(x)) \text{ este multimea stabila globala a lui } x \in \Lambda$$

$$W^u(\hat{x}) := \bigcup_{n \geq 0} f^{n}(W_r^u(\hat{x})) \text{ este multimea instabila globala asociata preistoriei } \hat{x} \in \hat{\Lambda}$$

1.4.2 Shadowing si proprietatea de produs local pentru multimi hiperbolice.

Hiperbolicitatea unui sistem reprezinta paradigma perfecta a compotamentului haotic, care estre caracterizat de dependenta de conditiile initiale. Intr-adeavr daca f este hiperbolica pe Λ si daca x, y sunt apropiate, atunci iteratele pozitive devin din ce in ce mai departate pana cand distanta intre ele devine mai mare decat o constanta ε_0, iar iteratele negative (sau sirurile de preimagini consecutive) devin deasemenea din ce in ce mai departate.

Proprietatea urmatoare ne da o notiune de "aproape orbita" foarte utila in demonstratia unor rezultate, intrucat nu este necesar sa avem o orbita adevarata, ci doar sa o aproximam.

Definitia 1.4.2.1

Fie un spatiu metric compact X cu metrica $d(\cdot,\cdot)$, o functie $f : U \to X$ definita pe o multime deschisa $U \subset X$ si fie $n, m \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}, m < n$. Vom spune atunci ca un sir de puncte din X, $(x_k)_{m \leq k \leq n}$ este o ε-pseudoorbita daca $d(x_{k+1}, f(x_k)) < \varepsilon, m \leq k \leq n$.

$\square$

Spunem ca sirul (finit sau infinit) $(x_k)_{m\leq k\leq n}$ este δ-urmarit de sirul $(y_k)_{m\leq k\leq n}$ daca si numai daca

$$d(x_k, y_k) < \delta, \ \forall m \leq k \leq n$$

Urmatorul rezultat spune ca pe multimi hiperbolice putem aproxima pseudo-orbitele cu orbite adevarate (de exp. [KH], [R], etc.)

Teorema 1.4.2.2, Teorema de Shadowing

Fie o functie de clasa $\mathscr{C}^2$ $f : M \to M$ pe varietatea Riemanniana M si o multime compacta hiperbolica Λ. Atunci exista o vecinatate U a lui Λ asa incat pentru orice $\delta > 0$, exista un $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ asa incat orice ε-pseudoorbita a lui f din U este δ-urmarita de o orbita a lui f.

$\square$

Pseudo-orbitele sunt utile deoarece apar in mod natural atunci cand consideram perturbatii ale sistemului. Exista asadar o legatura puternica intre shadowing si stabilitatea structurala a sistemului ([KH], [Ru-1989], [M-DCDS06], etc.)

Teorema 1.4.2.3

Fie un endomorfism de clasa $\mathscr{C}^2$ pe varietatea M si fie o multime compacta Λ pe care f este hiperbolica. Atunci exista o vecinatate U a lui Λ astfel incat pentru orice $\delta > 0$ exista un $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, asa incat daca g este un endomorfism de clasa $\mathscr{C}^2$ pe U cu $d_{\mathscr{C}^1}(f, g) < \varepsilon$, atunci rezulta ca exista o multime hiperbolica Λ_g pentru g si un homeomorfism $\hat{h} : \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}_g$ care satisface

$$d(\pi_g \circ \hat{h}, \pi_f) < \varepsilon,$$

unde $\hat{\Lambda}_g$ este limita inversa in raport cu g iar $\pi_f : \hat{\Lambda} \to \Lambda$ si $\pi_g : \hat{\Lambda}_g \to \Lambda_g$ sunt proiectiile canonice.

$\square$

Corolar 1.4.2.4

Difeomorfismele Anosov sunt stabile structural, iar aplicatia h din Teorema 1.4.2.3 devine o conjugare. Aceasta conjugare este unica daca este aleasa aproape de aplicatia identitate.

$\square$

In cele ce urmeaza vom folosi o notiune extrem de importanta, si anume aceea de multime bazica sau local maximala (de exp. [KH], etc.)

Definitia 1.4.2.5

Fie Λ o multime hiperbolica pentru endomorfismul $f : U \to M$. Daca exista o vecinatate V a lui Λ astfel ca $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)$, atunci spunem ca Λ este o multime **bazica** (sau **local maximala**).

$\square$

Avem urmatoare Propozitie care spune ca multimile local maximale contin suficiente puncte periodice, tocmai din proprietatea ca sunt multimi invariante maximale intr-o anumita vecinatate.

Propozitie 1.4.2.6

Fie Λ o multime local maximala si hiperbolica pentru endomorfismul $f : U \to M$. Atunci punctele periodice ale lui f sunt dense in multimea non-wandering $\Omega(f|_\Lambda)$.

$\square$

Definitia 1.4.2.7

Fie o multime hiperbolica Λ pentru endomorfismul f si $r > 0$ astfel incat exista varietatile locale $W^s_r(x)$ si $W^u_r(\hat{x})$. Vom spune ca Λ are *proprietatea de produs local* daca exista un $\delta > 0$ asa incat pentru orice $x, y \in \Lambda$ cu $d(x,y) < \delta$ si $\hat{y} \in \hat{\Lambda}$, rezulta ca $W^s_r(x) \cap W^u_r(\hat{y})$ consta din exact un punct, notat cu $[x,y]$, si avem $[x,y] \in \Lambda$.

$\square$

Avem atunci urmatoarea Teorema ([KH], [Ma], etc.)

Teorema 1.4.2.8

O multime compacta si local maximala Λ are proprietatea de produs local.

$\square$

Vom studia acum proprietati de dinamica topologica pentru multimi local maximale hiperbolice. Una din cel;e mai importante este posibilitatea de partitionare a multimii non-wandering intr-un numar finit de submultimi care sunt invariante si mixing topologic pentru anumite iterate ale functiei. Pentru demonstratie a se vedea de exemplu [KH].

Teorema 1.4.2.9, Teorema de Descompunere Spectrala

Fie o varietate Riemann M si o multime deschisa $U \subset M$ si $f : U \to M$ un endomorfism de clasa $\mathscr{C}^2$. Fie si o multime local maximala si hiperbolica $\Lambda \subset U$, pentru f. Atunci exista multimi disjuncte si inchise $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ si o permutare σ a lui $\{1, \dots, m\}$ asa incat

$$\Omega(f|_\Lambda) = \cup_{1 \le i \le m} \Lambda_i, \ f(\Lambda_i) = \Lambda_{\sigma(i)},$$

si daca $\sigma^k(i) = i$ atunci $f^k|_{\Lambda_i}$ este mixing topologic.

$\square$

Corolar 1.4.2.10

Daca o multime compacta hiperbolica si local maximala Λ are proprietatea ca f este mixing topologic pe Λ, atunci punctele periodice ale lui f sunt dense in Λ, si multimea instabila globala a fiecarui punct periodic este densa in Λ.

$\square$

Vom da acum o proprietate introdusa de Bowen (a se vedea [Bo], [KH]) care specifica existenta a suficient de multe puncte periodice care ε-urmaresc anumite parti din orbita punctelor.

Definitia 1.4.2.11

Fie $f : X \to X$ o bijectie a unei multimi X. O *specificare* $S = (\tau, P)$ consta dintr-o colectie finita $\tau = \{I_1, \dots, I_m\}$ de intervale finite $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{Z}$ si o aplicatie $P : \cup_{1 \le j \le m} I_j \to A$ asa incat pentru orice $t_1, t_2 \in I \in \tau$ avem $f^{t_2 - t_1}(P(t_1)) = P(t_2)$. S se numeste n-departata daca $a_{i+1} > b_i + n, 1 \le i \le m$ si cel mai mic astfel de n se numeste departarea lui S. Spunem si ca S parametrizeaza colectia $\{P_I, I \in \tau\}$.

Fie acum $T(S) := \cup_{1 \le j \le m} I_j$ si $L(S) := b_m - a_1$. Daca (X, d) este un spatiu metric spunem ca S este ε-urmarita de un punct $x \in X$ daca

$$d(f^n(x), P(n)) < \varepsilon,\ \forall n \in T(S)$$

Atunci daca (X, d) este un spatiu metric si $f : X \to X$ este un homeomorfism spunem ca f are *proprietatea de specificare* daca pentru orice $\varepsilon > 0$, exista un $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ asa incat orice specificare M-departata S sa fie ε-urmarita de un punct $x \in X$ si asa incat pentru orice $p \ge M + L(S)$ sa existe un punct periodic de perioada p care sa ε-urmareasca S.

$\square$

Teorema 1.4.2.12, Teorema de Specificare

Daca Λ este o multime hiperbolica local maximala si mixing topologic pentru f, atunci $f|_\Lambda$ are proprietatea de specificare.

$\square$

Corolar 1.4.2.13

Daca Λ este compacta local maximala hiprebolica si mixing topologic pentru f, atunci toate multimile globale instabile sunt dense in Λ.

$\square$

Incheiem acest paragraf cu o Teorema care arata faptul ca proprietatea de produs local si local maximalitatea sunt de fapt echivalente([KH], [M-DCDS06], etc.:

Teorema 1.4.2.14

Fie o multime compacta hiperbolica Λ pentru endomorfismul f. Atunci Λ este local maximala daca si numai are o structura de produs local .

$\square$

Vom da acum notiunea generala de partitie Markov care a fost introdusa intr-un cadru mai restrans in paragrafele anterioare. Aceasta notiune este extrem de importanta deoarece permite in cazul multimilor local maximale hiperbolice, codarea sistemului cu un sistem dinamic simbolic, adica un subshift de tip finit. Partitiile Markov apar in majoritatea textelor clasice de dinamica (de exp. [KH], [R], [Ma], etc.)

Definitia 1.4.2.15

Fie o multime compacta local maximala si hiperbolica Λ pentru un difeomorfism f, si $[x,y]$ aplicatia asociata definita mai sus in cadrul proprietatii de produs local a lui Λ, si anume $[x,y] : \Lambda \times \Lambda \to \Lambda,\ [x,y] = W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$. Atunci o multime $R \subset \Lambda$ se numeste *un patrulater in* Λ daca $\mathrm{diam}(R) < \varepsilon/9$ si daca $[x,y] \in R$ pentru orice $x, y \in R$. Un patrulater R se numeste *regulat* daca R este egal cu inchiderea interiorului lui R in Λ. Vom scrie

$$W^s_R(x) := W^s_\varepsilon(x) \cap R,\ W^u_R(y) := W^u_\varepsilon(y) \cap R, \text{ si}$$

$$\partial^s R := \{x \in R, x \notin \mathrm{Int}_{W^u_\varepsilon(x) \cap \Lambda} W^u_R(x)\},$$

$$\partial^u R := \{x \in R, x \notin \mathrm{Int}_{W^s_\varepsilon(x) \cap \Lambda} W^s_R(x)$$

O **partitie Markov** este o acoperire finita a lui Λ, $\mathscr{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ cu patrulatere regulate asa incat:

a) $\mathrm{Int}R_i \cap \mathrm{Int}R_j = \emptyset, i \neq j$.

b) daca $x \in \mathrm{Int}R_i$ si $f(x) \in \mathrm{Int}R_j$, atunci $W^u_{R_j}(f(x)) \subset f(W^u_{R_i}(x))$ si $f(W^s_{R_i}(x)) \subset W^s_{R_j}(f(x))$.

□

Principala Teorema care ne da existenta partitiilor Markov, cat si moduri de a le construi, consta in:

Teorema 1.4.2.16

O multime compacta local maximala hiperbolica Λ pentru un difeomorfism f, are partitii Markov de diametre oricat de mici.

□

Urmatoarea Teorema ne da existenta unei semi-conjugari intre dinamica pe multimea Λ si cea pe un spatiu simbolic ([KH], [R], etc.). Aceasta semi-conjugare poate fi folosita deci pentru a **coda** dinamica pe multimea hiperbolica Λ in cazul in care f este inversabila pe Λ:

Teorema 1.4.2.17

Fie o multime compacta local maximala si hiperbolica Λ pentru endomorfismul f astfel incat $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ este inversabila, si fie $\mathscr{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ o partitie Markov de diametru suficient de mic. Pentru $1 \leq i, j \leq m$ sa definim atunci $A_{ij} = 1$ daca $R_i \cap f^{-1}(R_j) \neq \emptyset$ si $A_{ij} = 0$ altfel; definim si matricea 0-1, $A := (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$.

Atunci exista o semi-conjugare

$$h : \Sigma_A \to \Lambda,$$

care este de fapt injectiva pe multimea $h^{-1}(\Lambda \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(\partial^s\mathscr{R} \cup \partial^u\mathscr{R})$, unde $\partial^s\mathscr{R} := \cup_{R\in\mathscr{R}}\partial^s R$, si $\partial^u\mathscr{R} := \cup_{R\in\mathscr{R}}\partial^u R$.

□

Ca o aplicatie a Teoremei de mai sus, avem ca proprietatile topologice ale dinamicii pe Λ sunt aceleasi cu ale dinamicii simbolice pe Σ_A ([KH], [R], etc.)

Corolar 1.4.2.18

Fie f inversabila pe multimea compacta hiperbolica si local maximala Λ. Atunci $f|_\Lambda$ este tranzitiva topologic (mixing topologic) daca si numai daca subshift-ul de tip finit (Σ_A, σ_A) obtinut in Teorema 1.4.2.17, este tranzitiv topologic respectiv mixing topologic.

□

1.4.3 Presiune si Principiul Variational General.

Ne amintim din 1.3.1 definitia multimilor (n,ε)-generatoare si (n,ε)-separate pentru o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X. In acest paragraf vom da definitia *presiunii topologice*, care este o generalizare a entropiei topologice, si care are aplicatii multiple in teoria dimensiunii fractale, in fizica statistica si in teoria ergodica (de exp. [Bo], [KH], [Ru-1989], [Ru-2004], [Wa], [M-DCDS06], [M-DCDS12], [MU-BLMS], etc.)

Definitia 1.4.3.1

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe un spatiu metric compact X si $\phi : X \to \mathbb{R}$ o functie continua cu valori reale pe X. **Presiunea topologica** a lui ϕ in raport cu f este definita ca

$$P(\phi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\inf\{\sum_{y\in E} e^{S_n\phi(y)},\ E(n,\varepsilon) - \text{generatoare in } X\},$$

si unde $S_n\phi(y) := \phi(y) + \phi(f(y)) + \dots \phi(f^{n-1}(y)), y \in X$.

Se poate arata ca $P(\phi)$ se poate defini si folosing multimi separate, adica

$$P(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\sup\{\sum_{y\in E} e^{S_n\phi(y)},\ E(n,\varepsilon) - \text{separata in } X\}$$

Uneori daca este necesar sa subliniem ca presiunea se calculeaza in raport cu o anumita functie f, vom folosi notatia $P_f(\phi)$, in loc de $P(\phi)$.

□

Se observa imediat ca entropia topologica se obtine ca un caz particular al presiunii topologice, si anume $h_{top}(f) = P(0)$. Functionala de presiune $P(\cdot) : \mathscr{C}(X, \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ are proprietati similare entropiei (de exp. [Wa], [Ma], [KH], etc.)

Teorema 1.4.3.2

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe un spatiu metric compact X si $\phi, \psi \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$. Urmatoarele afirmatii sunt atunci adevarate:

a) $P_f(\cdot)$ este fie cu valori finite, fie identic egala cu ∞.

b) daca $\phi, \psi \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ si $\phi \leq \psi$ pe X, atunci $P(\phi) \leq P(\psi)$.

c) $h_{top}(f) + \inf \phi \leq P_f(\phi) \leq h_{top}(f) + \sup \phi$.

d) daca $h_{top}(f) < \infty$, atunci $|P(\phi) - P(\psi)| \leq ||\phi - \psi||$.

e) daca $P_f(\cdot) < \infty$ atunci functionala $P_f(\cdot)$ este convexa.

f) $P(\phi + \psi \circ f - \psi) = P(\phi)$.

g) $P(\phi + \psi) \leq P(\phi) + P(\psi)$.

h) $P(\alpha\psi) \leq \alpha P(\phi)$ daca $\alpha \geq 1$, si $P(\alpha\phi) \geq \alpha P(\phi)$ pentru $\alpha \leq 1$.

i) pentru orice constanta reala α, avem $P(\phi + \alpha) = P(\phi)$.

□

Dam acum si un rezultat care ne arata si dependenta lui $P_f(\cdot)$ de aplicatia f (a se vedea [Wa], [KH], etc.) Demonstratia este simpla si foloseste definitia lui $P(\cdot)$ si proprietatile din Teorema precedenta.

