INTRODUCERE

Motivaţia, scopul şi obiectivele urmărite

Începând cu ultimele două decenii, dezvoltarea şi aplicarea metodelor matematice avansate din domeniul stochastic au avut un rol din ce în ce mai determinant în studiul instrumentelor financiare şi a burselor în care acestea îşi găsesc aplicabilitatea. Astfel, procedee matematice complexe, cum ar fi teoria ecuaţiilor diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale deterministe sau stochastice, teoria controlului optimal determinist sau stochastic (în care se doreşte maximizarea unei funcţii valoare, ce se defineşte în funcţie de modelul ales), calculul stochastic neanticipativ (de tip Itô) sau anticipativ (de tip Malliavin), analiza numerică, analiza funcţională, teoria proceselor stochastice (de tip Wiener pentru modele continue, Poisson pentru modele discontinue ce prezintă salturi la momente aleatoare de timp datorate unor cauze exogene sau procese generale de tip Levy, adică procese cu creşteri independente şi staţionare, cu traiectorii continue sau discontinue).

Studiul ecuaţiilor de evoluţie cu perturbaţii stochastice foloseşte unei varietăţi largi de domenii cu aplicaţii multiple, printre care matematici financiare. Ecuaţiile cu derivate parţiale neliniare stochastice au aplicaţii în modelarea ratelor dobânzii, în controlul stochastic cu informaţii insuficiente etc.

Lucrarea de faţă este o sinteză a rezultatelor obţinute în cadrul proiectului „Cercetarea ştiinţifică economică, suport al bunăstării umane în context european“ (proiect finaţat din Fondul Social European de către Guvernul României prin Programul Operaţional Sectorial de Dezvoltarea a resurselor Umane 2007-2013, prin contractul SOPHRD/89/1.5/S/62988), desfăşurat în perioada 1 decembrie 2010 – 31 noiembrie 2012 şi având ca beneficiar Institutul Naţional de Cercetări Economice „Constantin C. Kiriţescu“ al Academiei Române, iar ca partener (unul din cei cinci parteneri afiliaţi proiectului), Institutul de Matematică „Simion Stoilow“ al Academiei Române.

Scopul cercetării a fost abordarea câtorva direcţii privind studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale neliniare stochastice asociate cu ecuaţii diferenţiale stochastice cu salturi şi obţinerea unor aplicaţii ale acestora în matematici financiare.

Metodologia utilizată

Metodologia utilizată este adaptată cerinţelor de cercetare ştiinţifică şi urmăreşte îndeplinirea obiectivelor proiectului în condiţiile respectării normelor deontologice ale cercetătorului.

Pe parcusul întregului proiect s-au avut în vedere următoarele :

1. Studiu bibliografic. Pe întreaga perioadă de desfăşurare a proiectului am studiat mai multe articole ştiinţifice de referinţă şi cărţi de specialitate. În lista de referinţe bibliografice apar doar o parte din aceste articole (bibliografia din lucrare fiind una selectivă).

2. Cercetare ştiinţifică individuală. Am efectuat cercetare ştiinţifică individuală, aceasta fiind reflectată în rapoartele lunare şi trimestriale elaborate, rapoarte vizate de expertul îndrumator în cadrul proiectului. De asemenea, am elaborat lucrări ştiinţifice (o lucrare a fost acceptată pentru publicare la Mathematical Reports, revista cotată ISI, lucrarea va apărea în nr. 4/2012, alte două lucrări sunt trimise pentru publicare la NODEA şi .). Am participat la conferinţe ştiinţifice naţionale şi internaţionale la care am prezentat rezultatele acestor cercetări.

3. Colaborare cu alţi cercetători. Un rol important al cercetării ştiinţifice efectuate a fost colaborarea cu alţi specialişti din domeniu. Am colaborat cu dl. Prof. Univ. Dr. Constantin Vrsan de la Insitutul de Matematică „Simion Stoliow“ al Academiei Române cu care am discutat posibile abordări ale temei propusă în proiectul de cercetare postdoctorală, precum şi direcţiile de dezvoltare ale tematicii abordate. Un rol important l-a avut si colaborarea cu expertul îndrumător (Prof. Univ. Dr. Lucian Beznea, Institutul de Matematică „Simion Stoilow“ al Academiei Romane) cu care am discutat diverse aspecte legate de cercetare: rezultate obţinute, probleme apărute în cercetare şi posibila lor soluţionare. În perioada stagiului de mobilitate extern, efectuat în perioada 2 Aprilie 2012-2 Iulie 2012 la Departamentul de Statistică şi Probabilităţi al Universităţii Lille 1, Ştiinţă şi Tehnologie din Lille, Franţa, am colaborat cu Prof. Dr. Ciprian Tudor cu care am discutat progresele înregistrate în cadrul cercetării efectuate, posibile direcţii de dezvoltare ale tematicii abordate şi am primit sugestii referitoare la activitatea de cercetare ulterioară.

În toate lucrările elaborate în cadrul acestui proiect am citat şi autocitat (acolo unde a fost cazul) rezultatele utilizate în cercetare şi am menţionat sursa de finanţare. De asemenea, am avut în vedere respectarea obligaţiilor ce decurg din finanţarea acestui proiect (evitarea dublei finanţări, respectarea termenelor impuse pentru raportare, prezentarea documentelor de decontare şi a rapoartelor de activitate privind activitatea de cercetare desfăşurată în perioada stagiului de mobilitate extern.

Structura lucrării

Lucrarea cuprinde 4 capitole, fiecare dintre acestea fiind împărţit în mai multe subcapitole. Acestea vor fi prezentate succint în cele ce urmează. Mai multe precizări şi trimiteri la diverse rezultate din literatura de specialitate sunt făcute în cadrul fiecărul capitol în parte.

În primul capitol sunt prezentate noţiuni generale referitoare la Algebre Lie finit dimensionale, sisteme de tip gradient asociate acestor tipuri de algebre, precum şi unele elemente de bază din teoria proceselor stocastice, cum ar fi integrala stocastică de tip Itô sau Fisk-Stratonovich, formula lui Itô de diferenţiere stochastică, teorema lui Girsanov. Aceste noţiuni vor fi utilizate pe parcursul întregii lucrări.

Capitolul 2 conţine 4 subcapitole. În primul subcapitol construim soluţia în sens tare a unei ecuaţii diferenţiale neliniară stochastică considerată în sens clasic, descrisă de integrala stochastică Fisk-Stratonovich dând o reprezentare gradient pentru curentul stochastic generat de ecuaţia diferenţială stochastică asociată cu sistemul său de caracteristici. Principala ipoteză este proprietatea de comutativitate a câmpurilor vectoriale (driftul şi difuzia) în raport cu paranteza Lie uzuală. Acest rezultat este apoi aplicat pentru a construi soluţia unui sistem de ecuaţii Burgers cu perturbaţii stochastice şi, de asemenea, pentru calculul mediilor unor funcţionale care depind de valoarea finală a unui proces non-Markovian (în subcapitolul 2).

Rezultatele de mai sus sunt utilizate apoi în subcapitolul 3 unde studiem o problemă de filtrare pentru ecuaţii diferenţiale stochastice non-Markoviene în cazul în care câmpurile vectoriale din partea de drift comută cu câmpurile vectoriale din partea de difuzie. Este descrisă de asemenea evoluţia valorii medii condiţionate utilizând ecuaţii diferenţiale parabolice de tip retrograd cu parametri.

În ultimul subcapitol al acestui capitol studiem inversabilitatea curentului stochastic bazată pe reprezentarea sa integrală, în cazul în care câmpul vectorial de difuzie comută cu câmpurile vectoriale din partea de drift. Soluţia unică satisface o ecuaţie cu derivate parţiale neliniară stochastică.

În capitolul 3 se studiaza funcţionale şi curenţi gradient stochastici cu salturi asociaţi cu ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice. Analiza din acest capitol se prezintă în două cazuri: cazul în care salturile şi câmpurile vectoriale din partea de difuzie sunt mărginite este analizat în subcapitolul 1, iar în subcapitolul 2 sunt prezentate rezultate de acelaşi tip, dar în cazul în care salturile sunt nemărginite.

Ultimul capitol prezintă funcţionale de tip valoare finală sub o formă Lagrange în condiţiile în care funcţiile implicate sunt numai Lipschitz continue, iar dinamica este dată de ecuaţii diferenţiale stochastice. Analiza se prezintă în două cazuri semnificative incluzând şi parametrizarea funcţionalelor relativ la traiectoriile continue ale unui proces observat care necesită rescrierea dinamică a mediei condiţionate folosind aproximaţii netede, ecuaţii parabolice de tip retrograd (ecuaţii Kolmogorov) şi transformarea măsurii de probabilitate printr-o teoremă de tip Girsanov. Realizarea finală sub formă integrală utilizează gradienţi generalizaţi (funcţii măsurabile Borel) ale unor funcţii continue care reprezintă soluţii generalizate ale ecuaţiei Kolmogorov. Este prezentată şi o aplicaţie la o problemă de control optimal din matematici financiare, strategia optimă fiind derivată în sens slab a soluţiei ec uatiei retrograde Kolmogorov de-a lungul soluţiei $x(t)$. În ultima parte a capitolului definim o strategie admisibilă pentru o ecuaţie diferenţială stochastică non-Markoviană. Analiza prezentată aici poate fi utilizată în dezvoltări ulterioare cuprinzând subiecte noi.

Lucrarea se încheie cu o bibliografie selectivă conţinând peste 30 de articole şi cărţi din cele folosite pe parcursul cercetării.

O parte din rezultatele obţinute în lucrarea de faţă au fost trimise pentru publicare şi sunt în curs de apariţie, în diverse reviste (inclusiv ISI) sau au fost prezentate la diverse conferinţe. De asemenea aceste rezultate vor constitui în perioada următoare un punct de plecare pentru alte direcţii de studiu.

CAPITOLUL 1

NOŢIUNI ŞI REZULTATE TEORETICE PRELIMINARE

1.1. Algebre Lie

Acest subcapitol este inspirat în principal din monografia [31] [C. Vârsan, 1999, pag. 7-65]. Autorul dezvoltă teoria sistemelor hiperbolice de ecuţii diferenţiale utilizând ca instrument principal reprezentarea algebrică a a sistemelor gradient într-o algebră Lie finit dimensională.

Definiţia 1.1. *O algebră reală $\mathcal{A}$ se numeşte algebră Lie dacă operaţia de multiplicare satisface axiomele:*
(i) $ab = -ba$, $a, b \in \mathcal{A}$;
(ii) $a(bc)+c(ab)+b(ca) = 0$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathcal{A}$ (identitatea lui Jacobi).

Vom considera în cele ce urmează algebra Lie a câmpurilor vectoriale $F_n = C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ în care se consideră comutatorul sau paranteza Poisson definită prin:

$$adX(Y)(x) = [X,Y](x) \overset{def}{=} \frac{\partial X}{\partial x}(x)\,Y(x) - \frac{\partial Y}{\partial x}(x)\,X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad X,\ Y \in F_n. \tag{1.1}$$

Un câmp vectorial $X \in F_n$ defineşte o derivare $\overrightarrow{X} \in \mathrm{Der}(\mathbb{R}^n)$, care se reprezintă ca un operator diferenţial prin relaţia:

$$\overrightarrow{X}(S) = \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x),\ X(s) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial S}{\partial x_i}(x), \tag{1.2}$$

unde $S \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Definiţia 1.2. *Se numeşte curent local generat de câmpul X aplicaţia $G(t)(x) = G(t;x)$ de clasă C^{∞}, $t \in (-a, a)$, $x \in V \subset \mathbb{R}^n$, soluţie a sistemului de ecuaţii diferenţiale:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(t;\,x)}{\partial t} = X(G(t;\,x)) \\ G(0;\,x) = x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.3}$$

1.1.1. Sisteme gradient în F_n

Începem prin a aminti teorema lui Frobenius, în cazul clasic, pentru sisteme gradient în F_n. Fie $X_i \in F_n$, $i = \overline{1,m}$. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t_i} = X_i\left(y\right), & i = \overline{1,m} \\ y\left(0\right) = x \in V \subseteq \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Definiţia 1.1.1. a) *Prin soluţie pentru problema* (2.2.11)*) se înţelege o funcţie*

$$G\left(p;x\right) : D_m \times V \to \mathbb{R}^n$$

de clasă C^1, care satisface problema (2.2.11) pentru orice

$$p \stackrel{def}{=} \left(t_1 \ldots t_m\right) = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}^T \in D_m \stackrel{def}{=} \prod_{i=1}^{m} \left(-a_i, a_i\right)$$

şi $x \in V \subseteq \mathbb{R}^n$, V o mulţime deschisă.

(b) *Sistemul din* (2.2.11) *este complet integrabil dacă pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$ există o vecinătate $V\left(x_0\right) \subseteq \mathbb{R}^n$ şi o soluţie unică a problemei (2.2.11), fie aceasta $G\left(p;x\right)$, $\left(p,x\right) \in D_m \times V\left(x_0\right)$, soluţie care satisface condiţia $G\left(0;x\right) = x$, $x \in V\left(x_0\right)$.*

Teorema 1.1.1. *(Frobenius in F_n). Fie $X_i \in F_n$, $i = \overline{1,m}$. Sistemul (2.2.11) este complet integrabil dacă şi numai dacă:*

$$\left[X_i, X_j\right] = 0, \quad \forall\, i,j \in \overline{1,m},$$

unde $\left[X_i, X_j\right] = \dfrac{\partial X_i}{\partial y}\left(y\right) X_j\left(y\right) - \dfrac{\partial X_j}{\partial y}\left(y\right) X_i\left(y\right)$ este paranteza Lie. În plus, orice soluţie locală $G(p,x)$, $p \in D_m$, $x \in V\left(x_0\right)$ este dată de

$$G\left(p;x\right) = G_1\left(t_1\right) \circ \ldots \circ G_m\left(t_m\right)\left(x\right),$$

unde $G_i\left(\tau\right)\left(x\right)$ este curentul local generat de X_i.

Observaţie 1.1.1. *Forma generală a condiţiei de integrabilitate Frobenius pentru cazul în care câmpurile nu sunt omogene, adică avem o dependenţă $X_i\left(t_1, \ldots, t_m; y\right)$, devine:*

$$\left[X_i\left(t,y\right), X_j\left(t,y\right)\right] = \frac{\partial X_j}{\partial t_i}\left(t;y\right) - \frac{\partial X_i}{\partial t_j}\left(t;y\right), \ \forall\, i,j \in \{1, \ldots, m\} \tag{1.1.2}$$

În numeroase demonstraţii se va considera următoarea aplicaţie:

Fie X un câmp vectorial şi difeomorfismul ce reprezintă curentul local generat de X, $t \in (-a,\, a)$, $y \in D$, cu mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$.

Notăm $H\,(t;y) \overset{def}{=} \left[\dfrac{\partial G_1}{\partial x}\,(t;y)\right]^{-1}$. Atunci această aplicaţie este soluţia următorului sistem de ecuaţii:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial H}{\partial t}\,(t,\,y) = -H\,(t,\,y)\,\dfrac{\partial X}{\partial x}\,(G\,(t;y))\,,\ t \in (-a,\,a)\,,\, y \in D\\ H\,(0;y) = I_n\end{array}\right. \tag{1.1.3}$$

Cum $G\,(-t;\,G\,(t;\,y)) = y$ şi $G\,(t;\,x) = G\,(t;\,G\,(-t;G\,(t;x)))$, prin derivare în raport cu x se obţin identităţile $H(t,y)H(-t,G(t,y)) = I_n$.

Alte proprietăţi ale acestei aplicaţii sunt prezentate în:

Lema 1.1.1. *Fie date câmpurile $X, X_1, X_2 \in C^\infty\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ şi $G(t,x)$ curentul local generat de $X, t \in (-a;a)$, $y \in D$, cu D mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Atunci sunt adevărate relaţiile:*

(c1) $H(t;y)\,[X_1,X_2]\,(G(t;y)) = [H(t;\cdot)X_1\,(G(t;\cdot))\,,\, H(t;\cdot)X_2(G(t;\cdot))]\,(y)$;

(c2) $H\,(t;\,y)\,X\,(G\,(t;\,y)) = X\,(y)$;

(c3) $H\,(-t;\,y)\,X_1\,(G\,(-t;\,y)) = (\exp tadX)\,X_1\,(y)$.

Definiţia 1.1.2. *Fie $p := (t_1,\,\dots\,,t_m) \in D_m := \prod\limits_{i=1}^{m}(-a_i,a_i)$, $y \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ şi fie $X_j\,(p;y) \in \mathbb{R}^n$ de clasă C^1 pentru $j = 1,\dots,m$. Prin definiţie $X_j\,(p;y)$, $j = \overline{1,m}$ defineşte un sistem gradient (sau îndeplineşte condiţia de integrabilitate a lui Frobenius) dacă:*

$$\frac{\partial X_j}{\partial t_i}\,(p;y) - \frac{\partial X_i}{\partial t_j}\,(p;y) = [X_i\,(p;\cdot)\,, X_j\,(p;\cdot)]\,(y),\ \forall\ i,j \in \{1,\dots,m\}, \tag{1.1.4}$$

unde:

$$[Z_1,Z_2]\,(y) \overset{def}{=} \frac{\partial Z_1}{\partial y}(y)Z_2(y) - \frac{\partial Z_2}{\partial y}(y)Z_1(y) \quad \text{(paranteza Lie).}$$

Teorema 1.1.2. *Fie $Y_j \in C^2\,(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,m}$, fixaţi. Atunci există $D_m = \prod\limits_{i=1}^{m}(-a_i,a_i)$, $V\,(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $X_j\,(p_j;y) \in \mathbb{R}^n$, $p \in D_m$, $y \in V\,(x_0)$ de clasă C^1, $p_j \overset{def}{=} (t_1,\dots,t_{j-1})$, $X_1 = Y_1$, astfel încât:*

(c1) $\dfrac{\partial y}{\partial t_1} = Y_1\,(y)$, $\dfrac{\partial y}{\partial t_2} = X_2\,(t_1;y)$, $\dots$, $\dfrac{\partial y}{\partial t_m} = X_m\,(t_1,\dots,t_{m-1};y)$ *este un sistem gradient* $\left(\dfrac{\partial X_i}{\partial t_i}\,(p_j;y) = [X_i\,(p_i;\ \cdot)\,, X_j\,(p_i;\ \cdot)]\,(y)\,,\ i<j\right)$ *şi*

(c2) $G(p;x) = G_1(t_1) \circ \ldots \circ G_m(t_m)(x)$, $p \in D_m$, $y = V(x_0)$ *este soluţie pentru* (c1) *cu condiţia Cauchy* $y(0) = x \in V(x_0)$ *unde* $G_i(t)$ *este curentul local generat de* Y_i.

1.1.2. Sisteme gradient determinate de o algebră Lie

Am observat înainte că orice compunere finită de câmpuri

$$y(p) := G_1(t_1) \circ ... \circ G_m(t_m)(x_0)$$

poate fi asociată cu un sistem gradient

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} = Y_1(y),\ \frac{\partial y}{\partial t_2} = X_2(t_1; y),\ ...,\ \frac{\partial y}{\partial t_m} = X_m(t_1,\ ...,t_{m-1}; y),\ y(0) = x_0$$

şi soluţia sa locală.

Atât soluţia cât şi sistemul gradient sunt în mod esenţial legate de proprietatea ca $\dfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial t_m}$ să fie derivări comutative în $\mathrm{Der}(\mathbb{R}^m)$ şi aceasta poate fi reconsiderată dacă $\dfrac{\partial}{\partial t_i}$, $i = 1, \ldots, m$ sunt înlocuite de $\overrightarrow{g}_i \in \mathrm{Der}(\mathbb{R}^n)$ (sau $g_i := \overrightarrow{g}_i I \in F_n$, $i = \overline{1, m}$) necomutativi.

Definiţia 1.2.1. *Prin definiţie o algebră Lie reală* Λ *se numeşte finit generată (f.g.r) dacă există* $\{Y_1, \ldots, Y_M\} \subseteq \Lambda_M$ *astfel încât orice* $Y \in \Lambda$ *admite reprezentarea* $Y = \sum_{j=1}^{M} a_j Y_j$, *cu* $a_i \in \mathbb{R}$, *depinzând de* Y; $\{Y_1, \ldots, Y_M\}$ *un sistem de generatori.*

Amintim că pentru $Z \in \Lambda$ aplicaţia liniară $adZ \in \mathrm{Der}(\Lambda)$ este definită prin $adZ(Y) = [Z, Y]$, unde $[\cdot, \cdot]$ este dată de algebra Lie Λ.

Lema 1.2.1. *Fie* $\{Y_1, \ldots, Y_M\}$ *un sistem de generatori pentru algebra Lie* Λ. *Fie* $Z \in \Lambda$. *Considerăm seria formală*

$$\exp ad\, Z \overset{def}{=} I + \frac{t}{1!} ad\, Z + ... + \frac{t^k}{k!} ad^k Z + \ldots. \tag{1.2.1}$$

Definim o matrice $(M \times M)B$ *astfel încât*

$$\{ad\, Z(Y_1),\ ...,ad\, Z(Y_M)\} = \{Y_1,\ ...,Y_M\} B.$$

Atunci $(\exp t ad\, Z)(X) \in \Lambda$ *pentru orice* $X \in \Lambda$ *şi* $t \in \mathbb{R}$ *verifică*

c1) $(\exp t\ ad\ Z)(X) = \{Y_1, \ldots, Y_M\}(\exp tB)\, v$, *unde* $v \in \mathbb{R}^M$ *şi* $X = \sum_{k=1}^{M} v^k Y_k$,

c2) $(\exp t adZ)^{-1} = \exp - t adZ$.

Lema 1.2.2. *În ipotezele Lemei 1.2.1, soluţia analitică a ecuaţiei diferenţiale* $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t)=[Z,X(t)]$, $t\in\mathbb{R}$ *cu condiţia Cauchy* $X(0) = X \in \Lambda$ *este unică şi*

$$X\left(t\right) = \left(\exp t\; ad\; Z\right) X = \left\{Y_1, \ldots, Y_M\right\} \left(\exp tB\right)v, \tag{1.2.2}$$

unde $v \in \mathbb{R}^M$ *satisface condiţia* $\sum_{k=1}^{m} v^k Y_k = X$.

În plus, $\left(\exp t\; ad\; Z\right)[X_1, X_2] = [X_1(t), X_2(t)]$ *pentru orice* $X_1, X_2 \in \Lambda$, *unde* $X_i(t) \stackrel{def}{=} \left(\exp t\; ad\; Z\right) X_i$, $i = 1, 2$.

Lema 1.2.3. *Fie* Λ *o algebră Lie f.g.r. şi fie* $\{Y_1, \ldots, , Y_M\} \subseteq \Lambda$ *un sistem de generatori. Definim* $X_j(p_j)$ *şi* $\widehat{X}_j(p_j)$, $j = \overline{1, M}$, *conform* (1.2.6) *şi* (1.2.7), *corespunzător. Atunci:*

$$X_{j+1}\left(p_{j+1}\right) = \widehat{X}_{j+1}\left(p_{j+1}\right), \tag{1.2.3}$$

pentru orice $p \in \mathbb{R}^M$, $j = \overline{0, M-1}$.

Suntem în situaţia să formulăm:

Teorema 1.2.1. *Fie* Λ *o algebră Lie fiind generată (f.g. r) şi fie* $[Y_1,\ldots,Y_M]$ *un sistem fixat de generatori. Atunci* $X_j(p_j)$, $j = \overline{1, M}$, *definiţi de* (1.1.4), *este un sistem gradient în* Λ *adică:*

$$\frac{\partial X_j}{\partial t_i}\left(p_j\right) = \left[X_i\left(p_i\right), X_j\left(p_j\right)\right], \tag{1.2.4}$$

pentru $1 \le i < j = \overline{2, M}$.

Observaţie 1.2.1. *Se pune problema de ce se foloseşte un sistem de generatori* $[Y_1, \ldots, Y_M]$ *pentru un spaţiu linear finit dimensional* Λ.

O explicaţie pentru aceasta rezultă din forma mai simplă pe care o putem obţine pentru aplicaţiile din (1.2.6), care definesc sistemul gradient. În cazul în care Λ *este o algebră nilpotentă atunci putem lua un sistem nilpotent de generatori* $[Y_1, \ldots, Y_M]$, *şi atunci*

$$\left(\exp t_j\; ad\; Y_j\right)\left\{Y_1, \ldots, Y_M\right\} = \left\{Y_1, \ldots, Y_M\right\}\left(\exp t_j B_j\right),$$

unde matricea $(M \times M)\, B_j$ *este nilpotentă (adică* $B_j^N = 0$ *pentru un anumit* N *natural).*

1.1.3. Algebre Lie finit generate peste orbite $(f.g.o)$ şi sisteme gradient

Cum s-a văzut deja, o algebră Lie Λ finit dimensională, $\Lambda \subset F_n$ (sau $\operatorname{Der}(\mathbb{R}^n)$) poate fi asociată cu algebra Lie a câmpurilor vectoriale analitice. În general, noua algebră Lie nu mai este finit dimensională, dar poate fi caracterizată folosind un sistem global de generatori cu condiţia ca spaţiul $\mathbb{R}$ al coeficienţilor să fie înlocuit cu spaţiul funcţiilor analitice $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^M;\mathbb{R}\right)$. Aceasta revine la a spune că noua algebră Lie $L(q_1,\ldots,q_m)$ poate fi determinată de un sistem

$$\{q_1,\ldots,q_m,\ Q_{m+1},\ldots,Q_M\} \subseteq L(q_1,\ldots,q_m)$$

peste inelul funcţiilor analitice. Este astfel problema generării finite pe orbite a algebrei Lie care să conserve proprietatea de dimensiune infinit (pentru algebră), ca şi analiza sistemului gradient asociat.

După cum este de aşteptat, sistemul gradient asociat cu o mulţime finită de câmpuri vectoriale într-o algebră Lie $\Lambda \subseteq F_n$ (sau $\operatorname{Der}\left(\mathbb{R}^M\right)$) este definit local şi depinde esenţial de soluţia orbită a algebrei.

Precizăm că prin orbită a algebrei Λ înţelegem doar o compunere finită de curenţi locali.

Definiţia 1.3.1. *Fie $\Lambda \subseteq F_n$ o algebră Lie şi fie $x_0 \in \mathbb{R}^n$, fixat. Prin orbită cu originea în x_0 a lui Λ se înţelege funcţia*

$$G(p;x_0) \overset{def}{=} G_1(t_1) \circ \ldots \circ G_k(t_k)(x_0),$$

$$p \overset{def}{=} (t_1,\ldots,t_k) \in D_k \overset{def}{=} \prod_{i=1}^{k} (-a_i,a_i),$$

unde $G_i(t)(x)$, $t \in (-a_i,a_i)$, $x \in V(x_0)$ este fluxul local generat de un anumit $Y_i \in \Lambda$.

Definiţia 1.3.2. *Spunem că $\Lambda \subseteq F_n$ este finit generată în raport cu orbitele în $x_0 \in \mathbb{R}^n(f.g.o;x_0)$ dacă există $\{Y_1,\ldots,Y_M\} \subseteq \Lambda$ astfel încât orice $Y \in \Lambda$ de-a lungul unei orbite arbitrare $G(p;x_0)$, $p \in D_k$, poate fi scrisă sub forma:*

$$Y(G(p;x_0)) = \sum_{j=1}^{M} a_j(p)\, Y_j(G(p;x_0))$$

cu $a_j \in C^{\infty}(\Omega_k)$ depinzând de Y şi $G(p;x_0)$, $p \in D_k$; $\{Y_1,\ldots,Y_M\}$ se numeşte un sistem de generatori.

Observaţie 1.3.1. *Se vede uşor că* $\{g_1,\ldots,g_m\}\subseteq F_n$ *în involuţie, adică,* $[g_i,g_j](x)=\sum_{k=1}^{m}a_k(x)\,g_k(x)$ *cu* $a_k\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, *determină algebra Lie* $\Lambda(g_1,\ldots,g_m)$ *care este finit generată pe orbite. În particular, orice algebră Lie f.g.r este o f.g.o algebră Lie cu un sistem de generatori fixat independent de originea* x_0.

În cele ce urmează originea $x_0\in\mathbb{R}^n$ a orbitelor este fixată şi pentru orice sistem de generatori $\{Y_1,\ldots,Y_M\}$ în algebra Lie $\Lambda(f.g.o;x_0)$ considerăm sistemul gradient general asociat algebrei Lie. Aceasta revine la a spune că, pentru $G_i(t)(x)$, $t\in(-a_i,a_i)$, $x\in V(x_0)$, curentul local generat de Y_i, scriem:

$$H_i(t;y):=\left(\frac{\partial G_i}{\partial y}(t;y)\right)^{-1},\quad y_{i+1}:=G_i(-t_i;y_i),\quad y_1:=y,\quad i=1,\ldots,M-1. \tag{1.3.1}$$

Apoi definim câmpurile de vectori:

$$\begin{aligned} X_1(y) &= Y(y)\\ X_2(t_1;y) &= H_1(-t_1;y_1)\,Y_2(G_1(-t_1;y_1))\\ X_M(t_1,\ldots,t_{M-1};y) &= H_1(-t_1;y_1)\times H_2(-t_2;y_2)\times\ldots\\ &\ldots\times H_{M-1}(-t_M;y_{M-1})\,Y_M(y_M), \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

unde $x\in V(x_0)$ şi $p:=(t_1,\ldots,t_M)\in D_M=\prod_{i=1}^{M}(-a_i,a_i)$.

Câmpurile vectoriale din (1.3.2) determină un sistem gradient (vezi Teorema 1.1.2)

$$\frac{\partial y}{\partial t_1}=X_1(y),\ \frac{\partial y}{\partial t_2}=X_2(t_1;y),\ldots,\frac{\partial y}{\partial t_M}=X_M(t_1,\ldots,t_{M-1};y), \tag{1.3.3}$$

pentru $p\in D_M$ şi $y\in V(x_0)$, şi orbita cu originea $x_0\in\mathbb{R}^n$,

$$y(p)=G_1(t_1)\circ G_2(t_2)\circ\ldots\circ G_M(t_M)(x_0),\ p:=(t_1,\ldots,t_M)\in D_M, \tag{1.3.4}$$

satisface (1.3.3).

Lema 1.3.1. *Fie* $\Lambda\subseteq F_n\circ(f.g.\,o;x_0)$ *algebră Lie şi* $x_0\in\mathbb{R}^n$, *fixat. Se consideră sistemul gradient (1.3.3) asociat cu sistemul fixat de generatori* $\{Y_1,\ldots,Y_M\}\subseteq\Lambda$. *Atunci orbita (1.3.4) este soluţia sistemului gradient (1.3.3) şi există matricele nesingulare, de tip* $(M\times M)$, $Z_j(t_j;t_j,\ldots,t_M)$, $j=1,\ldots,M-1$ *astfel încât câmpurile vectoriale* $X_j(p_j;y)$ *din (2.2.2), pentru* $y=y(p)$ *dat de*

(1.3.4) satisfac:

$$X_{j+1}(p_{j+1}; y(p)) = \{Y_1(y(p)), \ldots, Y_M(y(p))\} Z_1(t_1; t_1, \ldots, t_M) \times ... \\ \times Z_j(t_j; t_j, \ldots, t_M) e_{j+1},$$

unde $e_1, \ldots, e_M \in \mathbb{R}^M$ *este baza canonică şi* Z_j *este de clasă* C^∞ *în* $p \in D_M$ *şi satisface ecuaţiile diferenţiale* $\frac{\mathrm{d}Z_j}{\mathrm{d}t} = Z_j B_j(t_j - t, t_{j+1}, \ldots, t_M)$, $Z_j(0) = I_M$.

Observaţie 1.3.2. *Dacă fiecare* Y_j *generează un câmp global* $G_j(t)(x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, M$, *atunci concluzia (c) din Lema 1.3.1 are loc pentru orice* $p \in \mathbb{R}^M$.

Observaţie 1.3.3. *În ipotezele Lemei 1.3.1 scriem:*

$$Z_j(p) := Z_1(t_1; t_1, \ldots, t_M) \times ... \times Z_j(t_j; t_j, \ldots, t_M),$$

unde $p := (t_1, \ldots, t_M) \in D_M$, $j = 1, ..., M-1$, *iar* $Z_j(t_j; t_j, \ldots, t_M)$ *sunt definite de Lema 4.1 şi satisfac concluzia (c).*

Definim matricea $(M \times M)\, C^\infty$ *prin:*

$$A(p) = (e_1,\ Z_1(p) e_2, \ldots, Z_{M-1}(p) e_M),\ p \in D_M.$$

Atunci câmpurile vectoriale $X_j(p_j, *)$, $j \in \{1, 2, \ldots, M\}$, *satisfac*

$$\{Y_1, X_2(t_1), \ldots, X_M(t_1, \ldots, t_{M-1})\}(y) = \{Y_1, \ldots, Y_M\}(y) A(p)$$

cu condiţia $y = y(p)$, *pentru orice* $p \in D_M$, *cu* $A(p)$, $p \in D_M$ *matricea* $C^\infty(M \times M)$ *dată mai sus şi care satisface condiţia* $A(0) = I_M$.

Observaţie 1.3.4. *Cum s-a stabilit în Lema 1.3.1 reprezentarea unui sistem gradient nu este o reprezentare globală şi în plus ea depinde de soluţia locală* $y(p)$, $p \in D_M$. *Sunt date două tipuri de proprietăţi locale, una este condiţionată de existenţa unui curent local* $G_i(t)(x)$ *(vezi* $p \in D_M$*) şi a doua exprimă nesingularitatea matricei* $A(p)$ *(vezi 1.3.2 pentru* $p \in V(0) \subseteq D_M$ *(vezi* $A(0) = I_M$*). Important este să ne asigurăm că singura restricţie reală pentru o reprezentare nedegenerată este determinată de existenţa locală a campului* $G_i(t)(x)$.

1.2. Calcul stochastic

1.2.1. Medii condiţionate

Considerăm câmpul de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ şi fie $\mathcal{G}$ o sub σ-algebră a lui $\mathcal{F}$.

Definiţia 2.1.1. *Fie X o variabilă aleatoare cu valoari reale positive ($X(\omega) \geq 0,$ a.s. $\mathbb{P}$). Există o variabilă aleatoare Y integrabilă şi $\mathcal{G}$-măsurabilă astfel încât pentru orice $A \in \mathcal{G}$, avem*

$$\int\limits_A X(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_A Y(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega),$$

Y se numeşte media condiţionată alui X dată de $\mathcal{G}$ şi notăm $E(X \mid \mathcal{G})$. Y este unică a.s. $\mathbb{P}$.

Dacă $\mathcal{G}$ este o σ-algebră generată de variabila aleatoare Z, adică $\mathcal{G} = \sigma(Z)$, scriem $E(X \mid Z)$ în loc de $E(X \mid \mathcal{G})$.

Proprietăţile mediei condiţionate

1) Liniaritatea mediei condiţionate

Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare integrabile

$$E(aX + bY \mid \mathcal{G}) = aE(X \mid \mathcal{G}) + bE(Y \mid \mathcal{G}$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

2) Iterarea mediei condiţionate

Fie $\mathcal{H}$ o sub σ-algebră a lui $\mathcal{G}$. Dacă X este o variabilă aleatoare integrabilă, atunci

$$E(X \mid \mathcal{H}) = E(E(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}.$$

3) Dacă X este o variabilă aleatoare integrabilă şi Y este o variabilă aleatoare integrabilă $\mathcal{G}$-măsurabilă, astfel încât variabila aleatoare XY este integrabilă, atunci

$$E(XY \mid \mathcal{G}) = YE(X \mid \mathcal{G}).$$

4) Independenţa

Dacă X este o variabilă aleatoare integrabilă independentă de $\mathcal{G}$, atunci

$$E(X \mid \mathcal{G}) = E(X).$$

5) Inegalitatea Jensen pentru medii condiţionate

Dacă f este o funcţie convexă şi X o variabilă aleatoare integrabilă, atunci

$$E(f(X) \mid \mathcal{G}) \geq f(E(X \mid \mathcal{G})).$$

Uneori se va folosi următorul rezultat.

Propoziţia 2.1.1. *Fie X o variabilă aleatoare $\mathcal{G}$-măsurabilă cu valori într-un spaţiu $(E, \mathcal{E})$ şi Y o variabilă aleatoare independentă de $\mathcal{G}$ luând valori în $(H, \mathcal{H})$. Atunci, pentru orice funcţie f măsurabilă Borel care este pozitvă sau mărginită, definită pe $(E \times H, \mathcal{E} \times \mathcal{H})$ funcţia g definită ca*

$$g(x) := E(f(x, Y)),\ \forall\, x \in E$$

este măsurabilă Borel pe $(E, \mathcal{E})$ şi avem

$$E(f(X, Y) \mid \mathcal{G}) = g(X).$$

Deducem din definiţia 2.1.1 că estimatorul condiţionat $E(X \mid \mathcal{G})$ este un estimator „bun“ pentru X, luând în considerare informaţia conţinută în $\mathcal{G}$. O întrebare naturală la care ne putem gândi este următoarea: $E(X \mid \mathcal{G})$ ne dă cele mai bune informaţii despre X dacă ne bazăm numai pe informaţia din $\mathcal{G}$?

Fie $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Din inegalitatea lui Jensen pentru medii condiţionate deducem că $E(X \mid \mathcal{G})$ aparţine, de asemenea, spaţiului $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. În continuare avem

$$E\left[(X - Z)^2\right] = E\left[(X - E(X \mid \mathcal{G}) + E(X \mid \mathcal{G}) - Z)^2\right] = E\left[(X - E(X \mid \mathcal{G}))^2\right] + \\ +2E\left[(X - E(X \mid \mathcal{G}))(E(X \mid \mathcal{G}) - Z)\right] + E\left[(E(X \mid \mathcal{G}) - Z)^2\right]$$

şi al doilea termen din partea dreaptă este egal cu

$$2E\left\{E\left[(X - E(X \mid \mathcal{G}))(E(X \mid \mathcal{G}) - Z) \mid \mathcal{G}\right]\right\} =$$

$$= 2E\left\{(E(X \mid \mathcal{G}) - Z)E[(X - E(X \mid G)) \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}\right\} = 0$$

unde am folosit faptul că

$$E\left[(X - E(X \mid \mathcal{G})) \mid \mathcal{G}\right] = E(X \mid \mathcal{G}) - E[E(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}] = 0$$

şi proprietăţile mediilor condiţionate.

Rezultă că

$$E\left[(X - E(X \mid \mathcal{G}))^2\right] \leq E\left[(X - Z)^2\right],$$

astfel că eroarea de aproximare a lui X cu elemente din $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ (în sensul normei L^2) este ultima valoare pentru $Z = E(X \mid \mathcal{G})$.

Obţinem de aici următorul rezultat:

Propoziţia 2.1.2. *Fie X o variabilă aleatoare de pătrat integrabil. Atunci media condiţionată $E(X \mid \mathcal{G})$ coincide cu proiecţia ortogonală a lui X pe spaţiul Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.*

Acest rezultat are consecinţe importante în Teoria Opţiunilor deaorece aceasta înseamnă că cea mai bună informaţie la momentul t a preţului stocului S_T la un anumit moment $T > t$ este dată de variabila aleatoare $E(S_T \mid F_t)$. Definiţia şi proprietăţile de mai sus pot fi uşor extinse pentru variabile aleatoare multi-dimensionale.

1.2.2. Diverse tipuri de procese

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate dat şi fie o familie $\mathcal{F}_{tt\in[0,T]}$ de σ-algebre astfel încât $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $\forall\, t \in [0, T]$ şi care satisface proprietăţile:

1) $\{\mathcal{F}_t\}$ este ascendentă, i.e. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$.

2) $\{\mathcal{F}_t\}$ este continuă la dreapta, i.e. $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$, $\forall < T$.

3) $\mathcal{F}_0$ conţine toate submulţimile lui $\mathcal{F}$ de măsură nulă (în raport cu P).

O astfel de familie se numeşte filtraţie ce satisface condiţiile uzuale ($\mathcal{F}_t$ poate reprezenta spre exemplu cantitatea de informaţii despre un anumit fenomen, disponibilă la momentul t).

Fie $X(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ o aplicaţie măsurabilă în raport cu σ-algebra produs $\beta\left([0, T]\right) \times \mathcal{F}$. Spunem că $X(t, \omega)$ este un proces stochastic măsurabil.

Procesul $X(t, \omega)$ se spune că este $\mathcal{F}_t$-adaptat dacă pentru orice $t \in [0,\, T]$, X_t este variabilă aleatoare $\mathcal{F}_t$-masurabilă.

Dacă aplicaţia $t \in [0,\, T] \to X_t\,(\omega) \in \mathbb{R}^n$ este continuă pentru ω a.s. spunem că procesul are traiectorii continue sau este un proces continuu. O aplicaţie $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ spunem că este un timp de stopare în raport cu filtraţia $(\mathcal{F}_t)$ dacă mulţimea $\{\omega | \tau\,(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall\, 0 < t \leq T$.

Definiţia 2.2.1. *Fie $X^*(t)$ un proces continuu, $\mathcal{F}_t$-adaptat.*

(i) $(X(t))$ este un martingal dacă $E|X(t)| < \infty$ şi $E[X(t)|F_t] = X(s)$, $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$.

Am notat $E|X(t)| \overset{def}{=} \int\limits_{\Omega} |X\,(t,\, \omega)| dP\,(\omega)$.

(ii) (X(t)) se numeşte martingal local dacă există un şir crescător $(T_n)_{n\geq 1}$ de timpi de stopare ai filtraţiei F astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} T_n\,(\omega) = +\infty$, ω a.s. şi procesele stopate $X_t^{(n)}\,(\omega) \overset{def}{=} X_{t\wedge T_n(\omega)}\,(\omega)$ sunt martingale.

(iii) $(X(t))$ se numeşte proces crescător dacă aplicaţia: $t \in [0,T] \to X_t(\omega)$, $X_t(\omega) \in \mathbb{R}$, este monoton crescătoare, continuă la dreapta şi $X_0(\omega) = 0$ pentru ω a.s.

(iv) $(X(t))$ se numeşte proces cu variaţie mărginită dacă poate fi scris ca diferenţa a două procese crescătoare.

(v) $(X(t))$ se numeşte semimartingal dacă poate fi scris sub forma:

$$X(t) = X(0) + M_t + B_t, \;\; \forall\, t \in [0,T]$$

unde (M_t) este un martingal local iar (B_t) este un proces cu variaţie mărginită.

(vi) Fie $(X(t))$ un martingal continuu la dreapta. Dacă $E\left(X_t^2\right) < \infty$, $\forall\, t \in [0,T]$ spunem că $(X(t))$ este un martingal de pătrat integrabil. Dacă, în plus, $X(0) = 0$, ω a.s., atunci scriem $(X(t)) \in \mathcal{M}_2$ (sau $\mathcal{M}_2^c$ dacă procesul are traiectorii continue). Spaţiul $\mathcal{M}_2^c$ devine un spaţiu Banach dacă pe acest spaţiu se defineşte norma: $[X]_T = \left[E\left(X_t^2\right)\right]$.

Definiţia 2.2.2. *Fie procesul $(X(t)) \in \mathcal{M}_2^c$ şi fie $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T\}$ o diviziune a intervalului $[0,T]$.*

Definim variaţia pătratică a lui X asociată diviziunii Δ prin:

$$V_t^{(2)}(\Delta) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \left(X\left(t_{i+1}\right) - X\left(t_i\right)\right)^2 + \left(X(t) - X\left(t_k\right)\right)^2 \tag{2.2.1}$$

unde $t \in [0,T]$ şi k este ales astfel încât $t_k \le t < t_{k+1}$.

Propoziţia 2.2.1. *Fie $\left(\Delta_n\right)_{n \ge 1}$ un şir de diviziuni ce satisfac $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ unde $\| \Delta_n \|$ este norma diviziunii Δ_n. Dacă $(X(t)) \in \mathcal{M}_2^c$ atunci $V_t^2(\Delta_n)$ converge în probabilitate, pentru orice $t \in [0,T]$, limita fiind independentă de şirul de diviziuni ales. Limita se notează $\langle X\rangle(t)$ şi se numeşte variaţia pătratică a procesului X pe intervalul $[0,T]$.*

Observaţie 2.2.1. *$(\langle X\rangle(t))$ este un proces continuu şi crescător astfel încât $\langle X\rangle(0) = 0$, ω a.s. În plus, procesul $\left(X^2(t) - \langle X\rangle(t)\right)$ este un martingal continuu.*

Definiţia 2.2.3. *Fie $X(t)$, $Y(t)$ din $\mathcal{M}_2^c$. Putem defini un proces, notat $(\langle X,\, Y\rangle(t))$, astfel:*

$$\langle X,\, Y\rangle(t) = \frac{1}{4}\left[\langle X+Y\rangle_t - \langle X-Y\rangle_t\right], \quad 0 \le\; t \;\le\; T \tag{2.2.2}$$

Lema 2.2.1. *Procesul* $(\langle X,\, Y\rangle\,(t))$ *este un proces* $\mathcal{F}_t$*-adaptat, continuu, cu variaţie mărginită care satisface* $\langle X,\, Y\rangle(0) = 0$*, a.s. şi astfel încât procesul*

$$(X\,(t) \cdot Y\,(t) - \langle X,\, Y\rangle\,(t))$$

este un martingal.

Definiţia 2.2.4. *Fie* $(X(t))$ *un martingal local continuu. Se defineşte* $V_t^{(2)}\,(\Delta)$ *ca în relaţia* (2.2.1).

Propoziţia 2.2.2. *Există un proces notat* $(\langle X\rangle\,(t))\,,\ t \in [0,\, T]$ *care este un martingal local, continuu şi crescător şi în plus procesul* $(X^2\,(t) - \langle X\rangle\,(t))$ *este un martingal local continuu.*

Observaţie 2.2.2. *Se poate defini, ca în relaţia* (1.2.12)*, procesul* $(\langle X, Y\rangle(t))$ *dacă (X(t)), respectiv (Y(t)) sunt martingale locale continue. Acest proces este un proces adaptat, continuu şi cu variaţie mărginită ce satisface* $\langle X, Y\rangle\,(0) = 0$ *şi în plus procesul* $(X\,(t)\,Y\,(t) - \langle X, Y\rangle\,(t))$ *este un martingal local.*

Definiţia 2.2.5. *Fie* $w(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to$ *un proces continuu,* $\mathcal{F}_t$*- adaptat ce satisface:*

a) $w\,(0,\, \omega) = 0,\, \omega$ *a.s.*

b) $E(w_t - w_s)|F_s) = 0$

c) $w_t - w_s \in N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$ *unde* $N\,(m,\, \sigma)$ *reprezintă clasa repartiţiilor normale de medie m şi dispersie* σ^2.

În aceste condiţii spunem că $w(t)$ *este o mişcare browniană unidimensională standard.*

Dacă $w(t)$ *ia valori în* $\mathbb{R}^d$ *şi componentele* $w_1\,(t)\,,\, ...,\, w_d\,(t)$ *ale lui* $w(t)$ *satisfac definiţia 1.10 şi sunt procese independente, spunem că* $w(t)$ *este o mişcare browniană d− dimensională standard.*

1.2.3. Integrala stochastică

Fie $(M_t)_{t\in[0,T]}$ un martingal continuu, de pătrat integrabil şi fie:

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ X = (X_t)_{t\in[0,T]} \mid X_t(\omega) = \xi_0(\omega) \cdot \chi_{\{0\}}(T) + \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k(\omega) \cdot \chi_{(t_k, t_{k+1}]}(t), \right.$$

unde $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$ şi $\xi_k(\omega)$ este o variabilă aleatoare $\mathcal{F}_{t_k}$-măsurabilă, mărginită, $\forall\, 1 \le k \le n$ }.

Un proces din $\mathcal{L}_0$ se numeşte proces simplu. Pentru $X \in \mathcal{L}_0$ se defineşte procesul $(I_t(X))_{0 \le t \le T}$ prin:

$$I_t(X) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right) + \xi_n \left(M_t - M_{t_n}\right). \tag{2.3.1}$$

Propoziţia 2.3.1. *$\mathcal{L}_0$ este densă în $\mathcal{L}$ în raport cu norma*

$$\| X \| = E\left[\int_0^T X_t^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_t\right]$$

Fie $X \in \mathcal{L}$. Există atunci un şir $\left(X^{(n)}\right)$ de procese din $\mathcal{L}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} \| X^{(n)} - X \| = 0$. Se arată că $\lim_{m,n\to\infty} E|I_t\left(X^{(m)}\right) - I_t\left(X^{(n)}\right)|^2 = 0$, i.e. $\left(I_t\left(X^{(n)}\right)\right)_{t\in[0,T]}$, $n \ge 1$ este un şir Cauchy de procese din M_2^c şi deci există procesul $(I_t(X))_{t\in[0,T]}$ din M_2^c ce satisface: $\lim_{n\to\infty}\left[I\left(X^{(n)}\right) - I(X)\right] = 0$. Procesul limită nu depinde de şirul de procese aproximate considerat.

Folosim scrierea $I_t(X) = \int_0^t X_s\, dM_s$, $0 \le t \le T$ şi procesul se numeşte integrala stochastică a lui X în raport cu procesul $M \in M_2^c$.

Propoziţia 2.3.2. Fie $X \in \mathcal{L}$. Atunci procesul $I(X) = (I_t(X))_{0\le t\le T}$ este un martingal de pătrat integrabil, continuu ce satisface:

a) $I_0(X) = 0$, ω a.s.

b) $E\left[I_t^2(X)\right] = E\left[\int_0^t X_s^2\, d\langle M\rangle_s\right] \quad ([I(X)] = \| X \|)\,, \forall\, t \in [0, T]$

c) $E\left[(I_t(X) - I_s(X))^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right], \forall\, s,t \in [0,T]$, ω a.s.

Fie acum $(M_t)_{0\le t\le T}$ un martingal local, continuu astfel încât $M_0 = 0$, ωa.s şi fie :

$$\mathcal{P} = \Big\{X = (X_t)_{0\le t\le T} \text{ proces masurabil şi } \mathcal{F}_t\text{-adaptat,}$$
$$\mathbb{P}\Big(\omega \mid \int_0^T X_t^2(\omega)\, d\langle M\rangle_t < \infty\Big) = 1\Big\}.$$

Pentru $X \in \mathcal{P}$ se poate construi de asemenea un proces $(I_t(X))_{0\le t\le T}$ numit integrala stochastică a lui X în raport cu M.

Propoziţia 2.3.3. Procesul $(I_t(X))$ este un martingal local continuu ce satisface:

a) $I_0(X) = 0$, ω a.s.; b) $\langle I(X)\rangle_t = \int\limits_0^t X_s^2\, d\langle M\rangle_s$, $\forall\ t \in [0,\ T]$;

c) Dacă $X, Y \in P$ atunci $\langle I(X),\ I(Y)\rangle_t = \int\limits_0^t X_s Y_s\, dM_s$, $\forall\ t \in [0, T]$.

Se foloseşte notaţia $I_t(X) \overset{def}{=} \int\limits_0^t X_s\, dM_s$, $0 \le t \le T$.

Teorema 2.3.1. *(Formula lui Itô) Fie* $(M_t) = \left(M_t^{(1)}, ..., M_t^{(d)}\right)_{0 \le t \le T}$ *un vector cu componentele martingale locale, continue şi* $(B_t) = \left(B_t^{(1)}, ..., B_t^{(d)}\right)$ *un vector cu componentele procese* $\mathcal{F}_t$ *- adaptate şi cu variaţie mărginită, cu* $B_0 = 0$.

Fie $X_t = X_0 + M_t + B_t$, $0 \le t \le T$, *unde* X_0 *este* $\mathcal{F}_0$ *- măsurabilă cu valori în* $\mathbb{R}^d$. *Fie de asemenea* $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *o aplicaţie de clasă* $C^{1,2}$. *Atunci are loc formula:*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \sum_{i=1}^d \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s)\, dB_s^{(i)} + \\ &+ \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s)\, dM_s^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int\limits_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s)\, d\langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle_s, \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

ω a.s., $\forall\, 0 \le t \le T$.

Observaţie 2.3.1. *Formula lui Itô precizează faptul că o funcţie de clasă* $C^{1,2}$ *ce depinde de un semimartingal este tot un semimartingal şi ne furnizează şi scrierea corespunzătoare.*

Corolarul 2.3.1. *Fie* $(X_t)_{0 \le t \le T}$, $(Y_t)_{0 \le t \le T}$ *două semimartingale continue.*

$$X_t = X_0 + M_t + B_t,\ Y_t = Y_0 + N_t + C_t,\ 0 \le t \le T$$

unde (M_t) *şi* (N_t) *sunt martingale locale continue iar* (B_t) *şi* (C_t) *sunt procese continue,* $\mathcal{F}$*- adaptate cu variaţie mărginită şi* $B_0 = C_0$, ω *a.s. Este adevărată formula de integrare prin părţi:*

$$\int\limits_0^t X_s\, dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int\limits_0^t Y_s\, dX_s - \langle M, N\rangle_t,\ \forall\ 0 \le t \le T, \tag{2.3.3}$$

unde:

$$(2.3.4) \qquad \int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s \overset{def}{=} \int_0^t X_s \mathrm{d}M_s + \int_0^t X_s \mathrm{d}B_s$$

(*o formulă asemănătoare are loc şi pentru* $\int_0^t Y_s \, \mathrm{d}X_s$).

Observaţie 2.3.2. *Această formulă diferă de formula de integrare prin părţi clasică, din cazul determininst, prin termenul de corectie* $\langle M, N\rangle_t$. *O metodă de a elimina acest termen este de a-l „absorbi“ în definiţia integralei, obţinându-se astfel un nou tip de integrală stochastică care este mai utilă atunci când calculul ordinar se intersectează cu calculul stochastic. Această nouă integrală se numeşte integrala Fisk-Stratonovich şi se defineşte astfel:*

Fie $(X_t)_{0\le t\le T}$ şi $(Y_t)_{0\le t\le T}$ două semimartingale continue ca şi în corolarul precedent. Atunci integrala Fisk-Stratonovich a lui Y în raport cu X este:

$$(2.3.5) \qquad \int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s \triangleq \int_0^t Y_s \mathrm{d}M_s + \int_0^t Y_s \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\langle M, N\rangle_t, \ 0 \le t \le T.$$

Vom da acum o formulă de tip Itô folosind integrala Fisk-Stratonovich.

Propoziţia 2.3.4. *Fie* $\{X_t : \ 0 \le t \le T\}$ *ca în teorema 2.3.1şi fie* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *un difeomorfism de clasă* C^∞. *Atunci*:

$$(2.3.6) \qquad f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \circ \mathrm{d}X_i(s).$$

Observaţie 2.3.3. *Vom defini acum integrala:*

$$(2.3.7) \qquad \int_0^T f(t)w(t)\mathrm{d}w(t)$$

unde $w(t)$ *este o mişcare browniană şi* $f(t)$ *este o funcţie stochastică. Putem defini :*

$$(2.3.8) \qquad I(T) = f(T)w(T) - \int_0^T f'(t)w(t)\mathrm{d}t$$

dacă f este absolut continuă pentru fiecare . Mai mult, dacă f este doar continuă, sau doar integrabilă, definiţia dată nu are sens. Definim integrala de mai sus pentru funcţii treaptă.

Definiţia 2.3.1. *Un proces stochastic $f(t)$ definit pe $[\alpha, \beta]$ se numeşte funcţie treaptă, dacă există o diviziune $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_r = \beta$ astfel încât $f(t) = f(t_i)$ dacă $t_i < t < t_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq r-1$.*

Definiţia 2.3.2. *Spunem ca $f(t)$ este nonanticipativa relativ la $\mathcal{F}$ dacă:*

(i) $f(t)$ este măsurabil;

(ii) $f(t)$ este proces separabil;

(iii) Pentru fiecare $t \in [\alpha, \beta]$, $f(t)$ este F -măsurabil sau $\mathcal{F}$-adaptat unde $\mathcal{F}$ este o familie crescătoare de σ-algebre generată de $\{w(t), t \in [\alpha, \beta]\}$.

Definiţia 2.3.3. *Spunem că $f(t)$ este funcţie treaptă nonanticipativă în $L^2_\omega[\alpha, \beta]$, dacă $f(t) = f_i$, $t_i < t < t_{i+1}$, unde f_i este $\mathcal{F}_t$-măsurabilă şi $f_i \in L^2_\omega$, $0 \leq i \leq r-1$ unde $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = \beta$.*

Definiţia 2.3.4. *Se numeşte integrală stochastică a lui f relativ la mişcarea browniană, variabila aleatoare:*

$$\sum_{k=0}^{r-1} f(t_k)\left[w(t_{k+1}) - w(t_k)\right]. \tag{2.3.9}$$

Această variabilă aleatoare se notează $\int\limits_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}w(t)$ şi se numeşte integrala Itô.

Observaţie 2.3.4. *Dacă $f \in L^2_\omega[\alpha, T]$ pentru toti $T > 0$, atunci spunem că $f \in L^2_\omega[\alpha, \infty]$.*

1.2.4 Diferenţiala stochastică

Definiţia 2.4.1. *Fie $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ un proces astfel încât pentru orice $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$:*

$$\xi(t_2) - \xi(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{t_1}^{t_2} b(t)\,\mathrm{d}w(t) \tag{2.4.1}$$

unde $a \in L^1_\omega[0,\ T]$, $b \in L^2_\omega[0,\ T]$. *Atunci spunem că* $\xi(t)$ *are diferenţială stochastică* $d\xi$*, pe* $[0,\ T]$*, dată de:*

$$\mathrm{d}\xi(t) = a(t)\,\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}w(t). \tag{2.4.2}$$

Observăm că $\xi(t)$ este funcţie nonanticipativă. Este de asemenea un proces continuu. Rezultă că $\xi \in L^\infty_\omega[0,\ T]$.

Definiţia 2.4.2. *Fie* $\xi(t)$ *ca în definiţia de mai sus şi* $f(t)$ *o funcţie în* $L^\infty_\omega[0,\ T]$. *Definim:*

$$f(t)\,\mathrm{d}\xi(t) = f(t)\,a(t)\,\mathrm{d}t + f(t)\,b(t)\,\mathrm{d}w(t). \tag{2.4.3}$$

Observaţie 2.4.1. $f(t)\mathrm{d}\xi(t)$ *este o diferenţială stochastică, unde:*

$$\eta(t) = \int_0^t f(s)\,a(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)b(s)\,\mathrm{d}w(s). \tag{2.4.4}$$

Teorema 2.4.1. *Dacă* $\mathrm{d}\xi_i(t) = a_i(t)\,\mathrm{d}t + b_i(t)\,\mathrm{d}w(t)$ $(i = 1, 2)$*, atunci:*

$$\mathrm{d}(\xi_1(t)\,\xi_2(t)) = \xi_1(t)\,\mathrm{d}\xi_2(t) + \xi_2(t)\,\mathrm{d}\xi_1(t) + b_1(t)\,b_2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.4.5}$$

Teorema 2.4.2. *(*Regula Itô de diferenţiere stochastică*). Fie*

$$\mathrm{d}\xi(t) = a(t)\,\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}w(t)$$

şi $f(x,t)$ *o funcţie continuă în* $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0.\infty)$ *împreună cu derivatele sale* f_x, f_{xx}, f_t. *Atunci procesul* $f(\xi(t),\ t)$ *are diferentială stochastică, dată de:*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(\xi(t),\ t) &= f_t(\xi(t),\ t)\,\mathrm{d}t + f_x(\xi(t),\ t)\,a(t)\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(\xi(t),\ t)\,b^2(t)\,\mathrm{d}t + f_x(\xi(t),\ t)\,b(t)\,\mathrm{d}w(t) \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Aceasta se numeşte formula Itô. Dacă $w(t)$ este continuu diferenţiabilă în t, atunci (prin formula standard de calcul al derivatelor totale) termenul $\frac{1}{2} f_{xx} b^2$ nu va apărea.

1.2.5. Ecuaţii diferenţiale stochastice – rezultate clasice privind existenţa şi unicitatea soluţiei

Fie aplicaţiile $b(t,\ x) = (b_i(t,\ x))_{1 \le i \le d}$ şi

$$\sigma(t,x) = (\sigma_{ij}(t,x)) = (\sigma_{ij}(t,x))_{1 \le i \le d,\, 1 \le j \le r}$$

unde componentele $b_i(t,\ x)$ şi $\sigma_{ij}(t,\ x)$ sunt aplicaţii măsurabile definite pe $[0,\ T] \times \mathbb{R}^d$ cu valori în $\mathbb{R}$. Fie, de asemenea, $(w_t)_{0 \le t \le T} = \left(w_t^{(1)}, ..., w_t^{(r)}\right)$ o mişcare browniană r-dimensională standard şi o variabilă aleatoare $\mathcal{F}_0$ -măsurabilă cu valori în $\mathbb{R}^d$.

Definiţia 2.5.1. *Procesul d-dimensional* $X = \left(X_t^{(1)}, ..., X_t^{(d)}\right)_{0\leq t\leq T}$, *unde* $X_t^{(i)}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, *sunt procese continue, este soluţie în sens tare a ecuaţiei diferenţiale stochastice:*

$$\mathrm{d}X_t = b\,(t,\, X_t)\, dt + \sigma\,(t,\, X_t)\, \mathrm{d}w_t, \tag{2.5.1}$$

sau pe componente:

$$\mathrm{d}X_t^{(i)} = b_i\,(t,\, X_t)\, dt + \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}\,(t,\, X_t)\, \mathrm{d}w_t^{(j)};\ 1 \leq i \leq d,\ t \in [0,\, T] \tag{2.5.1'}$$

dacă sunt verificate următoarele proprietăţi:

(a) $\left(X_t^{(i)}\right)$ *este un proces* F *-adaptat,* $\forall\, 1 \leq i \leq d$;

(b) $X_0 = \xi, \omega\, a.s.$;

(c) $P\left[\int_0^t |b_i\,(s,\, X_s)|\, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_{ij}^2\,(s,\, X_s)\, \mathrm{d}s < \infty\right] = 1$, $\forall\, 1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$, $0 \leq t \leq T$;

(d) X *satisface sistemul integral:*

$$X_t = \xi + \int_0^t b\,(s,\, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\,(s,\, X_s)\, \mathrm{d}w_s;\ 0 \leq t \leq T,\ \omega\ a.s. \tag{2.5.2}$$

sau echivalent:

$$X_t^{(i)} = \xi^{(i)} + \int_0^t b_i\,(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_{ij}\,(s, X_s)\, \mathrm{d}w_s^{(j)},\ \omega\ a.s., \tag{2.5.2'}$$

unde $1 \leq i \leq d$, $0 \leq t \leq T$, *şi* $\xi = \left(\xi^{(1)}, ..., \xi^{(d)}\right)$.

Teorema 2.5.1. *Presupunem că aplicaţiile* $b\,(t,\, x) = (b_i\,(t,\, x))_{1\leq i\leq d}$ *şi* $\sigma\,(t,\, x) = (\sigma_{ij}\,(t,\, x)) = (\sigma_{ij}\,(t,\, x))_{1\,\leq\, i\,\leq\, d,\, 1\,\leq\, j\leq\, r}$ *satisfac condiţiile de creştere liniară şi sunt global Lipschitz continue în raport cu variabila x, i.e. există o constantă strict pozitivă K astfel încât:*

$$\begin{gathered} \|b\,(t,\, x) - b\,(t,\, y)\| + \|\sigma\,(t,\, x) - \sigma\,(t,\, y)\| \leq K\, \|x - y\| \\ \text{şi} \\ \|b\,(t,\, x)\|^2 + \|\sigma\,(t,\, x)\|^2 \leq K^2 \left(1 + \|x\|^2\right), \end{gathered} \tag{2.5.3}$$

adevărate pentru orice $t \in [0,\, T]$, $x, y \in^d$. *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un câmp de probabilitate şi fie* $\mathcal{F}_{t\in[0,T]}$ *o filtraţie ce satisface condiţiile uzuale. Considerăm de asemenea* *o mişcare browniană r-dimensională* $w = (w_t)_{0 \le t \le T}$ *şi* ξ *o variabilă aleatoare din* $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$. *În aceste condiţii ecuaţia diferenţială stochastică* (2.5.1) *admite soluţie unică. Unicitatea are loc în sensul următor: Dacă* $X = (X_t)_{0 \le t \le T}$ *şi* $Y = (Y_t)_{0 \le t \le T}$ *sunt soluţii, atunci are loc:*

$$P(X_t = Y_t,\ \forall\ t \in [0,\ T]) = 1. \tag{2.5.4}$$

În plus, variabila aleatoare $X_t \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ *pentru orice* $t \in [0,\ T]$ *şi există o constantă* C *ce depinde de* K *astfel încât:*

$$M\|X_t\|^2 \le C\left(1 + M\|\xi\|^2\right)\cdot e^{ct}, \quad \forall\ 0 \le\ t\ \le\ T. \tag{2.5.5}$$

Existenţa se obţine utilizând o metodă a aproximaţiilor succesive, şirul aproximaţiilor fiind un şir Cauchy în raport cu norma convergenţei uniforme din spaţiul Banach $C\left([0,\ T];\mathbb{R}^d\right)$, pentru ω a.s.

1.3. Teorema Cameron-Martin-Girsanov

1.3.1. O clasă de probabilităţi absolut continue

Orice variabilă aleatoare nenegativă g defineşte o măsură absolut continuă P_g a cărei derivată Random-Nikodim este g, i.e., $P_g(A) = \int_A g\mathrm{d}P$ pentru orice mulţime măsurabilă A. Vom arăta că variabila aleatoare:

$$g = \exp\left\{\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}w(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right\} \tag{3.1.1}$$

defineşte o probabilitate P_g, i.e., $Eg = 1$, cu condiţia $f \in L_w^2[0,\ T]$ şi satisface o condiţie de creştere.

Teorema 3.1.1. *Fie* $f \in L_w^2[0,\ T], \quad f = (f_1, ..., f_n)$ *şi presupunem că există numerele pozitive astfel încât:*

$$E\exp\left[\mu|f(t)|^2\right] \le C \ \text{ pentru } 0\ \le\ t\ \le\ T. \tag{3.1.2}$$

Atunci:

$$E\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,\mathrm{d}w(s) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right\} = 1 \text{ dacă } 0 \le t_1 < t_2 \le T. \tag{3.1.3}$$

Lema 3.1.1. *Dacă în teorema 3.1.1 condiţia* (3.1.1) *este înlocuită cu:*

$$E\exp\left\{\lambda\int_0^T |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right\} < \infty, \text{ pentru } \lambda > 1, \tag{3.1.4}$$

atunci concluzia (3.1.3) *este adevărată.*

Lema 3.1.2. *În condiţiile lemei 3.1.1,*

$$E\left\{\exp\left[\int_{t_1}^{t_2} f(s)\mathrm{d}w(s) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right] |\mathcal{F}_{t_1}\right\} = 1 \textit{ a.s.} \tag{3.1.5}$$

pentru orice $0 \le t_1 < t_2 \le T$.

Corolar 3.1.1. *În condiţiile teoremei 3.1.1, relaţia* (3.1.5) *are loc pentru orice* $0 \le t_1 < t_2 \le T$.

Observaţie 3.1.1. *Dacă* $f(t) = w(t)$*, atunci condiţia* (3.1.2) *este îndeplinită cu* $\mu = \dfrac{1}{2T}$.

1.3.2. Transformarea mişcării browniene

Un proces $\{w(t),\ 0 \le t \le T\}$ care satisface toate condiţiile impuse de o mişcare browniană n-dimensională (inclusiv continuitatea) în intervalul $0 \le t \le T$ se numeşte mişcare browniană în intervalul $[0, T]$.

Fie $w(t)$ o mişcare browniană n-dimensională în intervalul $[0, T]$. Fie $\mathcal{F}_t$ o familie descrescătoare de σ-câmpuri astfel încât $\mathcal{F}(w(\lambda),\ \lambda \le t)$ este o submulţime a lui $\mathcal{F}_t$ şi $\mathcal{F}(w(\lambda+t) - w(t),\ 0 \le \lambda \le T-t)$ este independentă de $\mathcal{F}_t$, pentru toţi $t \in [0, T]$. Putem defini $L_w^2[0, T]$ şi integrala stochastică $\int_0^t f\mathrm{d}w (0 < t \le T)$ în raport cu actuala familie $\mathcal{F}_t$.

Dacă $\widetilde{P}$ este o măsură pe $(\Omega,\ \mathcal{F})$ dată de:

$$\widetilde{P}(A) = \int_A f\mathrm{d}P \ \ (A \in \mathcal{F}),$$

atunci scriem: $\mathrm{d}\widetilde{P}(\omega) = f(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega)$.

Teorema 3.2.1. (Teorema Cameron-Martin-Girsanov) *Fie o mişcare browniană n-dimensională în intervalul* $[0, T]$ *şi fie* $\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_n)$ *o funcţie din*

$L_w^2[0,T]$. *Definim*

$$\xi_s^t(\Phi) = \int_s^t \Phi(u)\,\mathrm{d}w(u) - \frac{1}{2}\int_s^t |\Phi(u)|^2\,\mathrm{d}u, \tag{3.2.1}$$

$$\widetilde{w}(t) = w(t) - \int_0^t \Phi(s)ds, \tag{3.2.2}$$

Dacă:

$$\mathrm{d}\widetilde{P}(\omega) = \exp\left[\zeta_0^T(\Phi)\right]\mathrm{d}P(\omega) \tag{3.2.3}$$

$$\widetilde{P}(\Omega) = 1, \tag{3.2.4}$$

atunci $\widetilde{w}(t)$, $0 \le t \le T$ *este o mişcare browniană în spaţiul probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P})$.

Teorema 3.2.2. (Teorema Girsanov) *Presupunem că este o mişcare browniană cu filtraţia* $\{\mathcal{F}_t\}_{t0}$ *şi că* $\{\theta_t\}_{t\ge 0}$ *este un proces* $\mathcal{F}_t$*-adaptat astfel incât:*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^T \theta_t^2\mathrm{d}t\right] < \infty. \tag{3.2.5}$$

Definim:

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s\mathrm{d}w_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\mathrm{d}s\right) \tag{3.2.6}$$

şi fie $P^{(L)}$ *măsura probabilitate definită prin:*

$$P^{(L)}[A] = \int_A L_t(\omega)P(d\omega). \tag{3.2.7}$$

Atunci în raport cu măsura probabilitate $P^{(L)}$, *procesul* $\left\{w_t^{(L)}\right\}_{0\le t\le T}$, *definit prin:*

$$w_t^{(L)} = w_t + \int_0^t \theta_s\mathrm{d}s, \tag{3.2.8}$$

este o mişcare browniană standard.

Notaţie. Scriem:

$$\left.\frac{dP^{(L)}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t \tag{3.2.9}$$

(L_t este derivata Radon-Nikodin a lui $P^{(L)}$ în raport cu P).

Observaţie 3.2.1. *a) Condiţia*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^T \theta_t^2 \mathrm{d}t\right] < \infty,$$

cunoscută ca şi condiţia Novikov, este suficientă pentru a garanta că $\{L_t\}_{t\geq 0}$ *este un* $\left(P, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}\right)$ *martingal. Deoarece* L_t *este pozitivă şi are media 1,* $P^{(L)}$ *defineşte într-adevăr o măsură probabilitate.*

b) P *şi* $P^{(L)}$ *sunt echivalente.*

c) Dacă vrem să calculăm media în raport cu $P^{(L)}$ *avem:*

$$E^{P(L)}\left[\Phi_t\right] = E\left[\Phi_t L_t\right].$$

Mai general,

$$E^{P(L)}\left[\Phi_t|\mathcal{F}_s\right] = E^P\left[\Phi_t\frac{L_t}{L_s}|\mathcal{F}_s\right].$$

CAPITOLUL 2

FUNCŢIONALE ASOCIATE CU CURENŢI GRADIENT STOCHASTICI ŞI ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE NELINIARE STOCHASTICE

Rezultatele din subcapitolele 1 şi 2 ale acestui capitol au fost publicate în articolul Iftimie, Marinescu, Vârsan (2011) [11].