Teorema 1.4.3.3

Fie aplicatia continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X si $\phi \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$. Urmatoarele afirmatii sunt atunci adevarate:

a) daca $n > 0$, atunci $P_{f^n}(S_n\phi) = nP_f(\phi)$, unde $S_n\phi(y) = \phi(y) + \phi(f(y)) + \ldots + \phi(f^{n-1}(y)), y \in X$.

b) daca f este un homeomorfism al lui X, atunci $P_{f^{-1}}(\phi) = P_f(\phi)$.

c) daca $Y \subset X$ este o multime inchisa asa incat $f(Y) \subset Y$, atunci $P_{f|_Y}(\phi) \leq P_f(\phi)$.

d) daca $h : X_1 \to X_1$ este o semi-conjugare intre $f_1 : X_1 \to X_1$ si $f_2 : X_2 \to X_2$, atunci pentru orice functie continua $\phi : X_2 \to \mathbb{R}$, avem $P_{f_2}(\phi) \leq P_{f_1}(\phi \circ h)$.

e) daca $f_1 : X_1 \to X_1$ si $f_2 : X_2 \to X_2$ sunt aplicatii continue ale spatiilor metrice copacte X_1, X_2 si ϕ_1, ϕ_2 functii continue pe X_1 respectiv X_2 cu valori reale, atunci

$$P_{f_1 \times f_2}(\phi_1 \times \phi_2) = P_{f_1}(\phi_1) P_{f_2}(\phi_2),$$

unde $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2$ este aplicatia produs, iar $\phi_1 \times \phi_2(x_1, x_2) := \phi_1(x_1) + \phi_2(x_2), (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

$\square$

Suntem acum pregatiti pentru a da o generalizare a Principiului Variational pentru Entropie, si anume Principiul Variational pentru Presiune. Acest pincipiu a fost demonstrat intai pentru anumite functii de Ruelle si in generalitate de Walters ([Ru-2004], [Wa], [KH], etc.) In demonstratia lui se foloseste in mod esential urmatoarea Lema generala

Lema 1.4.3.4

Fie $a_1,\ldots,a_m$ numere reale. Daca $p_i \geq 0$ si $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ atunci avem inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(a_i - \log p_i) \leq \log \sum_{i=1}^{m} e^{a_i},$$

iar egalitatea are loc mai sus daca si numai daca

$$p_i = \frac{e^{a_i}}{\sum_{i=1}^{m} e^{a_i}}$$

$\square$

Teorema 1.4.3.5, Principiul Variational pentru Presiune

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua pe spatiul metric compact X, si fie $\phi \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$. Atunci avem

$$P_f(\phi) = \sup\{\int_X \phi d\mu + h_\mu,\ \mu \text{ masura probabilistica } f-\text{invarianta pe } X\}$$

$\square$

Ca o consecinta a Principiului Variational avem ca presiunea se poate calcula doar considerand restrictia la multimea non-wandering, cat si la masurile ergodice.

Corolar 1.4.3.6

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X si $\phi \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$. Atunci

$$P_f(\phi) = P_{f|_{\Omega(f)}}(\phi|_{\Omega(f)}) = \sup\{\int_X \phi d\mu + h_\mu,\ \mu \text{ probabilitate ergodica } f-\text{invarianta}\}$$

$\square$

1.4.4 Masuri de echilibru: existenta, unicitate si proprietati

Ideea este de a extinde notiunea de masura de entropie maximala la presiunea topologica a unui potential ϕ care nu e neaparat identic egal cu 0. Masurile de echilibru sunt acele masuri pentru care se atinge maximul in Prinicpiul Variational General.

Definitia 1.4.4.1

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe spatiul metric compact X si o functie continua $\phi \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$. O masura $\mu \in \mathscr{M}(X, f)$ se numeste **masura de echilibru** a lui ϕ daca avem

$$P(\phi) = h_\mu + \int_X \phi d\mu$$

Vom nota cu $\mathscr{M}(X, f; \phi)$ spatiul tuturor masurilor de echilibru ale lui ϕ.

□

Daca functia f si spatiul X sunt fixate, vom nota uneori si $\mathscr{M}(\phi)$ uneori, in loc de $\mathscr{M}(X, f; \phi)$. Se observa imediat ca masurile de entropie maximale sunt exact masurile de echilibru ale potentialului identic egal cu 0. Exista exemple in care $\mathscr{M}(X, f; \phi) = \emptyset$. Urmatoarea Teorema (a se vedea [Wa], [KH]) da unele proprietati ale spatiului masurilor de echilibru.

Teorema 1.4.4.2

Fie o aplicatie continua $f : X \to X$ pe un spatiu metric compact X, si $\phi \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$. Atunci:

a) spatiul $\mathscr{M}(X, f; \phi)$ este convex.

b) daca $h_{top}(f) < \infty$, atunci punctele extreme ale lui $\mathscr{M}(X, f; \phi)$ sunt exact masurile ergodice din $\mathscr{M}(X, f; \phi)$. Daca $\mathscr{M}(X, f; \phi) \neq \emptyset$, atunci exista cel putin o masura ergodica in $\mathscr{M}(X, f; \phi)$.

c) daca functia de entropie a lui f este superior semicontinua, atunci $\mathscr{M}(X, f; \phi)$ este compacta si nevida. Asadar in acest caz, orice functie $\phi \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ are cel putin o masura de echilibru.

□

Masurile de echilibru se pot obtine ca limite slabe ale unor masuri atomice pe multimi separate. Dupa cum ne amintim din paragraful 1.3.4, daca $f : X \to X$ este o aplicatie expansiva (i.e exista un $\varepsilon_0 > 0$ asa incat daca pentru doua preistorii $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$ avem $d(x_{-i}, y_{-i}) < \varepsilon_0, d(f^j x, f^j y) < \varepsilon_0, i \geq 0, j > 0$ atunci $x = y$), atunci functia de entropie intre $\mathscr{M}(X, f)$ si $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ data de $\mu \mapsto h_\mu$, este superior semicontinua. Obtinem atunci urmatorul rezultat care ne da o clasa larga de aplicatii pentru care masuri de echilibru exista (a se vedea [Bo], [Wa], etc pentru demonstratie):

Teorema 1.4.4.3

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua expansiva pe spatiul metric compact X. Atunci exista o multime densa in $\mathscr{C}(X, f)$ asa incat fiecare element ϕ al acesteia, are o unica masura de echilibru.

□

Functiile ϕ Hölder continue pe X au o importanta deosebita pentru existenta si unicitatea masurilor de echilibru, deasemenea este posibil si sa scriem masura de echilibru ca unic punct limita al unui sir de masuri atomice suportate pe multimea punctelor periodice. Urmatoarea Teorema ([Bo]) colecteaza aceste rezultate pentru cazul aplicatiilor expansive care au proprietatea de specificare.

Teorema 1.4.4.4, Bowen.

Fie $f : X \to X$ o aplicatie continua expansiva care are proprietatea de specificare, si $\phi \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ o functie Hölder. Exista atunci o singura masura μ in multimea $\mathscr{M}(X, f; \phi)$; aceasta masura se numeste masura de echilibru a lui ϕ si se noteaza cu μ_ϕ.

Deasemenea rezulta ca μ_ϕ este mixing si se poate obtine ca limita slaba a unui sir de masuri atomice:

$$\mu_\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P(\phi)} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f^n)} e^{S_n\phi(x)} \delta_x$$

$\square$

Un caz important in care functia f are proprietatea de specificare este atunci cand este hiperbolica pe o multime local maximala Λ ([KH], [Bo], etc.)

Corolar 1.4.4.5

Fie Λ o multime compacta, local maximala si tranzitiva a lui f asa incat f este un homeomorfism hiperbolic pe Λ si fie $\phi \in \mathscr{C}(\Lambda, \mathbb{R})$ o functie Hölder continua pe Λ. Atunci exista o unica masura de echilibru a lui ϕ notata cu μ_ϕ.

$\square$

Acest rezultat a fost extins in [M-DCDS06] in cazul endomorfismelor hiperbolice, folosind proprietatea de spatiu Smale a limitei inverse $\hat{\Lambda}$ ([Ru-2004]). Dinamica aplicatiilor neinversabile f pe multimi local maximale Λ prezinta numeroase diferente semnificative fata de cazul difeomorfismelor.

Corolar 1.4.4.6

Fie $f : M \to M$ o aplicatie de clasa $\mathscr{C}^2$ care este hiperbolica ca un endomorfism pe multimea tranzitiva local maximala Λ. Atunci pentru orice functie Hölder continua ϕ pe Λ, exista o unica masura de echilibru pe Λ a lui ϕ, notata cu μ_ϕ. Aceasta masura de echilibru este mixing, deci in particular si ergodica.

$\square$

Mai mult, folosind [Bo], [KH] se poate gasi comportamentul masurii μ_ϕ pe multimi Bowen $B_n(x, \varepsilon)$ pentru orice intreg $n > 0$ si $\varepsilon > 0$. Estimarea este adevarata si pentru endomorfisme hiperbolice ([M-DCDS06]).

Teorema 1.4.4.7

Fie $f : M \to M$ un endomorfism $\mathscr{C}^2$ pe varietatea Riemann M si Λ o multime compacta local maximala tranzitiva pe care f este hiperbolica. Fie si o functie ϕ Hölder pe Λ. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ exista constante pozitive $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ asa incat pentru orice $x \in \Lambda$ si $\varepsilon > 0$ sa avem estimarile:

$$A_\varepsilon e^{S_n\phi(x) - nP(\phi)} \leq \mu_\phi(B_n(x, \varepsilon)) \leq B_\varepsilon e^{S_n\phi(x) - nP(\phi)}$$

$\square$

In demonstratia acestei Teoreme se foloseste unicitatea masurii de echilibru a unui potential Hölder ϕ pe o multime hiperbolica din Teorema 1.4.4.4, si faptul ca este o limita slaba a unui sir de masuri atomice suportate pe multimea punctelor periodice.

Vom investiga acum clasificarea masurilor de echilibru, si vom raspunde la intrebarea daca doua functii ϕ, ψ pot avea aceeasi masura de echilibru. Materialul este clasic si se gaseste in toate cartile de sisteme dinamice hiperbolice (de exp. [Bo], [KH], etc.)

Teorema 1.4.4.8

Fie $f : X \to X$ un homeomorfism expansiv pe spatiul metric compact X care are si proprietatea de specificare, si ϕ, ψ potentiali Holder pe X. Daca exista o constanta c asa incat $S_n\phi(x) = S_n\psi(x) + nc$ pentru orice $x \in \text{Fix}(f^n)$ si $n \in \mathbb{N}$, atunci masurile de echilibru ale lui ϕ si ψ coincid.

$\square$

In cazul multimilor local maximale hiperbolice, avem prin aplicarea Teoremei Livschitz ca $\mu_\phi = \mu_\psi$ daca si numai daca ϕ si ψ sunt coomologe, adica:

Teorema 1.4.4.9

Fie o multime local maximala tranzitiva si hiperbolica Λ pentru endomorfismul f, si ϕ, ψ potentiali Hölder continui pe Λ. Atunci masurile de echilibru μ_ϕ, μ_ψ coincid daca si numai daca exista o functie Hölder continua h pe Λ si o constanta c, asa incat

$$\psi(x) = \phi(x) + c + h(f(x)) - h(x),\ x \in \Lambda$$

$\square$

Capitolul 2. Modele dinamice in economie si finante.

2.1. Modele dinamice definite implicit in economie.

2.1.1. Modelul generatiilor suprapuse (OLG) al lui Grandmont si generalizari ale acestuia.

Modelul economic generatiilor suprapuse sau Overlapping Generations Model (OLG) a fost propus initial de Grandmont in [G] si a fost studiat de diversi autori, literatura in ceea ce priveste acest model sau generalizarile sale fiind foarte vasta (de exemplu [GHT], [KS], [KSY-JME], [MeR], etc.)

Modelul OLG este un exemplu de dinamica inversa, in sensul ca echilibrul la timpul t poate depinde de echilibrul la timpul $t+1$. Aceste modele se mai numesc si cu *dinamica definita implicit*, si un rol foarte important in studiul lor il are dinamica neinversabila.

In modelul OLG consideram un sistem economic cu o populatie constanta care este impartita in doua tipuri de agenti, si anume agenti "tineri" si agenti "batrani". Un agent tipic traieste ambele perioade si munceste/produce atunci cand este tanar si consuma cand e batran. Atunci cand este tanar, presupunem ca agentul primeste si un salariu pentru munca sa.

In plus vom presupune ca exista un bun de consum care este nu este de utilitate indelungata, iar o unitate din acest bun de consum se produce cu o unitate de munca depusa de cei tineri. Se presupune in plus si ca banii exista intr-o cantitate fixata notata cu M. Sa notam cu w_t salariul la timpul t si cu ℓ_t cantitatea de munca la timpul t. Atunci avem

$$w_t \ell_t = M \tag{7}$$

Deasemenea daca notam cu p_t pretul prevazut pentru bunul de consum la momentul t si cu c_t nivelul consumului la momentul t, atunci cum avem un singur bun de consum,

$$M = p_{t=1} c_{t+1} \tag{8}$$

Daca notam cu ℓ_* cantitatea fixata de munca, atunci timpul liber/repaus al agentilor tineri este $\ell_* - \ell_t$, iar agentii au o functie de utilitate de forma

$$U(t) = V_1(\ell_* - \ell_t) + V_2(c_{t+1}),$$

Agentii doresc sa isi maximizeze atat cantitatea de timp liber la momentul t, cat si consumul la momentul $t+1$. Folosind atunci metoda multiplicatorilor lui Lagrange problemei de mai sus, cu restrictia de buget existenta $M = w_t \ell_t = p_{t+1} c_{t+1}$, obtinem o ecuatie implicita

$$\ell_t = \chi(c_{t+1}) \tag{9}$$

Aceasta deoarece am presupus ca o unitate de munca produce o unitate de bun de consum, adica $\ell_t = c_t$. Deci daca notam $y_t = \ell_t = c_t$, vom obtine ecuatia implicita

$$y_t = \chi(y_{t+1}),$$

pentru o functie diferentiabila dar nu neaparat injectiva χ. Aceasta ecuatie ne da asadar dinamica inversa a modelului OLG cu productie si consum casnic, de mai sus. Dupa cum se poate observa, in modelul OLG nu presupunem ca o parte din bunul de consum la momentul t este folosita in productia la momentul $t+1$. Cum bunul de consum se foloseste pentru o singura perioada de timp, toata productia la momentul t se consuma pana la momentul $t+1$.

Dinamica inversa de mai sus implica faptul ca pentru un nivel optima l comnsumului la nivelul t exista mai multe nivele diferite de conum optim la momentul $t+1$. Mai mult in [G] Grandmont a aratat ca functia χ de mai sus are un grafic crescator si apoi descrecator si nu este injectiva. In anumite cazuri dinamica data de ecuatia implicita (9) este haotica. De exemplu conditii au fost date de Mitra, (vezi de exp. [GHT]) in care exista un *repelor snap-back* (adica de intoarcere). In multe cazuri functia χ de mai sus este o functie unimodala de o variabila a caror dinamica este destul de bine cunoscuta ([MeR]).

Definitia 2.1.1.1

Fie o functie de clasa $\mathscr{C}^1$ $f : U \to U$ unde U este o multime deschisa din $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. Sa luam si p un punct fix de respingere al lui f, adica toate valorile proprii ale derivatei Df_p sunt mai mari decat 1 in valoare absoluta. Sa presupunem acum ca exista un punct $x_0 \neq p$ intr-o vecinatate de respingere a lui p asa incat $f^m(x_0) = p$ si $\det(Df(f^j(x_0))) \neq 0, 1 \leq j \leq m$. Atunci p se numeste un repelor de tip snap-back (de intoarcere).

$\square$

Repelorii de tip snap-back sunt importanti deoarece dau un mod care se poate verifica efectiv, de a gasi multimi invariante cu dinamica complicata haotica. Prin comportament dinamic *haotic* vom intelege un comportament cu dependenta de conditiile initiale si cu tranzitivitate. Printre primele articole care au gasit comportament haotic la anumite sisteme dinamice mentionam [LY].

Sa observam ca repelorii de tip snap-back apar doar in cazul aplicatiilor neinversabile; ei sunt similari intersectiilor transverse pentru orbite homoclinice, caz in care deasemenea se obtin multimi invariante de tip horseshoe conjugate cu shift-ul pe spatii simbolice ([R], [KH], etc.)

Marotto ([Ma1], [Ma2]) a aratat ca si in cazul repelorilor snap-back exista multimi invariante pe care dinamica e haotica si conjugata cu cea de pe spatii simbolice:

Teorema 2.1.1.2, Marotto

Fie p un punct fix de respingere de tip snap-back pentru aplicatia de clasa $\mathscr{C}^1$ neinversabila f, si $\mathscr{O}(x_0)$ o orbita homoclinica a lui x_0 asociata lui p, adica $\mathscr{O}(x_0) = \{\ldots, x_{-i}, \ldots, x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0), p\}$, unde $f(x_{-i-1}) = x_{-i}, i \geq 1$. Atunci intr-o vecinatate a lui $\mathscr{O}(x_0)$ exista o multime Cantor Λ pe care o anumita iterata a lui f este conjugata topologic cu shift-ul σ_2^+ pe spatiul simbolic Σ_2^+. Deci si f este haotica pe Λ.