Subcapitolele 3 şi 4 conţin rezultate ale cercetărilor proprii efectuate în perioada desfăşurării stagiului de cercetare postdoctorală, trimise spre publicare, în curs de apariţie.

Stadiul actual al cercetării în domeniu

2.1. Reprezentarea soluţiei unei ecuaţii cu derivate parţiale neliniară stochastică

2.1.1. Introducere

Studiul ecuaţiilor de evoluţie cu perturbaţii stochastice foloseşte unei varietăţi largi de domenii, cu aplicaţii multiple, printre care matematici financiare. Ecuaţiile cu derivate parţiale neliniare stochastice au aplicaţii în modelarea ratelor dobânzii, în controlul stochastic cu informaţii insuficiente (aşa cum se specifică în Lions şi Souganidis [19]). Alte aplicaţii ale ecuaţiilor cu derivate parţiale stochastice (incluzând finanţele) pot fi găsite în Da Prato şi Tubaro ([**?**]).

În ultimele trei decenii, au fost studiate intensiv ecuaţii cu derivate parţiale stochastice de forma

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t,x) & = L(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x),D^2u(t,x))\mathrm{d}t \\ & \quad + \sum_{i=1}^{n} P_i(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))\mathrm{d}W_i(t), \\ u(0,x) & = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

impunând condiţii adecvate coeficienţilor. Aici $W(t)$ reprezintă procesul Wiener n-dimensional şi operatorii de ordinul întâi $P_i(t,x,u,p)$ sunt liniari în raport cu u, p, adică $P_i(t,x,u,p) = \langle b_i(t,x), p\rangle + c_i(t,x)u$.

Cazul în care L este operator diferenţial liniar

$$L(t,x,u,p,q) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)q_{ij} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)p_i + a_0(t,x)u$$

şi $c_i(t,x) = 0$ a fost studiat în [30]. Ideea este de a transforma ecuaţia cu derivate parţiale stochastice într-o ecuaţie liniară de tip parabolic cu parametrul aleator ω (pentru care autorul utilizează teoria semigrupurilor, abordare bazată pe teoria Kato-Tanabe), via metoda caracteristicilor stochastice (care a fost introdusă de Kunita pentru ecuaţii cu derivate parţiale stochastice de ordinul întâi, vezi [17]). Mai precis, soluţia $\xi(t,x)$ a ecuaţiei diferenţiale stochastice

$$\begin{aligned}\xi(t) &= x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \nabla b_i(s,\xi(s))\cdot b_i(s,\xi(s))\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{n}\int_0^t b_i(s,\xi(s))\mathrm{d}W_i(s)\\ &= x + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t (-b_i(s,\xi(s)))\circ \mathrm{d}W_i(s),\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

numită *caracteristici stochastice*, este un difeormorfism în raport cu x şi dacă notăm $\eta(t,x)$ inversa sa, atunci funcţia aleatoare $v(t,x,\omega) := u(t,\xi(t,x,\omega),\omega)$ rezolvă ecuaţia cu derivate parţiale liniară de tip parabolic. Soluţia unică u se obţine ca $u(t,x) = v(t,\eta(t,x))$. Integrala stochastică ce apare în ultima linie a formulei (1.1.1) este înţeleasă în sens Fisk-Stratonovich.

Cazul în care operatorul L este semiliniar, adică

$$L(t,x,u,p,q) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)q_{ij} + a_0(t,x,u,p)$$

a fost tratat de mai mulţi autori (vezi de exemplu [5]), în timp ce cazul cvasilinar

$$L(t,x,u,p,q) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,p)q_{ij} + a_0(t,x,u,p)$$

a fost studiat numai de câţiva autori (vezi de exemplu [2], unde a fost utilizată metoda *splitting up* pentru operatori L în formă divergentă, sau [8] unde a fost preferată o abordare bazată pe semigrupuri).

În toate situaţiile de mai sus, funcţiile $a_0(t,x,u,p)$, $a_{ij}(t,x,u,p)$ au fost presupuse (local) Lipschitz continue în raport cu u, p.

În [6] autorii tratează cazul în care operatorul $L(t,x,u,p,q)$ este complet neliniar în condiţii adecvate şi, în particular, L este local Lipschitz continuu în raport cu u, p si q, uniform în raport cu t, x.

Prezenţa termenului auxiliar $c(t,x)u$ în partea de difuzie a ecuaţiei cu derivate parţiale stochastice nu modifică foarte mult abordarea folosită în [30].

Într-adevăr, cu notaţiile de mai sus, prin transformarea

$$w(t,x) := \rho(t,x)u(t,\xi(t,x)),$$

unde

$$\rho(t,x) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t c_i(s,\xi(s,x))\mathrm{d}W_i(s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t c_i^2(s,\xi(s,x))\mathrm{d}s\right],$$

ecuaţia cu derivate parţiale stochastică este transformată într-o ecuaţie deterministă neliniară cu parametru aleator, în necunoscuta $w(t,x,\omega)$. În sfârşit, u este uşor de obţinut din w ş ρ via difeomorfismul η.

Buckdahn şi Ma au tratat în [4] ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice, descrise de integrale Fisk-Stratonovich, de forma

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t,x) &= \widetilde{L}(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x),D^2u(t,x))\mathrm{d}t \\ & \quad +\displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_i(t,x,u(t,x))\circ \mathrm{d}W_i(t), \\ u(0,x) &= u_0(x), t\in[0,T], x\in\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

unde

$$\widetilde{L}(t,x,u,p,q) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)q_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)p_i + f(t,x,u,\sigma^*(x)p),$$

unde $a=\sigma\sigma^*$, în ipoteza că f este Lipschitz în raport cu u,p. Cu notaţiile de mai sus,

$$L(t,x,u,p,q) = \widetilde{L}(t,x,u,p,q) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\nabla_u g_i(t,x,u)\cdot g_i(t,x,u).$$

Ei demonstrează, în condiţii mai slabe pentru coeficienţi, existenţa (şi într-o lucrare ulterioară unicitatea) aşa numitei *stochastic viscosity solution*, introdusă de Lions şi Souganidis pentru o clasă mai generală de ecuaţii cu derivate parţiale stochastice în [19], via *curentul stochastic* corespunzător $\xi(t,x,y)$, soluţia ecuaţiei diferenţiale stochastice determinată de perturbaţia stochastică a ecuaţiei cu derivate parţiale stochastică, adică

$$\xi(t,x,y) = y + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^t \nabla_u g_i(s,x,\xi(s,x,y))\cdot g_i(s,x,\xi(s,x,y))\mathrm{d}s =$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^t g_i(s,x,\xi(s,x,y))\mathrm{d}W_i(s) = y + \sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^t g_i(s,x,\xi(s,x,y))\circ \mathrm{d}W_i(s).$$

Aceasta nu este caracteristica stochastică obişnuită, care nu poate fi asociată aici deoarece partea de difuzie a ecuaţiei cu derivate parţiale stochastică depinde numai de u (neliniar), fiind independentă de gradientul său.

În acest capitol pornim cu problema Cauchy asociată cu ecuaţia cu derivate parţiale neliniară stochastică de ordinul întâi, considerată în sens tare

$$(1.1.2)\quad \begin{cases} \mathrm{d}u(t,x) = \langle \nabla u(t,x), g_0(x)\rangle\, u(t,x)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla u(t,x), g_i(x)\rangle \circ \mathrm{d}W_i(t), \\ u(0,x) \ = \varphi(x), t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

sau echivalent

$$(1.1.3)\quad \begin{aligned} u(t,x) = \varphi(x) \quad &+ \int_0^t \langle \nabla u(s,x), g_0(x)\, u(s,x)\rangle \mathrm{d}s + \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \langle \nabla u(s,x), g_i(x)\rangle \circ \mathrm{d}W_i(s), \end{aligned}$$

unde integrala stochastică este înţeleasă în sens Fisk-Stratonovich.

În cazul nostru $P_i(t,x,u,p) := \langle g_i(x), p\rangle$ şi driftul $L(t,x,u,p,q)$ conţine termenul $\langle g_0(x), p\rangle u$ care nu este Lipschitz în raport cu u, p şi aceasta este principala diferenţă între rezultatele menţionate mai sus şi cazul nostru. Astfel, dacă încercăm să reducem ecuaţia cu derivate parţiale stochastică la o ecuaţie cu derivate parţiale oarecare utilizând carcateristicile stochastice, atunci existenţa soluţiei nu este uşor de obţinut.

Pentru a rezolva această problemă adoptăm o altă abordare, considerând sistemul de caracteristici definit de (1.1.2) (care este definit în analogie cu caracteristicile asociate cu ecuaţiile cu derivate parţiale deterministe). Suntem conduşi astfel la un sistem de ecuaţii diferenţiale stochastice şi ecuaţii diferenţiale ordinare, pentru care existenţa soluţiei nu este greu de demonstrat.

Aceasta tehnică de a considera sistemul de caracteristici asociat cu ecuaţia cu derivate partiale stochastică de tip parabolic a fost utilizată deja de Iftimie şi Vârsan în [12].

Principala ipoteză este proprietatea de comutativitate a câmpurilor vectoriale g_i, $i = 0, \dots, m$ în raport cu paranteza Lie uzuală (vezi presupunerea (**A**.**4**)). Kunita a făcut de asemenea această preupunere (vezi [17], paginile 236 si 238) şi unii autorii s-au referit la ea ca la o condiţie de compatibilitate referitoare la câmpurile vectoriale menţionate (vezi [4], Remarca 3.3).

În aceste ipoteze, obţinem reprezentarea gradient pentru curentul stochastic asociat cu ecuaţia diferenţială stochastică obţinută în principal din sistemul de caracteristici definit de ecuaţia cu derivate parţiale stochastică (1.1.2) şi soluţia fundamentală corespunzătoare $\psi(t,x)$ a aceleaşi ecuaţii cu derivate parţiale stochastice. $\psi(t,x)$ va fi descris ca o compunere între soluţia fundamentală a unor ecuaţii deterministe neliniare Hamilton-Jacobi (vezi (1.3.4) de mai jos) şi soluţia fundamentală a ecuaţiei cu derivate parţiale redusă (vezi ecuaţia (**??**)).

Turbulenţa mişcării fluidului poate fi descrisă de ecuaţia Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x),$$

unde $u(t,x)$ reprezintă viteza câmpului şi constanta pozitivă ν este vâscozitatea. Ecuaţiile Burgers cu termenul forţă, dat de perturbaţia aleatoare sunt mai realiste.

În [3], autorii stabilesc un rezultat de existenţă pentru soluţia în sens slab a problemei Cauchy cu additive *space-time white noise*, dată de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x),$$

unde $W(t,x)$ este *space-time white noise* şi derivatele parţiale $\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x)$ sunt înţelese în sens generalizat. Utilizând aşa numita transformare Cole-Hopf, ecuaţia integrală iniţială, obţinută prin convoluţie cu nucleul căldurii, este transformată într-o ecuaţie cu derivate parţiale liniară determinată de integrala stochastică Fisk-Stratonovich.

O altă clasă de ecuaţii stochastice Burgers poate fi obţinută din ecuaţia cu derivate parţiale stochastică

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t,x,u(t,x)) \\ &\quad + \sigma(t,x,u(t,x))\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x),\end{aligned}$$

unde din nou $W(t,x)$ este *space-time white noise* şi aplicaţia $g(t,x,u)$ are creştere pătratică în raport cu u. Demonstraţia existenţei şi unicităţii soluţiei în sens generalizat (care se dovedeşte a fi, de asemenea, soluţie în sens slab) a problemei Cauchy se bazează pe mai multe estimări ale derivatelor parţiale ale nucleului căldurii.

Fiind motivaţi de aceste rezultate, studiem un sistem de ecuaţii Burgers cu perturbaţii stochastice definit de procesul Wiener, pentru care sunt utilizate câmpuri vectoriale constante, în partea de difuzie şi în partea de drift, în scopul de a obţine existenţa soluţiei clasice globale. Sperăm că acest exemplu va fi de interes pentru specialiştii în domeniu.

O altă aplicaţie constă în calculul mediilor unor funcţionale depinzând de valorea finală a unui proces non-Markovian, obţinut via soluţia unei ecuaţii diferenţiale stochastice care se obţine scriind sistemul de caracteristici stochastice asociat sistemului (1.1.2). De obicei, aceste tipuri de medii sunt legate de ecuaţiile parabolice Kolmogorov de tip retrograd, dar această procedură nu este aplicabilă în cazul nostru din cauza naturii non-Markoviene a procesului implicat. În condiţii corespunzătoare şi evitând tehnicile ecuaţiilor cu derivate parţiale stochastice, media condiţionată parametrizată este soluţia ecuaţiei parabolice Kolmogorov de tip retrograd cu parametru.

2.1.2. Preliminarii

Fie $\{W(t), t \geq 0\}$ procesul Wiener m-dimensional pe spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\}$. T este un orizont de timp fixat.

Facem următoarele presupuneri:

(A.1) Câmpurile vectoriale $g_1, \ldots, g_m$ aparţin spaţiului $C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ şi au derivatele de ordin întâi şi doi mărginite; $g_0 \in \mathbb{C}_b^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ şi derivatele sale parţiale sunt mărginite.

(A.2) Condiţia iniţială $\varphi \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n)$ admite derivate parţiale de ordinul întâi mărginite.

(A.3) $\rho := TMK < 1$, unde $M := \sup\{|\nabla\varphi(x)|, x \in \mathbb{R}^n\}$ şi $K := \sup\{|g_0(x)|, x \in \mathbb{R}^n\}$.

În tot capitolul vom utiliza notaţiile $\langle, \rangle$ pentru produsul interior şi ∇h pentru gradientul în raport cu x a unei funcţii (vectoriale) $h(t, x)$.

Dacă $Y(t)$ şi $X(t)$ sunt semimartingale unu-dimensionale continue, atunci integrala Fisk-Stratonovich a lui $Y(t)$ în raport cu $X(t)$ se defineşte astfel

$$\int_0^t Y(s) \circ \mathrm{d}X(s) := \int_0^t Y(s)\mathrm{d}X(s) + \frac{1}{2}\langle Y, X\rangle_t, \tag{1.2.1}$$

unde integrala stochastică ce apare în partea dreaptă este integrala Itô uzuală şi $\langle Y, X\rangle_t$ reprezintă variaţia pătratică a proceselor $(Y(t))$ şi $(X(t))$.

Dacă $Y(t)$ este d-dimensional, putem defini în continuare integrala

$$\int_0^t Y(s)\circ \mathrm{d}X(s) := (\int_0^t Y_i(s)\circ \mathrm{d}X(s))_{1\le i\le d}.$$

Menţionăm formula Itô implicată în integrala Fisk-Stratonovich (vezi, spre exemplu, [14], Problema 3.14, pag. 156 sau [28], Teorema 34, pag. 82).

Propoziţia 1.2.1. *Fie $Y(t)$ semimartingal continuu d-dimensional şi o funcţie vectorială $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^k$ cu componentele aparţinând spaţiului $\mathbb{C}^3\left(\mathbb{R}^d\right)$. Atunci*

$$f(Y(t)) = f(Y(0)) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y(s))\circ \mathrm{d}Y_i(s). \tag{1.2.2}$$

Avem nevoie, de asemenea, de următorul rezultat:

Lema 1.2.1. *Fie $X(t)$, $Y(t)$ semimartingale continue cu descompunerea*

$$X(t) = X(0) + A(t) + \int_0^t M(s)\mathrm{d}W(s)$$

şi

$$Y(t) = Y(0) + B(t) + \int_0^t N(s)\mathrm{d}W(s),$$

unde $A(t)$, $B(t)$ sunt procese continue, adaptate şi cu variaţie mărginită, şi procesele definite de integralele stochastice sunt martingale (locale) (această descompunere are loc pentru orice semimartingale continue, deoarece filtrarea $(\mathcal{F}_t)$ reprezintă completarea filtrării naturale generată de W, vezi [28], *Teorema 43, Capitolul IV). Atunci*

$$\int_0^t X(s)\circ \mathrm{d}\left(\int_0^s Y(r)\circ \mathrm{d}W(r)\right) = \int_0^t X(s)Y(s)\circ \mathrm{d}W(s). \tag{1.2.3}$$

Demonstraţie. Primul termen din partea stângă a formulei poate fi rescris astfel:

$$\int_0^t X(s)\circ \mathrm{d}\left(\int_0^s Y(r)\circ \mathrm{d}W(r)\right) = \int_0^t X(s)\circ \mathrm{d}\left(\int_0^s Y(r)\mathrm{d}W(r) + \frac{1}{2}\int_0^s N(r)\mathrm{d}r\right) =$$

$$= \int_0^t X(s)\mathrm{d}\Big(\int_0^s Y(r)\mathrm{d}W(r) + \frac{1}{2}\int_0^s N(r)\mathrm{d}r\Big) + \frac{1}{2}\int_0^t M(s)Y(s)\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^t X(s)Y(s)\mathrm{d}W(s) + \frac{1}{2}\int_0^t X(s)N(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^t M(s)Y(s)\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^t X(s)Y(s)\mathrm{d}W(s) + \frac{1}{2}\langle XY, W\rangle_t,$$

unde am folosit de asemenea formula de integrare prin părţi (pentru semimartingale), în scopul de a deriva martingalul $X(t)Y(t)$.

Sistemul de caracteristici corespunzător (vezi, de exemplu, [18], Capitolul 6) este dat de

$$\text{(1.2.4)} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}\widehat{x}(t;\lambda) & = -\widehat{u}(t;\lambda)g_0(\widehat{x}(t;\lambda))\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m}(-g_i)(\widehat{x}(t;\lambda)) \circ \mathrm{d}W_i(t); \\ \widehat{x}(0,\lambda) & = \lambda; \\ \mathrm{d}\widehat{u}(t,\lambda) & = 0, \widehat{u}(0,\lambda) = \varphi(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Observaţia 1.2.1. *Observăm că integralele*

$$\int_0^t (-g_i)(\widehat{x}(s;\lambda)) \circ \mathrm{d}W_i(s) \quad \text{și} \quad -\int_0^t g_i(\widehat{x}(s;\lambda)) \circ \mathrm{d}W_i(s)$$

nu sunt egale deoarece termenii din partea de drift au semne opuse.

Deducem că $\widehat{u}(t,\lambda) = \varphi(\lambda)$ şi $\widehat{x}$ este soluţia următoarelor ecuaţii diferenţiale stochastice

$$\widehat{x}(t;\lambda) = \lambda - \varphi(\lambda)\int_0^t g_0(\widehat{x}(s;\lambda))\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m}\int_0^t (-g_i)(\widehat{x}(s;\lambda)) \circ \mathrm{d}W_i(s) =$$

$$\text{(1.2.5)} \qquad = \lambda - \int_0^t \left[\varphi(\lambda)g_0(\widehat{x}(s;\lambda)) - \frac{1}{2}\nabla g_i(\widehat{x}(s;\lambda)) \cdot g_i(\widehat{x}(s;\lambda))\right]\mathrm{d}s -$$

$$- \sum_{i=1}^{m}\int_0^t g_i(\widehat{x}(s;\lambda))\mathrm{d}W_i(s).$$

Conform formulei (1.2.1) o parte a martingalului (local)

$$\int_0^t (-g_i)(\widehat{x}(s;\lambda)) \circ \mathrm{d}W_i(s)$$

este dată de $-\int\limits_0^t g_i(\widehat{x}(s;\lambda))\mathrm{d}W_i(s)$, care este de asemenea martingal (local), parte a procesului $\widehat{x}(t;\lambda)$ (vezi (1.2.4)). Deoarece, în baza Lemei Itô, o parte a martingalului $(-g_i)(\widehat{x}(t;\lambda))$ este $\int\limits_0^t \nabla g_i(\widehat{x}(s;\lambda))\cdot g_i(\widehat{x}(s;\lambda))\mathrm{d}W_i(s)$ şi aceasta implică faptul că

$$\langle(-g_i^j)(\widehat{x}(\cdot;\lambda)),W_i(\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t (\nabla g_i(\widehat{x}(s;\lambda))\cdot g_i(\widehat{x}(s;\lambda)))^j\,\mathrm{d}s,$$

pentru $j=1,\ldots,n$.

Presupunerile făcute asupra coeficienţilor g_i, $i=0,\ldots,m$ asigură existenţa soluţiei unice $\widehat{x}_\varphi(t;\lambda)$ a sistemului (1.2.5). În aceleaşi ipoteze, câmpurile vectoriale g_i, $i=0,1,\ldots,m$ sunt complete, adică ele generează curentul global definit astfel $G_i(t,x)=G_i(t)(x)$, care satisface

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,x)=g_i(G_i(t,x)),\ \text{pentru toţi}\ \ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n;\ G_i(0,x)=x.$$

Se ştie că pentru orice t, aplicaţia $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\mapsto G_i(t,x)$ este netedă, $G_i(t)(\cdot)$ este difeomorfism şi $G_i(t_1+t_2,x)=G_i(t_1)(G_i(t_2,x))$. Ultima proprietate implică faptul că $(G_i(t))^{-1}(\cdot)=G_i(-t)(\cdot):=H_i(t)(\cdot)$.

Definim $G(p)(x)$, $p=(t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^m$, $x\in\mathbb{R}^n$ ca o compunere a curenţilor asociaţi câmpurilor $g_1,\ldots,g_m$, adică

$$G(p)(x)=G(p,x):=G_1(t_1)\circ\ldots\circ G_m(t_m)(x). \tag{1.2.6}$$

Avem nevoie acum de următoarea presupunere:

(A.4) Câmpurile vectoriale $g_0,\ldots,g_m$ comută în raport cu paranteza Lie uzuală, adică

$$[g_i,g_j](x):=\nabla g_i(x)g_j(x)-\nabla g_j(x)g_i(x)=0$$

şi aceasta înseamnă că $G_i(t_i)\circ G_j(t_j)=G_j(t_j)\circ G_i(t_i)$, pentru $0\le i,j\le m$.

În această ipoteză, compunerea curenţilor globali $G(p,x)$ este soluţie a sistemului gradient definit de câmpurile vectoriale originale, adică

$$\frac{\partial G}{\partial t_i}(p,x)=g_i(G(p,x)).$$

Notăm $H(p,x):=G(-p,x)$, pentru $p=(t_1,\ldots,t_m)$.

2.1.3. Reprezentarea gradient a curentului stochastic şi construcţia soluţiei ecuaţiei cu derivate parţiale neliniară

Următoarele două leme asigură reprezentarea gradient pentru curentul stochastic $\widehat{x}_\varphi(t;\lambda)$.

Lema 1.3.1. *Curentul stochastic generat de soluţia ecuaţiilor diferenţiale stochastice* (1.2.5) *poate fi reprezentat astfel*

$$\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = G(-W(t)) \circ G_0(-t\varphi(\lambda))(\lambda) = H(W(t)) \circ H_0(t\varphi(\lambda))(\lambda). \tag{1.3.1}$$

Urmează rezultatul de unicitate a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale stochastice.

Următorul pas constă în găsirea aplicaţiei inverse a difeomorfismului $\lambda \to \widehat{x}_\varphi(t;\lambda)$, adică rezolvăm ecuaţia

$$\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = x \tag{1.3.2}$$

în raport cu necunoscuta λ. Luând în considerare formula (1.3.1) şi proprietăţile curenţilor G_i (care sunt păstrate de G), aceasta este echivalentă cu

$$G_0(-t\varphi(\lambda))(\lambda) = G(W(t))(x) := z(t,x).$$

Considerăm mai întâi ecuaţia $G_0(-t\varphi(\lambda))(\lambda) = z$, pentru $t \in [0,T]$ arbitrar şi $z \in \mathbb{R}^n$, care poate fi rescrisă astfel

$$G_0(t\varphi(\lambda))(z) = \lambda. \tag{1.3.3}$$

Notăm $V(t,z,\lambda) := G_0(t\varphi(\lambda))(z)$.

Lema 1.3.2. *Ecuatia* (1.3.3) *admite soluţie unică, dată de funcţia deterministă netedă $\widehat{\psi}(t,z) \in \mathbb{C}^{1,1}\,[0,T] \times R^n;\mathbb{R}^n)$, care satisface estimarea*

$$\left|\widehat{\psi}(t,z) - z\right| \leq \frac{TK}{1-\rho}|\varphi(z)|.$$

În plus, $\widehat{\psi}(t,z)$ este soluţia unică a următorelor ecuaţii Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\widehat{\psi}}{\partial t}(t,z) & = \nabla\widehat{\psi}(t,z)\; g_0(z)\; \varphi(\widehat{\psi}(t,z)), \\ \widehat{\psi}(0,z) & = z. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Următorul rezultat este o consecinţă directă a acestei leme.

Corolarul 1.3.1. *Ecuaţia curent* (1.3.2) *admite soluţia unică* $\lambda = \psi(t,x)$, *care poate fi reprezentată astfel*

$$\psi(t,x) := \widehat{\psi}(t, z(t,x)),$$

unde reamintim că

$$z(t,x)=G(W(t))(x).$$

Mai mult, funcţia $\psi(t,x)$ *este netedă în raport cu* (t,x) *şi este* $(\mathcal{F}_t)$*-adaptată, pentru* x *fixat.*

Compunerea curenţilor $G(p,x)$ este soluţie a următoarelor ecuaţii Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial G}{\partial t_i}(p,x) = \nabla G(p,x) g_i(x),\ i = \overline{1,m};\ \ G(0,x) = x. \tag{1.3.5}$$

Acum putem formula rezultatul principal al acestui paragraf.

Teorema 1.3.1. *Fie* $u(t,x) := \varphi(\psi(t,x))$. *Atunci, în ipotezele* **(A.1)-(A.4)**, $u(t,x)$ *este soluţia clasică a ecuaţiei cu derivate parţiale neliniară* (1.1.2).

Observaţia 1.3.1. *Funcţia vectorială netedă aleatoare* $\psi(t,x)$ *este soluţia fundamentală a ecuaţiei cu derivate parţiale stochastică* (1.1.2), *fiind construită via n soluţii liniar independente. Aceasta se obţine ca o compunere între aplicaţia deterministă netedă* $\widehat{\psi}(t,x)$ *(care satisface ecuaţiile Hamilton-Jacobi* (1.3.4)*) şi* $z(t,x)$ *care este soluţia fundamentala a ecuaţiei cu derivate parţiale stochastică redusă SPDE* (**??**). $\psi(t,x)$ *verifică ecuaţia cu derivate parţiale stochastică*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\psi(t,x) & = \langle \nabla\psi(t,x), g_0(x)\rangle\ \varphi(\psi(t,x))\mathrm{d}t + \\ & \quad + \sum\limits_{i=1}^{m} \langle \nabla\psi(t,x), g_i(x)\rangle \circ \mathrm{d}W_i(t), \\ \psi(0,x) & = x, t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Utilizând acelaşi tip de argumente, putem extinde analiza noastră la ecuaţii diferenţiale stochastice de forma

$$y(t) = \lambda + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \varphi_i(\lambda) f_i(y(s))\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t g_j(y(s)) \circ \mathrm{d}W_j(s),\ t \in [0,T]. \tag{1.3.7}$$

Aici presupunem că:

- $f_1, \ldots, f_d, g_1, \ldots, g_m$ comută în raport cu paranteza Lie uzuală;

- câmpurile vectoriale $g_1, \ldots, g_m$ aparţin spaţiului $\mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ cu derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi mărginite; $f_1, \ldots, f_d \in \mathbb{C}_b^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ şi derivatele sale parţiale sunt mărginite;
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_d \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n)$ şi admit derivate parţiale de ordinul întâi şi doi mărginite.
- $\rho := TMK < 1$, where $M := \sup\{|\nabla\varphi_i(x)|,\ x \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \ldots d\}$ şi $K := \sup\{|f_i(x)|, x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, d\}$.

Notăm $G_j(t, x) = G_j(t)(x)$ curentul global asociat fiecărui câmp vectorial complet $g_j(x)$ şi $F_i(t, x) = F_i(t)(x)$ curentul global generat de câmpul vectorial complet $f_i(x)$.

Notăm compunerea curenţilor $G(p)(x) = G(p, x) := G_1(t_1) \circ \ldots \circ G_m(t_m)(x)$, pentru $p = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ şi $F(q)(x) = F(q, x) := F_1(t_1) \circ \ldots \circ F_p(t_d)(x)$, pentru $q = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$.

Folosind acelaşi tip de argumente ca în lema 1.3.2, se poate demonstra:

Lema 1.3.3. *Există şi este unică aplicaţia netedă $\widehat{\psi}(t, z)$ astfel încât*

$$G(p(t, \widehat{\psi}(t, z)))(\widehat{\psi}(t, z)) = z,\ \widehat{\psi}(0, z) = z.$$

Mai mult,

$$|\widehat{\psi}(t, z) - z| \leq \frac{TK}{1 - \rho}|\varphi(z)|$$

şi $\widehat{\psi}(t, z)$ satisface ecuaţia Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial t}(t, z) + \sum_{i=1}^{d} \nabla\widehat{\psi}(t, z) \cdot f_i(z)\ \varphi_i(\widehat{\psi}(t, z)) = 0. \tag{1.3.8}$$

Formulăm acum următorea teoremă.

Teorema 1.3.2. *În aceleaşi ipoteze ca mai sus, curentul stochastic asociat ecuaţiei diferenţiale stochastice* (1.3.7) *are forma*

$$\widehat{y}(t; \lambda) = G(W(t)) \circ F(p(t, \lambda))(\lambda),\ t \in [0, T], \lambda \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3.9}$$

unde $p(t, \lambda) := (t\varphi_1(\lambda), \ldots, t\varphi_d(\lambda))$.

În plus, ecuaţia curent $\widehat{y}(t; \lambda) = x$ admite soluţia $\lambda = \psi(t, x) := \widehat{\psi}(t, z(t, x))$, unde $z(t, x) := G(-W(t))(x)$.

Demonstraţia acestei teoreme este foarte asemănătoare cu demonstraţia teoremei 1.3.1.

2.2. Aplicaţii

2.2.1. Soļutii Pathwise ale ecuaţiilor Burgers cu perturbaţii stochastice

În acest paragraf construim soluţia unui sistem de ecuaţii Burgers cu perturbaţii stochastice, utilizând rezultatele obţinute în subcapitolul anterior. Ecuaţiile cu derivate parţiale stochastice considerate sunt date de

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{d}u_i(t,x) & = \left[\frac{1}{2}\Delta u_i(t,x) + \langle \nabla u_i(t,x), u(t,x)\rangle\right]\mathrm{d}t \\
 & \quad + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(t,x)\mathrm{d}W_k(t), t\in[0,T], \\
u_i(0,x) & = \varphi_i(x), x\in\mathbb{R}^n, i=1,\dots,n.
\end{array}
\right.
\tag{2.1.1}
$$

Aici $(W(t))$ este mişcarea Browniană n-dimensional standard pe spaţial de probabilitate complet filtrat $\{\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\},P\}$, $\varphi_i\in\mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n)$ cu derivatele de ordinul întâi mărginite şi integrala stochastică este integrala Itô uzuală.

Căutăm soluţii netede în raport cu variabila spatială şi care sunt $\mathcal{F}_t$-adaptate pentru x fixat. Diferenţiind în raport cu x_l obţinem

$$
\frac{\partial u_i}{\partial x_l}(t,x) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l}(x) + \sum_{k=1}^{n}\int_0^t \Big[\frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_l\partial x_k^2}(s,x) + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l\partial x_k}(s,x)u_k(s,x) +
$$

$$
+ \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(s,x)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(s,x)\Big]\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l\partial x_k}(s,x)\mathrm{d}W_k(s),
$$

unde derivatele în raport cu x_l trebuie să fie înţelese în sens L^2 şi, deoarece aplicaţia $u(t,\cdot)$ este netedă, ele coincid cu cele clasice. Deducem

$$
\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_l}(\cdot,x), W_l(\cdot)\right\rangle_t = \int_0^t \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2}(s,x)\mathrm{d}s.
$$

Prin urmare, utilizând formula (1.2.1), este uşor de văzut că sistemul (2.1.1) poate fi rescris astfel

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{d}u_i(t,x) & = \left\langle \nabla u_i(t,x), \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(t,x)e_k\right\rangle \mathrm{d}t + \\
 & \quad + \sum\limits_{k=1}^{n}\langle \nabla u_i(t,x), e_k\rangle \circ \mathrm{d}W_k(t), \\
u_i(0,x) & = \varphi_i(x),
\end{array}
\right.
\tag{2.1.2}
$$

unde sistemul $\{e_1, \dots, e_n\}$ reprezintă baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^n$. Procedând în mod asemănător ca în ecuaţia (1.1.2), asociem următorul sistem de caracteristici

$$\text{(2.1.3)}\quad \begin{cases} \mathrm{d}\widehat{x}(t;\lambda) &= -\sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{u}_k(t;\lambda)e_k\mathrm{d}t - \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \circ \mathrm{d}W_k(t),\ \widehat{x}(0,\lambda) = \lambda \in \mathbb{R}^n; \\ \mathrm{d}\widehat{u}_i(t,\lambda) &= 0,\ t \in [0,T], \widehat{u}_i(0,\lambda) = \varphi_i(\lambda). \end{cases}$$

Se obţine $\widehat{u}_i(t,\lambda) = \varphi_i(\lambda)$ şi $\widehat{x}(t;\lambda)$ care satisface sistemul de ecuaţii diferenţiale stochastice

$$\text{(2.1.4)}\quad \begin{aligned} \widehat{x}(t;\lambda) &= \lambda - \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \varphi_i(\lambda)e_k\mathrm{d}s - \sum_{k=1}^{n} \int_0^t e_k \circ \mathrm{d}W_k(s), \\ &= \lambda + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \varphi_i(\lambda)(-e_k)\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t (-e_k) \circ \mathrm{d}W_k(s),\ 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Presupunem că $TK = \rho < 1$, unde $K := \sup\{|\nabla\varphi_i(\lambda|; \lambda \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n\}$. Cu notaţiile din teorema 1.3.2, $d = m = n$ şi $f_i(y) = g_i(y) = -e_i$, pentru $1 \le i \le n$. Prin urmare, $F_i(t,x) = G_i(t,x) = -te_i + x$ şi pentru $t = (t_1, \dots, t_n)$,

$$F(t,x) = G(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} t_i e_i + x = -t + x.$$

Notăm $p(t,\lambda) := t\varphi(\lambda)$, unde $\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda))$. Atunci

$$G(W(t)) \circ F(p(t,\lambda))(\lambda) = -W(t) + F(t\varphi(\lambda))(\lambda) = -W(t) - t\varphi(\lambda) + \lambda.$$

Aplicăm acum teorema 1.3.2 şi obţinem

Teorema 2.1.1. *Curentul stochastic $\widehat{x}(t;\lambda)$ poate fi reprezentat astfel*

$$\widehat{x}(t;\lambda) = \lambda - t\varphi(\lambda) - W(t)$$

şi ecuaţia curent $\widehat{x}(t;\lambda) = x$ are soluţie unică dată de

$$\lambda = \psi(t,x) = \widehat{\psi}(t, x + W(t)),$$

unde $\widehat{\psi}(t,z)$ este soluţia ecuaţiilor Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\widehat{\psi}}{\partial t}(t,z) &= \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial\widehat{\psi}}{\partial z_i}(t,z)\varphi_i(\widehat{\psi}(t,z)), \\ \widehat{\psi}(0,z) &= z. \end{cases}$$

Notăm $u_i(t,x) := \varphi_i(\psi(t,x))$, pentru $i = 1, \dots, n$. Atunci

$$u(t,x) = (u_1(t,), \dots, u_n(t,x)) = \varphi(\psi(t,x))$$

este soluţie a sistemului de ecuaţii stochastice Burgers (2.1.2).

2.2.2. O problemă de filtrare pentru ecuaţii diferenţiale stochastice asociate cu ecuaţii parabolice de tip retrograd parametrizate

Cu notaţiile de mai sus, considerăm următoarea ecuaţia diferenţială stochastică (uşor modificată):

$$\tag{2.2.1} \begin{cases} \mathrm{d}x(t) &= \varphi(\lambda)g_0(x(t))\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} g_i(x(t)) \circ \mathrm{d}W_i(t), \\ x(0) &= \lambda \end{cases}$$

(care se obţine din ecuaţia diferenţială stochastică (1.2.5) prin înlocuirea lui g_i cu $-g_i$) şi admite ca soluţie curentul stochastic $\widehat{x}_\varphi(t,\lambda)$. Ecuaţia curent $\widehat{x}_\varphi(t,\lambda) = x$, în raport cu necunoscuta λ, are soluţia unică $\lambda = \psi(t,x)$.

Notăm $\widehat{x}_\varphi(s;t,x), t \leq s \leq T$ curentul stochastic asociat ecuaţiei diferenţiale stochastice

$$\tag{2.2.2} \mathrm{d}x(s) = \varphi(\psi(t,x))g_0(x(s))\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m} g_i(x(s)) \circ \mathrm{d}W_i(s),$$

obţinută din ecuaţia ecuaţia diferenţială stochastică (2.2.1) cu parametrul $\lambda = \psi(t,x)$.

Scopul principal este să calculăm mediile de forma $E(h(\widehat{x}_\varphi(T;t,x)))$, în care este implicat procesul non-Markovian $\widehat{x}_\varphi(s;t,x)$.

De obicei, când vrem să calculăm $u(t,x)$ definită ca media unei funcţionale care depinde de valoare finală $\xi(T;t,x)$ a unui proces de difuzie $\xi(s;t,x)$, $t \leq s \leq T$, începând la momentul t din punctul x, utilizăm faptul că funcţia $u(t,x)$ este soluţie a unei ecuaţii parabolice de tip retrograd, numită ecuaţie Kolmogorov (a se vedea de exemplu [9], Teorema 6.1).

Această procedură nu poate fi aplicată în cazul nostru dacă luăm în considerare natura non-Markoviană a procesului implicat.

Fie $h \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n)$ cu derivatele parţiale de ordinul întâi mărginite.

Pentru a calcula media $E(h(\widehat{x}_\varphi(T;t,x)))$, considerăm media condiţionată $v(t,x) := E[h(\widehat{x}_\varphi(T;t,x))|\psi(t,x)]$. Un calcul direct al lui $v(t,x)$ presupune cunoaşterea procesului $\psi(t,x)$, pentru care o situaţie favorabilă implică o ecuaţie cu derivate parţiale neliniară.

O descriere mai potrivită a lui $v(t,x) = u(t,x,\psi(t,x))$ se obţine utilizând versiunea parametrizată $u(t,x,\lambda)$, care este soluţie a unei ecuaţii Kolmogorov de tip retrograd cu parametru.

Utilizând rezultatele obţinute în secţiunea 1.3 din acest capitol, observăm că reprezentarea gradient a curentului stochastic $\widehat{x}_\varphi(T;t,x)$ este dată de

$$\widehat{x}_\varphi(T;t,x) = G(W(T)-W(t)) \circ G_0((T-t)\varphi(\psi(t,x)))(x). \tag{2.2.3}$$

Notăm:

$$v(t,x) := E\left[h(\widehat{x}_\varphi(T;t,x))|\psi(t,x)\right]$$

şi

$$y_\varphi(s;t,x,\lambda) := G(W(s)-W(t)) \circ G_0((s-t)\varphi(\lambda))(x), \text{ pentru } t \le s \le T.$$

Deoarece $\psi(t,x) = \widehat{\psi}(t, G(-W(t),x))$ (vezi Corolarul 1.3.1) şi $\widehat{\psi}(t,z)$ este determinist (amintim Lema 1.3.2), rezultă că variabilele aleatoare $\psi(t,x)$ şi $y_\varphi(T;t,x,\lambda)$ sunt independente. Observăm că $\widehat{x}_\varphi(T;t,x) = y_\varphi(T;t,x,\psi(t,x))$.

Prin urmare, Lema independenţei (vezi [29], Lema 2.3.4) ne conduce la reprezentarea

$$v(t,x) = E\left[h(y_\varphi(T;t,x,\lambda))\right]\Big|_{\lambda=\psi(t,x)}.$$

Definim $u(t,x;\lambda) := E\left[h(y_\varphi(T;t,x,\lambda))\right]$. Evident $y_\varphi(s;t,x,\lambda)$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale stochastice

$$y(s) = x + \varphi(\lambda)\int_t^s g_0(y(r))\mathrm{d}r + \sum_{i=1}^m \int_t^s g_i(y(r)) \circ \mathrm{d}W_i(r), \; s \in [t,T].$$

$y_\varphi(s;t,x,\lambda)$ este proces Markovian. Aplicând acum Teorema 6.1 din [9], rezultă că $u(t,x;\lambda)$ satiface ecuaţia parabolică de tip retrograd pamaterizată (ecuaţia Kolmogorov)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x;\lambda) + \langle \nabla u(t,x;\lambda), g(x,\lambda)\rangle + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^m \langle D^2 u(t,x;\lambda) g_i(x), g_i(x)\rangle = 0, \\ u(T,x;\lambda) = h(x), t \in [0,T], \end{cases} \tag{2.2.4}$$

unde $g(x,\lambda) := g_0(x)\varphi(\lambda) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^m \nabla g_i(x) g_i(x)$ şi $D^2 u$ reprezintă matricea Jacobi a lui u.

Analiza de mai sus poate fi sintetizată în următorul enunţ.

Teorema 2.2.1. *În aceleaşi ipoteze* **(A.1)-(A.4)**, *media condiţionată*

$$v(t,x) = E[h(\widehat{x}_\varphi(T;t,x))|\psi(t,x)]$$

poate fi reprezentată astfel

$$v(t,x) = u(t,x;\lambda)|_{\lambda=\psi(t,x)},$$

unde $u(t,x;\lambda)$ este soluţia ecuaţiei parabolice de tip retrograd (2.2.4). *În plus, media $E(h(\widehat{x}_\varphi(T;t,x)))$ poate fi calculată astfel*

$$E(h(\widehat{x}_\varphi(T;t,x))) = E(v(t,x)).$$

Rezultate obţinute

2.3. O problemă de filtrare pentru ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice non-Markoviene

2.3.1. Introducere

În acest subcapitol este studiată o problemă de filtrare pentru ecuaţii diferenţiale non-Markoviene în care sunt implicate ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice parabolice de tip retrograd cu parametri. Această problemă are la bază un sistem Markovian de ecuaţii diferenţiale stochastice cu parametri pentru care este utilizată reprezentarea integrală a curentului stochastic

$$\{\widehat{x}\,(t;\lambda) : t \in [0,T]\,, \lambda \in \mathbb{R}^n\}$$

În plus, sistemul fundamental de integrale prime stochastice:

$$\left\{\lambda = \psi\,(t,x) \in \mathbb{R}^n : t \in \left[0,\widehat{T}\right]; x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

poate fi construit ca soluţia unică a ecuaţiei curent $\widehat{x}(t;\lambda) = x$.

Subiectele menţionate mai sus sunt rezolvate în Teoremele 3.3.1 şi 3.3.2 din paragraful următor (vezi Problemele A şi B).

Soluţiile Problemelor A şi B sunt utilizate pentru a asocia o ecuaţie diferenţială stochastică non-Markoviană şi funcţionale pentru care se rezolvă Problema de filtrare (Problema C) în Teorema 3.3.3 din paragraful 2.3.3.

Acest subiect a fost tratat şi în referinţele bibliografice [11] şi [23], dar analiza prezentată în acest subcapitol include o familie de câmpuri vectoriale în partea de drift

$$\{f\,(x;\lambda) \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^n,\, \lambda \in \mathbb{R}^n\}$$

fără presupunerea de comutativitate a acestor câmpuri.

2.3.2. Formularea problemelor

Fie $\{w(t) \in \mathbb{R} : t \in [0,\infty)\}$ procesul scalar Wiener peste spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, \mathcal{F} \supseteq \{\mathcal{F}^t\}\,, P\}$.

Considerăm că $\{\widehat{x}\,(t;\lambda) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,T]\,, \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ este curentul stochastic care satisface următoarea ecuaţie diferenţială stochastică Markoviană:

$$\text{(3.2.1)}\qquad \begin{cases} d_t x = f(x;\lambda)\mathrm{d}t + g(x) \circ \mathrm{d}w(t), & t \in [0,T]\,, x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^n \\ x\,(0) = \lambda \end{cases}$$

unde integrala Fisk-Stratonovich „$\circ$“ se calculează astfel:

$$g(x) \circ \mathrm{d}w(t) = g(x) \cdot \mathrm{d}w(t) + \frac{1}{2}\left[\partial_x g(x)\right] g(x)\,\mathrm{d}t,$$

utilizand integrala Itô „$\cdot$“.

Facem următoarea presupunere:

(P) câmpurile vectoriale f şi g comută în raport cu paranteza Lie uzuală, adică $[g, f_\lambda](x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, pentru oricare $\lambda \in \mathbb{R}^n$,

unde $f_\lambda \overset{def}{=} f(x;\lambda)$, iar $f \in (C_b^1 \cap C^2)(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R}^n)$ şi $g \in (C_b \cap C_b^1 \cap C^2)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Problema A. Utilizând presupunerea de mai sus, găsim soluţia unică netedă şi $\mathcal{F}^t$- adaptată

$$\left\{\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in \left[0, \widehat{T}\right] \times \mathbb{R}^n\right\},$$

care satisface ecuaţia curent

$$\widehat{x}(t;\psi(t,x)) = x, \quad t \in \left[0,\widehat{T}\right], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Problema B. Descriem evoluţia procesului $\{\psi(t,x)\}$ utilizând ecuaţiile cu derivate parţiale neliniare stochastice

$$\psi(t, \widehat{x}(t;\lambda)) = \lambda, \quad t \in \left[0,\widehat{T}\right], \tag{3.2.2}$$

$$\begin{cases} d_t\psi(t,x) + \partial_x\psi(t,x) f(x;\psi(t,x))\,\mathrm{d}t + \\ \qquad + \left[\partial_x\psi(t,x)\,g(x)\right] \widehat{\circ}\mathrm{d}w(t) = 0 \\ \psi(0,x) = x \in \mathbb{R}^n, t \in \left[0,\widehat{T}\right]. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Aici integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$“ se calculează astfel

$$h(t,x)\,\widehat{\circ}\mathrm{d}w(t) = h(t,x) \cdot \mathrm{d}w(t) - \frac{1}{2}\partial_x h(t,x)\,g(x)\,\mathrm{d}t, \tag{α}$$

utilizând integrala Itô " $\cdot$ ", unde $h(t,x) = \partial_x\psi(t,x)g(x)$ este un proces mărginit care satisface $|h(t,x)| \leq \dfrac{k}{1-\rho}$ pentru constantele $\rho \in (0,1)$ şi $k = \sup\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Pentru fiecare $(t,x) \in \left[0,\widehat{T}\right] \times \mathbb{R}^n$ fixat, considerăm $\lambda = \psi(t,x)$ şi definim procesul $\left\{z_\psi(s;t)[y] : s \in \left[t,\widehat{T}\right], y \in \mathbb{R}^n\right\}$ care verifică ecuaţia diferenţială stochastică non-Markoviană

$$\begin{cases} d_s z = f(z;\psi(t,x))\,\mathrm{d}s + g(z) \circ \mathrm{d}w(s), s \in \left[t,\widehat{T}\right] \\ z(t) = y \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Problema C. Descriem evoluţia funcţionalei valoare medie condiţionată

$$v\left(t,x\right)=E\left\{\varphi\left(z_{\psi}\left(T;t\right)\left[x\right]\right)|\psi\left(t,x\right)\right\},t\in\left[0,\widehat{T}\right],x\in\mathbb{R}^{n},$$

utilizând funcţionala parametrizată $u\left(t,x;\lambda\right)=E\varphi\left(z_{\lambda}\left(T;t\right)\left[x\right]\right)$ şi ecuaţiile Kolmogorov corespunzătoare.

Observaţia 3.2.1. *În ipoteza* (P)*, soluţia*

$$\{\widehat{x}(t;\lambda):(t,\lambda)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{n}\}$$

care satisface ecuaţia diferenţială stochastică Markoviană (2.2.1) *poate fi reprezentată astfel*

$$\widehat{x}\left(t;\lambda\right)=G\left(w(t)\right)\circ F\left(t;\lambda\right),t\in\left[0,T\right],\lambda\in\mathbb{R}^{n}, \tag{3.2.5}$$

unde $\{G(\sigma)[x]:\sigma\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^{n}\}$ *curentul global generat de câmpul vectorial* $\{g\}$ *şi* $\{F\left(t;\lambda\right)\in\mathbb{R}^{n}:t\in\left[-T,T\right],\lambda\in\mathbb{R}^{n}\}$ *este curentul global generat de câmpul vectorial* $\{f_{\lambda}\}$*, care verifică următoarea ecuaţie diferenţială ordinară*

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}F\left(t;\lambda\right)}{\mathrm{d}t}=f\left(F\left(t;\lambda\right);\lambda\right),t\in\left[-T,T\right],\\ F\left(0;\lambda\right)=\lambda\in\mathbb{R}^{n}.\end{cases} \tag{3.2.6}$$

Observaţia 3.2.2. *Soluţia* $\{\lambda=\psi\left(t,x\right)\}$ *a ecuaţiei curent (vezi* Problema A*) va fi găsită ca o compunere*

$$\psi(t,x)=\widehat{\psi}\left(t,\widehat{z}(t,x)\right),\quad t\in\left[0,\widehat{T}\right],\ x\in\mathbb{R}^{n}, \tag{3.2.7}$$

unde $\widehat{z}\left(t,x\right)\overset{def}{=}G\left(-w(t)\right)\left[x\right]$ *şi aplicaţia deterministă netedă* $\widehat{\psi}\in C^{1,2}\left(\left[0,\widehat{T}\right]\times\mathbb{R}^{n};\mathbb{R}^{n}\right)$ *este soluţia unică ce verifică ecuaţiile funcţionale*

$$F\left(t;\widehat{\psi}\left(t,z\right)\right)=z,t\in\left[0,\widehat{T}\right],z\in\mathbb{R}^{n}. \tag{3.2.8}$$

Observaţia 3.2.3. $\widehat{\psi}\in C^{1,2}\left(\left[0,\widehat{T}\right]\times\mathbb{R}^{n};\mathbb{R}^{n}\right)$ *care satisface ecuaţiile* (2.2.8)*, reprezintă sistemul fundamental de integrale prime asociat cu ecuaţia diferenţială ordinară* (2.2.6)*. În plus, vor fi adevărate următoarele ecuaţii neliniare Hamilton-Jacobi*

$$\begin{cases}\partial_{t}\widehat{\psi}\left(t,z\right)+\left[\partial_{z}\widehat{\psi}\left(t,z\right)\right]f\left(z;\widehat{\psi}\left(t,z\right)\right)=0,t\in\left[0,\widehat{T}\right],\\ \widehat{\psi}\left(0,z\right)=z\in\mathbb{R}^{n}.\end{cases} \tag{3.2.9}$$

Această aplicaţie netedă se găseşte aplicând teorema de punct fix a lui Banach şi utilizând ecuaţiile funcţionale (2.2.8) *pe care le rescriem sub forma următoarelor ecuaţii integrale*

$$F(t;\lambda)=z\Leftrightarrow\lambda=z-\int_0^t f(F(s;\lambda);\lambda)\,\mathrm{d}s\overset{def}{=}\widehat{V}(t,z;\lambda).\tag{3.2.10}$$

Căutăm $\widehat{T}>0$ *suficient de mic astfel încât*

$$\left|\partial_\lambda\widehat{V}(t,z;\lambda)\right|\le\rho\in(0,1)\,,t\in\left[0,\widehat{T}\right],z\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R}^n.\tag{3.2.11}$$

Aceasta ne asigură că aplicaţia $\widehat{V}(t,z;\lambda)$ *este Lipschitz continuă în raport* $\lambda\in\mathbb{R}^n$ *şi verifică*

$$\left|\widehat{V}(t,z;\lambda'')-\widehat{V}(t,z;\lambda')\right|\le\rho\,|\lambda''-\lambda'|\,,t\in\left[0,\widehat{T}\right],\lambda',\lambda''\in\mathbb{R}^n,\tag{3.2.12}$$

pentru orice $z\in\mathbb{R}^n$, *unde* $\rho\in(0,1)$ *este o constantă.*

2.3.3. Câteva rezultate auxiliare

Lema 3.3.1. *Considerăm ecuaţiile funcţionale*

$$\lambda=\widehat{V}(t,z;\lambda)\overset{def}{=}z-\int_0^t f(F(s;\lambda);\lambda)\,\mathrm{d}s,\ t\in[0,T]\,,z\in\mathbb{R}^n,\tag{3.3.1}$$

unde $\{F(t;\lambda)\}$ *satisface ODE* (2.2.6).

Definim

$$k_1=\sup\{|\partial_x f(x;\lambda)|+|\partial_\lambda f(x;\lambda)|:x\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R}^n\}$$
şi
$$k_2(T)=(1+k_1T)\exp k_1T.$$

Atunci

$$|\partial_\lambda F(t;\lambda)|\le k_2(T)\,,t\in[0,T]\,,\lambda\in\mathbb{R}^n;\tag{3.3.2}$$

$$\left|\partial_\lambda\widehat{V}(t,z;\lambda)\right|\le\rho\overset{def}{=}Tk_1[1+k_2(T)]\,,t\in[0,T]\,,z\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\mathbb{R}^n.\tag{3.3.3}$$

Demonstraţie. Concluziile lemei rezultă din ecuaţia (2.2.6) şi lema lui Gronwall.

Lema 3.3.2. *În aceleaşi ipoteze ca în Lema* 3.3.1 *considerăm* $\widehat{T}>0$ *astfel încât*

$$\rho\overset{def}{=}\widehat{T}k_1\left[1+k_2\left(\widehat{T}\right)\right]\in(0,1)$$

(*vezi* (2.2.14). *Atunci există soluţia netedă* $\widehat{\psi} \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$*care satisface următoarele ecuaţii funcţionale*

$$
(3.3.4) \qquad \begin{cases} (a) & \widehat{V}\left(t, z; \widehat{\psi}(t,z)\right) = \widehat{\psi}(t,z), F\left(t; \widehat{\psi}(t,z)\right) = z; \\ (b) & \widehat{\psi}(0,z) = z \in \mathbb{R}^n,\ \widehat{\psi}(t, F(t;\lambda)) = \lambda, t \in \left[0, \widehat{T}\right]; \\ (c) & \left|\partial_z \widehat{\psi}(t,z)\right| \leq \dfrac{1}{1-\rho}, \left|\widehat{\psi}(t,z) - z\right| \leq \dfrac{1}{1-\rho} R\left(\widehat{T}, z\right), \\ & (t,z) \in \left[0, \widehat{T}\right] \times \mathbb{R}^n. \end{cases}
$$

Demonstraţie. Aplicând lema 3.3.1 şi teorema de punct fix a lui Banach funcţiei $= \widehat{V}(t,z;\lambda)$ rezultă concluziile lemei (pentru mai multe detalii a se vedea preprintul articolului [13]).

Lema 3.3.3. *În aceleaşi ipoteze ca în Lema* 3.3.2*, considerăm soluţia unică*

$$\left\{\lambda = \widehat{\psi}(t,z) : t \in \left[0, \widehat{T}\right], z \in \mathbb{R}^n\right\},$$

care satisface ecuaţiile funcţionale (2.2.15).

Atunci $\widehat{\psi} \in C^{1,2}\left(\left[0, \widehat{T}\right] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\right)$ *verifică următoarele ecuaţii neliniare Hamilton - Jacobi*

$$
(3.3.5) \qquad \begin{cases} \partial_t \widehat{\psi}(t,z) + \partial_z \widehat{\psi}(t,z) f\left(z; \widehat{\psi}(t,z)\right) = 0; \\ \widehat{\psi}(0,z) = z \in \mathbb{R}^n, t \in \left[0, \widehat{T}\right]. \end{cases}
$$

În plus, $\widehat{\psi}(t,\cdot) \in (C_b^1 \cap C^2)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $t \in \left[0, \widehat{T}\right]$ *şi*

$$\left|\partial_z \widehat{\psi}(t,z)\right| \leq \frac{1}{1-\rho},\ t \in \left[0, \widehat{T}\right],\ z \in R^n,$$

pentru o constantă $\rho \in (0,1)$.

Demonstraţie. Concluziile Lemei rezultă aplicând lema 3.3.2.

Lema 3.3.4. *Presupunem că* $g \in (C_b \cap C_b^1 \cap C^2)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *şi definim procesul continuu* $\widehat{z}(t,x) = G(-w(t))[x] \overset{not}{=} H(w(t))[x]$, $t \in \left[0, \widehat{T}\right]$, $x \in R^n$. *Atunci următoarea ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic va fi adevărată*

$$
(3.3.6) \qquad \begin{cases} \mathrm{d}_t \widehat{z}(t,x) + [\partial_x \widehat{z}(t,x) g(x)] \,\widehat{\circ}\, \mathrm{d}w(t) = 0, t \in \left[0, \widehat{T}\right], x \in \mathbb{R}^n \\ \widehat{z}(0,x) = x \end{cases},
$$

unde integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$*“ se calculează ca în* (α).

Demonstraţie. Aplicând regula standard de derivare stochastică procesului $\widehat{z}(t,x)$ şi folosind identităţile $H(\sigma) \circ G(\sigma)[\lambda] = \lambda \in \mathbb{R}^n$ şi $x = G(\sigma)[\lambda]$, obţinem (2.3.2).

Suntem acum în măsură să dăm soluţiile problemelor **A** şi **B**.

Teorema 3.3.1. *(soluţie pentru **Problema A**). Considerăm câmpurile vectoriale*

$$f \in \left(C_b^1 \cap C^2\right)\left(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R}^n\right) \quad \text{şi} \quad g \in \left(C_b \cap C_b^1 \cap C_b^2\right)\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$$

care satisfac ipoteza (P) *şi definim curentul stochastic*

$$\{\widehat{x}(t;\lambda) : t \in [0,T], \lambda \in \mathbb{R}^n\}$$

care verifică ecuaţia diferenţială stochastică (2.2.1).

Fie $\left\{\widehat{\psi}(t;z) : t \in \left[0,\widehat{T}\right], z \in \mathbb{R}^n\right\}$ *unica soluţie construită în Lema* 3.3.3.

Atunci procesul continuu şi $\mathcal{F}^t$*-adaptat*

$$\left\{\psi(t,x) \overset{def}{=} \widehat{\psi}(t,\widehat{z}(t,x)) : t \in \left[0,\widehat{T}\right], x \in \mathbb{R}^n\right\} \tag{3.3.7}$$

satisface ecuaţia curent

$$\widehat{x}(t;\psi(t,x)) = x, t \in \left[0,\widehat{T}\right],\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3.8}$$

unde $\left\{z = \widehat{z}(t,x) : t \in \left[0,\widehat{T}\right], x \in \mathbb{R}^n\right\}$ *este descrisă în lema* 3.3.4.

Demonstraţie. Prin definiţie, $\left\{\widehat{\psi}(t,z)\right\}$ verifică următoarele ecuaţii funcţionale (vezi Lema 3.3.3)

$$F\left(t;\widehat{\psi}(t,z)\right) = z, t \in \left[0,\widehat{T}\right],\ z \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3.9}$$

Utilizând ipoteza (P), reprezentăm $\{\widehat{x}(t;\lambda)\}$ astfel

$$\widehat{x}(t;\lambda) = G(w(t)) \circ F(t;\lambda), t \in [0,T],\ \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3.10}$$

Ecuaţiile funcţionale

$$\widehat{x}(t;\lambda) = x \in \mathbb{R}^n \text{ (see } F(t;\lambda) = G(-w(t))[x]) \tag{3.3.11}$$

vor fi rezolvate ţinând cont de soluţia unică a ecuaţiei (2.3.5))

$$\psi(t,x) = \widehat{\psi}(t,\widehat{z}(t,x)),\ t \in \left[0,\widehat{T}\right],\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 3.3.2. *(soluţie pentru **Problema B**). În aceleaşi ipoteze ca în Teorema* 3.3.1, *considerăm procesul continuu şi* $\mathcal{F}^t$ *- adaptat*

$$\left\{\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n : t \in \left[0,\widehat{T}\right], x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

definit în (2.3.3)*. Atunci* $h(t,x) \overset{def}{=} [\partial_x \psi(t,x)]\, g(x)$ *(vezi **Problema B**) este un proces mărginit.*

În plus, este adevărată următoarea ecuaţie cu derivate parţiale stochastică

$$(3.3.12)\qquad \begin{cases} d_t\psi(t,x)+[\partial_x\psi(t,x)]\,f\left(x;\psi(t,x)\right)+[\partial_x\psi(t,x)g(x)]\,\widehat{\circ}\mathrm{d}w(t)=0\\ \psi(0,x)=x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\left[0,\widehat{T}\right]\end{cases}$$

unde integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$“ se calculează ca în formula (α).

Demonstraţie. A se vedea preprintul articolului [13].

2.3.4. Rezultat principal

Cu aceleaşi notaţii ca în paragraful precedent, considerăm procesul continuu şi $\mathcal{F}^t$- adaptat $\left\{\lambda=\psi\left(t,x\right)\in\mathbb{R}^n:t\in\left[0,\widehat{T}\right],x\in\mathbb{R}^n\right\}$ descris în teoremele 3.3.1 şi 3.3.2. Pentru fiecare $(t,x)\in\left[0,\widehat{T}\right)\times\mathbb{R}^n$ fixat şi $\lambda=\psi(t,x)$, fie

$$\left\{z_\psi\left(s;t\right)[y]:s\in\left[t,\widehat{T}\right],\ y\in\mathbb{R}^n\right\}$$

soluţia care verifică ecuaţia diferenţială stochastică non-Markoviană

$$(3.4.1)\qquad \begin{cases} d_sz=f\left(z;\psi\left(t,x\right)\right)\mathrm{d}s+g\left(z\right)\circ\mathrm{d}w\left(s\right),s\in\left[t,\widehat{T}\right];\\ z(t)=y\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

Aici integrala Fisk-Stratonovich „$\circ$“ se calculează ca în formula

$$g(z)\circ\mathrm{d}w(s)=g(z)\cdot\mathrm{d}w(s)+\frac{1}{2}\left[\partial_zg\left(z\right)\right]g(z)\mathrm{d}s$$

utilizând integrala Itô „$\cdot$“.

Notăm $C_p^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ spaţiul tuturor funcţiilor scalare $\varphi\in C^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ care satisfac o condiţie de creştere polinomială împreună cu derivatele lor parţiale până la ordinul k.

Scopul principal este de a descrie evoluţia valorii medii condiţionate

$$E\left\{\varphi\left(z_\psi\left(\widehat{T};t\right)[x]\right)/\psi\left(t,x\right)\right\}\overset{def}{=}v\left(t,x\right),0\le t<\widehat{T},x\in\mathbb{R}^n,$$

utilizând funcţionala parametrizată

$$u(t,x;\lambda)\overset{def}{=}E\varphi\left(z_\lambda\left(\widehat{T};t\right)[x]\right),$$

unde $x\in\mathbb{R}^n$, $0\le t\le\widehat{T}$, şi ecuaţia parabolică de tip retrograd corespunzătoare (ecuaţia Kolmogorov) pentru fiecare $\lambda\in\mathbb{R}^n$ şi $\varphi\in C_p^2\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Pentru realizarea acestui scop, ipoteza principală (P) din secţiunea anterioară trebuie înlocuită cu următoarea ipoteză

(I) câmpurile vectoriale $f_\lambda(z)=f(z;\lambda)$, $g\left(z\right)$ comută, adică $\left[g,f_\lambda\right](z)=0,z\in\mathbb{R}^n,$ pentru fiecare $\lambda\in\mathbb{R}^n$, unde $g \in \left(C_b \cap C_b^1 \cap C_b^2 \cap C_p^3\right)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ şi $f \in \left(C_b^1 \cap C_p^2\right)(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$

Observaţia 3.4.1. *În ipoteza (I) şi utilizând curenţii determinişti*

$$\{G(\sigma)[z] : \sigma \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n\}$$

şi

$$\left\{z = F_\lambda(s;t)[y] : s \in \left[t, \widehat{T}\right],\ y \in \mathbb{R}^n\right\}$$

generaţt de $\{g\}$ *şi respectiv* $\{f_\lambda\}$*, observăm că soluţia ecuaţiei diferenţiale stochastice* (1.2.4) *poate fi reprezentată astfel*

$$z_\psi(s;t)[y] = G(w(s) - w(t)) \circ F_\psi(s;t)[y], \tag{3.4.2}$$

unde $s \in \left[t, \widehat{T}\right], y \in \mathbb{R}^n$

Aici $z = F_\psi(s;t)[y],\ s \in \left[t, \widehat{T}\right],\ y \in \mathbb{R}^n$ *reprezintă procesul continuu şi* $\mathcal{F}^t$*-măsurabil care satisface ecuaţia diferenţială ordinară cu parametru aleator*

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = f(z;\psi(t,x)), s \in \left[t, \widehat{T}\right], z(t) = y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4.3}$$

Reprezentarea integrală (1.2.5) *arată că* $z_\psi\left(\widehat{T};t\right)[x]$ *(vezi* $s = \widehat{T}$ *şi* $y = x$ *în* (1.2.5)*) şi* $\varphi\left(z_\psi\left(\widehat{T};t\right)[x]\right)$*) sunt aplicaţii continue de vectorii aleatori independenţi* $z_1 = w(T) - w(t)$ *(*z_1 *este independent de* $\mathcal{F}^t$*) şi* $z_2 = \psi(t,x)$ *(*z_2 *este* $\mathcal{F}^t$*-măsurabil).*

Este sugestiv să calculăm funcţionala medie condiţionată

$$v(t,x) = E\left\{\varphi\left(z_\psi\left(\widehat{T},t\right)[x]\right)/\psi(t,x)\right\}, 0 \le t < \widehat{T}, x \in \mathbb{R}^n \tag{3.4.4}$$

în felul următor

$$v(t,x) = u(t,x;\psi(t,x)), 0 \le t < \widehat{T}, x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.4.5}$$

unde funcţionala parametrizată $u(t,x;\lambda)$ *este dată de*

$$u(t,x;\lambda) = E\varphi\left(z_\lambda\left(\widehat{T},t\right)[x]\right), 0 \le t \le \widehat{T}, x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4.6}$$

Aici $z_\lambda\left(\widehat{T},t\right)[x]$ *se obţine din* (1.2.5) *înlcuind vectorul aleator* $\psi(t,x)$ *cu* $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Observaţia 3.4.2. *Pentru* $\varphi \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$ *fixat, asociem funcţionala* (1.2.9)*, unde „E" reprezintă media în raport cu probabilitatea* $\{P\}$ *şi utilizăm dinamica Markoviană obţinută din ecuaţia diferenţială stochastică* (1.2.4) *unde vectorul aleator* $\psi(t,x)$ *este înlocuit cu* $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Aplicând acum teorema 6.1 din [9], *pag. 124-125, obţinem că funcţionala definită de* (1.2.9) *satisface o ecuaţie parabolică de tip retrograd (ecuaţie Kolmogorov) de forma*

$$\left\{\begin{array}{l} u\left(T,x;\lambda\right)=\varphi\left(x\right); \\ \partial_t u\left(t,x;\lambda\right)+L_\lambda\left(u\right)\left(t,x;\lambda\right)=0,\ 0\le t\le\widehat{T},\ x\in\mathbb{R}^n, \end{array}\right. \tag{3.4.7}$$

pentru fiecare $\lambda\in\mathbb{R}^n$, *unde*

$$\begin{aligned} L_\lambda(u)(t,x;\lambda) &= \left\langle\partial_x u\left(t,x;\lambda\right),f(x;\lambda)\right\rangle+ \\ &+\frac{1}{2}\left\langle\partial_x\left\langle\partial_x u\left(t,x;\lambda\right),g\left(x\right)\right\rangle,g\left(x\right)\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Ca o concluzie a acestor observaţii formulăm următoarea teoremă.

Teorema 3.4.1. *(soluţie pentru* ***Problema C****) Câmpurile vectoriale* $\{g(z)\}$ *şi* $\{f(z;\lambda)\}$ *verifică ipoteza* (I). *Pentru fiecare* $(t,x)\in\left[0,\widehat{T}\right)\times\mathbb{R}^n$ *fixat şi* $\lambda=\psi(t,x)$ *considerăm soluţia* $\left\{z_\psi\left(s;t\right)\left[y\right]:s\in\left[t,\widehat{T}\right],y\in\mathbb{R}^n\right\}$ *care satisface ecuaţia diferenţială stochastică non-Markoviană* (1.2.4), *unde*

$$\left\{\lambda=\psi\left(t,x\right):t\in\left[0,\widehat{T}\right],x\in\mathbb{R}^n\right\}$$

are proprietăţile descrise în Teorema 3.3.1 *şi Teorema* 3.3.2. *Pentru* $\varphi\in C_p^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ *fixat, considerăm funcţionala valoare medie condiţionată* $\{v\left(t,x\right)\}$ *definită în* (1.2.7). *Atunci* $v\left(t,x\right)=u\left(t,x;\psi\left(t,x\right)\right)$, $t\in\left[0,\widehat{T}\right)$, $x\in R^n$, *unde funcţionala parametrizată* $u\left(t,x;\lambda\right),\lambda\in R^n$ *este dată în* (1.2.9) *şi verifică ecuaţia parabolică de tip retrograd* (3.4.7).

2.4. Curenţi stochastici inversabili asociaţi cu ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice

În acest subcapitol studiem inversabilitatea curentului stochastic bazată pe reprezentarea sa integrală, în cazul în care câmpul vectorial de difuzie comută cu câmpurile vectoriale din partea de drift. Soluţia unică satisface o ecuaţie cu derivate parţiale neliniară stocastică.

2.4.1. Introducere

Analizăm problema valoare iniţială asociată cu un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stocastice, considerată în sens clasic

$$
(4.1.1) \qquad \begin{cases} \mathrm{d}_t u_i(t,x) & + < \partial_x u_i(t,x), \sum_{j=1}^{d} u_j(t,x) f_j(x) > \mathrm{d}t + \\ & + < \partial_x u_i(t,x), g(x) > \widehat{\circ}\, \mathrm{d}w(t) = 0; \\ u_i(0,x) = \varphi_i(x),\ t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n,\ i \in \{1,\ldots,d\}, \end{cases}
$$

unde integrala Fisk-Stratonovitch „$\widehat{\circ}$“ se calculează astfel

$$
(\alpha) \qquad h(t,x)\widehat{\circ}\mathrm{d}w(t) = -\frac{1}{2}\partial_x h(t,x) g(x)\mathrm{d}t + h(t,x)\cdot \mathrm{d}w(t)
$$

utilizând integrala Itô „$\cdot$“. Principala presupunere este proprietatea de comutativitate $[g, f_i] = 0$, $i \in \{1,\ldots,d\}$, utilizând paranteza Lie uzuală. Obţinem astfel curentul stochastic asociat cu ecuaţia diferenţială stochastică, definit prin intermediul sistemului de caracteristici stochastice. Sistemul fundamental de integrale prime stochastice $\{\psi(t,x)\}$, asociat curentului stochastic inversabil, este construit ca o compunere $\psi(t,x) = \widehat{\psi}(t, \widehat{z}(t,x))$ între soluţia fundamentală a ecuaţiilor deterministe neliniare Hamilton-Jacobi, $\{\widehat{\psi}(t,z)\}$ şi soluţia fundamentală $\{z = \widehat{z}(t,x)\}$ a ecuaţiei cu derivate parţiale stochastică redusă (vezi Teorema 4.4.1 din paragraful 2.4.4). Soluţia sistemului neliniar (4.1.1) de ecuaţii cu derivate parţiale stochastice va fi reprezentată de $u_i(t,x) = \varphi_i(\psi(t,x))$, $i \in \{1,\ldots,d\}$ (vezi Teorema 4.4.2 din paragraful 2.4.4). Nu ne putem aştepta ca proprietatea de unicitate să aibă loc, din cauza naturii neliniare a problemei. În [4] sunt considerate sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice cu termenul de difuzie independent de gradientul soluţiei, unde analiza este bazată pe transformările de tip Doss-Sussman. Analiza prezentată în [21] şi [24] implică sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice unde este utilizată proprietatea de comutativitate în sens tare $[f_i, f_j] = 0$, $i,j \in \{1,\ldots,d\}$.