□

Asadar este suficient sa gasim un punct fix de respingere p care are o preimagine x_0 intr-o vecinatate de respingere a sa astfel incat toate iteratele acestui x_0 nu sunt critice, pentru a fi siguri ca in vecinatatea unei preistorii $(x_{-i})_{i\geq 1}$ care tinde catre p, exista o multime Cantor invarianta si pe care dinamica este conjugata cu cea de pe Σ_2^+, adica are gradul maxim de haoticitate. Teorema lui Marotto a fost generalizata la cazul intersectiilor homoclinice transversale dintr-un punct periodic hiperbolic care nu este de atractie, de Shiraiwa si Kurata in [SK]. Aceasta mareste deci clasa functiilor de oferta pentru care putem gasi multimi haotice.

O alta clasa importanta de curbe de oferta asociate unor functii χ este data de functiile unimodale ([R], [MeR], [KH], etc.)

Definitia 2.1.1.3

O functie continua $f : [a,b] \to [a,b]$ se numeste **unimodala** daca f nu este monotona si daca exista un punct $c \in (a,b)$ asa incat $f(c) \in [a,b]$ si f este crescatoare pe $[a,c)$ si descerscatoare pe $(c,b]$.

Aplicatiile unimodale **de tip A** sunt cele care satisfac $f(a) = a$ si $f(c) < b$.

Aplicatiile unimodale **de tip B** sunt functiile unimodale care satisfac $f(a) > a$ si $f(b) = a$.

Aplicatiile **de tip C** sunt acele functii $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ care nu sunt monotone si satisfac $f(a) = f(b) = a$ si $f(c) > b$.

□

Dupa cum se observa mai sus, functiile de tip C nu sunt de fapt unimodale in sens strict deoarece f nu ia valori neaparat in acelasi interval $[a,b]$, dar in general se considera a fi si ele "unimodale". Exista o legatura stransa intre functiile unimodale si repelorii de tip snap-back ([GHT]):

Propozitia 2.1.1.4

Fie $\chi : I \to I$ o functie unimodala de clasa $\mathscr{C}^1$ pe intervalul $I = [0,1]$ care are un punct de maximum x_m si un punct fix x^*. Atunci daca $\chi^3(x_m) < x^*$, rezulta ca x^* este un repelor snap-back si deci exista o multime Cantor invarianta $\Lambda \subset I$ pe care o iterata a lui χ este conjugata topologic cu shift-ul σ_2^+. In acest caz, χ este haotica pe Λ si are entropie topologica pozitiva.

$\square$

Dupa cum am vazut mai sus, functia de oferat χ este data in general de o functie unimodala, asadar este important sa studiem proprietatile topologice si metrice ale multimilor invariante ale acestora. Mai intai sa dam cateva definitii (a se vedea [R], [MeR]).

Definitia 2.1.1.5

Fie o functie continua $f : X \to X$ pe un spatiu metric X si o multime inchisa f-invarianta K. Vom numi *bazinul de atractie* al lui K multimea

$$B(K) := \{y \in X, \omega(y) \subset K\},$$

unde $\omega(y)$ reprezinta multimea punctelor de acumulare ale iteratelor lui y.

K se numeste *atractor topologic* daca $B(K)$ contine o multime reziduala intr-o vecinatate a lui K, (adica $X \setminus K$ este continuta in reuniunea unei multimi numarabile de multimi nicaieri dense in X), si daca nu exista nicio alta multime inchisa f-invarianta $K' \subset K$ asa incat $B(K)$ si $B(K')$ coincid pana la o reuniune numarabila de multimi nicaieri dense.

Daca K este f-invarianta (adica $f(K) = K$), daca exista vecinatati oricat de apropiate V ale lui K asa incat $f(V) \subset V$, si daca bazinul $B(K)$ este deschis in X, atunci spunem ca multimea K este *un atractor asimptotic stabil*.

$\square$

Vom defini acum derivata Schwartz a unei functii ([R]):

Definitia 2.1.1.6

Fie o aplicatie f de clasa $\mathscr{C}^3$ pe intervalul $[a,b]$. *Derivata Schwartz* a lui f este

$$Sf(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2,\ x \in [a,b]$$

$\square$

Urmatorul rezultat ne da atractorii posibili pentru liftarile lui f la limita inversa, in cazul unor functii unimodale ([R], [MeR]). Aceasta este important deoarece ne da proprietati topologice ale liftarii $\hat{f}$ pe spatiul $\widehat{[0,1]}$:

Teorema 2.1.1.7

a) Fie f o functie unimodala de tip A pe intervalul $[0,1]$ cu $Sf < 0$ pe $[0,1]$. Daca c este punctul de intoarcere al lui f, adica punctul la care se schimba monotonicitatea si daca $f^2(c) = f(1) > 0$ si $f'(0) > 1$, atunci $\hat{0} = (0,0,\dots)$ este un atractor asimptotic stabil si un atractor topologic pentru $\hat{f}$, si este unicul atractor topologic al lui $\hat{f}$.

b) Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o functie unimodala de tip B cu $Sf<0$ si sa presupunem ca f are un unic punct fix $p\in(c,1]$ care este de respingere, cu $f(0)>p$. Atunci punctul $\hat{p}=(p,p,\ldots)\in\widehat{[0,1]}$ este un atractor asimptotic stabil si un atractor topologic pentru $\hat{f}$ si este singurul atractor topologic al lui $\hat{f}$ in $\widehat{[0,1]}$.

c) Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o aplicatie unimodala de tip B cu $Sf<0$ si $f(0)<p$ unde p este unicul punct fix al lui f in $(c,1]$. Sa presupunem ca f are un atractor topologic P care este haotic sau periodic. Atunci bazinul de atractie al lui P contine o reuniune de n intervale $A_0,\ldots,A_{n-1}$ cu $f^i(A_0)\subset A_i, 1\le i\le n-1$. Fie Λ multimea punctelor din $[0,1]$ care nu sunt atrase de P. Atunci Λ se poate partitiona ca $\Lambda_1\cup\ldots\cup\Lambda_m$ unde Λ_j este o multime Cantor f-invarianta si $f|_{\Lambda_j}$ este conjugata cu un subshift de tip finit.

d) Fie functia logistica (care este de tip C) $F_\nu(x)=\nu x(1-x),\ x\in[0,1]$ pentru $\nu>4$, si sa consideram

$$\Lambda_\nu := \bigcap_{n\ge 0} F_\nu^{-n}([0,1])$$

Atunci Λ_ν este F_ν-invarianta si $F_\nu|_{\Lambda_\nu}$ este conjugata topologic cu σ_2^+ pe spatiul simbolic Σ_2^+. Deasemenea rezulta ca $\hat{\Lambda}_\nu$ este un atractor asimptotic stabil pentru $\hat{F}_\nu$.

$\square$

De fapt in mai multe exemple economice ([MeR], [GHT], [KSY]) apare functia logistica pe post de functie χ, adica obtinem o functie neinversabila de oferta care este crescatoare pe $[0,c]$ si apoi descrescatoare pe $[c,1]$; aceasta, conform Teoremei 2.1.1.7 d), asigura existenta unor multimi haotice pe care dinamica este conjugata cu shift-ul unilateral σ_2^+.

Vom da acum o generalizare a modelului lui Grandmont, si anume *modelul generatiilor suprapuse bi-dimensional* ([GHT]). Ca si mai sus, avem o economie cu 2 sectoare de activitate, unul casnic si celalalt de productie. Sectorul casnic este ca mai sus, si anume obtinem o curba de oferta

$$\ell_t=\chi(c_{t+1})$$

Spre deosebire de primul model insa, acum productia la momentul t este realizata atat prin munca depusa de sectorul casnic ℓ_t, cat si din stocul de capital k_{t-1} din perioada precedenta $t-1$. Acest capital este furnizat de companii care nu consuma, si care doresc maximizarea profiturilor. Productia la momentul t, y_t este minimul intre ℓ_t si $\frac{k_{t-1}}{a}$, unde $\frac{1}{a}$ este productivitatea (fixata) a capitalului.

La momentul $t+1$, capitalul disponibil este

$$k_t=(1-\delta)k_{t-1}+i_t,$$

unde $0<\delta<1$ este rata de depreciere a capitalului iar i_t este investitia la momentul t, adica partea de productie la momentul t care este investita in urmatoarea perioada.

In acest model, obtinem deci consumul la momentul t ca $c_t = y_y - i_t$ si la echilibru avem

$$y_t = \ell_t = \frac{k_{t-1}}{a}$$

Avem deci urmatoarea ecuatie de gradul 2 cu diferente care ne da relatia intre nivelele de productie optime la momentele $t, t+1, t+2$:

$$y_t = \chi[a(1-\delta+\frac{1}{a})y_{t+1} - ay_{t+2}]$$

Putem substitui insa $z_t = y_t$ si $w_t = y_{t+1}$ pentru a obtine sistemul de ecuatii cu diferente implicite:

$$\begin{cases} z_t = \chi[a(1-\delta+\frac{1}{a})z_{t+1} - aw_{t+1}] \\ w_t = z_{t+1} \end{cases} \tag{10}$$

Pentru sistemul de ecuatii din (10) exista anumite valori ale parametrilor ([GHT]) pentru care se obtine un punct fix x^* ca repelor de tip snap-back; deci din [Ma1], [Ma2] rezulta ca exista si in modelul OLG bidimensional, multimi invariante haotice pe care o iterata este conjugata topologic cu un shift unilateral.

2.1.2 Modelul cash-in-advance

In acest model economic, exista un guven central care stabileste politica monetara, si un agent reprezentativ. Guvernul se presupune ca nu consuma nimic. Exista un bun de consum care se cumpara cu numerara (cash), si altul cu credit. La momentul t notam cu $c_{1,t}$ cantitatea de bun de consum platit in cash, si cu $c_{2,t}$ cantitatea de bun de consum platit in credit. Agentul reprezentativ are functia de utilitate (a se vedea [MR], [KSY], etc.):

$$V(t) := \sum_{t\geq 0} \beta^t U(c_{1,t}, c_{2,t}),$$

unde $\beta \in (0,1)$ este factorul de reducere, iar functia de 2 variabile reale U are forma tipica:

$$U(x,y) = \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{y^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

pentru $\sigma > 0, \gamma > 0$. Bunul in cash $c_{1,t}$ se poate cumpara cu banii m_t care sunt proveniti de la momentul $t-1$, iar bunul in credit $c_{2,t}$ nu necesita bani si se poate lua pe credit. In fiecare perioada presupunem ca agentul are fonduri totale y si ca

$$y = c_{1,t} + c_{2,t}$$

Vom presupune si ca bunul de consum platit in cash costa acelasi pret p_t ca si bunul de consum platit cu credit. Agentul doreste sa maximizeze functia de utilitate printr-o alegere de $(c_{1,t}, c_{2,t}, m_{t+1})_{t\geq 0}$ care are urmatoarele restrictii:

$$p_t c_{1,t} \leq m_t,$$

adica costul total pentru bunul in cash trebuie sa fie mai mic decat cantitatea de cash avuta la momentul t; in plus, cantitatea de bani la momentul $t+1$ este mai mica decat cantitatea la momentul t, m_t plus suplimentul introdus de guvern θM_t la trecerea unei perioade, adica:

$$m_{t+1} \leq p_t y + (m_t - p_t c_{1,t}) + \theta M_t - p_t c_{2,t},$$

unde M_t este cantitatea de bani pe piata care este controlata de guvern asa incat sa aibe o crestere constanta:

$$M_{t+1} = (1+\theta) M_t$$

Sa notam cu $x_t = \frac{m_t}{p_t}$ nivelul de unitati monetare reale. Obtinem atunci din conditiile de maximizare de mai sus, o ecuatie cu diferente implicita care il da pe x_t in functie de x_{t+1}, adica obtinem echilibrul la momentul t in functie de echilibrul din perioada urmatoare $t+1$:

$$x_t = f(x_{t+1}), \tag{11}$$

unde functia f este diferentiabila si neinversabila. Pentru anumiti parametrii se poate arata ([GHT]) ca exista un interval $[a,b]$ pe care f are un punct periodic de perioada 3, deci din Teorema lui Li-Yorke ([LY]), obtinem ca f este haotica pe acel interval. Mai mult, se poate demonstra ca exista o submultime invarianta a lui $[a,b]$ pe care o iterata a lui f sa fie conjugata cu un subshift de tip finit.

2.1.3 Modelul de tip cobweb cu ajustari

Acest model se intalneste cel mai des in pietele din agricultura, in care fermierii care planteaza o anumita recolta nu o pot schimba o anumita perioada de timp, de regula 1 an. Asadar furnizorul unui anumit produs isi ajusteaza productia x_t in functie de realitatile pietei (de exemplu vremea, clima, cantitatea totala de acel produs de pe piata, alte trend-uri, etc.), dar isi pastreaza intentia de a obtine un profit axim $\tilde{x}_{t+1}$.

Se obtine asadar in acest caz o formula de hedging:

$$x_{t+1} = x_t + \alpha(\tilde{x}_{t+1} - x_t),$$

unde $\alpha \in (0,1)$ este viteza ajustarii. Cantitatea totala furnizata de n producatori identici este $X_t = n x_t$, iar pretul este dat de

$$p_t = \frac{c}{Y_t^{\beta}},$$

unde Y_t este cererera la momentul t, iar c este un parametru fixat. Se face deasemenea presupunerea ca cererea este complet acoperita de oferta si invers, adica:

$$X_t = Y_t$$

Atunci dupa o schimbare de variabila (a se vedea [O], [Z], etc.) se obtine ecuatia:

$$z_{t+1} = f_{\alpha,\beta}(z_t) = (1-\alpha)z_t + \frac{\alpha}{z_t^{\beta}},\ (\alpha,\beta) \in (0,1)\times(0,\infty) \tag{12}$$

Aceasta functie $f_{\alpha,\beta}$ are are un unic punct fix $z = 1$, care esre de respingere daca $|f'_{\alpha,\beta}(1)| > 1$, ceea ce implica $\beta > \frac{2-\alpha}{\alpha}$.

Onozaki et al ([O]) au demonstrat ca pentru orice $\alpha > 0$ exista un numar

$$\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\alpha) > \frac{2-\alpha}{\alpha},$$

asa incat daca $\beta > \tilde{\beta}$ rezulta ca functia de 2 variabile reale $f_{\alpha,\beta}$ are o multime invarianta de tip horseshoe $\Lambda_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{R}^2$, pa care este hiperbolica. Din discutia din Capitolul 1 cu privire la multimile horseshoe, rezulta ca $f_{\alpha,\beta}|_{\Lambda_{\alpha,\beta}}$ este atunci conjugata topologic cu un shift pe spatiul Σ_2.

Modelul pietelor eterogene

Acest model se bazeaza in parte pe modelul cobweb cu adaptari ajustate, intr-o economie in care exista doua grupuri mari de agenti ([BH98], [BH97], [FG], etc.) Primul grup este format din cei care arbitreaza (arbitrageurs, sau fundamentalists) care cred ca pretul este dat de valorile fundamentale ale pietei, iar al doilea grup este dat de analisti (chartists) care prezic preturile viitoare pe baza unor tehnici simple observand preturile trecute. Acest model eterogen conduce la instabilitatea pietei si la o dinamica foarte complicata ([BH97], [BH98], etc.) In unele cazuri studiate in [FG], dinamica este data de o aplicatie neinversabila, ceea ce adauga numeroase dificultati in gasirea multimilor invariante si a proprietatilor acestora. Importante in studiul dinamic sunt si bazinele de atractie care apar in acest caz, cat si bifurcatiile date de perturbarea parametrilor.

In cazul 2-dimensional de mai sus se obtine un sistem de ecuatii de forma ([FG]):

$$\begin{cases} z_{t+1} = z_t[(1-\alpha) - \alpha\frac{b(1-m_t)}{2B}] \\ m_{t+1} = \tanh[\frac{\beta b}{4}\cdot z_t^2 \cdot (\frac{b(1-m_t)}{B}+1) + \frac{\beta}{2}(C_2 - C_1)] \end{cases} \tag{13}$$

In acest caz Foroni si Gardini ([FG]) au aratat ca exista ciclii de tip sa, adica ce au atat directii de contractie cat si directii de respingere, si care prezinta intersectii omoclinice transverse pentru anumiti parametrii. Aceasta inseamna ca daca p este punct periodic de tip sa, atunci exista un punct

$$q \in W^s(p) \cap W^u(\hat{p}),$$

pentru o anumita preistorie $\hat{p}$ a lui p, si mai mult avem ca local in jurul lui q varietatile scufundate $W^s(p)$ si $W^u(\hat{p})$ se intersecteaza transvers.

Aceste intersectii transverse dau insa nastere conform discutiei din Capitolul 1, unor multimi invariante Λ aflate in vecinatati ale orbitelor omoclinice, pe care dinamica este haotica, si o anumita iterata este conjugata cu un shift de tip finit.

2.2 Modele financiare

2.2.1 Serii temporale haotice sau neliniare in finante.

In finante apar deseori serii temporale ale unor variabile, de exemplu indicele SP 500 considerat la diverse intervale mici de timp, sau diverse rate de schimb valutar intre monede precum USD/Lira sterlina, USD/Euro, etc. De cele mai multe ori in aceste cazuri nu avem o expresie sau o formula care sa ne dea evolutia sistemului in timp, ci aceste serii temporale discrete. Din aceste serii temporale in practica trebuie gasit daca exista un comportament haotic sau puternic neliniar, si trebuie facute previziuni pe terme scurt sau mediu.

In general pentru o functie $f: X \to X$ spunem ca este *haotica* daca avem urmatoarele conditii ([D]):

a) f are comportament sensibil la conditiile initiale;

b) f este tranzitiva topologic;

c) punctele periodice ale lui f sunt dense in X.

Aceasta definitie nu este insa unanim acceptata. In dinamica avem doua mari clase de comportamente: unul dat de socuri de tip random (arbitrare) care provin din afara sistemului (exogene), si socuri din interiorul sistemului (endogene) care sunt rezultatul interactiunilor complexe intre elementele sistemului in timp.

Dinamica sistemelor neliniare prezinta atat un caracter deterministic cat, posibil si unul random, arbitrar. Chiar in cazul unui comportament deterministic, este deseori imposibil sa facem predictii, sistemul nefiind predictibil. Intr-adeavar conditia de sensibilitate la conditiile initiale din definitia haosului, ne spune ca orice mica eroare la alegerea conditiilor initiale poate conduce in timp la diferente majore.

Totusi in cazul haotic se pot gasi anumite multimi invariante (atractori neregulari/strange) si se pot studia unele proprietati ale acestora sau ale bazinelor lor de atractie, facand posibile predictii pe termen scurt sau mediu, cat si gasirea unor proprietati calitative. Comportamentul foarte complicat al sistemelor dinamice haotice se poate observa cel mai bine pe attractori strange, care de cele mai multe ori sunt multimi fractale; considerarea bazinelor lor de atractie ofera indicii despre unde trebuie sa luam conditiile initiale pentru ca solutiile sistemului sa convearga in timp, prin iterari, catre atractorul strange. In multe cazuri pe atractorii acestia avem masuri importante, Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) (a se vedea [Bo], [ER], [Y], etc.); aceste masuri SRB nu sunt neaparat absolut continue in raport cu masura Lebesgue, si ne dau distributia orbitelor pentru Lebesgue aproape orice punct intr-o vecinatate V a atractorului Λ.

De exemplu in [MM], Mayfield si Mizrah au studiat indicii de actiuni in pietele americane de capital, si anume in indicele bursier Standard and Poor (SP) 500. Seria temporala obtinuta contine valorile indicelui la intervale de 20 secunde, obtinandu-se aproximativ 20000 valori ale seriei. Cu cat intervalele de timp la care se masoara indicele sunt mai mici, cu atat concluziile vor fi mai precise; pe de alta parte intervale prea mici adauga un numar enorm de noi valori ale seriei temporale, ceea ce ingreuneaza studiul sau.

Un rezultat deosebit de important, care va fi dezbatut in paragraful urmator, este cel al lui Takens ([T]), prin care unei serii temporale care provine dintr-un sistem dinamic de clasa $\mathscr{C}^2$ i se poate atasa un atractor. Pentru acest atractor se poate studia dimensiunea si alti invarianti, care ne dau informatii importante despre complexitatea sistemului.

Sensibilitatea sistemului la conditiile initiale este masurata prin exponentii Liapunov. Daca exista exponenti Liapunov pozitivi, atunci stim ca, local si pe termen lung, doua traiectorii apropiate initial, vor diverge exponential. Sa notam cu $GL(n,\mathbb{R})$ grupul transformarilor liniare inversabile pe $\mathbb{R}^n$.

Definitia 2.2.1.1

Fie o functie masurabila $\mathscr{A} : X \times \mathbb{Z} \to GL(n,\mathbb{R})$ care satisface conditia

$$\mathscr{A}(x,m+k) = \mathscr{A}(f^k(x),m)\mathscr{A}(x,k),\ x \in X, m,k \in \mathbb{Z}$$

Atunci o asemenea functie se numeste *cociclu liniar masurabil* in raport cu f (sau simplu *cociclu*).

Vom nota cu $A(x) := \mathscr{A}(x,1)$; acesta se numeste *generatorul* cociclului $\mathscr{A}$. Reciproc o aplicatie $A : X \to GL(n,\mathbb{R})$ defineste un cociclu $\mathscr{A}$ prin

$$\mathscr{A}(x,m) = A(f^{m-1}(x))\dots A(x),$$

pentru $m > 0$ si

$$\mathscr{A}(x,m) = A(f^{m-1}(x))^{-1}\dots A(f^{-1}(x))^{-1},$$

pentru $m < 0$; in plus

$$\mathscr{A}(x,0) = Id$$

□

De regula generatorul A si cociclul sau asociat $\mathscr{A}$ se identifica. Un exemplu important de cociclu este pentru o functie de clasa $\mathscr{C}^1$ care este difeomorfism local pe o varietate diferentiabila. Atunci diferentiala sa

Df defineste un cociclu liniar. Avem acum o teorema deosebit de importanta care ne da de fapt si existenta exponentilor Liapunov ([R], [KH], [Ma], etc.)

Teorema 2.2.1.2, Teorema Multiplicativa Ergodica a lui Oseledec

Fie o aplicatie masurabila $f : X \to X$ pe un spatiu Lebesgue, care invariaza masura μ si fie $A : X \to GL(n, \mathbb{R})$ un cociclu masurabil. Daca $\log^+ ||A(x)||, \log^+ ||A^{-1}(x)|| \in L^1(X, \mu)$, atunci exista o multime $Y subset X$ cu $\mu(Y) = 0$ si pentru $x \in Y$ avem ca exista o descompunere a lui $\mathbb{R}^n$ ca

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k(x)} L_i(x)$$

care este invarianta la A. Exista limita

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{|m|} \log \frac{||\mathscr{A}(x,m)v||}{||v||} =: \lambda_i(x),$$

uniform pentru $v \in L_i(x) \setminus \{0\}$. Numerele ordonate crescator

$$\lambda_1(x) < \ldots < \lambda_{k(x)}(x)$$

se numesc **exponentii Liapunov** a masurii μ in raport cu f si A.

□

Principala situatie in care se aplica Teorema lui Oseledec este aceea in care luam derivata functiei f ca si cociclu. In acest caz obtinem exponentii Liapunov $\lambda_1(x) < \ldots < \lambda_{k(x)}(x)$ care ne dau expansiunea/contractia medie a distantelor locale intre iteratele punctelor sub actiunea lui f. Exponentii Liapunov se pot repeta, adica putem avea $k(x) < n$.

Un rezultat importanta care leaga entropia de masura de exponentii Liapunov este dat de urmatoarea Teorema a lui Ruelle ([KH], [Ru-1989], [Ma], etc.) O versiune a acestei Teoreme, pentru cazul endomorfismelor care pastreaza volumul, a fost demonstrata anterior de Margulis.

Teorema 2.2.1.3, Inegalitatea lui Ruelle

Fie o functie de clasa $\mathscr{C}^1(M,M)$ pe varietatea Riemanniana compacta M si sa presupunem ca μ este o masura f-invarianta probabilistica. Atunci

$$h_\mu(f) \leq \int_M \sum_{i,\lambda_i(x)>0} \lambda_i(x) d\mu$$

□

Sa observam ca din proprietatea cociclului, avem $\lambda_1(x) = \lambda_1(f(x))$ pentru $x \in Y$, asadar daca μ este o masura ergodica rezulta ca exponentii Liapunov sunt constanti μ-aproape peste tot (μ-a.p.t); in acest caz deasemenea $k(x)$ este constanta. Asadar daca μ este ergodica vom nota exponentii Liapunov ai lui μ prin

$$\lambda_1(\mu) < \ldots < \lambda_k(\mu),$$

sau pur si simplu $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ daca masura μ este subinteleasa. Multiplicitatile lor respective sunt deasemenea constante μ-a.p.t si se vor nota cu $m_1, \ldots, m_k$.

Teorema 2.2.1.3 ne spune ca daca entropia de masura h_μ este pozitiva, atunci exista cel putin un exponent Liapunov pozitiv. Aceasta inseamna ca exista anumite directii pe care iteratele functiei, in medie, departeaza punctele apropiate, intr-un ritm exponential.

Pentru estimarea exponentilor Liapunov exista mai multe modalitati practice. Unele dintre ele sunt expuse in [Br], [H], [SL], [ER], etc.

O metoda deosebit de importanta a dinamicii neliniare o reprezinta **dimensiunea de corelare** introdusa de Grassberger si Procaccia ([GP]).

Sa presupunem ca avem o serie temporala discreta $\{X_t\}_{1\leq t\leq n}$ care poate fi o serie a unei variabile financiare, precum indicele de actiuni SP 500. Din aceasta serie formam sirul vectorilor m-dimensionali dati de m valori consecutive ale lui X ce preced momentul t, adica $Y_t = (x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t-m+1}), t \geq m$. Se obtine deci seria $(Y_t)_{m\leq t\leq n}$.

Acum sa presupunem ca sistemul care a generat seria temporala $\{X_t\}$, este modelat de un sistem dinamic

$$x_{t+1} = F(x_t),$$

unde $F : U \to U$ pentru o multime deschisa $U \subset \mathbb{R}^N$. Atunci daca $m \geq 2N+1$ s-a aratat ([B], [MM], etc.) ca familia de m-vectori $\{Y_t\}_{m\leq t\leq n}$ de mai sus reconstruieste dinamica sistemului ascuns care genereaza seria temporala discrete initiala $\{X_t\}_{1\leq t\leq n}$. Vom reveni la acest aspect in paragraful urmator.

Sa notam cu $K := n-m+1$ numarul de vectori m-dimensionali. Sa notam mai departe cu $C(n,m,\varepsilon)$ proportia de m-vectori separati de o distanta mai mica decat ε, adica

$$C(n,m,\varepsilon) := \frac{1}{K(K-1)} \sum_{m\leq i\neq j\leq n} H(\varepsilon - ||Y_i - Y_j||),$$

unde $H(x)$ este functia Heaviside, egala cu 1 pentru $x \geq 0$ si 0 pentru $x < 0$. Asadar $C(n,m,\varepsilon)$ masoara proportia de perechi de vectori (Y_i,Y_j) care sunt ε-apropiati dintre toate perechile (Y_i,Y_j) pentru $m \leq i, j \leq n$; dupa cum am notat mai sus, exista $K = n-m+1$ vectori Y_i in total, asadar $K(K-1)$ perechi de vectori (Y_i,Y_j) cu $i \neq j$.

Acum daca ε creste, si $C(n,m,\varepsilon)$ va creste deoarece numarul de vectori ε-apropiati va creste. Vom lua acum

$$\tilde{C}(m,\varepsilon) := \limsup_{n\to\infty} C(n,m,\varepsilon),$$

pentru m,ε fixati. Evident ca si $\tilde{C}(m,\varepsilon)$ creste daca ε creste. Grassberger si Procaccia au aratat ca daca ε

este suficient de mic, atunci $\tilde{C}(m,\varepsilon)$ se comporta precum ε^{ν}, adica

$$\tilde{C}(m,\varepsilon) \approx \varepsilon^{\nu},$$

unde $\nu(m) \geq 0$ se numeste **dimensiunea de corelare calculata din** m **valori consecutive**, si este definita formal prin:

$$\nu(m) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \tilde{C}(m,\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

Daca atunci cand numarul m creste avem ca si $\nu(m)$ creste, atunci aceasta indica un sistem stocastic, si nu unul deterministic. Daca insa datele sunt generate de un sistem haotic deterministic, atunci $\nu(m)$ trebuie sa atinga o valoare finita pentru un m nu foarte mare (valoarea de saturatie), a se vedea [B], [GP]; din cele de mai sus rezulta ca fractalul se afla intr-un spatiu euclidian $\mathbb{R}^N$, cu $N \leq \frac{m-1}{2}$. In acest ultim caz, valoarea respectiva maximala a dimensiuni de corelare $\nu(m)$ se noteaza cu ν si se numeste **dimensiunea de corelare** a sistemului haotic dat.

Dimensiunea de corelare este legata de faptul daca un sir de valori reprezinta un fractal, sau daca sunt luat la intamplare (random). De exemplu un sir de puncte luate la intamplare pe intervalul $[0,1]$ au dimensiunea de corelare ν egala cu 1, iar un sir de puncte distribuite pe un triunghi scufundat in $\mathbb{R}^3$ au dimensiunea de corelare $\nu = 2$. Asadar daca seria temporala are valorile distribuite pe un fractal haotic, atunci dimensiunea de corelare trebuie sa se stabilizeze daca scufundam fractalul intr-un spatiu de dimensiune suficient de mare. Intr-adevar daca am avea un comportament random, atunci daca marim dimensiunea m, atunci trebuie sa se mareasca si posibilitatile de a gasi puncte apropiate. Daca dimensiunea de corelare creste odata cu m atunci suntem de regula in prezenta unui comportament de tip random. Totusi metoda lui Grassberger si Procaccia nu poate detecta un comportament haotic deterministic daca acesta este foarte complex, ceea ce se traduce prin faptul ca $\nu(m)$ continua sa creasca atunci cand m creste la valori mari. Marele avantaj al metodei de mai sus este ca se poate aplica unor multimi de date arbitrare, si despre care nu stim a priori daca se afla pe un fractal haotic sau nu.

2.2.2 Reconstructia atractorilor din serii temporale.

Rezultatul principal folosit in reconstructia atractorilor deliniati de serii temporale discrete este Teorema lui Takens ([T]). Sa presupunem ca avem o serie temporala discreta $\{X_t\})_t$ cu valori in $\mathbb{R}^n$ data de un sistem dinamic $X_{t+1} = f(X_t)$, si o serie asociata de scalari (de exemplu pretul unei actiuni) data de $\{p_t\}_t$ unde

$$p_t = h(X_t),$$

si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o functie continua.

Cum ne putem da seama de comportamentul pietei doar din seria scalara asociata $\{p_t\}_t$ fara a cunoaste functia f? putem sa ne dam seama daca exista un atractor fractal haotic Λ spre care tind valorile lui $\{X_t\}_t$?

Vom defini, similar ca la dimensiunea de corelare, m-vectori formati cu valori consecutive ale preturilor p_t, si anume:

$$g_m(X_t) := (p_t, \ldots, p_{t+m-1}) = (h(X_t), \ldots, h(f^{m-1}(X_t)))$$

Expresia de mai sus ne inspira sa definim functia $g_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ prin:

$$g_m(\bar{x}) := (h(\bar{x}), \ldots, h(f^{m-1}(\bar{x})))$$

Teorema 2.2.2.1, Teorema lui Takens de Reconstructie a Atractorilor

Daca $m \geq 2n+1$ rezulta ca aplicatia $g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita mai sus, este o scufundare pentru o multime generica (i.e care contine o intersectie numarabila de multimi deschise si dense) de perechi (f,h) de clasa $\mathscr{C}^2$. In consecinta scufundarea pastreaza atat dimensiunea Hausdorff a atractorului Λ al lui f, cat si entropia topologica a sistemului (f,Λ).

□

Pentru determinarea caracterului haotic provenit dintr-o serie temporala discreta exista mai multe teste care se pot face, de exemplu metoda lui Grassberger si Procaccia ([GP], [ER], etc.), testul BDS (Brock, Dechert, Scheinkman [BDS]), testul exponentilor Liapunov pozitivi ([ER], [SL], [H], [KGL], etc.)

Literatura pe aceasta tema a seriilor financiare neliniare sau haotice este vasta (a se vedea de exemplu [A], [CP], [H], [HZU], [KLC], [L], [MM], [SB], [WP], etc.)

De exemplu in [MM], Mayfield si Mizrach au studiat indicele de actiuni SP 500 la intervale foarte scurte de timp, alcatuind o serie temporala discreta. SP 500 este o medie ponderata de preturi de actiuni, care ne da o functie diferentiabila pentru dinamica indirecta a pietei care genereaza seria respectiva. Ei au demonstrat folosind metoda lui Takens cuplata cu metoda Grassberger-Procaccia, estimari ale entropiei topologice si ale exponentilor Liapunov, precum si alte metode numerice, ca exista un atractor fractal de dimensiune joasa, a carui entropie este pozitiva, asadar exista si exponenti Liapunov pozitivi. Aceasta implica faptul ca atractorul care se afla in spatele seriei temporale date de indicii de actiuni SP 500, este intr-adeavar haotic.

Deasemenea in [WP] s-au studiat ratele de schimb valutar intre dolarul canadian si dolarul american pe o perioada lunga de timp, 1973-2003, si s-au gasit suficiente dovezi in sprijinul existentei unei structuri haotice in spatele evolutiei ratelor de schimb.

In general structura haotica face ca predictii pe termene scurte sa fie posibile, ceea ce este de preferat unui comportament random. Pe de alta parte haoticitatea face ca predictiile pe perioade de timp mai mari sa fie imposibile, chiar in lipsa totala a unui comportament random.

In alte situatii (a se vedea literatura amintita mai sus) nu s-au gasit dovezi concludente asupra caracterului haotic al atractorilor sistemelor dinamice aferente unor serii temporale date de evolutiile unor indici de actiuni sau ale unor rate de schimb valutar, ori datele indicau un comportament combinat, atat deterministic/haotic cat si aleator.

Capitolul 3. Aplicatii la proprietati statistice ale unor modele economice definite implicit.