2.4.2. Formularea problemei

Considerăm o mulţime finită de câmpuri vectoriale complete

$$
\{g, f_1, \ldots, f_d\} \subseteq \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)
$$

şi funcţiile scalare

$$
\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\} \subseteq \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n).
$$

Fie $\{w(t) \in \mathbb{R} : t \in [0,\infty)\}$ procesul scalar Wiener pe spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, \mathcal{F} \supseteq \{\mathcal{F}^t\}, P\}$.

Definim curentul stochastic $\{\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) : t \in [0,T],\ \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ care satisface ecuaţia diferenţiala stochastică

$$(4.2.1)\qquad \begin{cases} d_t x = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(\lambda) f_i(x)\mathrm{d}t + g(x) \circ \mathrm{d}w(t),\ t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n; \\ x(0) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

unde integrala Fisk-Stratonovich „$\circ$“ se calculează astfel

$$g(x) \circ \mathrm{d}w(t) = \frac{1}{2}\left[\partial_x g(x)\right] g(x)\mathrm{d}t + g(x) \cdot \mathrm{d}w(t)$$

utilizând integrala Itô „$\cdot$“.

Câmpurile vectoriale $\{f_1, \ldots, f_d\}$ din partea de drift a ecuaţiei diferenţiale stochastice (4.2.1) nu comută (utilizând paranteza Lie) aşa cum s-a presupus în referinţele bibliografice [21] şi [24].

Principala ipoteză utlizată aici este următoarea

$$(\mathrm{I})\qquad g \quad \text{comută cu} \quad \{f_1, \ldots, f_d\}$$

utilizând paranteza Lie, adică $[g, f_i](x) = 0$, $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Problema pe care dorim să o rezolvăm aici este să descriem evoluţia funcţionalei stochastice

$$u(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} h\left(\psi(t,x)\right),\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,\ h \in \left(C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n)$$

incluzând $u_i(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_i\left(\psi(t,x)\right)$, $1 \le i \le d$, unde

$$\left\{\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in [0,\widehat{T}] \times \mathbb{R}^n\right\}$$

este soluţia unică netedă şi $\mathcal{F}^t$-adaptată ce satisface ecuaţia

$$\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = x, \quad t \in [0,\widehat{T}], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Această soluţie va fi găsită ţinând cont de ipoteza (I) şi de:

$$(4.2.2)\qquad \begin{cases} \psi\left(t, \widehat{x}_\varphi(t;\lambda)\right) = \lambda,\ t \in [0,\widehat{T}],\ \text{for each}\ \lambda \in \mathbb{R}^n; \\ \psi(0,x) = x. \end{cases}$$

Următorul pas în rezolvarea problemei este să scriem ecuaţiile stochastice Hamilton-Jacobi corespunzătoare, verificate de

$$\left\{\lambda = \psi(t,x) : (t,x) \in [0,\widehat{T}] \times \mathbb{R}^n\right\}$$

utilizând următoarea ecuaţie cu derivate parţiale neliniară stochastică

$$
\begin{aligned}
d_t\psi(t,x) + &\partial_x\psi(t,x)\left[\sum_{i=1}^{d}\varphi_i\left(\psi(t,x)\right)f_i(x)\right]\mathrm{d}t+ \\
&+\left[\partial_x\psi(t,x)g(x)\right]\widehat{\circ}\,\mathrm{d}w(t)=0.
\end{aligned} \tag{4.2.3}
$$

Aici integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$“ se calculează ca în formula (α).

Fie acum $\{G(\sigma)[x] : \sigma \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n\}$ curentul global generat de câmpul vectorial complet $\{g\}$ şi $\{F(t;\lambda) : t \in [-T,T],\ \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ curentul global generat de câmpul vectorial $\{f_\lambda\}$, unde $f_\lambda(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{d}\varphi_i(\lambda)f_i(x)$.

Observaţia 4.2.1. *În ipoteza* (I)*, o soluţie*

$$\{\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) : (t;\lambda) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\}$$

care satisface ecuaţia diferenţială stochastică (4.2.1) *poate fi reprezentată astfel*

$$\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = G(w(t))\circ F(t;\lambda),\ (t;\lambda)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n, \tag{4.2.4}$$

unde $F(t,\lambda)$ satisface următoarea ecuaţie difernţială ordinară

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}F(t;\lambda)}{\mathrm{d}t} = f_\lambda\left(F(t;\lambda)\right),\ t\in[-T,T], \\
F(0;\lambda)=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}^n.
\end{cases} \tag{4.2.5}
$$

Observaţia 4.2.2. *Soluţia $\{\lambda = \psi(t,x)\}$ care satisface ecuaţia curent şi ecuaţiile* (4.2.2) *va fi găsită ca o compunere astfel*

$$
\begin{cases}
\psi(t,x) = \widehat{\psi}\left(t, z(t,x)\right); \\
z(t,x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} G\left(-w(t)\right)[x],\ t\in\left[0,\widehat{T}\right],\ x\in\mathbb{R}^n,
\end{cases} \tag{4.2.6}
$$

unde aplicaţia netedă deterministă $\lambda = \widehat{\psi}(t,z)$ este soluţia unică a ecuaţiilor funcţionale

$$F(t;\lambda) = z,\ t\in[0,\widehat{T}],\ z\in\mathbb{R}^n. \tag{4.2.7}$$

Observaţia 4.2.3. $\left\{\lambda = \widehat{\psi}(t,z)\in\mathbb{R}^n : t\in[0,\widehat{T}],\ z\in\mathbb{R}^n\right\}$ *care satisface ecuaţiile* (4.2.7) *reprezintă sistemul fundamental de integrale prime asociat cu ecuaţia diferenţială ordinară* (4.2.5)*. În plus, vor fi valabile următoarele ecuaţii neliniare Hamilton-Jacobi.*

$$
\begin{cases}
\partial_t\widehat{\psi}(t,z) + \partial_z\widehat{\psi}(t,z)\left[\sum_{i=1}^{d}\varphi_i\left(\widehat{\psi}(t,z)\right)f_i(z)\right] = 0,\ t\in[0,\widehat{T}] \\
\widehat{\psi}(0,z) = z\in\mathbb{R}^n.
\end{cases} \tag{4.2.8}
$$

Prin definiţie, $\{F(t;\lambda) : t \in [0,T],\ \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ satisface

$$F(t;\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \varphi_i(\lambda) f_i\left(F(s;\lambda)\right) \mathrm{d}s,\ t \in [0,T],\ \lambda \in \mathbb{R}^n \tag{4.2.9}$$

şi ecuaţiile funcţionale (4.2.7) pot fi rescrise astfel

$$\begin{cases} F(t;\lambda) = z \Leftrightarrow \lambda = z - \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(\lambda) \int_0^t f_i\left(F(s;\lambda)\right) \mathrm{d}s; \\ \lambda = \widehat{V}(t,z;\lambda). \end{cases} \tag{4.2.10}$$

Aici aplicaţia netedă $\widehat{V}(t,z;\lambda) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este definită de

$$\widehat{V}(t,z;\lambda) = z - \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(\lambda) \int_0^t f_i\left(F(s;\lambda)\right) \mathrm{d}s, \tag{4.2.11}$$

şi căutăm $\widehat{T} > 0$ suficient de mic astfel încat

$$\left|\widehat{V}(t,z;\lambda'') - \widehat{V}\left(t,z;\lambda'\right)\right| \leq \rho \left|\lambda'' - \lambda'\right|,\ t \in [0,\widehat{T}],\ z \in \mathbb{R}^n,\ \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2.12}$$

pentru o constantă $\rho \in [0,1)$.

Aceasta ne permite rezolvarea ecuaţiilor funcţionale (4.2.10) prin aplicarea teoremei de punct fix a lui Banach. Acest lucru va fi analizat în următoarele două leme.

2.4.3. Rezultate auxiliare

Lema 4.3.1. *Considerăm ecuaţiile funcţionale*

$$\lambda = \widehat{V}(t,z;\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} z - \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(\lambda) \int_0^t f_i\left(F(s;\lambda)\right) \mathrm{d}s,\ t \in [0,T],\ z \in \mathbb{R}^n \tag{4.3.1}$$

unde $\{F(t;\lambda)\}$ *satisface (4.2.9) pentru*

$$\{f_1, \ldots, f_d\} \subseteq \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \quad \textit{date şi}$$
$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\} \subseteq \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n).$$

Definim $K_1 = \sup\left\{\sum_{i=1}^{d} |\partial_\lambda \varphi_i(\lambda)|\ |f_i(x)| :\ \lambda \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n\right\}$,

$K_2 = \sup\left\{\sum_{i=1}^{d} |\varphi_i(\lambda)|\, |\partial_x f_i(x)| :\ \lambda \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n\right\}$ *şi*

$K_3(T) = (1 + K_1 T) \exp K_2 T.$

Atunci

$$|F(t;\lambda'') - F(t;\lambda')| \le K_3(T)\,|\lambda''-\lambda'|\,,\ t\in[0,T],\ \lambda',\lambda''\in\mathbb{R}^n, \tag{4.3.2}$$

$$\begin{aligned}\left|\widehat{V}(t,z;\lambda'') - \widehat{V}(t,z;\lambda')\right| &\le T\,[K_1+K_2K_3(T)]\,|\lambda''-\lambda'|\,,\\ &t\in[0,T],\ z\in\mathbb{R}^n,\ \lambda',\lambda''\in\mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Demonstraţie. Concluziile (4.3.2) şi (4.3.3) sunt consecinţe directe ale unor calcule directe aplicate în (4.2.9) şi (4.2.11).

Lema 4.3.2. *În aceleaşi ipoteze ca în Lema* 2.2.1*, considerăm* $\widehat{T}>0$ *astfel încât*

$$\left|\widehat{V}(t,z;\lambda'') - \widehat{V}(t,z;\lambda')\right| \le \rho\,|\lambda''-\lambda'|\,,\ t\in[0,\widehat{T}],\ z\in\mathbb{R}^n,\ \lambda',\lambda''\in\mathbb{R}^n, \tag{4.3.4}$$

unde $\rho \overset{\text{def}}{=} \widehat{T}\left[K_1+K_2K_3\left(\widehat{T}\right)\right] \in (0,1)$*. Atunci există o soluţie unică netedă* $\left\{\lambda=\widehat{\psi}(t,z) : t\in[0,\widehat{T}], z\in\mathbb{R}^n\right\}$ *care satisface următoarele ecuaţii funcţionale*

$$\begin{cases}\widehat{V}(t,z;\widehat{\psi}(t,z)) = \widehat{\psi}(t,z),\ F(t;\widehat{\psi}(t,z)) = z,\ t\in[0,\widehat{T}],\ z\in\mathbb{R}^n,\\ \widehat{\psi}(0,z) = z\in\mathbb{R}^n,\ \widehat{\psi}(t,F(t;\lambda)) = \lambda,\ t\in[0,\widehat{T}],\end{cases} \tag{4.3.5}$$

unde $\left\{\widehat{V}(t,z;\lambda)\right\}$ *satisface* (4.3.4).

Lema 4.3.3. *În aceleaşi ipoteze ca în Lema* 2.2.2 *considerăm soluţia unică*

$$\left\{\lambda=\widehat{\psi}(t,z) :\ t\in[0,\widehat{T}],\ z\in\mathbb{R}^n\right\},$$

care satisface ecuaţiile funcţionale (4.3.5)*. Atunci* $\widehat{\psi}\in C^{1,2}\left(\left[0,\widehat{T}\right]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ *şi următoarele ecuaţii Hamilton-Jacobi sunt adevărate.*

$$\begin{cases}\partial_t\widehat{\psi}(t,z)+\partial_z\widehat{\psi}(t,z)\left[\sum_{i=1}^{d}\varphi_i\left(\widehat{\psi}(t,z)\right)f_i(z)\right]=0,\ t\in\left[0,\widehat{T}\right],\ z\in\mathbb{R}^n;\\ \widehat{\psi}(0,z)=z,\ \left|\widehat{\psi}(t,z)-z\right| \le \dfrac{1}{1-\rho}R(\widehat{T}).\end{cases} \tag{4.3.6}$$

Lema 4.3.4. *Presupunem ca* $g\in(C_b\cap C_b^1\cap C^2)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *şi considerăm*

$$\widehat{z}(t,x) = G(-w(t))[x],\ t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^n,$$

unde $\{G(\sigma)[x] : \sigma\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n\}$ *este curentul global generat de* $\{g\}$*. Atunci este adevărată următoarea ecuaţie cu derivate parţiale stochastică de tip parabolic*

$$\mathrm{d}_t\widehat{z}(t,x) + [\partial_x\widehat{z}(t,x)g(x)]\,\widehat{\circ}\,\mathrm{d}w(t) = 0,\ t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{4.3.7}$$

unde integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$*“ se calculează ca în formula* (α)*.*

Reamintim că evoluţia procesului $\widehat{z}(t,x) = H(w(t))[x]$, prin aplicarea regulii standard de derivare stochastică, ne conduce la următoarea ecuaţie

$$\begin{aligned} d_t\widehat{z}(t,x) &= \partial_\sigma \left\{H(\sigma)[x]\right\}_{\sigma=w(t)} \cdot \mathrm{d}w(t) + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2 \left\{H(\sigma)[x]\right\}_{\sigma=w(t)} \mathrm{d}t = \\ &= -g\left(\widehat{z}(t,x)\right) \cdot \mathrm{d}w(t) + \frac{1}{2}\partial_z g\left(\widehat{z}(t,x)\right) g\left(\widehat{z}(t,x)\right) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

pentru orice $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, unde coeficienţii din partea de difuzie şi din partea de drift sunt funcţii mărginite.

Rescriind membrul drept al ecuaţiei (4.3.8) obţinem ecuaţia cu derivate parţiale stochastică de tip parabolic dată în (4.3.7) unde coeficienţii din partea de difuzie şi din partea de drift sunt funcţii mărginite.

2.4.4. Rezultate principale

Soluţia $\left\{\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n : \ t \in \left[0,\widehat{T}\right], \ x \in \mathbb{R}^n\right\}$ care satisface ecuaţia curent va fi găsită ca o compunere

$$\psi(t,x) = \widehat{\psi}\left(t, \widehat{z}(t,x)\right), \ t \in \left[0,\widehat{T}\right], \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.4.1}$$

unde $\left\{\widehat{\psi}(t,z) \in \mathbb{R}^n : \ (t,z) \in [0,\widehat{T}] \times \mathbb{R}^n\right\}$ este analizat în Lemele 2.2.2 şi 2.2.3, iar

$$\widehat{z}(t,x) = G(-w(t))[x], \ t \in [0,\widehat{T}], x \in \mathbb{R}^n$$

este descris în Lema 1.2.4.

Observaţia 4.4.1. *Prin definiţie,* $\left\{\lambda = \psi(t,x) : (t,x) \in \left[0,\widehat{T}\right] \times \mathbb{R}^n\right\}$ *dată în* (4.4.1) *este unica soluţie netedă şi* $\mathcal{F}^t$*-adaptată care verifică ecuaţiile funcţionale (vezi observaţia 4.2.1)*

$$\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = G\left(w(t)\right) \circ F(t;\lambda) = x, \ t \left[0,\widehat{T}\right], \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4.2}$$

În acest sens, observăm că $\lambda = \widehat{\psi}(t,z)$ *satisface* $F\left(t; \widehat{\psi}(t,z)\right) = z$, *ceea ce implică* $G\left(w(t)\right) \circ F\left(t; \psi(t,x)\right) = x$, *pentru orice* $t \in \left[0,\widehat{T}\right]$, $x \in \mathbb{R}^n$, *cu condiţia*

$$z = G\left(-w(t)\right)[x].$$

Ecuaţia cu derivate parţiale neliniară stochastică dată în (4.2.3) va fi analizată în teorema următoare.

Teorema 4.4.1. *Preupunem că* $g \in \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *comută cu*

$$\{f_1,\ldots,f_d\} \subseteq \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$$

(vezi (I)*) şi* $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\subseteq (C_b\cap C_b^1\cap C^2)(\mathbb{R}^n)$ *sunt fixate.*

Considerăm unica soluţie netedă şi $\mathcal{F}^t$*-adaptată*

$$\lambda=\psi(t,x)\overset{\text{def}}{=\!=}\widehat{\psi}\left(t,\widehat{z}(t,x)\right),\ t\in\left[0,\widehat{T}\right],\ x\in\mathbb{R}^n$$

definitĕ în (4.4.1) *şi care satisface* (4.4.2)*. Atunci este adevărată următoarea ecuaţie cu derivate parţiale neliniară stochastică*

$$\text{(4.4.3)}\qquad \begin{cases} \mathrm{d}_t\psi(t,x)+\partial_x\psi(t,x)\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\varphi_i\left(\psi(t,x)\right)f_i(x)\right]\mathrm{d}t+\\ \qquad +\left[\partial_x\psi(t,x)g(x)\right]\widehat{\circ}\mathrm{d}w(t)=0;\\ \psi(0,x)=x,\ x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\left[0,\widehat{T}\right]. \end{cases}$$

Observaţia 4.4.2. *O soluţie pentru problema pe care ne-am propus să o rezolvăm va fi găsită utilizând argumente similare ca în Teorema 2.3.1.*

Teorema 4.4.2. *În aceleaşi ipoteze ca în Teorema* 2.3.1*, considerăm*

$$h\in(C_b^1\cap C^2)(\mathbb{R}^n)\ \textit{and}\ \left\{\lambda=\psi(t,x)\in\mathbb{R}^n:(t,x)\in\left[0,\widehat{T}\right]\times\mathbb{R}^n\right\}$$

care satisface ecuaţia cu derivate parţiale neliniară (4.4.3)*.*

Atunci $u(t,x)\overset{\text{def}}{=\!=}h(\psi(t,x))$, $(t,x)\in[0,\widehat{T}]\times\mathbb{R}^n$*, este o soluţie a următoarei ecuaţii cu derivate parţiale stochastică*

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t u(t,x)+<\partial_x u(t,x),\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\varphi_i\left(\psi(t,x)\right)f_i(x)\right]>\mathrm{d}t+\\ \qquad +<\partial_x u(t,x),\ g(x)>\widehat{\circ}\,\mathrm{d}w(t)=0;\\ u(0,x)=h(x),\ t\in\left[0,\widehat{T}\right]. \end{cases}$$

Aici integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$*“ se calculează ca în formula* (α)*.*

CAPITOLUL 3

PROBLEME BAZATE PE ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE NELINIARE STOCHASTICE CU SALTURI

3.1. Funcţionale şi curenţi gradient stochastici cu salturi mărginite

3.1.1. Introducere

În acest subcapitol sunt investigate două probleme bazate pe ecuaţii diferenţiale stochastice cu salturi impunând condiţia de comutativitate pentru câmpurile vectoriale $\{f_1, f_2, g\} \subseteq (C_b \cap C_b^1 \cap C^2)(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ care descriu mişcarea. Aceasta implică utilizarea reprezentării integrale pentru orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale stochastice considerate. În plus, sistemul fundamental de integrale prime stochastice poate fi construit dacă sunt îndeplinite condiţiile din teorema contracţiei. O soluţie pentru Problema (I), conţinând subiectele menţionate mai sus, este dată în Teorema 1.3.1 a paragrafului 3.

Soluţia problemei (I) este utilizată pentru a asocia ecuaţia diferenţială stochastică non-Markoviană cu salturi pentru care este rezolvată o problemă de filtrare în Teorema 1.3.2.

În paragraful 2 al acestui subcapitol sunt date câteva preliminarii, incluzând a aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Banach pentru rezolvarea ecuaţiilor integrale stochastice cu salturi. Teoremele 1.3.1 şi 1.3.2 reprezintă rezultatele principale şi se referă la evoluţia unor funcţionale utilizând ecuaţiile cu derivate parţiale neliniare stochastice de tip parabolic sau introducând ecuaţiile retrograde parametrizate de tip parabolic.

Metoda generală utilizată aici se bazează pe funcţii netede pe porţiuni, construite ca soluţii fundamentale ale unor ecuaţii (Hamilton-Jacobi) cvasiliniare cu salturi. Atunci soluţia pentru Problema (I) este definită combinând funcţiile test netede pe porţiuni cu soluţia continuă a ecuaţiei diferenţiale stochastice considerate. Această metodă are multe în comun cu rezultatele conţinute în [11] unde sunt studiate ecuaţii diferenţiale stochastice şi ecuaţii cu derivate parţiale stochastice cu traiectorii continue. Rezultatele date în [12] utilizează o abordare diferită. Unele rezultate ale acestui subcapitol sunt conţinute în referinţa [31], unde este tratată o situaţie mai generală care include mai multe câmpuri vectoriale în involuţie în partea de difuzie.

3.1.2. Preliminarii şi formularea problemelor

Considerăm două procese independente $\{(w(t), y(t)) : t \in [0, T]\}$ pe spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, \mathcal{F} \supseteq \{\mathcal{F}^t\}, \mathbb{P}\}$ (vezi $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$), unde $\{w(t) \in \mathbb{R} : t \in [0, T]\}$ este mişcarea Browniană pe spaţiul $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1 \supseteq \{\mathcal{F}_1^t\}, \mathbb{P}_1\}$ şi

$$\{y(t) \in [-\gamma, \gamma] : t \in [0, T], y(0) = 0\}$$

este un proces constant pe porţiuni definit pe spaţiul de probabilitate $\{\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2\}$. Procesul constant pe porţiuni $\{y(t)\}$ satisface

$$y(t, \omega_2) = y(\theta_i(\omega_2), \omega_2) \overset{\text{not}}{=} y_i(\omega_2), \quad t \in [\theta_i(\omega_2), \theta_{i+1}(\omega_2))$$

unde $0 = \theta_0(\omega_2) < \theta_1(\omega_2) < \ldots < \theta_{N-1}(\omega_2) < \theta_N(\omega_2) = T$ este o partiţie astfel încât $y_i(\omega_2) : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare $\mathcal{F}_2-$ măsurabilă pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Considerăm câmpurile vectoriale $\{g, f_1, f_2\} \subseteq (C_b \cap C_b^1 \cap C^2)(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ şi două funcţii scalare $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq (C_b^1 \cap C^2)(\mathbb{R}^n)$ astfel încât

(A1) $\qquad \{g, f_1, f_2\}$ commută în raport cu paranteza Lie

(A2) $\qquad (\gamma + T)VK = \rho \in [0, 1), \;$ unde $\; \{|y(t)| \leq \gamma : t \in [0, T]\},$

şi

$$\begin{aligned} V &= \sup\{|\partial_x \varphi_1(x)|, |\partial_x \varphi_2(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}, \\ K &= \sup\{|f_1(x)|, |f_2(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Fie $\{\widehat{x}_\varphi(t; \lambda) : t \in [0, T], \ \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ curentul stochastic generat de următoarea ecuaţie diferenţială stochastică cu salturi

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} \mathrm{d}_t \widehat{x} = [f_1(\widehat{x}(t-))\varphi_1(\lambda)\mathrm{d}t \ + f_2(\widehat{x}(t-))\varphi_2(\lambda)\delta y(t)] + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + g(\widehat{x}(t-)) \circ \mathrm{d}w(t); \\ \widehat{x}(0) = \lambda \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0, T], \delta y(t) = y(t) - y(t-), \ \widehat{x}(t-) = \lim\limits_{s \nearrow t} \widehat{x}(s), \end{cases}$$

unde integrala Fisk-Stratonovich "$\circ$" se calculează astfel

$$(\alpha) \qquad g(\widehat{x}(t-)) \circ \mathrm{d}w(t) = \frac{1}{2}([\partial_x g]\, g)(\widehat{x}(t-))\,\mathrm{d}t + g(\widehat{x}(t-)) \cdot \mathrm{d}w(t)$$

utilizând integrala Itô „$\cdot$“.

Pentru fiecare interval de continuitate $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ (făcând un abuz, variabilele $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ sunt omise) asociem următorul sistem de ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice de tip parabolic

$$(1.2.2) \qquad \begin{cases} \mathrm{d}_t\psi(t,x) + [\partial_x\psi(t,x)]\, f_1(x)\varphi_1(\psi(t,x))\mathrm{d}t + \\ \qquad\qquad + [\partial_x\psi(t,x)]\, g(x)\widehat{\circ}\mathrm{d}w(t) = 0; \\ \psi(\theta_i, x) \ = F_2\left[-\varphi_2\left(\psi\left(\theta_i-, x\right)\right)\delta y\left(\theta_i\right)\right]\left(\psi\left(\theta_i-, x\right)\right), \\ \qquad\qquad i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}; \\ \psi(0, x) \ = x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

unde $F_2(\sigma)[z]$, pentru $\sigma \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$, este curentul global generat de câmpul vectorial complet $\{f_2\}$.

Integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$ “ din (1.2.2) se calculează astfel:

$$(\beta) \qquad h(t,x)\widehat{\circ}\mathrm{d}w(t) = h(t,x) \cdot \mathrm{d}w(t) - \frac{1}{2}\partial_x h(t,x)g(x)\mathrm{d}t,$$

utilizând integrala Itô „$\cdot$“.

Problema (I). În ipotezele (A1) şi (A2) există o soluţie $\mathcal{F}^t-$ adaptată $\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$(1.2.3) \qquad \widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = x,\ t \in [0,T],\ \psi(0,x) = x \in \mathbb{R}^n;$$

$$(1.2.4) \qquad \{\psi(t,x) :\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n\} \ \text{ este aplicaţie continuă;}$$

$$(1.2.5) \quad \{\psi(t,x) :\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n\} \ \text{ este aplicaţie continuu diferenţiabilă}$$

de ordinul 2 în raport cu $x \in \mathbb{R}^n$, care satisface ecuaţia cu derivate parţiale neliniară stochastică de tip parabolic dată în (1.2.2), $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Problema (II). Utilizând soluţia unică $\{\lambda = \psi(t,x)\}$ a Problemei (I), descriem evoluţia valorii medii condiţionate

$$(1.2.6) \qquad v_i(t,x) = E_1\left\{h\left(z_\psi(T;t,x)\right) \mid \psi(t,x)\right\},\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

pentru orice $h \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$ şi $i \in \{0, 1, 2, \ldots N-1\}$ unde $C_p^2(\mathbb{R}^n)$ reprezintă spaţiul funcţiilor continuu diferenţiabile de ordinul 2 astfel încât h, $\partial_{x_i}h$, $\partial^2_{x_i x_j}h$ satisfac o condiţie de creştere polinomială pentru $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aici $\{z_\psi(s;t,x) : s \in [t,T]\}$ este soluţia unică a următoarei ecuaţii diferenţiale stochastice non-Markoviene cu salturi

$$(1.2.7)\qquad \begin{cases} \mathrm{d}_s z = [f_1(z(s-))\varphi_1\left(\psi(t,x)\right)\mathrm{d}s + f_2(z(s-))\varphi_2(\psi(t,x))\delta y(s)] + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + g(z(s-))\circ \mathrm{d}w(s); \\ z(t) = x, \quad s \in [t,T]. \end{cases}$$

Observaţia 1.2.1. *Utilizând ipoteza (A1), soluţia unică* $\{\widehat{x}_\varphi(t;\lambda)\}$ *a ecuaţiei diferenţiale stochastice* (1.2.1) *poate fi reprezentată astfel*

$$(1.2.8)\qquad \widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = G(w(t))\circ F_1\left(\tau_1(t,\lambda)\right)\circ F_2\left(\tau_2(t,\lambda)\right)[\lambda],\ t\in[0,T],\ \lambda\in\mathbb{R}^n,$$

unde $G(\sigma)[z]$ *şi* $F_i(\sigma)[z]$ *sunt curenţii globali generaţi de câmpurile vectoriale complete* $\{g\}$ *şi respectiv* $\{f_i\}$, *iar* $\tau_1(t,\lambda) = \varphi_1(\lambda)t$, $\tau_2(t,\lambda) = \varphi_2(\lambda)y(t)$. *Reprezentarea integrală* (1.2.8) *ne ajută să înlocuim* $\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = x$ *prin următoarele ecuaţii integrale*

$$(1.2.9)\qquad \lambda = V(t,x;\lambda) := F(-\tau(t,\lambda))\left[G(-w(t))[x]\right],$$

unde $F\left(\sigma_1,\sigma_2\right)[z] \overset{\text{def}}{=} F_1\left(\sigma_1\right)\circ F_2\left(\sigma_2\right)[z]$ *şi* $\tau(t,\lambda) = (\tau_1(t,\lambda),\tau_2(t,\lambda))$.

Prin calcul direct şi folosind ipoteza (A2), *obţinem*

$$(1.2.10)\qquad |\partial_\lambda V(t,x;\lambda)| \le \rho \in [0,1),\ \text{for any } x,\lambda\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,T],$$

care ne permite să utilizăm teorema de punct fix a lui Banach pentru a rezolva ecuaţiile integrale (1.2.9).

În acest sens, soluţia unică a ecuaţiilor (1.2.9) *poate fi găsită ca o compunere*

$$(1.2.11)\qquad \psi(t,x) = \widehat{\psi}\left(t,\widehat{z}(t,x)\right),$$

unde $\widehat{z}(t,x) \overset{\text{def}}{=} G(-w(t))[x]$, $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$, *este un proces continuu şi* $\mathcal{F}_1^t-$*adaptat.*

Pe de altă parte, pentru fiecare $z\in\mathbb{R}^n$, *procesul neted pe porţiuni şi* $\mathcal{F}_2-$*măsurabil* $\left\{\widehat{\psi}(t,z)\in\mathbb{R}^n : t\in[0,T]\right\}$ *se găseşte ca soluţia unică a următoarelor ecuaţii integrale cu salturi*

$$(1.2.12)\qquad \lambda = \widehat{V}(t,z;\lambda) := F(-\tau(t,\lambda))[z],\ t\in[0,T],\ z\in\mathbb{R}^n.$$

Aici $\tau(t,\lambda) = (\tau_1(t,\lambda),\tau_2(t,\lambda))$ *şi* $F\left(\sigma_1,\sigma_2\right)[z]$ *sunt definite în* (1.2.9).

Lema 1.2.1. *În ipotezele* (A1) *and* (A2), *există o soluţie unică*

$$\left\{\lambda = \widehat{\psi}(t,z)\in\mathbb{R}^n : t\in[0,T],\ z\in\mathbb{R}^n\right\}$$

a ecuaţiei (1.2.12)*, care este continuu diferenţiabilă de ordinul* 2 *în raport cu* $z \in \mathbb{R}^n$*. În plus, sunt adevărate următoarele ecuaţii integrale cu salturi:*

$$\begin{cases} \widehat{\psi}(t,z) = \widehat{V}\left(t,z;\widehat{\psi}(t-,z)\right),\ t\in[0,T],\ \widehat{\psi}(0,z)=z\in\mathbb{R}^n; \\ \widehat{\psi}(\theta_i,z)= \widehat{V}\left(\theta_i,z;\widehat{\psi}\left(\theta_i-,z\right)\right) = \\ \qquad = F_2\left[-\varphi_2\left(\widehat{\psi}(\theta_i-,z)\right)\delta y(\theta_i)\right]\left(\widehat{\psi}\left(\theta_i-,z\right)\right), \end{cases} \tag{1.2.13}$$

unde $\left\{\lambda = \widehat{\psi}\left(\theta_i-,z\right)\right\}$ *este soluţia unică a ecuaţiilor integrale* $\lambda = \widehat{V}\left(\theta_i-,z;\lambda\right)$*,* $i\in\{0,1,\ldots,N-1\}$*.*

Demonstraţie. Soluţia unică $\left\{\lambda = \widehat{\psi}\left(t,z\right)\right\}$ care satisface ecuaţiile (1.2.13) se găseşte ca limita şirului de aproximări standard $\{\lambda_k(t,z)\}_{k\geq 0}$ construit astfel:

Definim

$$\lambda_0(t,z)=z,\ \lambda_{k+1}(t,z)=\widehat{V}\left(t,z;\lambda_k\left(t-,z\right)\right),\ k\geq 0,\ t\in[0,T], \quad z\in\mathbb{R}^n. \tag{1.2.14}$$

Utilizând ipoteza (A2), obţinem că $\{\lambda_k(t,z)\}_{k\geq 0}$ este şir Cauchy care satisface

$$\begin{cases} \left|\lambda_{k+1}(t,z)-\lambda_k(t,z)\right| \leq \rho^k\cdot\left|\lambda_1(t-,z)-\lambda_0(t-,z)\right|; \\ \widehat{\psi}(t,z) = \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k(t,z),\ \widehat{\psi}(t-,z) = \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k(t-,z), \end{cases} \tag{1.2.15}$$

pentru orice $k\geq 0$, $t\in[0,T]$ şi $z\in\mathbb{R}^n$.

Ca o consecinţă directă a Lemei 2.2.1, obţinem

Lema 1.2.2. *În aceleaşi ipoteze* (A1) *şi* (A2)*, considerăm soluţia unică*

$$\left\{\lambda=\widehat{\psi}(t,z)\in\mathbb{R}^n : t\in[0,T],\ z\in\mathbb{R}^n\right\},$$

care satisface ecuaţiile integrale (1.2.13)*. Atunci*

$$\left\{\widehat{\psi}(t,z)\in\mathbb{R}^n : t\in[\theta_i,\theta_{i+1}),\ z\in\mathbb{R}^n\right\}$$

este aplicaţie continuu diferenţiabilă în raport cu $z\in\mathbb{R}^n$ *(de ordinul doi) şi respectiv cu* $t\in[\theta_i,\theta_{i+1})$ *(de ordinal întâi). În plus, sunt adevărate următoarele ecuaţii cvasiliniare (Hamilton-Jacobi) cu salturi*

$$\begin{cases} \partial_t\widehat{\psi}(t,z) + \left[\partial_z\widehat{\psi}(t,z)f_1(z)\right]\varphi_1\left(\widehat{\psi}(t,z)\right) = 0,\ t\in[\theta_i,\theta_{i+1}); \\ \widehat{\psi}(\theta_i,z) = F_2\left[-\varphi_2\left(\widehat{\psi}(\theta_i-,z)\right)\delta y(\theta_i)\right]\left(\widehat{\psi}\left(\theta_i-,z\right)\right); \\ \widehat{\psi}(0,z)=z\in\mathbb{R}^n,\ i\in\{0,1,\ldots,N-1\}. \end{cases} \tag{1.2.16}$$

Observaţia 1.2.2. *În ipotezele* (A1) *şi* (A2)*, soluţia pentru Problema (I) va fi*

$$\psi(t,x)=\widehat{\psi}\left(t,\widehat{z}(t,x)\right),\ t\in[\theta_i,\theta_{i+1}),\ x\in\mathbb{R}^n,\ i\in\{0,1,\ldots,N-1\}, \tag{1.2.17}$$

unde $\left\{\widehat{\psi}(t,z)\right\}$ *este definită în Lema 2.2.2, iar procesul continuu şi* $\mathcal{F}_1^t-$ *adaptat* $\{\widehat{z}(t,x)\}$ *este dat de*

$$\widehat{z}(t,x)\overset{\text{def}}{=}G(-w(t))[x]\overset{\text{not}}{=}H(w(t))[x],\ t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.2.18}$$

Procesul continuu $\{\widehat{z}(t,x)\}$ satisface o ecuaţie cu derivate parţiale stochastică de tip parabolic descrisă în

Lema 1.2.3. *Presupunem că* $g\in\left(C_b\cap C_b^1\cap C^2\right)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *şi definim procesul continuu* $\widehat{z}(t,x)=G\left(-w(t)\right)[x]\overset{\text{not}}{=}H(w(t))[x],\ t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^n$ *(vezi* (1.2.18)*). Atunci următoarea ecuaţie cu derivate parţiale stochastică de tip parabolic este adevărată*

$$\begin{cases} d_t\widehat{z}(t,x)+[\partial_x\widehat{z}(t,x)\cdot g(x)]\,\widehat{\circ}\,dw(t)=0,\ t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^n;\\ \widehat{z}(0,x)=x,\end{cases} \tag{1.2.19}$$

unde integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$*“ este calculată ca în formula* (β)*.*

Evoluţia procesului $\psi(t,x)\overset{\text{def}}{=}\widehat{\psi}\left(t,\widehat{z}(t,x)\right)$, $t\in[0,T]$ va fi descrisă în

Lema 1.2.4. *În ipotezele* (A1) *şi* (A2)*, considerăm procesul continuu şi* $\mathcal{F}^t$*- adaptat*

$$\left\{\psi(t,x)\overset{\text{def}}{=}\widehat{\psi}\left(t,\widehat{z}(t,x)\right):\ t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^n\right\}, \tag{1.2.20}$$

unde $\left\{\widehat{\psi}(t,z)\right\}$ *este construit în Lema 2.2.2 şi* $\{\widehat{z}(t,x)\}$ *este descris în Lema 2.2.3.*

Atunci va fi adevărat următorul sistem de ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice

$$\begin{cases} d_t\psi(t,x)+\partial_z\widehat{\psi}\left(t,\widehat{z}(t,x)\right)f_1\left(\widehat{z}(t,x)\right)\varphi_1\left(\psi(t,x)\right)dt+\\ \qquad\qquad +\left[\partial_x\psi(t,x)\cdot g(x)\right]\widehat{\circ}\,dw(t)=0,\ t\in[\theta_i,\theta_{i+1});\\ \psi\left(\theta_i,x\right)=\widehat{\psi}\left(\theta_i,\widehat{z}\left(\theta_i,x\right)\right)=\\ \qquad\qquad =F_2\left[-\varphi_2\left(\psi\left(\theta_i-,x\right)\right)\delta y\left(\theta_i\right)\right]\left(\psi\left(\theta_i-,x\right)\right);\\ \psi(0,x)\ \ =x\in\mathbb{R}^n, i\in\{1,2,\ldots,N-1\},\end{cases} \tag{1.2.21}$$

unde integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$*“ este calculată ca în formula* (β)*.*

3.1.3. Soluţii pentru Problemele (I) şi (II)

Cu aceleaşi notaţii ca în paragraful 2, descrierea completă a procesului continuu pe porţiuni $\psi(t,x) \overset{\text{def}}{=} \widehat{\psi}\,(t,\widehat{z}(t,x))$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ (vezi Lema 1.2.4) va fi dată asemănător ca în ecuaţiile cu derivate parţiale stochastice din (1.2.2) menţionată în Problema (I).