3.1 Proprietati ale multimilor invatriante si ale masurilor invariante pentru modele economice.

3.1.1 Dinamica topologica si proprietati metrice si ergodice pe limite inverse.

Pentru modelele economice descrise in Capitolul 2, am vazut ca in numeroase cazuri dinamica este data de un sistem neinversabil. Dinamica neiversabila se deosebeste semnificativ de cea a difeomorfismelor atat prin metode si tehnici, cat si prin tipuri noi de probleme si rezultate specifice (a se vedea de exemplu [ER], [Ru-1989], [AY], [G], [KSY-JME], [MS], [M-DCDS06], [M-MZ], [M-DCDS12], [M-Cam], [M-MA], [M-JMAA], [MU-BLMS], [MU-PAMS], [MU-CJM], [O], etc.)

O metoda foarte importanta in dinamica neinversabila este folosirea limitei inverse (extensiei naturale) a unui sistem dinamic, notiune introdusa in Definitia 1.4.1.1.

Vom considera deasemenea numai sisteme hiperbolice, acesta fiind de altfel dupa cum am precizat in Capitolul 2, cel mai des intalnit caz de model economic. Hiperbolicitatea apare ca modelul de haos cel mai veridic in cele mai multe aplicatii si din fizica statistica.

Vom presupune ca lucram cu o functie $f : M \to M$ de clasa $\mathscr{C}^2$ care are o multime bazica hiperbolica Λ astfel incat f nu are puncte critice in Λ. Limita inversa a sistemului (Λ, f) se noteaza cu $\hat{\Lambda}$. Vom nota si cu $W^s_r(x), W^u_r(\hat{x})$ varietatea locala stabila prin $x \in \Lambda$, respectiv varietatea locala instabila asociata preistoriei $\hat{x} \in \hat{\Lambda}$.

Dupa cum stim din Teorema 1.4.2.3 limita inversa este stabila la perturbatii ale sistemului, adica daca g este $\mathscr{C}^1$-apropiat de f atunci g are o multime bazica hiperbolica Λ_g si exista un homeomorfism $\hat{h} : \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}_g$ asa incat$\hat{h}$ este o conjugare intre liftarile $\hat{f}$ si $\hat{g}$, adica

$$\hat{g} \circ \hat{h} = \hat{f} \circ \hat{f},$$

si mai mult $\pi_g \circ \hat{h} : \hat{\Lambda} \to \Lambda_g$ este aproape de proiectia canonica $\pi : \hat{\Lambda} \to \Lambda$.

Deasemenea stim ca entropia topologica a lui f pe Λ este egala cu entropia topologica a lui $\hat{f}$ pe $\hat{\Lambda}$, si in plus entropia se pastreaza la perturbatii, i.e

$$h_{top}(f|_{\Lambda}) = h_{top}(\hat{f}|_{\hat{\Lambda}}) = h_{top}(g|_{\Lambda_g}) = h_{top}(\hat{g}|_{\hat{\Lambda}_g})$$

In Capitolul 1 am introdus notiunea de specificare. Aici vom arata ca sistemele economice studiate in Capitolul 2 prezinta proprietatea de specificare pe limitele lor inverse ([M-JMAA]). Vom presupune ca

f este mixing pe Λ; aceasta presupunere este naturala, deaorece din Teorema de Descompunere Spectrala orice multime bazica se poate descompune intr-o partitie finita de multimi care sunt mixing topologic pentru o anumita iterata a functiei.

Teorema 3.1.1.1

Pentru exemplele din sectiunea 2.1, sa notam cu Λ o multime bazica mixing si hiperbolica a endomorfismului f asociat, pentru fiecare exemplu in parte. Atunci homeomorfismul $\hat{f}$ este expansiv si are proprietatea de specificare pe limita sa inversa $\hat{\Lambda}$.

$\square$

Demonstratie:

Sa aratam ca $\hat{f}$ este expansiva pe $\hat{\Lambda}$. Fie $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\Lambda}$ asa incat sa avem $d(\hat{f}^i\hat{x}, \hat{f}^i\hat{y}) < \delta, i \in \mathbb{Z}$ pentru un $\delta > 0$ mic. Aplicatia f a fost aleasa hiperbolica ca endomorfism pe Λ care este o multime local maximala, asadar exista o vecinatate U a lui Λ asa incat $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$. Deci, daca $d(\hat{f}^i\hat{x}, \hat{f}^i\hat{y}) < \delta, i \in \mathbb{Z}$, rezulta ca $d(f^ix, f^iy) < \delta, i \geq 0$, si deci $y \in W^s_\delta(x)$. Pe de alta parte daca $d(x_{-i}, y_{-i}) < \delta, i \geq 0$ pentru anumite preistorii $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\Lambda}$, rezulta ca $y \in W^u_\delta(\hat{x})$. Dar cum Λ este o multime hiperbolica local maximala a lui f, stim din Capitolul 1 ca are structura de produs local, deci $W^s_\delta(x) \cap W^u_\delta(\hat{x}) = \{x\}$ daca $\delta > 0$ este suficient de mic, asadar $x = y$. Daca repetam argumentul de mai sus pentru toate preimaginile lui x rezulta ca $x_{-i} = y_{-i}, i \geq 0$. Avem atunci ca $\hat{x} = \hat{y}$, si in concluzie $\hat{f}$ este expansiva pe $\hat{\Lambda}$.

Vom demonstra acum ca $\hat{f}$ are proprietatea de specificare pe $\hat{\Lambda}$. Cum Λ este mixing si hiperbolica pentru f rezulta ca f are proprietatea de specificare pe Λ.

Sa luam acum o specificare $\hat{S}$ in $\hat{\Lambda}$, $\hat{S} = (\hat{\tau}, \hat{P})$, cu $\hat{\tau}$ o colectie finita de intervale in $\mathbb{Z}$, si $\hat{P}$ o corespondenta intre $T(\hat{\tau})$ si $\hat{\Lambda}$. Sa presupunem ca $\hat{\tau} = \{I_1, \dots, I_m\}$, cu $I_i = [a_i, b_i]$ si ca $\hat{P}(a_i) = \hat{\omega}^i = (\omega^i, \omega^i_{-1}, \dots) \in \hat{\Lambda}, 1 \leq i \leq m$.

Pentru un $\varepsilon > 0$ suficient de mic, vom construi o specificare S in Λ cu intervale mai mari decat cele ale lui $\hat{S}$. Sa presupunem ca $\text{diam}(\Lambda) \leq 1$ si fie $N = N(\varepsilon)$ suficient de mare asa incat $\frac{1}{2^r} < \varepsilon/2$. Atunci daca $d(f^j(x_{-N}), f^j(y_{-N})) < \varepsilon/4, 0 \leq j \leq N$, rezulta $d(\hat{x}, \hat{y}) < \varepsilon$, unde $\hat{x} = (x, x_{-1}, \dots), \hat{y} = (y, y_{-1}, \dots)$.

Sa consideram specificarea S in Λ de forma (τ, P), unde $\tau = \{[a_1 - N, b_1] \dots, [a_m - N, b_m]\}$ and $P(a_i - N) = \omega^i_{-N}, \dots, P(b_i) = f^{b_i - a_i}(\omega^i), 1 \leq i \leq m$. Daca $a_1 - N < 0$ atunci in loc de $f^{a_1 - r}(p)$, vom lua in proprietatea de urmarire, iterata $f^{kq + a_1 - N}(p)$, pentru cel mai mic intreg $k \geq 0$ pentru care $kq + a_1 - N \in [0, q)$. Pentru celelalte puncte din orbita lui p folosite pentru urmarire, vom lua iteratele pozitive ale lui $f^{kq+a_1-N}(p)$, i.e $d(\omega^1_{-N+1}, f^{kq+a_1-N+1}(p)) < \varepsilon/4$, etc.

Acum sa presupunem ca specificarea $\hat{S}$ este $(M+N)$-distantata, unde $M = M(\varepsilon/4)$ este distantarea din proprietatea de specificare a lui $f|_\Lambda$ corespunzatoare lui $\varepsilon/4$.

Din proprietatea de specificare a lui f avem ca pentru $q \geq M + L(S) = M + L(\hat{S}) + N$ exista o orbita de perioada q, $\{p, f(p), \ldots, f^{q-1}(p)\}$ care $\varepsilon/4$-urmareste pe S. Putem lua asadar $\hat{M}(\varepsilon) := M(\varepsilon/4) + N$, si orbita punctului periodic de perioada q,

$$\hat{p} = (f^{kq+a_1-N}(p), f^{kq+a_1-N-1}(p), \ldots, p, \ldots, f^{kq+a_1-N}(p), \ldots) \in \hat{\Lambda}$$

Dar din constructia lui S, stim ca orbita lui $f^{kq+a_1-N}(p)$, $\varepsilon/4$-urmareste sirul finit

$$\{\omega^1_{-N}, \ldots, \omega^1, \ldots f^{b_1-a_1}(\omega^1)\} \cup \ldots \cup \{\omega^m_{-N}, \ldots, \omega^m, \ldots, f^{b_m-a_m}(\omega^m)\}$$

Deci avem ca

$$d(\omega^1_{-N}, f^{kq+a_1-N}(p)) < \varepsilon/4, \ldots, d(\omega^1, f^{kq+a_1}(p)) < \varepsilon/4, \ldots,\ d(f^{b_1-a_1}(\omega^1), f^{kq+b_1}(p)) < \varepsilon/4,$$

pana la intervalul I_m unde

$$d(\omega^m_{-N}, f^{kq+a_m-N}(p)) < \varepsilon/4, \ldots, d(\omega^m, f^{kq+a_m}(p)) < \varepsilon/4, \ldots,\ d(f^{b_m-a_m}(\omega^m), f^{kq+b_m}(p)) < \varepsilon/4$$

Vom arata acum ca orbita lui $\hat{p}$ (in raport cu homeomorfismul $\hat{f}$), ε-urmareste specificarea $\hat{S}$ din $\hat{\Lambda}$. Inegalitatile de mai sus ne conduc la:

$$\begin{aligned}
d(\hat{\omega}_i, \hat{f}^{a_i}(\hat{p})) &= d(\omega^i, f^{kq+a_1-N+a_i}(p)) + \frac{d(\omega^i_{-1}, f^{kq+a_1-N+a_i-1}(p))}{2} + \ldots + \frac{d(\omega^i_{-N}, f^{kq+a_1-N+a_i-N}(p))}{2^r} + \ldots \\
&< \varepsilon/4 + \varepsilon/8 + \varepsilon/2^{N+2} + \frac{1}{2^N} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,
\end{aligned}$$

deoarece mai sus am luat $\frac{1}{2^N} < \varepsilon/2$.

La fel ca mai sus putem arata ca pana la b_i avem:

$$\begin{aligned}
d(\hat{f}^{b_i-a_i}\hat{\omega}^i, \hat{f}^{b_i}\hat{p}) &= d(f^{b_i-a_i}(\omega^i), f^{kq+a_1-N+b_i}(p)) + \ldots + \frac{d(f^{b_i-a_i}(\omega^i_{-N}), f^{kq+a_1-N+b_i-N}p)}{2^N} + \ldots \\
&< \varepsilon/4 + \varepsilon/8 + \ldots + \varepsilon/2^{N+2} + \frac{1}{2^N} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Deci orbita periodica $\hat{p}$, ε-urmareste specificarea $\hat{S}$ daca $\hat{S}$ are o spatiere de cel putin $\hat{M}(\varepsilon) := (M(\varepsilon/4) + 2N)$. Se observa si ca $N = N(\varepsilon)$ nu depinde de $\hat{S}$. Deducem deci din cele de mai sus ca daca functia f are proprietatea de specificare pe Λ, atunci si $\hat{f}$ are proprietatea de specificare pe $\hat{\Lambda}$.

$\square$

Pentru masuri probabilistice μ, f-invariante pe Λ avem teorema lui Brin-Katok ([Ma], [Wa], etc.) care ne da valoarea entropiei de masura in functie de masurile multimilor Bowen $B_n(x, \varepsilon)$ pentru μ-aproape orice $x \in \Lambda$:

$$h_\mu = -\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, \varepsilon))$$

Aceasta formula va fi utila in sectiunea urmatoare, cand vom considera liftari ale masurilor de echilibru pe Λ.

3.1.2 Masuri de echilibru pentru potentiali Hölder pe spatii de echilibre intertemporale.

Mai intai vom aminti un rezultat clasic de formalism termodinamic (de exp. [Ru-2004]), care ne spune ca daca $\hat{f}:\hat{\Lambda}\to\hat{\Lambda}$ este liftarea unui endomorfism f, atunci avem o bijectie intre masurile f-invariante pe Λ si masurile $\hat{f}$-invariante pe $\hat{\Lambda}$. Reamintim ca $pi:\hat{\Lambda}\to\Lambda$ este proiectia canonica $\pi(\hat{x})=x,\hat{x}\in\hat{\Lambda}$.

Teorema 3.1.2.1

a) Fie un endomorfism continuu, tranzitiv topologic $f:\Lambda\to\Lambda$ pe spatiul metric compact Λ si fie $\hat{f}:\hat{\Lambda}\to\hat{\Lambda}$ limita sa inversa. Atunci exista o corespondenta bijectiva F intre masurile f-invariante pe Λ si masurile $\hat{f}$-invariante pe $\hat{\Lambda}$ data de $F(\hat{\mu})=\pi_*(\hat{\mu})$.

b) Daca in plus f este hiperbolica pe multimea local maximala Λ, atunci pentru orice potential Hölder ϕ pe Λ exista o unica masura de echilibru $\hat{\mu}_{\phi\circ\pi}$ a lui $\phi\circ\pi$, si $\pi_*(\hat{\mu}_{\phi\circ\pi})=\mu_\phi$, adica proiectia masurii de echilibru a lui $\phi\circ\pi$ pe Λ este masura de echilibru (unica) a lui ϕ.

□

In general liftarea endomorfismului $f|_\Lambda$ are proprietati ergodice similare cu cele ale lui f. De exemplu din [Ru-2004] avem ca

$$P_f(\phi)=P_{\hat{f}}(\phi\circ\pi), \tag{14}$$

pentru orice functie $\phi\in\mathscr{C}(\Lambda,\mathbb{R})$. Deasemenea din cele ce am vazut mai sus, in cazul hiperbolic, proiectia masurii de entropie maximala pe $\hat{\Lambda}$ este masura de entropie maximala pe Λ si este unica masura cu aceasta proprietate,

$$\pi_*(\hat{\mu}_0)=\mu_0,$$

unde $\mu_0,\hat{\mu}_0$ sunt unicele masuri de entropie maximala pentru $f|_\Lambda$, respectiv $\hat{f}|_{\hat{\Lambda}}$.

Am vazut in Capitolul 2 ca in multe modele economice, si anume in modelul generatiilor suprapuse si generalizarile acestuia, modelul cobweb cu ajustari adaptate, modelul pietelor eterogene, modelul cash-in-advance sau unele modele date de serii financiare discrete, dinamica este definita implicit si nu este inversabila. Asadar daca modelul respectiv are o multime invarianta Λ, atunci limita inversa $\hat{\Lambda}$ este de fapt spatiul tuturor nivelelor optime (de echilibru) care sunt permise in viitor de ecuatia implicita respectiva.

Intr-adeavar o ecuatie de forma

$$x_t=F(x_{t+1}),$$

unde F nu este inversabila, ne da diverse alegeri de siruri de echilibre succesive, adica formam limita inversa. Acest spatiu limita inversa definit de ecuatia implicita de mai sus, se numeste **spatiul echilibrelor (sau al nivelelor optime) intertemporale**. Acest spatiu abstract, limita inversa este important in aplicatiile economice practice, deoarece ofera un cadru precis matematic de comparare a diverselor optiuni/distributii optime din punct de vedere al diferitelor functii de utilitate, functii care depind (si) de echilibrele viitoare.

Definitia 3.1.2.2

Fie o functie continua $f : X \to X$ care este ne-inversabila pe multimea compacta X din $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{R}^2$, si fie $\hat{X}$ limita inversa. O **functie de utilitate** pe $\hat{X}$ este o functie $W : \hat{X} \to \mathbb{R}$ data de:

$$W(\hat{x}) = \sum_{i \geq 0} \beta^i U(x_{-i}),$$

unde $\beta \in (0,1)$ se numeste *factorul de discount*, si U are urmatoarea forma:

a) in cazul $X \subset (0,1)$ avem:

$$U(x) := \frac{\min\{1,x\}^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{(2-\min\{1,x\})^{1-\gamma}}{1-\gamma},\ x \in X,\ \text{unde } \sigma > 0, \gamma > 0,$$

b) in cazul cand $X \subset (0,1) \times (0,1)$ avem:

$$U(x,y) := \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{y^{1-\gamma}}{1-\gamma},\ (x,y) \in X,\ \text{cu } \sigma > 0, \gamma > 0.$$

$\square$

Factorul de discount din expresia functiei de utilitate a unui consumator tipic reprezinta faptul ca nivelele de consum optime viitoare din sirul de echilibre intertemporale din $\hat{\Lambda}$, devin din ce in ce mai putin relevante pe masura ce ele sunt mai indepartate.

Sa observam ca la exemplele din Capitolul 1, sistemele dinamice neinversabile respective au multimi hiperbolice Λ care provin din existenta unor orbite omoclinice ne-critice pentru puncte periodice de respingere, sau care sunt multimi de tip horseshoe fara puncte critice.