Teorema 1.3.1. *(soluţie pentru Problema (I)). În aceleaşi ipoteze* (A1) *şi* (A2)*, considerăm procesul continuu pe porţiuni şi* $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2$*- adaptat* $\psi(t,x) = \widehat{\psi}\,(t,\widehat{z}(t,x))$*,* $t \in [0,T]$*,* $x \in \mathbb{R}^n$*, definit în Lema 1.2.4. Atunci sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice dat în* (1.2.21) *este echivalent cu sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale stochastice de tip parabolic definit de* (1.2.2) *din Problema* (I)*.*

Demonstraţie Concluziile teoremei rezultă din lema 1.2.4 şi utilizând ipoteza (A1).

Soluţia Problemei (II) se va baza pe reprezentarea integrală a soluţiilor care satisfac ecuaţia diferenţială stochastica (1.2.7). Mai precis,

$$\begin{aligned} z_\psi(T;t,x) =& G(w(T)-w(t)) \circ F_2\left(\varphi_2\left(\psi(t,x)\right)[y(T)-y(t)]\right) \circ \\ & \circ F_1\left(\varphi_1\left(\psi(t,x)\right)(T-t)\right)[x], \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

pentru orice $0 \le t < T$, $x \in \mathbb{R}^n$, unde $\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n$ a fost obţinut în teorema 1.3.1.

Observaţia 1.3.1. . *Observăm că* $z_\psi(T;t,x)$ *din* (1.3.1) *şi* $h\left(z_\psi(T;t,x)\right)$*, unde* $h \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$*, sunt aplicaţii continue de vectorii aleatori independenţi* $z_1 := w(T) - w(t)$ *(*z_1 *este independent de* $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2$*) şi respectiv* $z_2 := \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n$ *(*z_2 *este* $\mathcal{F}^t$*− adaptat). Aceasta ne sugerează să calculăm valoarea medie condiţionată*

$$\begin{aligned} v_i(t,x) = \;& E_1\left\{h\left(z_\psi(T;t,x)\right) \mid \psi(t,x)\right\},\ t \in [\theta_i,\theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n, \\ & i \in \{0,1,\ldots,N-1\} \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

(vezi (1.2.6) *din Problema (II)), utilizând funcţionala parametrizată* $u_i(t,x;\lambda)$ *dată de*

$$u_i(t,x;\lambda) = E_1 h\left(z_\lambda(T;t,x)\right),\ t \in [\theta_i,\theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3.3}$$

Aici $z_\lambda(T;t,x)$ *se obţine din* (1.3.1) *prin inlocuirea vectorului aleator* $z_2 = \psi(t,x)$ *cu* $\lambda \in \mathbb{R}^n$*.*

Utilizând (1.3.3) *scriem* (1.3.2) *astfel*

$$(1.3.4) \qquad v_i(t,x) = u_i\left(t,x;\psi(t,x)\right),\ t\in[\theta_i,\theta_{i+1}),\ x\in\mathbb{R}^n,\ i\in\{0,1,\ldots,N-1\}.$$

În plus, $\{u_i(t,x;\lambda) : t\in[\theta_i,\theta_{i+1}),\ x\in\mathbb{R}^n\}$ *satisface o ecuaţia parabolică de tip retrogradă (ecuaţie Kolmogorov) pentru fiecare parametru* $\lambda\in\mathbb{R}^n$. *În particular, pentru* $i = N-1$ *obţinem*

$$(1.3.5) \qquad \begin{cases} u_{N-1}(T,x;\lambda) = h(x),\ x\in\mathbb{R}^n; \\ \partial_t u_{N-1}(t,x;\lambda) + L_\lambda\left(u_{N-1}\right)(t,x;\lambda) = 0,\ t\in[\theta_{N-1},T),\ x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Aici operatorul parabolic L_λ *este definit de*

$$(1.3.6) \qquad \begin{aligned} L_\lambda(u)(x) = &< \partial_x u(x),\ \varphi_1(\lambda) f_1(x) > + \\ &+ \frac{1}{2} < \left[\partial_x < \partial_x u(x),\ g(x) >\right],\ g(x) > . \end{aligned}$$

În general $u_i(t,x;\lambda)$ *satisface o ecuaţie Kolmogorov asemănătoare*

$$(1.3.7) \qquad \begin{cases} \partial_t u_i(t,x;\lambda) + L_\lambda(u_i)(t,x;\lambda) = 0,\ t\in[\theta_i,\theta_{i+1}),\ x\in\mathbb{R}^n; \\ u_i\left(\theta_{i+1}-,x;\lambda\right) = E_1 h\left(z_\lambda\left(T;\theta_{i+1}-,x\right)\right), \end{cases}$$

unde $z_\lambda\left(T;\theta_{i+1}-,x\right) = F_2\left(\delta y\left(\theta_{i+1}\right)\varphi_2(\lambda)\right)\left[z_\lambda\left(T;\theta_{i+1},x\right)\right]$.

Putem concluziona observaţiile şi calculele obţinute mai sus ca soluţie a Problemei (II).

Teorema 1.3.2. *(soluţia Problemei (II).) În ipotezele* (A1) *şi* (A2), *considerăm procesul continuu pe porţiuni şi* $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2$*-adaptat* $\{\psi(t,x)\}$ *definit în teorema 1.3.1. Asociem funcţionalele* $\{v_i(t,x\},\ i\in\{0,1,\ldots,N-1\}$, *ca în* (1.2.6) *(vezi Problema (II)). Considerăm şirul finit de ecuaţii parabolice de tip retrograd parametrizate şi soluţiile lor* $u_i(t,x;\lambda)$, $t\in[\theta_i,\theta_{i+1})$, $x\in\mathbb{R}^n$, $i\in\{0,1,\ldots,N-1\}$, *ca în* (1.3.3), (1.3.5) *şi* (1.3.6). *Atunci soluţia Problemei (II) este dată de (vezi* (1.3.4)*)*

$$(1.3.8) \quad v_i(t,x) = u_i\left(t,x;\psi(t,x)\right),\ t\in[\theta_i,\theta_{i+1}),\ x\in\mathbb{R}^n, i\in\{0,1,\ldots,N-1\}.$$

Observaţia 1.3.2. *Analiza prezentată aici se bazează pe presupunerea*

$$\{g, f_1, f_2\} \subseteq C_b\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$$

(g*,* f_1 *şi* f_2 *sunt funcţii continue mărginite).*

În cazul în care $g\in\left(C_b^1\cap C^2\right)\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$ *şi* $g\notin C_b\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$ *atunci trebuie introdus un timp de oprire arbitrar* $\widehat{\tau} = \inf\{t\in[0,T] : |w(t)| \geq N\}$.

Soluţia Problemei (I) va satisface o ecuaţie cu derivate parţiale neliniară stochastică utilizând un timp de oprire arbitrar $\widehat{\tau}$ deoarece

$$h(t,x)\widehat{\circ}dw(t) = \chi_{\widehat{\tau}}(t)h(t,x)\cdot \mathrm{d}w(t) - \frac{1}{2}\left[\chi_{\widehat{\tau}}(t)\partial_x h(t,x)g(x)\right]\mathrm{d}t$$

unde $\chi_{\widehat{\tau}}(t) = 1$ pentru $\widehat{\tau} \geq t$, şi $\chi_{\widehat{\tau}}(t) = 0$ for $\widehat{\tau} < t$.

3.2. Funcţionale şi curenţi gradient stochasticicu salturi nemărginite

3.2.1. Introducere

Subiectele analizate aici sunt legate de cele studiate în subcapitolul precedent unde au fost considerate numai salturi mărginite şi câmpurile vectoriale din partea de difuzie erau mărginite.

Problemele ((III) şi (IV)) pe care le studiem în acest subcapitol se bazează pe soluţia fundamentală $\lambda = \widehat{\psi}(t,z) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $z \in \mathbb{R}^n$, care satisface o ecuaţie Hamilton-Jacobi neliniară cu salturi nemărginite. Soluţia clasică, $\{\psi(t,x)\}$, a ecuaţiei cu derivate parţiale nelinară stochastică se costruieşte ca o compunere a soluţiei fundamentale $\left\{\widehat{\psi}(t,z)\right\}$ cu procesul $z = \widehat{z}(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ care este semimartingal local continuu.

Evoluţia funcţionalei $\{h\left(\psi(t,x)\right) : t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n\}$, $h \in \left(C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n)$, introdusă în Problema (III), este descrisă în Teorema **??** din paragraful 3.2.3.

În Problema (IV) este analizată o problemă de filtrare, incluzând şi parametrizarea funcţionalelor. Această problemă de filtrare este rezolvată în Teorema 2.3.2 din paragraful 3.2.3.

3.2.2. Preliminarii şi formularea problemelor

Considerăm două mulţimi de câmpuri vectoriale complete

$$\{f_1,\ldots,f_m\} \subseteq \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n),\ \{g_1,\ldots,g_m\} \subseteq \left(C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$$

şi funcţiile scalare netede $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\} \subseteq \left(C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n)$. Pe spaţiul de probabilitate $\{\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mathbb{P}_2\}$, definim procesul constant pe porţiuni $y\left(t,\omega_2\right) : [0,T]\times\Omega_2 \to \mathbb{R}^m$ care satisface $y\left(0,\omega_2\right) = 0$, $y\left(t,\omega_2\right) = y\left(\theta_i\left(\omega_2\right),\omega_2\right)$, $t \in \left[\theta_i\left(\omega_2\right),\theta_{i+1}\left(\omega_2\right)\right)$, $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$. Aici $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_N = T$ este o partiţie astfel încât $y_i\left(\omega_2\right) := y\left(\theta_i\left(\omega_2\right),\omega_2\right)$ sunt vectori aleatori $\mathcal{F}_2$-măsurabili.

Printr-un abuz de notaţie, în continuare, scriem simplu $y(t)$, $t \in [0,T]$.

Fie $\{\widehat{x}_\varphi(t;\lambda):\ t\in[0,T],\ \lambda\in\mathbb{R}^n\}$ curentul stochastic cu salturi nemărginite generat de următoarea ecuaţie diferenţială stochastică, ce conţine salturi

$$(2.2.1)\quad \begin{cases} d_t\widehat{x} = \sum_{j=1}^{m} f_j\left(\widehat{x}(t-)\right)[\varphi_j(\lambda)\mathrm{d}t + \delta y_j(t)] + \sum_{j=1}^{m} g_j\left(\widehat{x}(t-)\right)\circ \mathrm{d}w_j(t); \\ \widehat{x}(0) = \lambda\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,T],\ \delta y_j(t) = y_j(t) - y_j(t-),\ j\in\{1,\dots,m\}, \end{cases}$$

unde $\{w(t)\in\mathbb{R}^m : t\in[0,T]\}$ este procesul Wiener standard definit pe câmpul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega_1,\mathcal{F}_1\supseteq\{\mathcal{F}_1^t\},\mathbb{P}_1\}$.

Integrala Fisk-Stratonovich „$\circ$“ se calculează astfel

$$g_j\left(\widehat{x}(t-)\right)\circ \mathrm{d}w_j(t) = \frac{1}{2}\left([\partial_x g_j]\, g_j\right)\left(\widehat{x}(t-)\right)\mathrm{d}t + g_j\left(\widehat{x}(t-)\right)\cdot \mathrm{d}w_j(t)$$

utilizând integrala Itô „$\cdot$“.

Pentru rezolvarea problemelor (III) şi (IV) (care vor fi formulate ulterior) avem nevoie de următoarele ipoteze:

$$\text{(i1)}\qquad \{f_1,\dots,f_m,g_1,\dots,g_m\}\ \text{comuta utilizând paranteza Lie.}$$

$$\text{(i2)}\qquad mTVK = \rho\in(0,1),$$

unde

$$V = \sup\{|\partial_x\varphi_1(x)|,\dots,|\partial_x\varphi_m(x)| : x\in\mathbb{R}^n\}\quad \text{şi}$$
$$K = \sup\{|f_1(x)|,\dots,|f_m(x)| : x\in\mathbb{R}^n\}.$$

În ipoteza (i1) soluţia unică ce satisface ecuaţia diferentială stochastică (2.2.1) are reprezentarea gradient

$$\widehat{x}_\varphi(t,\lambda) = G(w(t))\circ F(\tau(t,\lambda))[\lambda].$$

Aici $G(p,x) = G_1(t_1)\circ\ldots\circ G_m(t_m)[x]$, $F(p,x) = F_1(t_1)\circ\ldots\circ F_m(t_m)[x]$, $p = (t_1,\dots,t_m)\in\mathbb{R}^m$, sunt aplicaţiile difeomorfism corespunzătoare generate de curenţii globali G_j, F_j. Am notat cu $F_j(\sigma_j)[z]$ şi $G_j(\sigma_j)[z]$ curenţii globali generaţi de câmpurile vectoriale $\{f_j\}$ şi respectiv $\{g_j\}$, $j\in\{1,\dots,m\}$. În reprezentarea gradient de mai sus $\tau(t,\lambda) = (\tau_1(t,\lambda),\dots,\tau_m(t,\lambda))$, unde $\tau_j(t,\lambda) = \varphi_j(\lambda)t + y_j(t)$, $t\in[0,T]$.

În ipotezele (i1) şi (12) există o soluţie unică $\mathcal{F}^t := \mathcal{F}_1^t\times\mathcal{F}_2$ - adaptată $\lambda = \psi(t,x)$ care satisface ecuaţia integrală $\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = x,\ t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^n$.

Această soluţie este generată astfel încât să verifice următoarea ecuaţie cu derivate parţiale neliniară stochastică, ce conţine salturi

$$
(2.2.2)\qquad \begin{cases} d_t\psi(t,x) + [\partial_x\psi(t,x)]\left[\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\left(\psi(t,x)\right)f_j(x)\right]\mathrm{d}t + \\ \qquad + \sum_{j=1}^{m}\partial_x\psi(t,x)g_j(x)\widehat{\circ}\mathrm{d}w_j(t) = 0,\ t\in(\theta_i,\theta_{i+1})\,; \\ \psi(\theta_i,x) = F\left(-\delta y\left(\theta_i\right)\right)\left[\psi\left(\theta_i-,x\right)\right],\ i\in\{0,1,\ldots,N-1\}, \end{cases}
$$

unde integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$“ se calculează astfel

$$
h_j(t,x)\,\widehat{\circ}\,\mathrm{d}w_j(t) = -\frac{1}{2}\partial_x h_j(t,x)g_j(x)\mathrm{d}t + h_j(t,x)\cdot\mathrm{d}w_j(t)
$$

utilizând integrala Itô „$\cdot$“. Problemele pe care le vom studia se bazează pe ecuaţiile cu derivate parţiale (2.2.2) considerate, asociate cu soluţiile lor în sens slab (vezi Observaţia 2.2.3).

Problema (III)

(a) În ipotezele (i1) şi (12) există o soluţie unică şi $\mathcal{F}^t := \mathcal{F}_1^t\times\mathcal{F}_2$-adaptată $\lambda=\psi(t,x)$ care satisface ecuaţia curent

$$
(2.2.3)\qquad \begin{cases} \widehat{x}_\varphi(t,\lambda) = x, \\ t\in[0,T],\ \psi(0,x)=x,\ x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}
$$

(b) Descriem evoluţia funcţionalei

$$
u(t,x) = h\left(\psi(t,x)\right),\quad h\in\left(C_b^1\cap C^2\right)(\mathbb{R}^n),
$$

care include $u_k(t,x) = \psi_k(t,x)$, $k\in\{1,\ldots,n\}$, $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$, în care sunt implicate soluţiile ecuaţiilor (2.2.2) considerate în sens slab (vezi Observaţia 2.2.3).

Problema (IV)

Utilizând soluţia fundamentală $\{\lambda=\psi(t,x)\}$, descriem evoluţia valorii medii condiţionate

$$
(2.2.4)\qquad v_i(t,x) = E_1\left\{h\left(z_\psi(T;t,x)\right)\mid\psi(t,x)\right\},t\in[\theta_i,\theta_{i+1}),i=\overline{0,N-1},
$$

unde $h\in C_p^2(\mathbb{R}^n)$, iar $C_p^2(\mathbb{R}^n)$ reprezintă spaţiul funcţiilor continuu diferenţiabile de ordinul doi astfel încât h, $\partial_{x_i}h$, $\partial^2_{x_ix_j}h$, $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, satisfac o condiţie de creştere polinomială.

Aici $\{z_\psi((s;t,x) : s \in [t,T]\}$ este soluţia unică a ecuaţiei diferenţiale stochastice non-markoviene

$$\text{(2.2.5)} \quad \begin{cases} \mathrm{d}_s z = \sum_{j=1}^{m} f_j\left(z(s-)\right)\left[\varphi_j\left(\psi(t,x)\right)\mathrm{d}s + \delta y_j(s)\right] + \sum_{j=1}^{m} g_j\left(z(s-)\right) \circ \mathrm{d}w_j(s); \\ z(t) = x,\ s \in [t,T]. \end{cases}$$

Soluţia unică a ecuaţiilor curent (2.2.3) presupune reprezentarea gradient a lui $\{\widehat{x}_\varphi(t,\lambda)\}$ şi aceasta va fi stabilită în următoarea lemă.

Lema 2.2.1. *Presupunem că ipoteza* (i1) *este adevărată. Atunci curentul stochastic* $\{\widehat{x}_\varphi(t,\lambda) : t \in [0,T]\}$ *cu salturi nemărginite generat de ecuaţia diferenţială stochastica* (2.2.1) *poate fi reprezentat astfel*

$$\text{(2.2.6)} \qquad \widehat{x}_\varphi(t,\lambda) = F\left(\tau(t,\lambda)\right) \circ G\left(w(t)\right)[\lambda] = G\left(w(t)\right) \circ F\left(\tau(t,\lambda)\right)[\lambda],$$

unde $\tau(t,\lambda) = (\tau_1(t,\lambda),\ldots,\tau_m(t,\lambda))$, $\tau_j(t,\lambda) = t\varphi_j(\lambda) + y_j(t)$, $t \in [0,T]$.

Următorul pas constă în găsirea aplicaţiei inverse a difeomorfismului $\lambda \to \widehat{x}_\varphi(t,\lambda)$, adică să rezolvăm ecuaţia $\widehat{x}_\varphi(t,\lambda) = x$ în raport cu necunoscuta λ. Ţinând cont de formula (2.2.6) şi de proprietăţile curenţilor F_j, G_j (care sunt păstrate de F şi G), aceasta este echivalentă cu ecuaţia

$$F\left(\tau\left(t,\lambda\right)\right)[\lambda] = G\left(-w(t)\right)(x) := \widehat{z}(t,x).$$

Considerăm mai întâi ecuaţia $F\left(\tau\left(t,\lambda\right)\right)[\lambda] = z$, pentru $t \in [0,T]$ arbitrar şi $z \in \mathbb{R}^n$, care poate fi rescrisă astfel

$$\text{(2.2.7)} \qquad F\left(-\tau\left(t,\lambda\right)\right)[z] = \lambda.$$

Lema 2.2.2. *Preupunem că ipotezele* (i1) *şi* (i2) *sunt îndeplinite. Atunci ecuaţia* (2.2.7) *admite soluţie unică dată de aplicaţia netedă pe porţiuni*

$$\widehat{\psi}(t,z) \in C^{1,2}\left([\theta_i,\theta_{i+1}) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\right),\ \ i \in \{0,1,\ldots,N-1\},$$

astfel încât

$$\text{(2.2.8)} \quad \left|\widehat{\psi}(t,z) - z\right| \le \frac{K}{1-\rho}\left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi_j(z)|\,T + |y_j(t-)|\right),\ t \in [0,T],\ z \in \mathbb{R}^n.$$

În plus, sunt satisfăcute următoarele ecuaţii integrale

$$\text{(2.2.9)} \qquad \begin{cases} \widehat{\psi}(t,z) = \widehat{V}\left(t,z;\widehat{\psi}(t-,z)\right), \\ \widehat{\psi}(t-,z) = \widehat{V}\left(t-,z;\widehat{\psi}(t-,z)\right),\ t \in [0,T], \end{cases}$$

unde $\widehat{V}(t,z;\lambda) := F(-\tau(t,\lambda))[z]$ *şi* $\left\{\widehat{\psi}(t,z)\right\}$ *este unica soluţie care satisface ecuaţiile Hamilton-Jacobi*

$$(2.2.10)\quad \begin{cases} \partial_t\widehat{\psi}(t,z) + \left[\partial_z\widehat{\psi}(t,z)\right]\left(\sum\limits_{j=1}^{m} f_j(z)\varphi_j\left(\widehat{\psi}(t,z)\right)\right) = 0,\ t\in(\theta_i,\theta_{i+1});\\ \widehat{\psi}(\theta_i,z) = F(-\delta y(\theta_i))\left[\widehat{\psi}(\theta_i-,z)\right],\ i\in\{0,1,\dots,N-1\};\\ \widehat{\psi}(0,z) = z\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Demonstraţie Construim şirul de aproximări

$\{\lambda_k(t,z)\}_{k\geq 0}$ astfel

$$(2.2.11)\qquad \lambda_0(t,z) = z,\ \lambda_{k+1}(t,z) = \widehat{V}(t,z;\lambda_k(t-,z))$$

cu proprietăţile

$$|\lambda_{k+1}(t,z) - \lambda_k(t,z| \leq \rho^k\,|\lambda_1(t-,z) - \lambda_0(t-,z)|;$$
$$\lambda_{k+1}(t-,z) = \widehat{V}(t-,z;\lambda_k(t-,z)),\ k\geq 0,\ t\in[0,T], z\in\mathbb{R}^n.$$

Soluţia unică a ecuaţiei (2.2.7) se obţine prin trecere la limită în (2.2.11) după $k\to\infty$, adică $\widehat{\psi}(t,z) = \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k(t,z)$.

Mai departe, ţinând cont de ipoteza (12) se aplică teorema de punct fix a lui Banach.

Observaţia 2.2.1. *Ecuaţia curent* (2.2.2) *(vezi Problema (III)) are soluţie unică* $\lambda = \psi(t,x)$ *care poate fi reprezentată astfel* $\psi(t,x) = \widehat{\psi}(t,\widehat{z}(t,x))$*, unde reamintim că* $\widehat{z}(t,x) := G(-w(t))[x]$*,* $t\in[0,T]$ *este un process continuu şi* $\mathcal{F}_1^t$*-adaptat. Mai mult, aplicaţia* $\psi(t,x)$ *este netedă în raport cu* $t\in(\theta_i,\theta_{i+1})$*,* $x\in\mathbb{R}^n$ *şi este* $\mathcal{F}^t := \mathcal{F}_1^t\times\mathcal{F}_2$*-adaptată, pentru x fixat.*

Observaţia 2.2.2. *Observăm că*

$$H(p,x) := G_1(-t_1)\circ\ldots\circ G_m(-t_m)[x],\ p = (t_1,\dots,t_m)\in\mathbb{R}^m$$

este soluţie a următoarelor ecuaţii Hamilton-Jacobi

$$(2.2.12)\qquad \partial_{t_i}H(p,x) + \partial_x H(p,x)g_i(x) = 0,\ i\in\{1,\dots,m\}.$$

Demonstrăm această formulă pentru $m=1$*. Evident* $H_1(t,G_1(t,x)) = x$ *şi diferenţiind în raport cu t obţinem*

$$\partial_t H_1(t,G(t,x)) + [\partial_x H_1(t,G_1(t,x))]\,g_1(G_1(t,x)) = 0.$$

Înlocuind x cu $H_1(t,x)$ *obţinem ecuaţia* (2.2.12)*.*

Observaţia 2.2.3. *Evoluţia procesului* $\widehat{z}(t,x) = G(-w(t))[x] \overset{\text{not}}{=} H(w(t),x)$, $t \in [0,T]$ *se obţine aplicând regula de derivare stochastică şi utilizând* (2.2.12).

Aplicând direct regula de derivare stochastică va rezulta procesul

$$\widehat{z}_N(t,x) = H\left(w\left(t \wedge \tau_N\right), x\right),\ t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2.13}$$

care este semimartingal şi unde $\tau_N = \inf\{t \in (0,T] : |w(t)| \geq N\}$, $N \geq 1$, *este un şir crescător de timpi de stopare care satisface* $\lim\limits_{N\to\infty} \tau_N = T$.

Obţinem următoarea ecuaţie diferenţială stochastică

$$\begin{cases} d_t\widehat{z}_N = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \chi_{\tau_N}(t)\partial_{t_j} H(w(t),x) \circ dw_j(t),\ t \in [0,T]; \\ z_N(0,x) = x, \end{cases}$$

unde $\chi_{\tau_N}(t) = 1$ *pentru* $\tau_N \geq t$ *şi* $\chi_{\tau_N}(t) = 0$, *pentru* $\tau_N < t$.

Aici integrala Fisk-Stratonovich „$\circ$*" se calculează astfel*

$$h^N(w(t),x) \circ dw_j(t) = \frac{1}{2}\partial_{t_j} h^N(w(t),x)dt + h^N(w(t),x) \cdot dw_j(t)$$

utilizând integrala Itô „$\cdot$*".*

Pe de altă parte, utilizând ecuaţiile Hamilton-Jacobi (2.2.12) *(vezi Remarca 2.2.2), ecuaţia diferenţială stochastică satisfăcută de* $\{\widehat{z}_N(t,x)\}$ *se rescrie ca o ecuaţie cu derivate parţiale stochastică liniară*

$$\begin{cases} d_t\widehat{z}_N(t,x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \chi_{\tau_N}(t)\left[\partial_x\widehat{z}_N(t,x)g_j(x)\right]\widehat{\circ} dw_j(t) = 0,\ t \in [0,T]; \\ \widehat{z}_N(0,x) = x,\ \lim\limits_{N\to\infty} \widehat{z}_N(t,x) = \widehat{z}(t,x),\ t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Aici integrala Fisk-Stratonovich „$\widehat{\circ}$*" este calculată astfel*

$$h_j^N(t,x)\widehat{\circ}\mathrm{d}w_j(t) = -\frac{1}{2}\partial_x h_j^N(t,x)g(x)dt + h_j^N(t,x) \cdot dw_j(t)$$

utilizând integrala Itô „$\cdot$*".*

Cum $h_j^N(t,x) := \chi_{\tau_N}(t)\left[\partial_x\widehat{z}_N(t,x)g_j(x)\right]$ *şi* $\partial_x h_j^N(t,x)$, $t \in [0,T]$ *sunt procese mărginite, integrala stochastică implicată în ecuaţia cu derivate parţiale stochastică* (2.2.14)*) capătă sens pentru orice* $N \geq 1$.

Reamintim că $\lim\limits_{N\to\infty} \tau_N = T$, $\lim\limits_{N\to\infty} \widehat{z}_N(t,x) = \widehat{z}(t,x)$ *şi bazându-ne pe ecuaţia cu derivate parţiale* (2.2.14), *rezultă că* $\{\widehat{z}(t,x)\}$ *satisface ecuaţia cu derivate* *parţiale stochastică*

$$\text{(2.2.15)} \qquad \begin{cases} d_t\widehat{z}(t,x) + \sum_{j=1}^{m} [\partial_x \widehat{z}(t,x) g_j(x)] \widehat{\circ} dw_j(t) = 0, \ t \in [0,T]; \\ \widehat{z}(0,x) = x \end{cases}$$

in sens slav, unde $\{\partial_x \widehat{z}(t,x)\}$ *şi* $\{\partial_x^2 \widehat{z}(t,x)\}$, $t \in [0,T]$ *sunt doar semimartingale locale. Aceasta ne conduce la ecuaţia cu derivate parţiale neliniară stochastică* (2.2.2) *implicată în concluzia* (2.2.3) *a Problemei (III). Mai precis, soluţia unica* $\lambda = \psi(t,x)$ *a ecuaţiilor curent* (2.2.3) *va fi dată de* $\psi(t,x) = \widehat{\psi}(t, \widehat{z}(t,x))$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ *(vezi Observaţia 2.2.1) unde*

$$\left\{\widehat{\psi}(t,z)\right\} \in C^{1,2}\left([\theta_i, \theta_{i+1}) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\right), \quad i \in \{0,1,\dots,N-1)$$

este găsită în Lema 2.2.2.

Definiţia 2.2.1. *Spunem că* $\{\psi(t,x)\}$ *satisface ecuaţia cu derivate parţiale neliniară stochastică* (2.2.2) *în sens slab dacă* $\psi_N(t,x) := \widehat{\psi}(t, \widehat{z}_N(t,x))$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ *(vezi* $\widehat{z}_N(t,x) = H\left(w\left(t \wedge \tau_n\right), x\right)$, $N \geq 1$*) satisface* (2.2.2) *pentru orice* $t \in [0, \tau_N]$ *şi fiecare* $N \geq 1$.

Definiţia 2.2.2. *Spunem că* $\widehat{z}(t,x) := H(w(t), x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ *satisface ecuaţia cu derivate parţiale stochastică* (2.2.15) *în sens slab dacă* $\widehat{z}_N(t,x) = H\left(w\left(t \wedge \tau_N\right), x\right)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ *satisface* (2.2.15) *pentru orice* $t \in [0, \tau_N]$ *şi pentru fiecare* $N \geq 1$, *unde* $\tau_N = \inf\{t \in (0,T] : |w(t)| \geq N\}$ *şi* $\lim_{N \to \infty} \tau_N = T$.

3.2.3 Soluţii pentru Problemele (III) şi (IV)

În aceleaşi ipoteze ca în paragraful precedent construim soluţia unică $\{\lambda = \psi(t,x)\}$ a Problemei (III) care se bazează pe Lema 2.2.1 şi Observaţia 2.2.3 din paragraful anterior.

Teorema 2.3.1. *Presupunem că ipotezele* (i1) *şi* (i2) *sunt îndeplinite şi considerăm aplicaţia netedă pe porţiuni* $\left\{\widehat{\psi}(t,z) : t \in [0,T],\, z \in \mathbb{R}^n\right\}$ *construita în Lema 2.2.2. Definim procesul neted pe porţiuni şi* $\mathcal{F}^t := \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2$*-adaptat* $\psi(t,x) := \widehat{\psi}(t, \widehat{z}(t,x))$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, *unde* $\widehat{z}(t,x) := H(w(t),x)$, $t \in [0,T]$, *satisface ecuaţia cu derivate parţiale stochastică* (2.2.15) *în sens slab. Atunci* $\{\lambda = \psi(t,x)\}$ *este soluţia unică a ecuaţiei curent* (2.2.3) *şi satisface ecuaţia cu derivate parţiale neliniară stochastică* (2.2.2) *în sens slab.*

În plus, funcţionala $u(t,x) := h(\psi(t,x))$, $h \in (C_b^1 \cap C^2)(\mathbb{R}^n)$, *este netedă şi verifică următoarea ecuaţie cu derivate parţiale în sens slab (vezi* $u_N(t,x) := h(\psi_N(t,x))$ *satisface* (2.3.1) *pentru* $t \in [0,T]$ *şi fiecare* $N \geq 1$)

$$(2.3.1) \qquad \begin{cases} d_t u(t,x) + < \partial_x u(t,x), \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\psi(t,x)) f_j(x) > dt + \\ \qquad + \sum_{j=1}^{m} < \partial_x u(t,x), g_j(x) > \widehat{\circ} dw_j(t) = 0; \\ u(0,x) = h(x), \ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Demonstraţie. Concluziile teoremei rezultă din Lema 2.2.2 şi din condiţiile Cauchy (vezi (2.2.10)).

Pentru a obţine concluzia (b) a Problemei (III), avem nevoie să verificăm că $u(t,x) := h(\psi(t,x))$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, satisface ecuaţia cu derivate parţiale stochastică (2.3.1) în sens slab. Acest lucru va fi realizat cu aceeaşi strategie folosită pentru a obţine că $\{\lambda = \psi(t,x)\}$ satisface ecuaţia cu derivate parţiale stochastică (2.2.2) în sens slab.

Observaţia 2.3.1. *Soluţia Problemei (IV) se obţine utilizând soluţia ecuaţiei diferenţiale stochastice non-Markoviane* (2.2.5)*. Mai precis, în aceleaşi ipoteze* (i1) *şi* (i2)*, rezultă*

$$(2.3.2) \quad z_\psi(T;t,x) = G(w(T) - w(t)) \circ F[(T-t)\varphi(\psi(t,x)) + y(T) - y(t)][x]$$

pentru orice $0 \leq t < T$, $x \in \mathbb{R}^n$, *unde* $\{\psi(t,x)\}$ *este dat în Teorema 2.3.1*

Observăm că $z_\psi(T;t,x)$ din (2.3.2) şi $h(z_\psi(T;t,x))$, $h \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$ sunt funcţii continue de vectorii aleatori independenţi $z_1 := w(T) - w(t)$ (z_1 este independent de $F^t := \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2$) şi $z_2 := \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n$ care este $\mathcal{F}^t$-adapted.