Avem atunci urmatorul rezultat ([M-JMAA]), care ne spune ca functia de utilitate definita mai sus W este Hölder continua pe spatiul echilibrelor intertemporale $\hat{\Lambda}$ si are o masura unica de echilibru $\hat{\mu}_W$:

Teorema 3.1.2.3

Fie unul din sistemele economice definite in Capitolul 1 dat de o functie neinversabila f care are o multime local maximala hiperbolica si mixing Λ, care nu contine puncte critice ale lui f. Fie si functia de utilitate $W : \hat{\Lambda} \mapsto \mathbb{R}$ definita pe limita inversa $\hat{\Lambda}$ ca in Definitia 3.1.2.2. Atunci exista o unica masura de echilibru $\hat{\mu}_W$ a lui W pe $\hat{\Lambda}$ si pentru orice $\varepsilon > 0$ exista constante $A_\varepsilon, B_\varepsilon > 0$ asa incat pentru orice $\hat{x} \in \hat{\Lambda}, n \geq 1$ sa avem:

$$A_\varepsilon \exp\left(S_n W(\hat{x}) - nP_{\hat{f}}(W)\right) \leq \hat{\mu}_W(B_n(\hat{x},\varepsilon)) \leq B_\varepsilon \exp\left(S_n W(\hat{x}) - nP_{\hat{f}}(W)\right),$$

unde $B_n(\hat{x},\varepsilon)$ este multimea Bowen ce corespunde liftarii $\hat{f}:\hat{\Lambda}\to\hat{\Lambda}$.

$\square$

Demonstratie:

Vom considera mai jos cazul cand $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, cazul unidimensional tratandu-se similar. Sa luam deci o functie de utilitate $W:\hat{\Lambda}\to\mathbb{R}$ definita ca mai sus, si avand factorul de discount $\beta\in(0,1)$.

Vom arata ca $W(\hat{x}) = \sum\limits_{i\geq 0}\beta^i U(x_{-i})$ este Hölder continua pe spatiul metric compact $\hat{\Lambda}$ dotat cu metrica uzuala $d(\hat{x},\hat{y}) = \sum\limits_{i\geq 0}\frac{d(x_{-i},y_{-i})}{2^i}$.

Dupa cum se poate observa usor, expresiile lui U in Definitia 3.1.2.2 sunt date de functii Hölder continue. Atunci exista o constanta $C>0$ si exponentul $\gamma\in(0,1]$ a.i

$$|U(x)-U(y)|\leq Cd(x,y)^{\gamma}, x,y\in\Lambda$$

Pe de alta parte,

$$W(\hat{x}) = U(x)+\beta U(x_{-1})+\beta^2 U(x_{-2})+\ldots,$$

deci obtinem

$$|W(\hat{x})-W(\hat{y})|\leq |U(x)-U(y)|+\beta|U(x_{-1})-U(y_{-1})|+\beta^2|U(x_{-2})-U(y_{-2})|+\ldots,\ \hat{x},\hat{y}\in\hat{\Lambda},$$

iar din conditia de continuitate Hölder a lui U avem:

$$|U(x_{-i})-U(y_{-i})|\leq Cd(x_{-i},y_{-i})^{\gamma}, i\geq 0$$

Rezulta atunci

$$|W(\hat{x})-W(\hat{y})|\leq C\cdot[d(x,y)^{\gamma}+\beta d(x_{-1},y_{-1})^{\gamma}+\ldots], \hat{x},\hat{y}\in\hat{\Lambda} \tag{15}$$

Sa presupunem ca $\operatorname{diam}(\Lambda)=1$, si fie $\hat{x},\hat{y}\in\hat{\Lambda}, d(\hat{x},\hat{y})<\delta<<1$. Avem o structura hiperbolica pe Λ, si sa notam cu Df_s derivata stabila a lui f, adica derivata in directiile tangente de contractie. Daca $x\neq y$ sunt doua puncte apropiate, atunci unele din 1-preimaginile lor x_{-1} si y_{-1}, vor fi apropiate deasemenea. Sa notam cu $\lambda := \frac{1}{\inf_{\Lambda}|Df_s|}$; cum nu exista puncte critice in Λ, rezulta ca $1<\lambda<\infty$.

Sa presupunem acum ca exponentul $\gamma>0$ este ales asa incat:

$$\beta\lambda^{\gamma}<1 \tag{16}$$

Aceasta este posibil daca alegem γ suficient de mic, fiindca $\beta\in(0,1)$. Din definitia lui λ, stim ca $d(x_{-1},y_{-1})\leq d(x,y)\lambda$ daca x_{-1},y_{-1} sunt destul de apropiate. Repetam acum acest argument cu preimaginile consecutive x_{-m},y_{-m} din $\hat{x},\hat{y}$ pana cand obtinem $d(x,y)\lambda^m>\varepsilon_0$, pentru un ε_0 fixat. Atunci pentru anumite preistorii $\hat{x},\hat{y}$ care contin pe pozitiile respective m, punctele x_{-m},y_{-m}, obtinem din (15) inegalitatea:

$$|W(\hat{x}) - W(\hat{y})| \leq C[d(x,y)^\gamma + \beta d(x,y)^\gamma \lambda^\gamma + \ldots + \beta^m d(x,y)^\gamma \lambda^{m\gamma} + \beta^m]$$

Stim insa ca m a fost definit in functie de $d(x,y)$, si din definitia sa rezulta ca $m \log \lambda \geq \log \frac{\varepsilon_0}{d(x,y)}$, ceea ce implica

$$\beta^m \leq C_1 \cdot d(x,y)^{\rho'},$$

pentru o constanta $\rho' > 0$. Aceasta impreuna cu relatia de mai sus implica faptul ca

$$|W(\hat{x}) - W(\hat{y})| \leq \frac{C}{1 - \beta\lambda^\gamma} d(x,y)^\gamma + C_1 d(x,y)^{\rho'}$$

Asadar luand $\rho := \min\{\rho', \gamma\}$, obtinem ca $|W(\hat{x}) - W(\hat{y})| \leq C_2 d(x,y)^\rho$. Dar $d(\hat{x},\hat{y}) \geq d(x,y)$, deci in acest caz obtinem continuitatea Hölder a lui W:

$$|W(\hat{x},\hat{y})| \leq C_2 d(\hat{x},\hat{y})^\rho$$

Acum vom studia cazul ramas, si anume cand $\hat{x},\hat{y}$ nu au componente apropiate pana la ordinul m, ci spre deosebire exista $1 \leq j \leq m$ si o j-preimagine y_{-j} departata de x_{-j}, adica $d(x_{-j}, y_{-j}) > \varepsilon_0$. Aceasta rezulta din faptul ca multimea punctelor critice ale lui f, $\mathscr{C}_f$ nu intersecteaza Λ. Sa presupunem ca κ este cel mai mic astfel de j. Atunci

$$\begin{aligned}
|W(\hat{x}) - W(\hat{y})| &\leq C\,[d(x,y)^\gamma + \beta\lambda^\gamma d(x,y) + \ldots + \beta^\kappa \lambda^{\kappa\gamma} d(x,y)^\gamma + \beta^\kappa] \\
&\leq \frac{C}{1 - \beta\lambda^\gamma} d(x,y)^\gamma + C_1 \beta^\kappa,
\end{aligned}$$

pentru $C, C_1 > 0$ constante pozitive.

Sa presupunem intai ca $d(x,y)^\gamma \leq \beta^\kappa$. Obtinem deci:

$$|W(\hat{x}) - W(\hat{y})| \leq C_2 \beta^\kappa$$

Dar $d(\hat{x},\hat{y}) \geq \frac{d(x_{-\kappa}, y_{-\kappa})}{2^\kappa} \geq \frac{\varepsilon_0}{2^\kappa}$. Deci exista o constanta pozitiva suficient de mica ρ si o constanta $C_3 > 0$, independente de $\hat{x},\hat{y}$ astfel incat

$$|W(\hat{x}) - W(\hat{y})| \leq C_3 d(\hat{x},\hat{y})^\rho$$

Daca avem $d(x,y)^\gamma \geq \beta^\kappa$, rezulta atunci

$$|W(\hat{x}) - W(\hat{y})| \leq C_2 d(x,y)^\gamma \leq C_2 d(\hat{x},\hat{y})^\gamma$$

In concluzie am aratat ca functia de utilitate W este Hölder continua pe limita inversa $\hat{\Lambda}$; exista deci constante $C > 0, \rho > 0$ asa incat pentru orice $\hat{x},\hat{y} \in \hat{\Lambda}$ sa obtinem:

$$|W(\hat{x}) - W(\hat{y})| \leq C d(\hat{x},\hat{y})^\rho$$

Pentru partea a doua a Teoremei, folosim rezultatele din 1.4.4 si Teorema 3.1.1.1 pentru a arata ca $\hat{f} : \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}$ este expansiva si cu specificare pe $\hat{\Lambda}$ si deci ca exista o unica masura de echilibru $\hat{\mu}_W$ a lui W pe limita inversa $\hat{\Lambda}$. Aceasta masura de echilibru este mixing.

Deasemenea din 1.4.4 rezulta ca exista constantele pozitive $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ asa incat pentru orice $\hat{x} \in \hat{\Lambda}, n \geq 1$, sa avem estimarile pe multimi Bowen:

$$A_\varepsilon e^{S_n W(\hat{x}) - nP(W)} \leq \hat{\mu}_W(B_n(\hat{x}, \varepsilon)) \leq B_\varepsilon e^{S_n W(\hat{x}) - nP(\phi)}$$

$\square$

Teorema de mai sus ne spune deci ca in modelele economice studiate in Capitolul 2, functiile de utilitate sunt Hölder continue pe multimile invariante hiperbolice care se formeaza, si deci putem aplica formalismul termodinamic pentru masurile lor de echilibru. Un exemplu particular de masura de echilibru este masura de entropie maximala, care descrie distributia orbitelor in cazul de maxima dezordine a unui sistem. Vom vedea in sectiunea urmatoare ca rezultatele de mai sus ne permit sa comparam intre valorile medii ale functiilor de utilitate, in raport cu diferite masuri pe multimile invariante (atractori, repelori, etc.) ale modelelor economice definite implicit din Capitolul 2.

3.2 Clasificari de probabilitati pentru modele economice neliniare.

3.2.1 Valori medii ale functiilor de utilitate si comparatii pe termen lung.

Pentru modelele economice definite implicit studiate in Capitolul 2 am vazut ca exista multimi invariante bazice Λ, pe care sistemul dinamic f este neinversabil si hiperbolic. Deasemenea pentru functiile de utilitate definite in 3.1.2 pe limita inversa $\hat{\Lambda}$, am vazut ca sunt functii Hölder si ca au masuri de echilibru unice.

Dupa cum am vazut in 3.1.2 limita inversa $\hat{\Lambda}$ reprezinta spatiul echilibrelor intertemporale, adica sirurile de nivele optime permise in momente consecutive din viitor, de catre modelul nostru cu dinamica neinversabila. In practica, un guvern central ar dori sa stie valoarea medie a utilitatii W pe $\hat{\Lambda}$, pentru a putea compara pe termen lung intre diverse utilitati si distributii. Prin distributie (masura) se intelege in practica o modalitate de a asigna ponderi unor diverse multimi de echilibre intertemporale.

Avand insa in vedere ca limita inversa $\hat{\Lambda}$ pe care lucram, nu este o varietate, ci un spatiu metric abstract, nu avem o masura gata definita precum masura Lebesgue. Totodata este clar ca masura respectiva pe $\hat{\Lambda}$ trebuie sa fie $\hat{f}$-invarianta pentru a putea masura si compara diversele multimi de echilibre intertemporale fara a lua in calcul trecerea unei perioade (adica aplicarea lui $\hat{f}$).

Problema este in raport cu ce masura invarianta trebuie sa calculam valoarea medie a unei utilitati W ?

Vom compara mai jos valorile medii pentru functii de utilitate pe spatii de echilibre temporale (care reprezinta spatiile de siruri de nivele viitoare de consum optime permise de ecuatia implicita a modelului respectiv), in raport cu diverse masuri invariante.

Mai intai vom da o formula pentru valoarea medie a unei functii de utilitate in raport cu orice masura invarianta pe limita inversa $\hat{\Lambda}$ ([M-JMAA]):

Teorema 3.2.1.1

Fie o functie continua neinversabila $f : V \to V$ definita pe o multime deschisa V din $\mathbb{R}^2$ sau din $\mathbb{R}$, si fie Λ o multime compacta invarianta a lui f. Fie si $W(\hat{x}) = \sum_{i \geq 0} \beta^i U(x_{-i})$ o functie de utilitate pe limita inversa $\hat{\Lambda}$ si $\pi : \hat{\Lambda} \to \Lambda, \pi(\hat{x}) = x$ proiectia canonica. Atunci pentru orice masura probabilistica $\hat{f}$-invarianta $\hat{\mu}$ pe $\hat{\Lambda}$ avem:

$$\int_{\hat{\Lambda}} W \, d\hat{\mu} = \frac{1}{1-\beta} \int_{\Lambda} U \, d\mu,$$

unde masura $\mu := \pi_* \hat{\mu}$ este proiectia lui $\hat{\mu}$ pe Λ. Daca in plus f este hiperbolica pe multimea bazica Λ si ϕ este o functie Hölder continua pe Λ, atunci

$$\int_{\hat{\Lambda}} W \, d\hat{\mu}_{\phi \circ \pi} = \frac{1}{1-\beta} \int_{\Lambda} U \, d\mu_{\phi},$$

unde μ_ϕ este unica masura de echilibru a lui ϕ, iar $\hat{\mu}_{\phi \circ \pi}$ este unica masura de echilibru a lui $\phi \circ \pi$.

$\square$

Demonstratie:

Sa definim functiile continue pe limita inversa $\hat{\Lambda}$

$$W_n(\hat{x}) := \sum_{i=0}^{n} \beta^i U(x_{-i}), \;\; \hat{x} = (x, x_{-1}, x_{-2}, \dots) \in \hat{\Lambda}$$

Atunci W_n converg uniform pe compacti catre functia de utilitate W deoarece $||W - W_n|| \leq C\beta^n, n \geq 1$. Aceasta implica:

$$\int_{\hat{\Lambda}} W_n d\hat{\mu} \underset{n \to \infty}{\to} \int_{\Lambda} W_n d\hat{\mu}$$

Dar masura $\hat{\mu}$ este $\hat{f}$-invarianta, deci obtinem relatia

$$\int_{\hat{\Lambda}} W_n d\hat{\mu} = \int_{\hat{\Lambda}} W_n \circ \hat{f}^n d\hat{\mu} = \int_{\hat{\Lambda}} U(f^n x) + \beta U(f^{n-1} x) + \ldots + \beta^n U(x) d\hat{\mu}$$

Din faptul ca $\mu = \pi_*(\hat{\mu})$, obtinem ca $\int_{\hat{\Lambda}} g \circ \pi d\hat{\mu} = \int_{\Lambda} g d\mu$, pentru orice functie continua g pe Λ. Din f-invarianta lui μ avem ca

$$\int_{\Lambda} U \circ f^i d\mu = \int_{\Lambda} U d\mu, i \geq 0$$

Deci in cazul nostru deducem:

$$\int_{\hat{\Lambda}} W_n d\hat{\mu} = \int_{\Lambda} U(f^n x) + \ldots + \beta^n U(x) d\mu(x) = (1 + \beta + \ldots + \beta^n) \int_{\Lambda} U(x) d\mu(x)$$

Din aproximarea lui W cu functiile W_n de mai sus obtinem atunci ca:

$$\int_{\hat{\Lambda}} W d\hat{\mu} = \frac{1}{1-\beta} \int_{\Lambda} U d\mu$$

Folosim acum Teorema 1.4.4.4. de existenta si unicitate a masurilor de echilibru pentru potentiali Hölder, si faptul ca functia de utilitate W este Hölder continua pe $\hat{\Lambda}$, demonstrat in Teorema 3.1.2.3, pentru a arata existenta si unicitatea masurii de echilibru $\hat{\mu}_W$ pe $\hat{\Lambda}$.

Apoi, din Teorema 3.1.2.1 de corespondenta bijectiva intre masurile invariante pe $\hat{\Lambda}$ si masurile invariante pe Λ, rezulta faptul ca

$$\hat{\mu}_{\phi \circ \pi} = \mu_{\phi}$$

Repetand argumentul cu invarianta fata de μ_{ϕ} de mai sus, rezulta ca avem

$$\int_{\hat{\Lambda}} W \, d\hat{\mu}_{\phi \circ \pi} = \frac{1}{1-\beta} \int_{\Lambda} U \, d\mu_{\phi},$$

$\square$

Ultima parte a Teoremei de mai sus ajuta la calcularea/estimarea integralei unei functii de utilitate in raport cu o masura $\hat{f}$-invarianta pe $\hat{\Lambda}$, deoarece se poate lucra mult mai usor cu integrala pe Λ.

In [M-JMAA] am gasit doua *optiuni de comparare* a functiilor de utilitate, cat si a perturbatiilor unui sistem economic definit implicit, precum cele din Capitolul 2.