Aceasta sugerează să calculăm valoarile medii condiţionate

$$(2.3.3) \qquad v_i(t,x) = E_1\{h(z_\psi(T;t,x)) \mid \psi(t,x)\}, \ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

$i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ (vezi (2.2.4) din Problema (IV)) utilizând funcţionala parametrizată $u_i(t,x;\lambda)$ dată de

$$(2.3.4) \qquad u_i(t,x;\lambda) = E_1 h(z_\lambda(T;t,x)), \ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}), \ x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Aici $z_\lambda(T;t,x)$ se obţine din (2.3.2) prin înlocuirea vectorului aleator $z_2 = \psi(t,x)$ cu $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Utilizând (2.3.4), scriem (2.3.3) astfel

$$v_i(t,x) = u_i(t,x;\psi(t,x)),\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n,\ i \in \{0,1,\ldots,N-1\}. \tag{2.3.5}$$

În plus, $\{u_i(t,x;\lambda) : t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n\}$ satisface o ecuaţie parabolică de tip retrograd (ecuaţie Kolmogorov) pentru fiecare parametru $\lambda \in \mathbb{R}^n$ şi, în particular, pentru $i = N-1$, obţinem

$$\begin{cases} u_{N-1}(T,x;\lambda) = h(x),\ x \in \mathbb{R}^n; \\ \partial_t u_{N-1}(t,x;\lambda) + L_\lambda(u_{N-1})(t,x;\lambda) = 0,\ t \in [\theta_{N-1}, T),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Aici operatorul parabolic L_λ este definit astfel

$$\begin{aligned} L_\lambda(u)(x) =&< \partial_x u(x), \sum_{j=1}^m \varphi_j(\lambda) f_j(x) > + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m < [\partial_x < \partial_x u(x), g_j(x)],\ g_j(x) > . \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

În general, $u_i(t,x;\lambda)$ satisface o ecuaţie Kolmogorov de forma

$$\begin{cases} \partial_t u_i(t,x;\lambda) + L_\lambda(u_i)(t,x;\lambda) = 0,\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n; \\ u_i(\theta_{i+1}-, x;\lambda) = E_1 h(z_\lambda(T;\theta_{i+1}-, x)), \end{cases} \tag{2.3.8}$$

unde $z_\lambda(T;\theta_{i+1}-;x) = F(\delta y(\theta_{i+1}))[z_\lambda(T;\theta_{i+1},x)]$.

Concluzionăm observaţiile şi calculele de mai sus ca soluţie pentru Problema (IV) în următoarea teoremă

Teorema 2.3.2. *(soluţie pentru Problema (IV)). În ipotezele* (i1) *şi* (i2)*, considerăm procesul continuu pe porţiuni şi $\mathcal{F}^t := \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2$-adaptat $\{\psi(t,x)\}$ definit în Teorema 2.3.1. Asociem funcţionalele $\{v_i(t,x)\}$, $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ ca în* (2.2.4) *(vezi Problema (IV)).*

Considerăm şirul finit de ecuaţii parabolice de tip retrograd parametrizate şi soluţiile lor $\{u_i(t,x;\lambda)\}$, $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ ca în (2.3.6) – (2.3.8)*. Atunci soluţia Problemei (IV) este dată de (vezi* (2.3.5)*)*

$$v_i(t,x) = u_i(t,x;\psi(t,x)),\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n,\ i \in \{0,1,\ldots,N-1\}.$$

CAPITOLUL 4

STRATEGII AUTOFINANŢATE PENTRU O OPŢIUNE DE TIP EUROPEAN

În acest capitol este dată o teoremă de reprezentare a valorii finale nenetede pentru soluţiile unui sistem de ecuaţii diferenţiale stochastice cu ajutorul unei soluţii slabe a ecuaţiei de tip retrograd Kolmogorov şi se prezintă o aplicaţie la o problemă de control optimal din matematici financiare, strategia optimă fiind derivata în sens slab a soluţiei Kolmogorov de-a lungul soluţiei $x(t)$. În subcapitolul 4.2 se demonstrează rezultate de acelaşi tip dar pentru o problemă mult mai complicată de filtrare stochastică neliniare.

4.1. Strategii admisibile sub formă de feed-back pentru o opţiune de tip European

Rezultatele din acest subcapitol sunt inspirate în principal din lucrarea [27]

4.1.1. Introducere

Pentru o funcţie Lipschitz continuă $\varphi(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care admite gradient în sens slab $\partial_x\varphi(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ asociem variabila aleatoare $\varphi(x(T))$, unde $x(t)$, $t \in [0,T]$, este soluţia unui sistem diferenţial stochastic cu coeficienţi funcţii Lipschitz continue şi coeficienii de difuzie funcţii continuu diferenţiabile de ordinul I. Aceasta arată că variabila aleatoare $\varphi(x(T))$ poate fi reprezentată ca valoare finală $S\left(T, x(T)\right) = \varphi(x(T))$ utilizând funcţia continuă $S(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ care admite gradient în sens slab $\partial_x S(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ şi $S(t,x(t))$, $t \in [0,T]$ satisface un sistem de ecuaţii diferenţiale stochastice de ordinul 1 (diferenţiala stochastică $d_t\left[S\left(t,x(t)\right)\right] =$ hamiltonian stochastic).

Autorii consideră un sistem markovian de forma:

$$\begin{cases} d_t x = f(t,x)\mathrm{d}t + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_k(t,x)\mathrm{d}w_k(t), \ t \in [0,T], \ x \in \mathbb{R}^d \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

unde $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_m(t))$ este un proces Wiener standard m-dimensional peste spaţiul de probabilitate filtrat $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \{\mathcal{F}_t\}, \uparrow\}$ şi $f(t,\cdot)$, $g_k(t,\cdot)$, $k = \overline{1,m}$ sunt funcţii Lipschitz continue pe $\mathbb{R}^d$.

Pentru o soluţie $x(t)$, $t \in [0, T]$, a lui (1.1.1) consideră funcţionala:

$$J(x(T)) = h(x(T)) \tag{1.1.2}$$

ca variabilă aleatoare, unde $h(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ este o funcţie Lipschitz continuă şi

Problema pe care autorii încearcă să o rezolve este de a reprezenta funcţionala din (1.1.2) ca valoare finală $S(T, x(T)) = h(x(T))$ utilizând o funcţie $S(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă în sens slab astfel încât procesul stochastic $S(t, x(t), \ t \in [0, T]$ este obţinut din următoarea ecuaţie diferenţială stochastică liniară de ordinul 1:

$$\begin{aligned} S(t, x(t)) = S\left(0, x_0\right) + \int_0^t \left\langle \partial_x S(s, x(s)), f(s, x(s)) \right\rangle \mathrm{d}s + \\ + \sum_{k=1}^m \int_0^t \left\langle \partial_x S(s, x(s)), g_k(s, x(s)) \right\rangle \mathrm{d}w_k(s), \ t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Ecuaţia din (1.1.3) poate fi asociată cu funcţia valoare $V_\theta(t)$, $t \in [0, T]$, scrisă pentru o strategie admisibilă în piaţa financiară şi pentru exprimarea principiului Pontryagin de optimalitate pentru probleme de control stochastic unde driftul $f(t, x)$ depinde de parametrul $\omega \in \Omega$ implicat în funcţiile de control. O soluţie pentru (1.1.3) se găseşte cu condiţia să rezolvăm în sens slab următorul sistem de ecuaţii retrograde Kolmogorov:

$$\begin{cases} \partial_t S(t, x) + \dfrac{1}{2} Tr \dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x) a(t, x) = 0, \ t \in [0, T], \ x \in \mathbb{R}^d \\ S(t, x) = h(x) \end{cases} \tag{1.1.4}$$

unde matricea $(d \times d)$, $a(t, x) = \sum_{k=1}^m \left(g_k g_k^*\right)(t, x)$ este pozitiv definită.

În cazul în care $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, este doar funcţie Lipschitz şi matricea $a(t, x)$ nu este strict pozitivă, rezolvăm ecuaţia (1.1.4) în sens slab şi definim o familie de funcţii netede $\{S^\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon > 0} \subseteq C^{1,2}\left([0, T] \times \mathbb{R}^d\right)$ care satisface ecuaţia parabolică:

$$\begin{cases} \partial_t S^\varepsilon(t, x) + \dfrac{1}{2} Tr \dfrac{\partial^2 S^\varepsilon}{\partial x^2}(t, x) a^\varepsilon(t, x) = 0, \ t \in [0, T0, \ x \in \mathbb{R}^d, \\ S^\varepsilon(T, x) = h_\varepsilon(x), \\ a^\varepsilon(t, x) = \sum_{k=1}^m \left(g_k^\varepsilon \left(g_k^\varepsilon\right)^*\right)(t, x) \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Aici, $g_k^\varepsilon(t,x)$, $h_t(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ sunt versiunile netede ale funcţiilor originale $g_k(t,x)$, $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, şi ele induc existenţa gradientului în sens generalizat:

$$\partial_x S(t,x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \partial_x S^\varepsilon(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d,$$

ca funcţie măsurabilă Borel şi care satisface o condiţie de creştere polinomială în raport cu $x \in \mathbb{R}^d$. Se oţine astfel că gradientul în sens slab $\partial_x S(t,x)$ poate fi calculat explicit utilizând gradientul în sens slab corespunzător $\partial_x h(x) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \partial_x h_\varepsilon(x)$.

4.1.2. Calcule auxiliare

În acest paragraf se reaminteşte definiţia funcţiei de tip molifier $\omega_\varepsilon(x)$, $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\omega_1\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \mathbb{R}^d$, unde $\omega_1(y) = c_0 \exp\left(-\dfrac{1}{1-|y|^2}\right)$ pentru $|y| < 1$ şi $\omega_1(y) = 0$ pentru $|y| \geq 1$. Constanta c_0 poate fi luată astfel încât $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \omega_1(y)\mathrm{d}y = 1$.
Se defineşte, de asemenea, versiunea netedă a funcţiei Lipschitz continue h prin:

$$(1.2.1)\quad h_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x+z)\omega_\varepsilon(z)\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} h(y)\omega_\varepsilon(y-x)\mathrm{d}y = \int_{B(x,\varepsilon)} h(y)\omega_\varepsilon(y-x)\mathrm{d}y,$$

unde funcţia originală h îndeplineşte condiţiile:

$$(a_1)\qquad \begin{cases} |h(x)| \leq L(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^d \\ |h(x+z) - h(x)| \leq L(x)|z|,\ \forall\, z \in B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

unde $L(x) \leq C\left(1 + |x|^N\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^d$ şi $N \geq 1$ un număr natural fixat.

Se fac următoarele presupuneri: câmpurile vectoriale de difuzie $g_k(t,x)$, $k \in \{1,\ldots,m\}$, sunt funcţii continue în ambele variabile şi continuu diferenţiabile de ordinul 1 în raport cu $x \in \mathbb{R}^d$ astfel încât:

$$(a_2)\qquad |\partial_i g_k(t,x)| \leq M,\ \forall\,(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d,$$

unde $\partial_i \varphi(t,x) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t,x)$, $i \in \{1,\ldots,d\}$.

Se asociază ecuaţia aproximantă de tip retrograd (Kolmogorov)

$$(1.2.2)\qquad \begin{cases} \partial_t S^\varepsilon(t,x) + \dfrac{1}{2} Tr \dfrac{\partial^2 S^\varepsilon}{\partial x^2}(t,x) a^\varepsilon(t,x) = 0, \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d \\ S^\varepsilon(T,x) = h_\varepsilon(x) \\ a^\varepsilon(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^m \left[\left(g_k^\varepsilon\left(g_k^\varepsilon\right)^*\right)(t,x)\right], \end{cases}$$

iar soluţia netedă corespunzătoare este reprezentată astfel:

$$(1.2.3)\qquad S^\varepsilon(t,x) = E h_\varepsilon\left(y_{t,x}^\varepsilon(T)\right),$$

unde $y^{\varepsilon}_{t,x}(s)$, $s \in [t,T]$, este soluţia următoarei ecuaţii diferenţiale stochastice:

$$(1.2.4) \qquad \begin{cases} d_s y = \sum\limits_{k=1}^{m} g^{\varepsilon}_k(s,y)\mathrm{d}w_k(s), \quad s \in [t,T] \\ y(t) = x \end{cases}$$

pentru fiecare $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ fixat, unde $g^{\varepsilon}_k(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_k(t,y)\omega_{\varepsilon}(y-x)\mathrm{d}y$.

Utilizând presupunerea (a_2) se obţine că $y^{\varepsilon}_{t,x}(s)$ este continuu diferenţiabilă în $L_2(\Omega,\mathbb{P})$ în raport cu $x \in \mathbb{R}^d$ şi, în plus, $\partial_i y^{\varepsilon}_{t,x}(s) = \dfrac{\partial}{\partial x_i} y^{\varepsilon}_{t,x}(s) = v^i_{t,x}(s)$, $i = \{1,\ldots,d\}$, $\left(v^{ij}_{t,x}(s) = \partial^2_{ij} y^{\varepsilon}_{t,x}(s) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} y^{\varepsilon}_{t,x}(s)\right)$ sunt mărginite în $L_2(\Omega,\mathbb{P})$ uniform în raport cu $s \in [t,T]$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$ şi $\varepsilon \in (0,1]$.

Ecuaţiile diferenţiale liniare stochastice asociate cu $v^i_{t,x}$ şi $v^{ij}_{t,x}$ sunt:

$$(1.2.5) \qquad \begin{cases} d_s v^i_{t,x} = \sum\limits_{k=1}^{m} \partial_y g^s_k\left(s,\, y^{\varepsilon}_{t,x}(s)\right) v^i_{t,x}\mathrm{d}w_k(s) \\ v^i_{t,x}(t) = e_i,\ s \in [t,T],\ i \in \{1,\ldots,d\} \end{cases}$$

şi respectiv:

$$(1.2.6) \qquad \begin{cases} d_s v^{ij}_{t,x} = \sum\limits_{k=1}^{m} \left[\partial_y g^{\varepsilon}_k\left(s,\, y^{\varepsilon}_{t,x}(s)\right) v^{ij}_{t,x} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \partial^2_y g^{\varepsilon}_k\left(s,\, y^{\varepsilon}_{t,x}(s)\right) v^i_{t,x} v^j_{t,x}(s)\right] \mathrm{d}w_k(s) \\ v^{ij}_{t,x}(t) = 0 \in \mathbb{R}^d, \quad s \in [t,T] \end{cases}$$

unde $\{e_1,\ldots,e_d\} \subseteq \mathbb{R}^d$ este baza canonică. Pe de altă parte, funcţia netedă $h_{\varepsilon} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)$ definită în (1.2.1) se supune următoarelor estimări:

$$(1.2.7) \quad |h_{\varepsilon}(x) - h(x)| \le \int\limits_{B(0,\,\varepsilon)} |h\,(x+y) - h\,(x)|\, \omega_{\varepsilon}\,(y)\, dy \le L\,(x)\,\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Prin calcul se obţine:

$$(1.2.8) \qquad \begin{aligned} \partial_i h_{\varepsilon}\,(x) &= \int\limits_{d} h\,(y) \partial_{x_i} \omega_{\varepsilon}(y-x)\mathrm{d}y = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} h(y) \omega_{\varepsilon}\,(y-x)\, \frac{\varepsilon^2}{\left(\varepsilon^2 - |y-x|^2\right)^2}\,(y_i - x_i)\,\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{B(0,\varepsilon)} h\,(x+y)\,\omega_{\varepsilon}\,(y)\, \frac{\varepsilon^2}{\left(\varepsilon^2 - |y|^2\right)^2} y_i\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

care cu substituţia $z = \dfrac{y}{\varepsilon}$ se rescrie astfel:

$$\partial_i h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^d} z_i h(x+\varepsilon z)\omega_1(z) \left(1-|z|^2\right)^{-2} \mathrm{d}z \tag{1.2.9}$$

şi utilizând $\int\limits_{\mathbb{R}^d} z_i \omega_1(z) \left(1-|z|^2\right)^{-2} \mathrm{d}z = 0$ (integrandul este o funcţie impară în raport cu z_i) rezultă:

$$\partial_i h_\varepsilon(x) = \int\limits_{B(0,1)} z_i \left[\frac{h(x+\varepsilon z) - h(x)}{\varepsilon}\right] \omega_1(z) \left(1-|z|^2\right)^{-2} \mathrm{d}z \tag{1.2.10}$$

Existenţa gradientului în sens slab $\partial_x h(x)$ se bazează pe următoarea ipoteză:

(a_3) Există o funcţie măsurabilă Borel $h^1(x,z)$, $z \in B(0,1)$, $x \in \mathbb{R}^d$ astfel

încât $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{h(x+\varepsilon z) - h(x)}{\varepsilon} = h'(x;z)$ pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^d$ şi $z \in B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^d$.

Utilizând presupunerea (a_3) şi luând $\varepsilon \geq 0$ în (1.2.10), rezultă că gradientul în sens slab $\partial_x h(x)$ poate fi exprimat astfel:

$$\partial_i h(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \partial_i h_\varepsilon(x) = \int\limits_{B(0,1)} z_i h^1(x;z) \omega_1(z) \left(1-|z|^2\right)^{-2} \mathrm{d}z \tag{1.2.11}$$

pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{1,\dots,d\}$, unde $\partial_i h_\varepsilon(x)$ şi $\partial_i h(x)$ îndeplinesc următoarele condiţii de mărginire:

$$|\partial_i h_\varepsilon(x)|,\ |\partial_i h(x)| \leq L(x) \cdot M_i,\ i \in \{1,\dots,d\},\ x \in \mathbb{R}^d \tag{1.2.12}$$

cu estimarea dată de $L(x) \leq C\left(1 + \|x|^N\right)$.

Un calcul similar permite ca derivatele parţiale de ordinul al doilea $\partial_y^2 h_\varepsilon(x)$ să fie calculate în felul următor:

$$\partial_{ij}^2 h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{B(0,1)} h(x+\varepsilon z)\omega_1(z) \left[z_i z_j \left(1-|z|^2\right)^{-4} + 4\left(1-|z|^2\right)^{-3}\right] \mathrm{d}z \tag{1.2.13}$$

şi utilizând presupunerea (a_1) se obţine:

$$\left|\partial_{ij}^2 h_\varepsilon(x)\right| \leq \frac{1}{\varepsilon^2}(2C)\left(1+|x|^N\right) M \tag{1.2.14}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^d$, unde $M = \int\limits_{B(0,1)} \omega_1(z) \left[\left(1-|z|^2\right)^{-4} + 4\left(1-|z|^2\right)^{-3}\right] \mathrm{d}z$.

Din calculele de mai sus rezultă că funcţia netedă $S^\varepsilon(t,x) = Eh_\varepsilon\left(y^\varepsilon_{t,x}(T)\right)$ definită în (1.2.3) satisface ecuaţia Kolmogorov din (1.2.2) şi, în plus, regula de diferenţiere stochastică aplicată lui $S^\varepsilon(t,x(t))$ conduce la:

$$h_\varepsilon\left(x\left(T\right)\right) = S^\varepsilon\left(T,\, x\left(T\right)\right) = S^\varepsilon\left(0,\, x_0\right) + \int\limits_0^T \left\langle \partial_x S^\varepsilon\left(t,\, x^\varepsilon\left(t\right)\right), d_t x^\varepsilon \right\rangle \tag{1.2.15}$$

pentru fiecare $\varepsilon > 0$, unde $\partial_x S^\varepsilon\left(t,x\right) = E\left\{\left[\partial_y h_\varepsilon\left(y^\varepsilon_{t,x}\left(T\right)\right)\right]^* \partial_x y^\varepsilon_{t,x}\left(T\right)\right\}$, şi $x = x^\varepsilon(t)$ este soluţie în (1.1.1) unde originalul $g_k(t,x)$ este înlocuit prin $g^\varepsilon_k(t,x)$.

Trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$ în (1.2.15) se obţine gradientul în sens slab $\partial_x S(t,x) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \partial_x S^\varepsilon(t,x)$ care se supune condiţiei de creştere polinomială în raport cu $x \in \mathbb{R}^d$ şi ecuaţia integrală din (1.2.15) devine:

$$h\left(x\left(T\right)\right) = S\left(T,\, x\left(T\right)\right) = S\left(0,\, x_0\right) + \int\limits_0^T \left\langle \partial_x S\left(t,\, x\left(t\right)\right),\, d_t x\left(t\right)\right\rangle. \tag{1.2.16}$$

Procesul continuu $x = x(t)$, $t \in [0,T]$, este soluţia sistemului stochastic (1.1.1) şi funcţiile măsurabile Borel $S(t,x)$, $\partial_x S(t,x)$ sunt calculate ţinând cont de formulele:

$$\begin{cases} S\left(t,\, x\right) = Eh\left(y_{t,x}\left(T\right)\right) \\ \partial_x S\left(t,\, x\right) = E\left\{\left[\partial_y h\left(y_{t,x}\left(T\right)\right)\right]^* \partial_x y_{t,x}\left(T\right)\right\} \end{cases} \tag{1.2.17}$$

unde gradientul în sens slab $\partial_y h(y)$ este dat în (1.2.11) şi matricea stochastică nesingulară $\partial_x y_{t,x}(T)$ este determinată de soluţiile din (1.2.4) şi (1.2.5) utilizând originalul $\{g_k(t,x)\}$. Calculele date mai sus sunt însumate în următoarea lemă.

Lema 1.2.1. *Fie $h(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ şi $g_k(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $k = \overline{1,m}$, funcţii continue date care se supun ipotezelor (a_1), (a_2), (a_3). Atunci există o soluţie unică netedă $S^\varepsilon \in C^{1,2}\left([0,T] \times R^d\right)$ care verifică ecuaţia Kolmogorov de tip retrograd:*

$$\begin{cases} \partial_t S(t,x) + \dfrac{1}{2} Tr\left[\dfrac{\partial^2 S^\varepsilon}{\partial x^2}(t,x) a(t,x) \left(\displaystyle\sum_{k=1}^m g^\varepsilon_k(t,x)\left(g^\varepsilon_k(t,x)\right)^*\right)\right] = 0, \\ S^\varepsilon(t,x) = h_\varepsilon(x),\ x \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T],\ \varepsilon > 0 \end{cases} \tag{1.2.18}$$

şi poate fi reprezentată ca $S^\varepsilon(t,x) = Eh_\varepsilon\left(y^\varepsilon_{t,x}(T)\right)$, unde versiunea netedă $h_\varepsilon(\cdot)$ este dată de (1.2.1) şi procesul stochastic $y^\varepsilon_{t,x}(s)$, $s \in [t,T]$, este soluţia ecuaţiei (1.2.4) pentru fiecare $t \in [0,T]$.

Teorema 1.2.1. *Fie* $h(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *şi* $f(t,x), g_k(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $k \in \{1,\ldots,m\}$ *date astfel încât presupunerile* (a_1), (a_2), (a_3) *sunt îndeplinite. Scriem* $S(t,x) = Eh\left(y_{t,x}(T)\right)$, *pentru* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$. *Atunci:*

$$h(x(T)) = S(T, x(T)) = S(0, x_0) + \int_0^T \langle \partial_x S(t, x(t)), d_t x(t) \rangle, \tag{1.2.19}$$

unde $x = x(t)$, $t \in [0,T]$, *este soluţia ecuaţiei* (1.1.1) *şi gradientul în sens slab* $\partial_x S(t,x) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \partial_x S^\varepsilon(t,x)$ *este calculat ţinând cont de* $S^\varepsilon(t,x) = Eh_\varepsilon\left(y^\varepsilon_{t,x}(T)\right)$ *şi* $\partial_x S(t,x) = E\left\{\left[\partial_y h\left(y_{t,x}(T)\right)\right]^* \partial_x y_{t,x}(T)\right\}$.

4.1.3. O aplicaţie

De obicei, pe piaţa financiară, sistemul stochastic diferenţial din (1.1.1) este asociat cu componenta scalară fără risc $\chi(t)$, $t \in [0,T]$, obţinută din următoarea ecuaţie deterministă:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = \rho(t, x(t))\chi \\ \chi_0 = 1,\ t \in [0,T], \end{cases} \tag{1.3.1}$$

unde $\rho(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi mărginită şi $x = x(t)$, $t \in [0,T]$ este soluţia sistemului (1.1.1). Funcţia valoare:

$$V_\theta(t) = \theta_0(t)\chi(t) + \langle \theta(t), x(t) \rangle,\ \forall\, t \in [0,T] \tag{1.3.2}$$

depinde de procesul stochastic $\mathcal{F}_t$-adaptat $(\theta_0(t), \theta(t)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ în timp ce strategia autofinanţată $\{(\theta_0(t), \theta(t)) : t \in [1,T]\}$ verifică ecuaţia:

$$V_\theta(t) = V_\theta(0) + \int_0^t \theta_0(s) d_s \chi(s) + \int_0^t \langle \theta_0(s), d_s(s) \rangle,\ \forall\, t \in [0,T]. \tag{1.3.3}$$

Utilizând o piaţă financiară normalizată:

$$\begin{cases} (1, \overline{x}(t)) = \xi(t)\left(\chi(t), x(t)\right) \\ \xi(t) = \chi^{-1}(t),\ \overline{x}(t) = \xi(t)x(t) \end{cases} \tag{1.3.4}$$

se asociază funcţia valoare corespunzătoare:

$$\overline{V_\theta}(t) = \xi(t)V_\theta(t) = \theta_0(t) + \langle \theta(t), \overline{x}(t) \rangle,\ \forall\, t \in [0,T] \tag{1.3.5}$$

şi pentru o strategie autofinanţată $\{(\theta_0(t), \theta(t)) : t \in [1,T]\}$ rezultă că:

$$\overline{V_\theta}(t) = V_\theta(0) + \int_0^t \langle \theta(s), d_s \overline{x}(s) \rangle. \tag{1.3.6}$$

Un contingent European de cereri se obţine găsind o strategie autofinanţată $\{(\theta_0(t), \theta(t)) : t \in [0, T]\}$ astfel încât:

$$V_\theta(T) \geq h(x(T)),\ a.p.t(P) \tag{1.3.7}$$

unde $h(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ este o funcţie local Lipschitz continuă şi $x = x(t)$, $t \in [0, T]$, este soluţia sistemului (1.1.1).

Inegalitatea dintre cele două variabile aleatoare ale pieţei originale este transformată într-o altă inegalitate pentru o piaţă normalizată astfel:

$$\overline{V}_\theta(T) \geq \xi(T)h(x(T)),\ a.p.t(P) \tag{1.3.8}$$

Pornind cu ecuaţia (1.3.6) se exprimă variabila aleatoare $h(x(T)) = S(T, x(T))$ ca valoare finală asociată cu funcţia netedă în sens slab $S(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\xi(T)h(x(T)) = \xi(T)S(T, x(T)) = S\,(0, x_0) + \int\limits_0^t \langle \partial_x S(t.x(t), d_t\overline{x}(t)\rangle\,. \tag{1.3.9}$$

În acest caz, se alege $\theta(t) = \partial_x S(t, x(t))$, $t \in [0, T]$ şi inegalitatea (1.3.8) este înlocuită prin $V_\theta(0) \geq S\,(0, x_0)$ care este o condiţie deterministă impusă valorii iniţiale $\theta_0\,(0) \geq S\,(0,\, x_0) - \langle \theta\,(0)\,,\, x_0 \rangle$. În acest mod, strategia admisibilă $\{(\theta_0\,(t)\,,\, \theta\,(t)) : t \in [0,\, T]\}$ este găsită impunând condiţia (1.3.8) care este echivalentă cu condiţia originală de admisibilitate (1.3.7). Pentru a rezolva problema asociată cu (1.3.9) se face următoarea presupunere:

(i) $\rho(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi mărginită care admite subdiferenţială $\rho(t, x; z) = \lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{\rho(t, x + \varepsilon z) - \rho(t, x)}{\varepsilon}$ care este o funcţie continuă şi mărginită în $(t, x, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times B(0, 1)$;

(ii) Funcţia continuă $h(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ care satisface condiţia de creştere polinomială $|h(x)| \leq C\left(1 + |x|^N\right)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$, admite subdiferenţiala $h'(x; z) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \dfrac{h(x + \varepsilon z) - h(x)}{\varepsilon}$ care este o funcţie continuă şi care se supune condiţiei de creştere polinomială $|h'(x; z)| \leq C\left(1 + |x|^N\right)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$, $z \in B(0, 1) \subset \mathbb{R}^d$;

(iii) Câmpul vectorial $f(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ este funcţie global Lipschitz continuă în raport cu $x \in \mathbb{R}^d$.

(iv) Câmpurile vectoriale $g_k(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, sunt funcţii continue care admit derivate parţiale de ordinul 1 continue şi mărginite $\partial_j g_k(t, x) = \dfrac{\partial g_k}{\partial x_j}(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Teorema 1.3.1. *Se consideră funcţiile $h(x), \rho(t,x)$ şi câmpurile vectoriale $\{f, g_1, \ldots, g_m\}$ sunt date astfel încât ipotezele (i) – (iv) sunt satisfăcute.*

Atunci există o funcţie continuă $S(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ care admite gradient în sens slab $\partial_x S(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ca funcţie măsurabilă Borel şi care se supune condiţiei de creştere polinomială $|\partial_x S(t,x)| \leq C\left(1 + |x|^N\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^d$, astfel că ecuaţia (1.3.9) *este satisfăcută.*

4.2. O problemă de filtrare stochastică neliniară

O cunoaştere incompletă a stării $x(t)$, $t \in [0,T]$ a unui sistem neliniar diferenţial stochastic implică media condiţionată $E\left\{\varphi(x(T)) \mid y^T\right\}$ a variabilei aleatoare $\varphi(x(T))$ dată de observaţiile trecute $y^T = \{y(s) : 0 \leq s \leq T\}$, unde $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este funcţie local Lipschitz continuă. Utilizând o nouă măsura de probabilitate $\widehat{P}_y(A) = \widehat{J}_y(T)P(A)$ şi un nou sistem dinamic stochastic care descrie evoluţia $\{(\widehat{x}_y(t), \xi_y(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}; t \in [0,T]\}$, reprezentăm $E\left\{\varphi(x(T)) \mid y^T\right\}$ ca $\widehat{E}_y\left\{\varphi\left(\widehat{x}_y(t)\right)\left[\exp y(T) \cdot h\left(\widehat{x}_y(T)\right)\right]\xi_y(t)\right\}$ pentru fiecare funcţie $y(\cdot) \in \widehat{C}\left([0,T]; \mathbb{R}^d\right)$ cu $y(0) = 0$. În plus, funcţia continua $S(t,x;y(\cdot)) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ este construită astfel încât $S(T,x;y(\cdot)) = \varphi(x)\exp(y(T) \cdot h(x)$ şi $\xi_y(t)S\left(t, \widehat{x}_y(t); y(\cdot)\right)$, $t \in [0,T]$, satisface o ecuaţie diferenţială stochastică de ordinul 1 care permite definirea unei strategii admisibile sub formă de feed-back asociată cu o piaţă financiară sau cu o problemă de control stochastic sub cunoaşterea incompletă a variabilei de stare.

Aceste probleme au fost rezolvate şi publicate în [22] [M. Marinescu şi C. Vârsan, 2004, pag. 27-37].

4.2.1. Introducere

Considerăm sistemul diferenţial stochastic de forma

$$\left\{\begin{array}{l} d_t x = f(x)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)\mathrm{d}w_i(t), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ d_t y = h(x)\mathrm{d}t + dv(t), \quad y(0) = 0,\ y \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T] \end{array}\right. \tag{2.1.1}$$

unde $(w(t), v(t)) \in \mathbb{R}^{m+d}$ este procesul Wiener standard pe spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \{\mathcal{F}_t\} \uparrow\}$ şi f, g_i, h sunt funcţii Lipschitz continue, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Dinamica procesului stochastic continuu $\widehat{x}_y(t)$, $t \in [0,T]$, se calculează ca un estimator recursiv finit dimensional pentru $y \in \widehat{C}([0,T]; \mathbb{R}^d)$ fixat descris de

$$d_t \widehat{x} = \widehat{f}(\widehat{x}, y(t))\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} g_i(\widehat{x}) \cdot \mathrm{d}w_i(t),\ \widehat{x}(0) = x_0, \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T], \tag{2.1.2}$$

unde noul drift $\widehat{f}(x,y)$ este de forma

$$\widehat{f}(x,y) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i(x) \cdot y) g_i(x), \tag{2.1.3}$$

pentru $\alpha_i(x) = ((g_i(x) \cdot \partial_x h_1(x)), \ldots, (g_i(x) \cdot \partial_x h_d(x)))$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, cu condiţia $h \in C_0^4(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^d)$ (continuu diferenţiabilă de ordinul patru cu suport compact). Aici spaţiul $\widehat{C}([0,T]; \mathbb{R}^d)$ constă în funcţiile continue cu $y(0) = 0$. Ecuaţiile (2.1.2) şi (2.1.3) se bazează pe rescrierea mediei condiţionate $E\{\varphi(x(t))|y^t\}$, $t \in [0,T]$, în raport cu o nouă măsura de probabilitate $\widehat{P}_y(A) = \widehat{J}_y(T)P(A)$ de forma (vezi [31])

$$\begin{aligned} &E\{\varphi(x(t))|y^t\} = \\ &= \widehat{E}_y \left\{ \varphi(\widehat{x}_y(t))[\exp y(t) \cdot h(\widehat{x}_y(t))] \left[\exp \int_0^t e(y(s), \widehat{x}_y(s)) \mathrm{d}s \right] \right\}, \end{aligned} \tag{I}$$

pentru fiecare $y \in \widehat{C}\left([0,T]; \mathbb{R}^d\right)$ şi $t \in [0,T]$. Martingalul continuu $\widehat{J}_y(t)$, $t \in [0,T]$, şi funcţia scalară $e(y,x)$ sunt date de

$$\widehat{J}_y(t) = \exp - \left[\sum_{i=1}^{d} \int_0^t h_i(\widehat{x}_y(s)) \mathrm{d}v_i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t |h(\widehat{x}_y(s))|^2 \mathrm{d}s \right],$$

$$e(y,x) = \frac{1}{2} \langle A(x) \partial_x (y \cdot h(x)), \partial_x (y \cdot h(x)) \rangle - (y \cdot Lh(x)) - \frac{1}{2} |h(x)|^2.$$

Aici operatorul diferenţial de ordinul al doilea $Lh(x) = (Lh_1(x), \ldots, Lh_d(x))$ este definit astfel

$$Lh_j(x) = (\partial_x h_j(x) \cdot f(x)) + \frac{1}{2} Tr \, \frac{\partial^2 h_j(x)}{\partial x^2}, \; j \in \{1, \ldots, d\},$$

şi matricea $(n \times n)$, $A(x) = (GG^T)(x)$, pentru $G = (g_1 \ldots g_m)$.

Problema pe care o considerăm constă în reprezentarea variabilei aleatoare

$$v_y(\widehat{x}_y(T)) = \varphi(\widehat{x}_y(T)) \cdot \exp(y(T) \cdot h(\widehat{x}_y(T))),$$

ca valoare finală $S(T, \widehat{x}_y(T); y(\cdot)) = v_y(\widehat{x}_y(T))$ pentru care se utilizează funcţia continuă $S(t,x;y(\cdot)) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, astfel încât procesul stochastic continuu $\xi_y(t) S(t, \widehat{x}_y(t); y(\cdot))$, $t \in [0,T]$ satisface următoarea ecuaţie diferenţială stochastică de ordinul întâi

$$\begin{aligned} &\xi_y(t) S(t, \widehat{x}_y(t); y(\cdot)) = \\ &= S(0, x_0; y(\cdot)) + \int_0^t \langle \xi_y(s) \partial_x S(s, \widehat{x}_y(s); y(\cdot)), d_s \widehat{x}_y(s) \rangle, \; t \in [0,T] \end{aligned} \tag{II}$$

unde $x = \widehat{x}_y(t)$, $t \in [0,T]$, este soluţia ecuaţiei (2.1.2) pentru $y(\cdot) \in \widehat{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ fixat şi $\xi_y(t) = \exp \int_0^t e(y(s), \widehat{x}_y(s))\mathrm{d}s,\ t \in [0,T]$. O soluţie a ecuaţiei (II) se găseşte rezolvând în sens slab următoarea ecuaţie Kolmogorov de tip retrograd

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} 0 = \partial_t S(t,x;y(\cdot)) + \dfrac{1}{2}Tr\ \left[\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t,x;y(\cdot))A(x)\right] + \\ \qquad\qquad +e(y(t)),x)S(t,x;y(\cdot)) \\ S(T,x;y(\cdot)) = \varphi(x)\exp(h(x)\cdot y(T)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T] \end{cases}$$

pentru $y(\cdot) \in \widehat{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ arbitrar fixat.