Prima optiune este aceea de a clasifica functiile de utilitate pentru sisteme date de unele functii unimodale in functie de valorile lor medii in raport cu masurile de entropie maximala respective.

Masura de entropie maximala a unui sistem dinamic descrie cel mai bine distributia haotica a sistemului in timp, si ne da gradul cel mai mare de dezordine al sistemului (reprezentat de entropia topologica). Aceasta masura nu este usor de gasit efectiv intotdeauna, dar in unele cazuri in care avem o codare simbolica a sistemului, o putem gasi folosind masura de ponderi egale pe sistemul simbolic asociat.

Pentru anumite sisteme de dilatare, de exemplu cele date de functii logistice $F_{\nu}, \nu > 4$ (a se vedea Capitolul 1), vom putea compara intre valorile medii in raport cu masurile de entropie maximala respective.

A doua optiune este aceea de a maximiza proportia intre exponentiala mediei in raport cu o masura $\hat{\mu}$ pe $\hat{\Lambda}$, si masura $\hat{\mu}$ a multimii punctelor din limita inversa care raman apropiate pentru un anumit numar de iterari consecutive.

In acest fel gasim o masura $\hat{\mu}$ care maximizeaza valoarea medie a functiei de utilitate W, dar *in acelasi timp* pastreaza dezordinea din sistem (adica entropia de masura $h_{\hat{\mu}}$) cat mai mica posibil; din Teorema lui Brin-Katok de mai sus, acest ultim fapt este echivalent cu faptul ca masura multimii punctelor care urmaresc $\hat{x}$ pana la ordinul n, este cat mai mare posibil). Masurile care satisfac cele *doua* conditii amalgamate dorite, sunt exact masurile de echilibru ale respectivelor functii de utilitate.

Optiunea consta deci in a compara valorile medii ale lui W in raport cu masura de echilibru $\hat{\mu}_W$ a lui W, pentru perturbatii (Λ_g, g) ale sistemului (Λ, f). Folosim faptul ca U este definita pe o multime deschisa $V \subset \mathbb{R}^2$ sau $V \subset \mathbb{R}$, asadar putem defini utilitatea W pe $\hat{\Lambda}_g$ pentru o perturbatie g a lui f (desi strict vorbind ar trebui sa notam W_g fiindca este definita pe alt spatiu decat W).

$\square$

Daca consideram perturbatii $\mathscr{C}^2$, g ale unui endomorfism hiperbolic f pe o multime bazica Λ (incluzand aici si cazul unui endomorfism de dilatare pe o multime bazica), atunci din 1.4.1 rezulta ca exista o multime bazica g-invarianta Λ_g pe care functia g este hiperbolica si deasemenea un homeomorfism de conjugare $H : \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}_g$ cu $\hat{g} \circ H = H \circ \hat{f}$.

Atunci masura de entropie maximala pe $\hat{\Lambda}_g$, notata cu $\hat{\mu}_{0,g}$, se obtine ca

$$\hat{\mu}_{0,g} = H_*(\hat{\mu}_0),$$

unde $\hat{\mu}_0$ este unica masura de entropie maximala pe Λ. Asadar in general putem calcula valoarea medie a functiei de utilitate W in raport cu masura de entropie maximala $\int_{\hat{\Lambda}_g} W d\hat{\mu}_{0,g}$ aplicand rezultatele de mai sus si faptul ca $\mu_{0,g} = (\pi_g \circ H \circ \hat{f})_*(\hat{\mu}_0)$, adica

$$\int_{\hat{\Lambda}_g} W d\hat{\mu}_0 = \frac{1}{1-\beta} \int_{\Lambda_g} U d(\pi_g \circ H \circ \hat{f})_*(\hat{\mu}_0)$$

Valorile medii ale lui U pe Λ_g in raport cu masura de entropie maximala corespunzatoare sunt mai usor de estimat decat cele pe limite inverse. Economistii pot folosi aceasta informatie pentru a compara valorile medii ale functiei de utilitate in raport cu masurile de entropie maximale corespunzatoare, pentru diverse perturbatii care se traduc in realitate prin ajustari ale ratelor de flux monetar.

Un caz concret in care aceasta optiune de comparare poate fi aplicata este pentru modelul generatiilor suprapuse OLG, in care dinamica inversa este data de o functie unimodala de tip C (in general de catre functia logistica $F_\nu(x) = \nu x(1-x)$ with $\nu > 4$). In acest caz, un guvern central poate alege atat valoarea parametrului ν din definitia lui F_ν, cat si valoarea parametrului β din definitia lui W, in scopul de a maximiza valoarea medie a utilitatii pe spatiul echilibrelor intertemporale, in raport cu masura de entropie maximala asociata.

Evident daca schimbam ν, atunci se va schimba si multimea invarianta Λ_ν a lui F_ν, si deasemenea spatiul echilibrelor intertemporale $\hat{\Lambda}_n u$. Pe de alta parte, functia de utilitate W inca se poate defini si pe spatiul $\hat{\Lambda}_\nu$ deoarece W s-a definit cu ajutorul lui $\beta \in (0,1)$, si a functiei U care este definita pe o multime deschisa din $\mathbb{R}$ printr-o expresie care nu depinde de ν. Asadar putem compara valorile medii ale functiei de utilitate W pe $\hat{\Lambda}_n u$ in raport cu masurile respective de entropie maximala pe $\hat{\Lambda}_\nu$.

In acest fel o banca centrala de exemplu poate vedea ce **politica monetara** (determinata de factorul β), si ce **model OLG 1-dimensional** (determinat de functia logistica $F_\nu, \nu > 4$) dau o valoare medie a lui W mai mare, pe termen lung.

Pe de alta parte cum am vazut in Capitolul 2 ca functia logistica F_ν este de dilatare (expanding) pe atractorul asociat Λ_ν, rezulta conform Capitolului 1, ca avem o conjugare a dinamicii pe $\Lambda_n u$ cu o dinamica pe un spatiu simbolic, iar homeomorfismul de conjugare se poate chiar calcula (aproxima) in acest caz. In acest mod este deci posibila in practica, calcularea (aproximarea) integralei lui W pe limita inversa $\hat{\Lambda}_n u$.

Corolar 3.2.1.2

Fie familia de functii logistice $F_\nu(x) = \nu x(1-x), x \in [0,1]$ cu $\nu > 4$; atunci F_ν are o multime invarianta Cantor Λ_ν. Sa consideram si functia de utilitate definita pe limita inversa $\hat{\Lambda}_\nu$,

$$W_\beta(\hat{x}) = \sum_{i \geq 0} \beta^i U(x_{-i}),\ \hat{x} \in \hat{\Lambda}_\nu$$

unde

$$U(x) := \frac{\min\{1,x\}^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{(2-\min\{1,x\})^{1-\gamma}}{1-\gamma},\ x \in (0,1),$$

pentru parametrii $\sigma > 0, \gamma > 0$. Rezulta in acest caz ca avem:

$$\int_{\hat{\Lambda}_\nu} W_\beta \, d\hat{\mu}_0 = \frac{1}{1-\beta} \int_{\Sigma_2^+} U \circ h_\nu^{-1} \, d\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},$$

unde $\hat{\mu}_0$ reprezinta masura de entropie maximala pe $\hat{\Lambda}_\nu$, iar $\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ este masura de entropie maximala pe spatiul simbolic Σ_2^+, iar $h_\nu : \Lambda_\nu \to \Sigma_2^+$ este functia de itinerar (conjugare), definita prin:

$$h_\nu(x) := (j_0, j_1, \ldots),\ \text{unde } F_\nu^k(x) \in I_{j_k}, k \geq 0,$$

si unde $F_\nu^{-1}([0,1]) = I_1 \cup I_2,\ I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

□

Demonstratie:

Pentru aplicatia logistica F_ν cu $\nu > 4$ este stiut, (de exemplu [R]) ca F_ν are o multime Cantor invarianta Λ_ν. Daca $\nu > 2+\sqrt{5}$ atunci aplicatia F_ν este de dilatare (expanding) in metrica euclidiana, si pentru $4 < \nu \leq 2+\sqrt{5}$, F_ν este de dilatare intr-o metrica modificata.

Deasemenea stim ca $F_\nu^{-1}([0,1]) = I_1 \cup I_2 \subset [0,1]$ unde subintervalele I_1, I_2 sunt disjuncte. Atunci exista o functie de itinerar, care asociaza unui punct x din Λ_ν sirul indicilior intervalelor care contin iteratele lui x; aceasta este definita prin:

$$h_\nu : \Lambda_\nu \to \Sigma_2^+,\ h(x) = (j_0, j_1, \ldots),$$

unde

$$F_\nu^k(x) \in I_{j_k}, k \geq 0,\ x \in \Lambda_\nu$$

Se demonstreaza ([R], [KH], etc.) ca h_ν este un homeomorfism care da o conjugare intre $F_\nu|_{\Lambda_\nu}$ si shift-ul pe spatiul simbolic unilateral $\sigma_2|_{\Sigma_2^+}$.

Sa consideram acum masura de entropie maximala $\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ pe Σ_2^+ (de exemplu din [KH], [Wa], [R], etc.); stim ca $\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ da masura $\frac{1}{2^k}$ fiecarui cilindru $\{\hat{\omega} = (i_0, \ldots, i_{k-1}, j_k, \ldots), j_k, \ldots \in \{1,2\}\}$, cu $i_0, \ldots, i_{k-1}$ fixati si apartinand multimii $\{1,2\}$.

Dar din proprietatea de conjugare de mai sus rezulta ca homeomorfismul h_ν^{-1} transporta masura de entropie maximala $\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ de pe Σ_2^+, in masura de entropie maximala μ_0 pe Λ_ν, adica

$$(h_\nu^{-1})_*(\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}) = \mu_0$$

Iar din rezultatele anterioare cu privire la masurile invariante pe limite inverse rezulta ca

$$\mu_0 = \pi_*(\hat{\mu}_0),$$

unde $\hat{\mu}_0$ este unica masura de entropie maximala pe $\hat{\Lambda}_\nu$. Deci aplicand cele de mai sus rezulta ca

$$\int_{\hat{\Lambda}_\nu} W_\beta d\hat{\mu}_0 = \frac{1}{1-\beta} \int_{\Sigma_2^+} U \circ h_\nu^{-1} d\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

□

Deoarece expresia pentru functia de itinerariu h_ν nu este dificil de aproximat, si deoarece masura $\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ este relativ usor de studiat pe spatiul simbolic unilateral Σ_2^+, putem folosi Corolarul 3.2.1.2 de mai sus, pentru a determina o pereche de parametrii (ν, β) care **maximizeaza valoarea medie a lui W_β fata de masura de entropie maximala**, i. e pentru care se maximizeaza expresia in $\beta \in (0,1), \nu > 4$:

$$\int_{\hat{\Lambda}_\nu} W_\beta(\hat{x})\ d\hat{\mu}_0(\hat{x})$$

Se poate hotara in acest fel ce politica monetara si ce model economic de tip OLG sunt de preferat pe termen lung din punct de vedere al valorii medii a functiei de utilitate.

Vom arata acum ca, daca consideram masura de entropie maximala pe limita inversa a unui fractal $\hat{\Lambda}$ si o comparam cu masura de echilibru a unei functii de utilitate W, $\hat{\mu}_W$ pe $\hat{\Lambda}$, atunci utilitatea medie in raport cu masura de echilibru $\hat{\mu}_W$ este mai mare decat utilitatea medie in raport cu $\hat{\mu}_0$.

Asadar pe termen lung data fiind o functie de utilitate W, este **mai convenabil** sa avem un control cat mai bun asupra sistemului (pastrand in acelasi timp o valoare cat mai mare a mediei lui W), decat sa lasam sistemul in starea de dezordine maxima. Un anumit nivel de **control** este deci benefic pe termen lung, insa acest control trebuie realizat strict in functie de **masura de echilibru** $\hat{\mu}_W$ sau a proiectiei sale canonice pe Λ, $\pi_* \hat{\mu}_W$.

Teorema 3.2.1.3

Sa consideram un sistem dinamic (f, Λ) ca in modelele economice din Capitolul 2, unde Λ este o multime fractala local maximala, pe care endomorfismul f de clasa $\mathscr{C}^2$ este hiperbolic. Sa consideram ca mai sus, si o functie de utilitate $W(\hat{x}) = \sum_{i \geq 0} \beta^i U(x_{-i})$ cu factorul de discount $\beta \in (0,1)$, caruia ii asociem in mod unic masura de echilibru $\hat{\mu}_W$ pe $\hat{\Lambda}$. Vom nota cu $\hat{\mu}_0$ masura de entropie maximala pe $\hat{\Lambda}$. Atunci rezulta inegalitatea:

$$\int_{\hat{\Lambda}} W \, d\hat{\mu}_W \geq \int_{\hat{\Lambda}} W \, d\hat{\mu}_0$$

□

Demonstratie:

Din Principiul Variational pentru Presiune (a se vedea 1.4.3), stim ca

$$\sup\{h_{\hat{\nu}}(\hat{f}) + \int_{\hat{\Lambda}} W \, d\hat{\nu}, \ \hat{\nu} \text{ o probabilitate } \hat{f}-\text{invarianta pe } \hat{\Lambda}\} = P_{\hat{f}}(W) = h_{\hat{\mu}_W} + \int_{\hat{\Lambda}} W \, d\hat{\mu}_W$$

Dar cum $h_{\hat{\mu}_0} = h_{top}(\hat{f})$ obtinem ca

$$\int_{\hat{\Lambda}} W d\hat{\mu}_0 + h_{top}(\hat{f}) \leq \int_{\hat{\Lambda}} W d\hat{\mu}_W + h_{\hat{\mu}_W}$$

Dar din Principiul Variational pentru Entropie avem $h_{top}(\hat{f}) \geq h_{\hat{\mu}_W}$, si deci obtinem din cele de mai sus concluzia Corolarului.

□

Fie acum functia de utilitate W considerata mai sus pe spatiul echilibrelor intertemporale,

$$W(\hat{x}) = \sum_{i \geq 0} \beta^i U(x_{-i}), \ \hat{x} \in \hat{\Lambda}$$

Aceasta functie are o forma de suma infinita cu factorii descrescand exponential, si este natural sa incercam sa aproximam masura de echilibru $\hat{\mu}_W$ cu masuri de echilibru ale unor functii mai simple. Consideram deci mai jos functiile $W_n : \hat{\Lambda} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$W_n(\hat{x}) := \sum_{0 \le i \le n} \beta^i U(x_{-i}),\ \hat{x} \in \hat{\Lambda},\ \text{for} \ge 1$$

Se poate demonstra similar cu Teorema 3.2.1.1 ca functia W_n este Hölder continua pe limita inversa $\hat{\Lambda}$, asadar are o masura de echilibru unica $\hat{\mu}_{W_n}$ pe $\hat{\Lambda}$.

Teorema 3.2.1.4

In cadrul Teoremei 3.2.1.3 fie o functie de utilitate $W(\hat{x}) = \sum\limits_{i \ge 0} \beta^i U(x_{-i})$ pentru $\hat{x} \in \hat{\Lambda}$ si functiile $W_n, n \ge 1$ definite mai sus. Atunci valoarea medie a functiei de utilitate W in raport cu masura sa de echilibru $\hat{\mu}_W$, se poate aproxima cu valorile medii ale functiilor W_n in raport cu masurile lor respective de echilibru:

$$\left| \int_{\hat{\Lambda}} W d\hat{\mu}_W - \int_{\hat{\Lambda}} W_n \, d\hat{\mu}_{W_n} \right| \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

□

Demonstratie:

Cum homeomorfismul $\hat{f} : \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}$ este expansiv (a se vedea 1.4) rezulta din Teorema lui Bowen de constructie a masurilor de echilibru, ca:

$$\hat{\mu}_\phi = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sum\limits_{\hat{x} \in \mathrm{Fix}(\hat{f}^n)} e^{S_n \phi(\hat{x})}} \sum_{\hat{x} \in \mathrm{Fix}(\hat{f}^n)} e^{S_n \phi(\hat{x})} \delta_{\hat{x}},$$

pentru orice potential Hölder continuu ϕ pe $\hat{\Lambda}$. Avem insa estimarea

$$||W - W_n|| \le \frac{\beta^n}{1-\beta} \sup_{\Lambda} |U|,$$

ceea ce implica faptul ca $n \cdot |W - W_n|$ converge uniform catre 0, si deci $\hat{\mu}_{W_n} \to \hat{\mu}_W$ in topologia slaba. Asadar

$$\begin{aligned} \left| \int W d\hat{\mu}_W - \int W_n d\hat{\mu}_{W_n} \right| &\le \left| \int W d\hat{\mu}_W - \int W d\hat{\mu}_{W_n} \right| + \left| \int W d\hat{\mu}_{W_n} - \int W_n d\hat{\mu}_{W_n} \right| \\ &\le \left| \int W d\hat{\mu}_W - \int W d\hat{\mu}_{W_n} \right| + \frac{\beta^n}{1-\beta} \cdot \sup_{\Lambda} |U|, \end{aligned}$$

fiindca $||W - W_n|| \le \frac{\beta^n}{1-\beta} \sup_\Lambda |U|$ si fiindca $\hat{\mu}_{W_n}$ este o masura probabilistica. Asadar din convergenta slaba a masurilor de echilibru $\hat{\mu}_{W_n}$ catre $\hat{\mu}_W$, rezulta concluzia Teoremei.

□

3.2.2 Alte proprietati statistice ale unor masuri invariante ale unor sisteme dinamice economice.

Sa reamintim notatia de mai sus $\Sigma_d^+ := \{1,\dots,d\}^{\mathbb{Z}^+}$ pentru spatiul simbolic al sirurilor ω formate cu $1,\dots,d$, si indexate de numerele naturale. Pe Σ_d^+ avem shift-ul $\sigma_d : \Sigma_d^+ \to \Sigma_d^+$. Pentru un vector probabilistic $p = (p_1,\dots,p_d)$, definim masura σ_d-invarianta ν_p, care satisface pe cilindrii

$$\nu_p(\{\omega, \omega_{i_0} = j_0, \dots, \omega_{i_k} = j_k\}) = p_{j_0} \dots p_{j_k},\ 0 \le j_0,\dots,j_k \le d, k > 0$$

Spatiul Lebesgue $(\Sigma_d^+, \sigma_d, \nu_p)$ se numeste un **shift Bernoulli unilateral standard**. Vom numi **shift Bernoulli unilateral** orice triplu (X, f, μ), cu μ f-invarianta, care este izomorf ca spatiu cu masura cu $(\Sigma_d^+, \sigma_d, \nu_p)$, pentru un numar natural $d \ge 1$ si un vector probabilistic $p = (p_1,\dots,p_d)$.

Urmatoarea Teorema a fost demonstrata in [M-Mon] si ne arata ca exista legaturi puternice intre proprietatea Bernoulli unilaterala a masurii de entropie maximala si proprietatea de dilatare. In particular se aplica exemplelor de sisteme dinamice neinversabile pe fractali din Capitolul 2, si masurilor de entropie maximala sau masurilor de echilibru din sectiunea 3.2.1.

Teorema 3.2.2.1

a) Fie f un endomorfism de clasa $\mathscr{C}^2$ pe varietatea Riemann M astfel incat f este hiperbolica pe multimea bazica Λ, iar multimea critica $\mathscr{C}_f$ nu intersecteaza Λ. Atunci daca sistemul (Λ, f, μ_0) asociat masurii de entropie maximala μ_0 este Bernoulli unilateral, rezulta ca f este de dilatare pe Λ.

b) Sa presupunem ca f este un endomorfism de dilatare pe Λ. Daca μ_ϕ este masura de echilibru a potentialului Hölder ϕ si daca (Λ, f, μ_ϕ) este Bernoulli unilateral, atunci $\mu_\phi = \mu_0$, unde μ_0 este unica masura de entropiea maximala pe Λ.

c) In particular a) si b) se aplica masurilor de entropie maximala ale sistemelor provenite din modelele economice din Capitolul 2.

$\square$

Reamintim din 1.3.1 ca un endomorfism $f : X \to X$ este mixing in raport cu masura probabilistica f-invarianta μ pe spatiul Lebesgue X daca pentru orice doua multimi masurabile A, B din X avem

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Vom da acum o generalizare a proprietatii de mixing a unei masuri:

Definitia 3.2.2.2

Fie endomorfismul $f : X \to X$ pe spatiul Lebesgue X care invariaza masura probabilistica μ pe X. Sa consideram complexe de $r+1$ numere naturale arbitrare $\Delta^r = (k_0,\dots,k_r)$, pentru un $r > 0$ arbitrar. Sa notam si distanta minima intre doua componente ale lui Δ^r prin:

$$\ell(\Delta^r) := \inf\{|k_i - k_j|,\ 0 \le i < j \le r\}$$

Atunci masura μ se numeste **mixing de ordin** r (a se vedea [Ro]), daca pentru orice multimi masurabile $A_0, \dots A_r$ din X si orice sir de complexe

$$\Delta_1^r = (k_{0,1}, \dots, k_{r,1}), \Delta_2^r = (k_{0,2}, \dots, k_{r,2}), \dots,$$

ale caror distante intre orice componente tind la infinit, adica pentru care

$$\ell(\Delta_n^r) \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

sa avem conditia:

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcap_{0 \le i \le r} f^{-k_{i,n}}(A_i)\right) = \prod_{0 \le i \le r} \mu(A_i) \tag{17}$$

□

Se observa usor din Definitia de mai sus ca daca f este mixing de ordin in raport cu masura μ, atunci f este mixing de orice ordin $s < r$. Deasemenea notiunea de mixing de ordin 1 in raport cu μ, este chiar notiunea de mixing obisnuit in raport cu μ, reamintita mai sus.

O alta notiune statistica folosita in legatura cu masurile invariante este cea de *descrestere exponentiala a corelatiilor* (a se vedea de exemplu [Bo], [C], etc.) Aceasta notiune reprezinta un caz particular al convergentei catre 0 a diferentei $|\mu(f^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)|$, din definitia mixing-ului in raport cu μ.

Definitia 3.2.2.3

Fie un endomorfism de spatii Lebesgue $f : X \to X$ care invariaza masura probabilistica μ. Spunem ca f are o **descrestere exponentiala a corelatiilor in raport cu** μ daca exista constante $C > 0, \lambda \in (0,1)$, asa incat pentru orice multimi masurabile A, B avem:

$$|\mu(A \cap f^{-n}(B) - \mu(A)\mu(B)| \le C\mu(A)\mu(B)\lambda^n$$

□

Pentru o masura de echilibru μ_ϕ a unui potential Hölder pe un fractal neinversabil Λ, am demonstrat in [M-Mon] ca (Λ, f, μ_ϕ) este mixing de orice ordin si are descrestere exponentiala a corelatiilor.

Teorema 3.2.2.4

Fie f un endomorfism de clasa $\mathscr{C}^2$ pe varietatea Riemann M, care este hiperbolic pe o multime bazica Λ, si fie ϕ un potential Hölder continuu pe Λ. Sa notam cu μ_ϕ unica masura de echilibru a lui ϕ pe Λ. Atunci:

a) sistemul care pastreaza masura (Λ, f, μ_ϕ) este mixing de orice ordin.

b) masura μ_ϕ are descrestere exponentiala a corelatiilor.

□

Teorema 3.2.2.4 ne spune asadar ca pentru modelele economice studiate in Capitolul 2, avem nu numai mixing al masurilor de echilibru (in particular al masurilor de entropie maximala), dar si mixing de orice ordin. Mai mult, putem estima viteza de convergenta catre 0 a diferentelor de tip $|\mu_\phi(f^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)|$ si aceasta convergenta este exponentiala in n.

De exemplu pentru modelele OLG cu suprapuneri studiate mai sus, rezulta ca putem estima viteza de convergenta pentru masura de entropie maximala. Similar putem face acest lucru pentru multimile hiperbolice obtinute in modele de tip cobweb cu ajustari adaptate.

Aceasta se aplica si multimilor invariante obtinute din repelori de intoarcere (snap-back), gasiti in unele modele economice de tip OLG bi-dimensional cu productie, sector casnic si infuzie de capital, studiate in Capitolul 2.

Bibliografie:

[A] A. Abyhankar, L. Copeland, W. Wong, Uncovering nonlinear structure in real-time, stock market indexes: the SP 500, the DAX, the Nikkei 225 and the FTSE-100, J. Business and Econ. Statistics, **15**, 1997, 1-14.

[AY] J. Alexander, J. Yorke, Fat baker's transformations, Ergodic Th. Dynamical Systems, **4**, 1984, 1-23.

[BD] J. Benhabib, R. Day, A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model, J. Economic Dynamics and Control, **4**, 1982, 37-55.

[Bo] R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics, vol. 470, Springer 1975.

[B] W. Brock, Distinguished random and deterministic systems: an expanded version, J. Economic Theory, **90**, 1986, 168-195.

[BH98] W. Brock, C. Hommes, Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model, J. Econ. Dynamics and Control, 22, 1998, 1235-1274.

[BH97] W. Brock, C. Hommes, A rational route to randomness, Econometrica **65**, 1997, 1059-1095.

[Br] W. Brock, Chaos theory, in International Encyclopedia of Social and Behav. Sciences, Elsevier, London 2001.

[BDS] W. Brock, W. Dechert, J. Scheinkman, A test for independence based on the correlation dimension, Econometric Reviews, **15**, 1996, 197-235.

[CP] D. Chapell, T. Panagiotidis, Using the correlation dimension to detect non-linear dynamics: Evidence from the Athens Stock Exchange, preprint.

[C] N. Chernov, Invariant measures for hyperbolic dynamical systems. In: Hasselblatt, B.,Katok, A. (eds.) Handbook of Dynamical System, Elsevier, Amsterdam (2002).

[D] R. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Adison-Wesley, New York, 1986.

[ER] J.P Eckmann, D. Ruelle, Ergodic theory of strange attractors, Rev. Modern Physics 57, 1985, 617-656.

[FG] I. Foroni, L. Gardini, Homoclinic bifurcations in heterogeneous market models, Chaos, Solitons, Fractals 15, 2003, 743-760.

[GN] J. Gallas, H. Nusse, Periodicity versus chaos in the dynamics of cobweb models, J. Econ. Behavior and Organization, **29**, 1996, 447-464.

[GT] L. Gardini, F. Tramontana, Snap-back repellers and chaotic attractors, Physical Review E, **81**, 2010.

[GHT] L. Gardini, C. Hommes, F. Tramontana, R. de Vilder, Forward and backward dynamics in implicitly defined overlapping generations models, J. Econ. Behav. Organization 71, 2009, 110-129.

[G] J. M Grandmont, On endogeneous competitive business cycles, Econometrica 53, 1985, 995-1045.

[GP] P. Grassberger, I. Proccacia, Measuring the strangeness of strange attractors, Physica D, **9**, 1983, 189-208.

[HZU] J. Holyst, M. Zebrowska, K. Urbanowicz, Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy, The European Physical J., 20, 2001, 531-535.

[Ho] C. Hommes, Dynamics of the cobweb model with adaptive expectations and nonlinear supply and demand, J. Econ. Behav. Organization, 24, 1994, 315-335.

[H] D. Hsieh, Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets, J. of Finance, 46, 1991, 1839-1877.

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, Cambridge University Press, London, New York, 1995.

[KS] J. Kennedy, D. Stockman, Chaotic equilibria in models with backward dynamics, J. Economic Dynamics and Control, 32, 2008, 939-955.

[KSY] J. Kennedy, D. Stockman, J. Yorke, Inverse limits and an implicitly defined difference equation from economics, Topology and Appl., 154, 2007, 2533-2552.

[KSY-JME] J. Kennedy, D. Stockman, J. Yorke, The inverse limits approach to chaos, J. Math. Economics, 44, 2008, 423-444.

[KLC] D. Kugiumtzis, B. Lillekjendlie, N. Christophersen, Chaotic time series, Modelling, Identification and Control, 15, 1994, 205-224.

[L] B. LeBaron, Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance, Phil. Trans. Royal Soc., 348, 1994, 397-404.

[LY] T. Li, J. Yorke, Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly 82, 1975, 985-992.

[Ma] R. Mane, Ergodic theory and Differentiable Dynamics, Springer Verlag, Berlin, New York, 1987.

[Ma1] F. R. Marotto, Snap-back repellers imply chaos in $\mathbb{R}^n$, J. Math. Analysis and Appl.63, 1978, 199-223.

[Ma2] F. R. Marotto, On redefining a ack repeller, Chaos, Solitons, Fractals, 25, 2005, 25-28.

[MM] E. S. Mayfield, B. Mizrah, On determining the dimension of real-time stock-price data, J. Business Econ. Statistics, 10, 1992, 367-374.

[MeR] A. Medio, B. Raines, Backward dynamics in economics. The inverse limit approach, J. Econom. Dynamics and Control, 31, 2007, 1633-1671.

[MS] W. de Melo, S. Van Strien, One-dimensional dynamics, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1993.

[MMe] D. Mendes, V. Mendes, Control of chaotic dynamics in an OLG economic model, Journal of Physics: Conference Series 23 (2005), 158-181.

[MR] R. Michener, B. Ravikumar, Chaotic dynamics in a cash-in-advance economy, J. Econom. Dynam. Control, 22, 1998, 1117-1137.

[M-JMAA] E. Mihailescu, Inverse limits and statistical properties for chaotic implicitly defined economic models, J. Math. Analysis and Appl. 394, 2012, 517-528.

[M-DCDS12] E. Mihailescu, Approximations of Gibbs states on hyperbolic folded sets, Discrete and Cont. Dynam. Syst., 32, 2012, 961-975.

[M-PAMS13] E. Mihailescu, Higher dimensional expanding maps and toral extensions, va apare in Proceed. Amer. Math. soc., 2013.

[M-Mon] E. Mihailescu, On some coding and mixing properties for a class of chaotic systems, Monatsh. Math. **167**, 2012, 241-255.

[M-MZ] E. Mihailescu, Unstable directions and fractal dimensions for a class of skew products with overlaps, Math. Zeitschrift, 269, 2011, 733-750.

[M-ETDS11] E. Mihailescu, Asymptotic distributions of preimages for endomorphisms, Ergodic Th. and Dynamical Systems, **31**, 2011, 911-934.

[M-JSP] E. Mihailescu, Physical measures for multivalued inverse iterates near hyperbolic repellers, J. Statistical Physics, 139, 2010, 800-819.

[M-Cam] E. Mihailescu, Metric properties of some fractal sets and applications of inverse pressure, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 148, 2010, 553-572.

[M-DCDS06] E. Mihailescu, Unstable manifolds and Holder structures associated with noninvertible maps, Discrete and Cont. Dynam. Syst., 14, 2006, 419-446.

[M-MA] E. Mihailescu, Periodic points for actions of tori in Stein manifolds, Math. Annalen, 314, 1999, 39-52.

[MU-BLMS] E. Mihailescu, M. Urbanski, Relations between stable dimension and the preimage counting function on basic sets with overlaps, Bull. London Math. Soc., 42, 2010, 15-27.

[MU-PAMS] E. Mihailescu, M. Urbanski, Hausdorff dimension of the limit set of conformal function systems with overlaps, Proceed. Amer. Math. Soc. 139, 2011, 2767-2775.

[MU-CJM] E. Mihailescu, M. Urbanski, Inverse pressure estimates and the independence of stable dimension for non-invertible maps, Canadian J. Math., 60, 2008, 658-684.

[Miz] B. Mizrah, The state of economic dynamics, J. Economic Dynamics and Control, **16**, 1992, 175-190.

[O] T. Onozaki, G. Sieg, M. Yokoo, Complex dynamics in a cobweb model with adaptive production adjustment, J. Econ. Behaviour and Organization, 41, 2000, 101-115.

[Pe] Y. Pesin, Characteristic Liapunov exponenst and smooth ergodic theory, Russian Math. Surveys, **32**, 1977, 55-114.

[Pr] F. Pzrytycki, Anosov endomorphisms, Studia Math., 1976, 249-285.

[R] C. Robinson, Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos, CRC Press, Boca Raton, 1999.

[Ro] V. A. Rokhlin, Exact endomorphisms of a Lebesgue space, in Fifteen papers on topology and logic, AMS Translations, series 2, **39**, 1964, 1-37.

[Ro-ams] V. A. Rokhlin, Lectures on the theory of entropy of transformations with invariant measures, Russian Math. Surv., **22**, 1-54, 1967.

[Ru-1989] D. Ruelle, Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory, Academic Press, New York, 1989.

[Ru-2004] D. Ruelle, Thermodynamic Formalism: The Mathematical Structures of Equilibrium Statistical Mechanics, second ed. Cambridge Univ. Press, 2004.

[SB] J. Scheinkman, B. LeBaron, Nonlinear dynamics and stock returns, J. of Business, Univ. of Chicago Press, **62**, 1989, 311-337.

[SL] M. Shintani, O. Linton, Nonparametric neural network estimation of Lyapunov exponents and a direct test for chaos, J. Econometrics, **120**, 2004, 1-33.

[SK] K. Shiraiwa, M. Kurata, A generalization of a theorem of Marotto, Nagoya Math. J., 82, 1981, 83-97.

[Sm] S. Smale, Differential dynamical systems, Bull. American Math. Soc., **73**, 1967, 747-817.

[T] F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, in Dynamical Systems and Turbulence, eds. D. Rand and L.S Young, Lecture Notes in Math. **898**, 1981, 366-381.

[TGDW] F. Tramontana, L. Gardini, R. Dieci, F. Westerhof, The emergence of Bull and Bear dynamics in a nonlinear model of interacting markets, Discrete Dynam. In Nature and Society, 2009.

[Wa] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[WP] R. Weston, P. Premachandran, The chaotic structure of the $C/$US exchange rate, International Business and Econ. Res. J., **6**, 2007, 19-28.

[Y] L.S Young, What are SRB measures and which dynamical systems have them? J. Stat. Physics, 108, 2002, 733-754.

[Y-82] L.S Young, Dimension, entropy and Lyapunov exponents, Ergodic Theory and Dyanmical Syst., **2**, 1982, 109-124.

[Z] W. B Zhang, Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics, Elsevier, 2006.