Răspunsul problemei în care sunt implicate ecuaţiile (II) şi (III) este dat în teoremele principale ale acestui subcapitol conţinute în pragaraful 4.2.3, în timp ce calculele auxiliare implicate în reprezentarea soluţiei în sens slab sunt date în paragraful 4.2.2.

Pentru formula explicită din (I) a se vedea referinţa bibliografică [31] [C. Vârsan, 1999], iar reprezentarea stochastică a soluţiei în sens slab care satisface ecuaţia parabolică (III) este dată în [9] [A. Friedman, 1975].

4.2.2. Calcule auxiliare

Pentru o funcţie continuă dată $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to R$ care satisface

$$(a_1)\qquad \begin{cases} |\varphi(x)| \le L(x) \le C(1+|x|^N),\ (\forall\,)\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad \text{pentru un număr natural oarecare } N, \\ |\varphi(x+z) - \varphi(x)| \le L(x)|z|,\ (\forall\,)z \in B(0,1),\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

asociem versiunea netedă corespunzătoare

$$(2.2.1)\qquad \begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+z)\omega_\varepsilon(z)dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\omega_\varepsilon(y-x)dy = \int_{B(x,\varepsilon)} \varphi(y)\omega_\varepsilon(y-x)dy \end{aligned}$$

Utilizând funcţia de tip molifier standard $\omega_\varepsilon(x)$, $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\omega_1\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, unde $\omega_1(y) = c_0 \exp\dfrac{1}{|y|^2-1}$ pentru $|y| < 1$ şi $\omega_1(y) = 0$ pentru $|y| \ge 1$, iar c_0 este o constantă astfel încât $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_1(y)dy = 1$.

Facem următoarea presupunere:

(P) câmpurile vectoriale $f(x)$, $g_k(x)$, $k \in \{1, \dots, m\}$, sunt funcţii continue şicontinuu diferenţiabile de ordinul întâi astfel încât

$$(a_2) \qquad |\partial_i f(x)|,\ |\partial_i g_k(x)| \leq M \quad \text{pentru oricare} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pentru fiecare $\varepsilon \in (0, 1]$ şi $y(\cdot) \in \widehat{C}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ asociem ecuaţia Kolmogorov de tip retrograd aproximantă

$$(2.2.2) \qquad \begin{cases} \partial_t S(t, x; y(\cdot)) + \dfrac{1}{2} Tr \, \dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x; y(\cdot))A(x) + \\ \qquad\qquad + e(y(t), x)S(t, x; y(\cdot)) = 0 \\ S(T, x; y(\cdot)) = \varphi_\varepsilon(x) \exp(y(T) \cdot h(x)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0, T) \end{cases}$$

unde matricea $(n \times n)$, $A(x)$ şi funcţia scalară $e(y, x)$ sunt definite în ecuaţia (I), iar funcţia netede h aparţine lui $C_0^4(\mathbb{R}^n)$. Soluţia netedă în sens slab a ecuaţie (2.2.2) este reprezentată astfel

$$(2.2.3) \quad S^\varepsilon(t, x; y(\cdot)) = E\left\{ \varphi_\varepsilon(z_{t,x}(T))[\exp y(T) \cdot h(z_{t,x}(T))] \exp \int_t^T e(y(s), z_{t,x}(s)) \mathrm{d}s \right\}$$

unde „E" reprezintă media în raport cu măsura de probabilitate originală $\mathbb{P}$ şi $z_{t,x}(s)$, $s \in [t, T]$, este soluţia următoarelor ecuaţii diferenţiale stochastice

$$(2.2.4) \qquad d_s z = \sum_{k=1}^{m} g_k(z) \mathrm{d}w_k(s),\ z(t) = x,\ s \in [t, T],$$

pentru fiecare $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ fixat.

Utilizând presupunerea (P) obţinem că $z_{t,x}(x)$ este continuu diferenţiabilă de ordinul întâi în $L_2(\Omega, \mathbb{P})$ în raport cu $x \in \mathbb{R}^n$ şi, în plus,

$$\partial_i z_{t,x}(s) = \frac{\partial}{\partial x_i} z_{t,x}(s) = v_{t,x}^i(s), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

sunt mărginite în $L_2(\Omega, \mathbb{P})$ uniform în raport cu $s \in [t, T]$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, şi satisfac următoarele ecuaţii liniare

$$(2.2.5) \qquad d_s v_{t,x}^i = \sum_{k=1}^{m} \partial_x g_k(z_{t,x}(s)) v_{t,x}^i dw_k(s),\ v_{t,x}^i(t) = e_i,\ s \in [t, T],$$

unde $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ este baza canonică.

Versiunea netedă $\varphi_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^n)$ satisface estimările

$$(2.2.6) \qquad |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\varphi(x + y) - \varphi(x)| \omega_\varepsilon(y) \mathrm{d}y \leq L(x)\varepsilon,\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{(2.2.7)} \qquad \partial_i \varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^n} z_i \varphi(x+\varepsilon z) \omega_1(z) \left(1-|z|^2\right)^{-2} \mathrm{d}z,\ i \in \{1,\dots,n\},$$

utilizând $\int\limits_{\mathbb{R}^n} z_i \omega_1(z)\,(1-|z|^2)^{-2}\mathrm{d}z = 0$ (integrandul este funcţie impară în raport cu z_i). Ţinând cont de aceste estimări rescriem (2.2.7) astfel

(2.2.8)

$$\partial_i \varphi_\varepsilon(x) = \int\limits_{B(0,1)} z_i \left[\frac{\varphi(x+\varepsilon z)-\varphi(x)}{\varepsilon}\right] \omega_1(z) \left(1-|z|^2\right)^{-2} \mathrm{d}z,\ i \in \{1,\dots,n\}.$$

Existenţa gradientului în sens slab $\partial_i\varphi(x)$, $i \in \{1,\dots,n\}$, se bazează pe următoarea ipoteză

Există o funcţie măsurabilă Borel $\varphi^1(x;z)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in B(0,1)$, astfel încât $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \dfrac{\varphi(x+\varepsilon z)-\varphi(x)}{\varepsilon} = \varphi^1(x;z)$, pentru fiecare $(x,z) \in \mathbb{R}^n \times B(0,1)$.

Utilizând această ipoteză şi trecând la limită în (2.2.8) după $\varepsilon \to 0$ obţinem gradientul în sens slab $\partial_x\varphi(x)$ exprimat astfel

$$\text{(2.2.9)} \qquad \partial_i\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \partial_i\varphi_\varepsilon(x) = \int\limits_{B(0,1)} z_i \varphi^1(x;z)\omega_1(z)[1-|z|^2]^{-2}\mathrm{d}z,$$

pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1,\dots,n\}$, şi obţinem următoarea condiţie de creştere polinomială

$$\text{(2.2.10)} \qquad |\partial_i\varphi_\varepsilon(x)|, |\partial_i\varphi(x)| \le L(x)M_i,\ x \in \mathbb{R}^n,\ i \in \{1,\dots,n\},$$

unde $L(x) \le C(1+|x|^N)$ (vezi (a_1)).

Putem să formulăm calculele de mai sus ca

Lema 2.2.1. *Fie $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $f(x)$, $g_k(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k \in \{1,\dots,m\}$, date astfel încât presupunerile (a_1) – (a_3) sunt îndeplinite. Fie $h \in C_0^4(\mathbb{R}^n)$, $y(\cdot) \in \widehat{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ fixat şi definim funcţia continuă $S^\varepsilon(t,x;y(\cdot))$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, ca în (2.2.3)) unde $e(y,x)$ este asociată cu ecuaţia (I). Atunci există o funcţie continuă $\partial_x S^\varepsilon(t,x;y(\cdot)) : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ care satisface o condiţie de creştere polinomială $|\partial_x S^\varepsilon(t,x;y(\cdot))| \le C_1(1+|x|^N)$ pentru oricare $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in (0,1]$.*

În plus, funcţia gradient în sens slab

$$\partial_x S(t,x;y(\cdot)) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \partial_x S^\varepsilon(t,x;y(\cdot)),\ t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n.$$

asociată cu

$$S(t,x;y(\cdot)) = E\left\{\varphi(z_{t,x}(T))[\exp y(T)h(z_{t,x}(T))]\exp\int\limits_t^T e(y(s),z_{t,x}(s))\mathrm{d}s\right\}$$

există ca funcţie măsurabilă Borel şi satisface o condiţie de creştere polinomială $|\partial_x S(t,x;y(\cdot))| \leq C_2(1+|x|^N)$.

Ecuaţia Kolmogorov de tip retrograd (2.2.2) a fost asociată cu soluţia în sens slab exprimată în (2.2.3). Câmpurile vectoriale $f(x)$, $g_k(x)$, $k \in \{1,\ldots,m\}$, sunt numai continuu diferenţiabile de ordinul întâi (vezi (I)) şi aceasta este principala restricţie în asimilarea funcţiei $S^\varepsilon(t,x;y(\cdot))$ definită în (2.2.3) ca soluţia clasică a ecuaţiei (2.2.2). Semnificaţia soluţiei în sens slab asociată cu (2.2.2) este dată în următoarea lemă.

Lema 2.2.2. *Fie* $\varphi, h \in C(\mathbb{R}^n; R)$ *şi* $f, g_k \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $k\in\{1,\ldots,m\}$,*date astfel încât presupunerile din lema 2.2.1 sunt satisfăcute. Pentru* $\delta \in (0,1]$ *definim* f^δ *şi* g_k^δ, $k \in \{1,\ldots,m\}$, *versiunile netede ale funcţiilor* f *şi* g_k *utilizând funcţii de tip molifier standard* $\omega_\delta(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$. *Notăm* $e^\delta(y,x)$ *şi* $z^\delta_{t,x}(s)$, $s\in[t,T]$, *funcţiile corespunzătoare. Definim*

$$S^\varepsilon_\delta(t,x;y(\cdot)) = E\left\{\varphi_\varepsilon(z^\delta_{t,x}(T))[\exp y(T)\cdot h(z^\delta_{t,x}(T))]\left[\exp\int\limits_t^T e^\delta(y(s),z^\delta_{t,x}(s))\mathrm{d}s\right]\right\}$$

pentru $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$. *Atunci* $S^\varepsilon_\delta \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *şi*

$$(c_1)\qquad \lim_{\delta\downarrow 0} S^\varepsilon_\delta(t,x;y(\cdot)) = S^\varepsilon(t,x;y(\cdot)),\ \lim_{\delta\downarrow 0}\partial_x S^\varepsilon_\delta(t,x;y(\cdot)) = \partial_x S^\varepsilon(t,x;y(\cdot))$$

pentru orice $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, *unde* $S^\varepsilon(t,x;y(\cdot))$ *este definită în Lema 2.2.1;*

$$(c_2)\qquad \begin{cases} \partial_t S^\varepsilon_\delta(t,x;y(\cdot)) + \dfrac{1}{2}Tr\,\dfrac{\delta^2 S^\varepsilon_\delta}{\partial x^2}(t,x;y(\cdot))A^\delta(x) + \\ \qquad + e^\delta(y(t),x)S^\varepsilon_\delta(t,x;y(\cdot)) = 0 \\ S^\varepsilon_\delta(T,x;y(\cdot)) = \varphi_\varepsilon(x)\exp(y(T)\cdot h(x)),\ x\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,T) \end{cases}$$

unde $A^\delta(x) = (G^\delta(G^{\delta,T})(x)$ *şi* $G^\delta(x) = (g_1^\delta(x),\ldots,g_m^\delta(x))$.

Scopul principal este să reprezentăm variabila aleatoare

$$\xi_y(T)\varphi(\widehat{x}_y(T))\cdot\exp y(T)\cdot h(\widehat{x}_y(T)) = v_y(T)$$

care apare în (I), utilizând ecuaţia diferenţială stochastică de ordinul întâi definită în (II). Această reprezentare se obţine utilizând soluţiile în sens slab $S^\varepsilon_\delta(t,x;y(\cdot))$ introduse în Lema 2.2.2.

Lema 2.2.3. *Fie $h \in C_0^4(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n;R)$ şi $f, g_k \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ date astfel încât preupunerile (a_1) – (a_3) sunt satisfăcute. Pentru fiecare $\varepsilon, \delta \in (0,1]$ şi $y \in \widehat{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ fixat definim*

$$S_\delta^\varepsilon(t,x;y(\cdot)) = EL_\varepsilon^\delta(t, z_{t,x}^\delta(\cdot)), \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

ca în Lema 2.2.2 şi notăm $\xi_y^\delta(t) = \exp \int\limits_0^t e^\delta(y(s), \widehat{x}_y(s))ds$, *$t \in [0,T]$. Atunci*

$$\xi_y^\delta(T)\varphi_\varepsilon(\widehat{x}_y(T)) \cdot \exp y(T) \cdot h(\widehat{x}_y(T)) = \xi_y^\delta(T) S_\delta^\varepsilon(T, \widehat{x}_y(T); y(\cdot)) =$$
$$= S_\delta^\varepsilon(0, x_0; y(\cdot)) + \int\limits_0^T \left\langle \xi_y^\delta(t) \cdot \partial_x S_\delta^\varepsilon(t, \widehat{x}_y(t); y(\cdot)), d_t \widehat{x}_y(t) \right\rangle,$$

unde $\widehat{x}_y(t)$, $t \in [0,T]$, este soluţia ecuaţiei (2.1.2).

4.2.3. Rezultat principal

Bazându-ne pe concluzia lemei 2.2.3 se obţine ecuaţia diferenţială stochastică de ordinul întâi (II) şi, în particular, media condiţionată $E\{\varphi(x(T))|y^T\}$ care satisface ecuaţia (I) capăta expresia explicită corespunzătoare.

Teorema 2.3.1. *Fie $h \in C_0^4(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ şi $f, g_k \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ date astfel încât presupunerile $(a_1) - (a_3)$ sunt satisfăcute. Notăm*

$$S(t,x;y(\cdot)) = E\varphi(z_{t,x}(T))[\exp(y(T) \cdot h(z_{t,x}(T)))] \left[\exp \int\limits_t^T e(y(s), z_{t,x}(s))\mathrm{d}s\right]$$

pentru fiecare $y(\cdot) \in \widehat{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ fixat şi $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, unde $z_{t,x}(s)$, $s \in [t,T]$, este soluţia ecuaţiei (2.2.4). *Atunci $S(t,x;y(\cdot)) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă care satisface*

$$S(T,x;y(\cdot)) = \varphi(x)\exp(y(T) \cdot h(x)), \ x \in \mathbb{R}^n$$

şi

$$|S(t,x;y(\cdot))| \leq C_y^0(1 + |x|^N) \ (\forall)x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0,T],$$

unde $C_y^0 > 0$ depinde de $y(\cdot)$.

Gradientul în sens slab $\partial_x S(t,x;y(\cdot)) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, există ca funcţie măsurabilă Borel, care satisface o condiţie de creştere polinomială $|\partial_x S(t,x;y(\cdot))| \leq C_y^1(1 + |x|^N)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$.

Obţinem reprezentarea:

$$\text{(2.3.1)} \qquad \begin{aligned} \xi_y(t)S(t,\widehat{x}_y(t);y(\cdot)) &= S(0,x_0;y(\cdot))+ \\ &+\int_0^t \langle \xi_y(s)\partial_x S(s,\widehat{x}_y(s);y(\cdot)), d_s\widehat{x}_y(s)\rangle, \end{aligned}$$

pentru orice $t \in [0,T]$, *unde* $\widehat{x}_y(t)$, $t \in [0,T]$, *este solutia ecuaţiei* (2.1.2) *şi* $\xi_y(t) = \exp \int_0^t e(y(s),\widehat{x}_y(s))ds$, $t \in [0,T]$, *pentru* $e(y,x)$ *definită în (I) şi fiecare* $y(\cdot) \in \widehat{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ *fixat.*

Utilizând reprezentarea (I) pentru $t = T$, rescriem media condiţionată $E\{\varphi(x(T))|y^T\}$ astfel

$$\text{(2.3.2)} \qquad E\{\varphi(x(T))|y^T\} = \widehat{E}_y\xi_y(T)S(T,\widehat{x}_y(T);y(\cdot)),$$

unde $\xi_y(t)S(t,\widehat{x}_y(t);y(\cdot))$, $t \in [0,T]$, satisface ecuaţia diferenţială stochastică (2.3.1) din Teorema 2.3.1. Sistemul stochastic (2.1.1) poate descrie evoluţia pentru o piaţă financiară. Concluziile din Teorema 2.3.1 şi reprezentarea din (2.3.2) pot fi asociate cu funcţia valoare

$$\text{(2.3.3)} \qquad V_\theta^y(t) = \widehat{E}_y[\theta_0^y(t) + \langle \theta^y(t), \widehat{x}_y(t)\rangle],$$

pentru fiecare $y(\cdot) \in \widehat{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$, unde $\theta_0^y(t)$, $t \in [0,T]$, este definit astfel încât

$$\text{(2.3.4)} \qquad V_\theta^y(t) = V_\theta^y(0) + \widehat{E}_y\left[\int_0^t \langle \theta^y(s), d_s\widehat{x}_y(s)\rangle\right], \; t \in [0,T].$$

În plus, $\theta_0^y(0)$ şi $\{\theta^y(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,T]\}$ au fost determinate astfel încât funcţia valoare la momentul $t = T$ satisface

$$\text{(2.3.5)} \qquad V_\theta^y(T) \geq E\{\varphi(x(T))|y^T\} = \widehat{E}_y\xi_y(T)S(T,\widehat{x}_y(T);y(\cdot))$$

pentru fiecare $y(\cdot) \in \widehat{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$, unde $V_\theta^y(T)$ este exprimat ca în (2.3.4).

Vom defini o strategie admisibilă $\{(\theta_0^y(t),\theta^y(t)) \in R^{n+1} : t \in [0,T]\}$ asociată cu funcţia valoare $V_\theta^y(t)$, $t \in [0,T]$, dată în (2.3.4) şi pentru condiţia Europeană exprimată ca în (2.3.5). Ca o consecinţă directă a teoremei 2.3.1 obţinem

Teorema 2.3.2. *În ipotezele teoremei 2.3.1 există o strategie admisibilă* $\{(\theta_0^y(t),\theta^y(t)) \in R^{n+1} : t \in [0,T]\}$ *asociată cu funcţia valoare* $\{V_\theta^y(t),\ t \in [0,T]\}$ *astfel încât* $\theta^y(t) = \xi_y(t)\partial_x S(t,\widehat{x}_y(t);y(\cdot))$, $t \in [0,T]$, *şi* $\theta_0^y(0)$ *satisface*

$V_\theta^y(0) = \theta_0^y(0) + \langle \theta^y(0), x_0 \rangle \geq S(0, x_0; y(\cdot))$ *unde funcţia continuă* $S(t, x; y(\cdot))$ *este definită în teorema 2.3.1.*

4.3. Strategii admisibile pentru ecuaţii diferenţiale stochastice non-Markoviene

Considerăm câmpurile vectoriale netede $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq (C_0^1 \cap C^2)(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ şi procesul Wiener m-dimensional standard $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_m(t)) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$, pe spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, F \supseteq \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P}\}$.

Pentru fiecare $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ fixed, considerăm soluţia unică $\mathcal{F}_s$-adaptată şi continuă $\{\widehat{x}(s; t, x) \in \mathbb{R}^n : s \in [t.T]\}$ care satisface ecuaţiile diferenţiale stochastice non-Markoviene

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} d_s\widehat{x} = f(\widehat{x}, s, x)\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m} g_i(\widehat{x})\,\mathrm{d}w_i(s), \ s \in [t, T] \\ \widehat{x}(t) = x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}
$$

Aici utilizăm integrala Itô „·“.

Aplicaţia $f(z; s, x) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este mărginită şi $\mathcal{F}_s$-adaptată pentru fiecare $(z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ şi satisface

(α) pentru fiecare $t \in [0, T]$ şi $x \in \mathbb{R}^n$ fixat, $f_{x,x}(z) \stackrel{def}{=} f(z; t, x)$ este Lipschitz continua in raport cu $z \in \mathbb{R}^n$, adică $|f_{x,x}(z'') - f_{t,x}(z')| \leq L|z'' - z'|$, pentru $z', z'' \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, unde $L > 0$ este o constantă care nu depinde de $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ şi $z', z'' \in \mathbb{R}^n$.

Observaţia 3.1. *În ipoteza* (α)*, ecuaţia diferenţiala stochastică non-Markoviană* (3.1) *are soluţie unică* $\left\{\widehat{x}(s; t, x) \in \mathbb{R}^n : [\widehat{t, T]}\right\} \to \mathbb{R}^n$*, continuă şi* $\mathcal{F}_s$*-adaptată, pentru fiecare* $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

O strategie $\theta = \{\nu_0(s; t, x), \nu(s; t, x)\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $s \in [t, T]$ *este o pereche de procese continue şi* $\mathcal{F}_s$*-adaptate pentru care funcţia valoare corespunzătoare este definită astfel*

$$
(3.2) \qquad V_\theta(s; t, x) = \nu_0(s; t, x) + \langle \theta(t, w), x(t, w) \rangle, \ s \in [t, T].
$$

Pentru $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ *fixat, o strategie* $\{\theta\}$ *satisface condiţia Europeană dacă*

$$
(3.3) \qquad V_\theta(T; t, x) \geq \varphi(\widehat{x}(T, t, x)), \ x \in (P)
$$

O strategie $\{\theta\}$ *este admisibilă (vezi* $\theta \in A_\varphi$*)) dacă îndeplineşte condiţia Europeană* (3.3) *pentru fiecare* $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$

Căutăm o strategie admisibilă $\theta \in A_\varphi$), pentru care componenta scalară $\{\nu_0(s;t,x)\}$, $s \in [t,T]$ este aleasă astfel încât sunt verificate următoarele ecuaţii

$$V_\theta(s;t,x) = V_\theta(t;t,x) + \int_t^x \langle \nu(\sigma;t,x); d_\sigma \widehat{x}(\sigma;t,x)\rangle\,,\ s \in [t,T] \tag{3.4}$$

pentru fiecare $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *fixat.*

Ecuaţiile integrale (3.4) *sunt adevărate dacă şi numai dacă* $\{\nu_0\}$ *satisface ecauţiile integrale corespunzătoare*

$$\begin{gathered} \nu_0(s;t,x) = \nu_0(t;t,x) + \langle \nu(t;t,x), x\rangle + \\ + \int_x^s \langle \nu(\sigma;t,x); d_\sigma \widehat{x}(\sigma;t,x)\rangle - \langle \nu(s;t,x); \widehat{x}(s;t,x)\rangle\,,\ s \in [t,T] \end{gathered} \tag{3.5}$$

pentru fiecare $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *fixat.*

Observaţia 3.2. *Ecuaţiile integrale* (3.4) *sugerează că* $\{\nu \in \mathbb{R}^n\}$ *(componenta vectorială aleatoare a strategiei admisibile* $\theta \in A\varphi$*) poate fi determinată utilizând inegalităţile integrale* (3.4) *şi* (3.5)*.*

În plus, aceasta poate fi determinată utilizând componenta admisibilă $\{\nu \in \mathbb{R}^n\}$ *in forma feed-back*

$$\nu_0(s;t,x) = v\left(s, \widehat{x}(s;t,x)\right),\ s \in [t,T],\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

unde $v(s,x) = \partial_x u(s,x)$ *şi* $\{u(s,x), s \in]0,T],\ x \in \mathbb{R}^n\}$ *satisface următoarea ecuaţie parabolică de tip retrograd (ecuaţia Kolmogorov)*

$$\begin{cases} \partial_s u(s,x) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^m \left\langle \partial_x^2 u(s,x) g_i(x), g_i(x)\right\rangle = 0,\ s \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(t,x) = \varphi(x). \end{cases} \tag{3.7}$$

O soluţie a ecuaţiei Kolmogorov $\{u(s,x), s \in]0,T],\ x \in \mathbb{R}^n\}$ *poate fi definită astfel*

$$u(s,x) = E\varphi(z(T;s,x)),\ s \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.8}$$

unde $\{z(\sigma;s,x); \sigma \in [s,T]\}$ *este soluţia unică a ecuaţiei diferenţiale stochastice Markoviană redusă*

$$\begin{cases} d_\sigma(z) = \displaystyle\sum_{i=1}^m g_i(z) \cdot \mathrm{d}w_i(\sigma),\ \sigma \in [s,T] \\ z(s) = x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.9}$$

Funcţionala din (3.8) *va fi soluţie a ecuaţiei parabolice* (3.7) *dacă ţinem cont de condiţiile teoremei 6.1., pag.124 din* [9] *[A. Friedman, 1975].*

Presupunem că

$$(\beta) \qquad \varphi \in C_p^2(\mathbb{R}^n) \text{ şi } g_i \in \left(C_b^1 \cap C_p^2\right)(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n),\ i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Aici spaţiul $C_p^2(\mathbb{R}^n)$ *constă din toate funcţiile scalare* $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *care satisfac o condiţie de creştere polinomială împreună cu derivatele sale parţiale de ordinul doi. În plus, utilizând funcţionala din* (3.8), *putem să rescriem condiţia Europeană din* (3.3) *sub forma următoare*

$$V_\theta(T;t,x) \geq u\left(T,\widehat{x}(T;t,x)\right) \text{ (vezi } u(T,x)=\varphi(x)). \tag{3.10}$$

Aplicând regula standard de derivare stochastică, partea dreaptă din (3.10) devine

$$\begin{aligned}&\varphi\left(\widehat{x}(T;t,x)\right) = u\left(T,\widehat{x}(T;t,x)\right) = u(t,x)+\\&+\int_t^T \left\langle \partial_x u\left(s,\widehat{x}(s;t,x)\right), d_s\widehat{x}(s;t,x)\right\rangle + \int_t^T \partial_s u\left(s,\widehat{x}(s;t,x)\right)+\\&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left\langle \partial_x^2 u\left(s,\widehat{x}(s;t,x)\right) g_i\left(\widehat{x}(s;t,x)\right), g_i\left(\widehat{x}(s;t,x)\right)\right\rangle \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Utilizând ecuaţia Kolmogorv (3.7), din (3.11), obţinem

$$\varphi\left(\widehat{x}(T;t,x)\right) = u(t,x) + \int_t^T \left\langle \partial_x u\left(s,\widehat{x}(s;t,x)\right); d_s\widehat{x}(s;t,x)\right\rangle \tag{3.12}$$

şi inegalităţile funcţionale (3.3) vor fi îndeplinite (vezi de asemenea (3.4) pentru $V_\theta(T,t,x)$) cu condiţia

$$V_\theta(t;t,x) \geq u(t,x) \text{ şi } \nu(s;t,x) = \partial_x u\left(s,\widehat{x}(s;t,x)\right),\ s\in[t,T] \tag{3.13}$$

Observaţia 3.3. *Inegalităţile* (3.13) *combinate cu ecuaţia* (3.5) *ne conduc la o strategie admisibilă* $\theta = \{(\nu_0(s;t,x),\nu(s;t,x)); s\in[t.T],\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\}$ *care satisface*

$$\nu_0(s;t,x) = v\left(s,\widehat{x}(s;t,x)\right), \tag{3.14}$$

unde $v(s,x) \overset{def}{=} \partial_x u(s,x),\ (s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *şi*

$$\begin{cases} V_\theta(t;t,x) = \nu_0(t;t,x) + \langle \partial_x u(t,x), x\rangle,\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n \\ \nu_0(t;t,x) \geq u(t,x) - \langle x, \partial_x u(t,x)\rangle,\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.15}$$

(vezi $V_\theta(t;t,x)\geq u(t,x)$ *în* (3.13)*).*

Ecuaţiile integrale (3.5) *devin*

$$\nu_0(s;t,x) = \nu_0(t;t,x) + \langle x, \partial_x u(t,x)\rangle + \tag{3.16}$$
$$+ \int_t^s \langle v(\sigma, \widehat{x}(\sigma;t,x); d_\sigma \widehat{x}(\sigma;t,x)\rangle - \langle v\left(s, \widehat{x}(s;t,x)\right); \widehat{x}(s;t,x)\rangle,$$

unde $s \in [t.T]$ *şi* $\nu_0(t;t,x) + \langle x, \partial_x u(t,x)\rangle \geq u(t,x)$ *trebuie îndeplinită pentru orice* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *(vezi* (3.15)*).*

Observaţiile şi calculele de mai sus le formulăm în următoarea

Propoziţia 3.2. *Presupunem că ipotezele* (α) *şi* (β) *sunt îndeplinite. Considerăm funcţionala* $u(s,x) = E\varphi(z(T;t,x))$, $s \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ *(definită în* (3.8)*) care satisface ecuaţia Kolmogorov* (3.7)*. Definim o strategie admisibilă*

$$\theta = \{(\nu_0(s;t,x), \nu(s;t,x)); s \in [t,T],\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n\}$$

astfel

$$\nu(s;t,x) = \partial_x u\left(s, \widehat{x}(s;t,x)\right),\ s \in [t,T], \tag{3.17}$$

iar $\nu_0(s;t,x)$, $s \in [t,T]$, *satisface* (3.1)*, unde* $\nu_0(t;t,x) + \langle x, \partial_x u(t,x)\rangle \geq u(t,x)$*, pentru orice* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *fixat.*

Observaţia 3.4. *Ţinând cont de condiţia* $\varphi \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$*, soluţia clasică* $\{u(s,x);\ s \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n\}$ *a ecuaţiei Kolmogorov* (3.7) *este utilizată pentru a defini strategia admisibilă* $\theta \in A_\varphi$ *ca în* (3.17) *din Propoziţia 3.2. Presupunem că* φ *este doar local Lipschitz continuă (vezi* [22]*) atunci soluţia în sens slab a ecuaţiei Kolmogorov* (3.7) *poate fi definită (vezi* $\{u(s,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ *este continuă, iar* $\partial_x u(s,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *este măsurabilă Borel), astfel încât* $\theta \in A_\varphi$ *(definită în* (3.17)*) este admisibilă.*

Concluzii

Începând cu ultimele două decenii, dezvoltarea şi aplicarea metodelor matematice avansate din domeniul stochastic au avut un rol din ce în ce mai determinant în studiul instrumentelor financiare şi a burselor în care acestea îşi găsesc aplicabilitatea. Astfel, procedee matematice complexe, cum ar fi teoria ecuaţiilor diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale deterministe sau stochastice, teoria controlului optimal determinist sau stochastic (în care se doreşte maximizarea unei funcţii valoare, ce se defineşte în funcţie de modelul ales), calculul stochastic neanticipativ (de tip Itô) sau anticipativ (de tip Malliavin), analiza numerică, analiza funcţională, teoria proceselor stochastice (de tip Wiener pentru modele continue, Poisson pentru modele discontinue ce prezintă salturi la momente aleatoare de timp datorate unor cauze exogene sau procese generale de tip Levy, adică procese cu creşteri independente şi staţionare, cu traiectorii continue sau discontinue).

Rezultatele obţinute în această lucrare pot constitui un răspuns ştiinţific la numeroasele provocări de pe piaţa financiară în cadrul căreia apar extrem de des produse noi. Subiectele abordate permit aplicaţii atât teoretice cât şi practice, iar rezultatele obţinute pot fi utile potenţialilor beneficiari ca: bănci, bursa de valori, trezoreriile diverselor firme, societăţile de asigurări etc.

Bibliografie

[1] P. Barrieu, N. El Karoui, *Optimal design of derivatives under dynamic risk measures*, Mathematics of Finance. Contemporary Mathematics (Proceedings of the AMS), 13-26 (2004).

[2] A. Bensoussan, *Some existence results for stochastic partial differential equations*, in *Stochastic Partial Differential Equations and Applications*, G. Da Prato and L. Tubaro, eds., Pitman Res. Notes Math. Ser. **268** (1992), 37–53.

[3] L. Bertini, N. Cancrini, G. Jona-Lasinio, The Stochastic Burgers Equation, *Commun. Math. Phys.* **165**, 1994, 211–232.

[4] R. Buchdan, Ma. I., *Stochastic viscosity solution for nonlinear stochastic partial differential equations, Part I*, Stochastic Processes Appl., 93, 181-204 (2001).

[5] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Differential Equations în Infinite Dimensions.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

[6] G. Da Prato, L. Tubaro, *Fully nonlinear stochastic partial differential equations.* SIAM J. Math. Anal. 27(1), 40-55 (1996).

[7] G. Da Prato, L.Tubaro, *Stochastic Partial Differential Equations and Applications.* Lecture Notes în Pure and Applied Mathematics 227 (2002).

[8] Y. L. Dalecky, N.Y. Goncharuk, *On a quasilinear stochastic equation of parabolic type.* Stochastic Analysis Applications, 12, 103-129 (1994).

[9] A. Friedman, *Stochastic Differential Equations and Applications*, vol I (Academic press, San Diego, 1975).

[10] Gyöngy, I, Nualart, D. (1999) On the Stochastic Burgers Equation in the Real Line, *The Annals of Probability* **27**, No. 2, 782–202.

[11] B. Iftimie, M. Marinescu and C. Vârsan, *Functionals associated with gradient stochastic flows and nonlinear SPDEs.* Advanced Mathematical Methods for Finance, Eds. Giulia Di Nunno, Bernt Oksendal, 1st. edn, VIII, 397-417 (2011).

[12] B. Iftimie, C. Vârsan, *A pathwise solution for nonlinear parabolic equations with stochastic perturbations.* Central European Journal of Mathematics 3, 367-381 (2003).

[13] D.Ijacu, M. Marinescu, *Filtering for non-Markovian SDE involving nonlinear SPDE and backward parabolic equations*, under review.....

[14] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian *Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edn. (Springer, Berlin, 1991).

[15] N. El Karoui, S. Peng, M. Quene, *Backward stochastic differential equations în finance* 7(1). Mathematical Finance, 1-71 (1997).

[16] H. Kunita, *On decomposition of solution of stochastic differential equations.* Proc.Durham Conf. Stochastic Integrals. Lecture Notes, vol.851, 213-255 (1980).

[17] H. Kunita, *First order stochastic partial differential equations.* Proc. Taniguchi Int.Sym on Stochastic Analysis, Japan, 1982. North Holland Math Libr, vol.32, 249-269, (1986)

[18] H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Diferential Equations*, Vol. 24, Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

[19] P.-L. Lions, P.E. Souganidis, *Fully nonlinear stochastic partial differential equations* 1, Tome 326, C. R. Acad. Sci. Paris, 1085-1092 (1998)

[20] M. Marinescu, D. Ijacu, *Reversible stochastic flows associated with nonlinear SPDs*, under review Nonlinear Differential Equations and Applications.

[21] M. Marinescu, M. Nica, *Functionals and gradient stochastic flows with jumps associated with nonlinear SPDEs*, to appear în Mathematical Reports (2012)

[22] M. Marinescu, C. Vârsan, *Stochastic hamiltonians associated with finite dimensional nonlinear fillters and non-smooth final value*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1, 28-37 (2004)

[23] I. Molnar, C. Varsan, *Functionals Associated with Gradient Stochastic Flows and Nonlinear Parabolic Equations*, Preprint nr.12/2009 ISSN 02503638, IMAR, Bucharest.

[24] I. Molnar, M. Nica, V. Vârsan, *Two problems for stochastic flows associated with nonlinear parabolic equations*, to appear în Mathematical Reports.

[25] Pardoux, E. (1979), Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, *Stochastics* **3**, No. 2, 127–167.

[26] E. Pardoux, S. Peng, *Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs* (Probab. Theory Relat. Fields 98, 209-227 (1994).

[27] N. Popescu-Bodorin, V. Vârsan, *Stochastic Hamiltonians asociated with stochastic diferential equations and non-smooth final value*, Mathematical Reports, Editura Academiei, vol.5 (55), no.4, 399-411, 2003

[28] P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd edn. (Springer, Berlin, 2005)

[29] S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models*, Springer Finance (Springer, Berlin, 2004).

[30] I. Tubaro, *Some results on stochastic partial differential equations by the stochastic characteristic method* (Stochastic Analysis Applications, 62, 217-230 (1988).

[31] C. Vârsan, *Applications of Lie Algebras to Hyperbolic and Stochastic Diferential Equations* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1999)