Rezumat

In cadrul problemelor principal-agent din cadrul unor institutii financiare cum ar fi banci, societati sau fonduri de investitii, din cadrul societatilor de asigurari, etc o parte din capitalul acestora este investita pe diverse piete financiare de catre agent (managerul institutiei). De aici decurge rolul extrem de important pe care il are determinarea portofoliilor optimale de investitii, intr-un sens ce se impune a fi precizat de la caz la caz, mai ales ca activele in care se investeste pot fi supuse:

- riscului de piata - apar fluctuatii ale preturilor generate de acestora datorita unor anumite conjuncturi ale pietelor financiare, burselor sau chiar cauze de natura macroeconomica);
- riscului de contrapartida - in cazul in care activele sunt emise de entitati private care pot refuza la un moment aleator de timp indeplinirea obligatiilor contractuale vis-a-vis de clienti.

In cadrul acestei burse postdoctorale am abordat doua probleme diferite privind determinarea portofoliilor optimale in doua piete financiare diferite, prin portofoliu optimal intelegand aici strategia admisibila pentru care investitorul isi maximizeaza gradul de satisfactie (masurat prin intermediul unei functii de utilitate) asteptat al valorii finale al portofoliului de active. Am considerat numai functii de utilitate din clasa HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*), ce sunt caracteristice unui investitor cu apetit moderat la risc. In aceasta clasa gasim utilitatea de tip logaritmic ($U(x) = \ln(x)$) si utilitatea de tip putere ($U(x) = \frac{x^p}{p}$, cu parametrul $p \in (0, 1)$). Pietele financiare considerate sunt caracterizate prin absenta oportunitatii de arbitraj (o ipoteza viabila din punct de vedere economic) dar sunt incomplete, datorita momentului aleator de timp τ la care poate avea loc un salt neprevazut in dinamica pretului unui activ tranzactionat.

In capitolul doi am considerat problema determinarii portofoliului optimal in cazul unei piete financiare generate de:

- un activ fara risc (de ex. un depozit bancar la termen) cu o rata a dobanzii stohastice, modelata cu ajutorul unui proces ce poate avea un salt la un anumit moment aleator τ;

- si un activ riscat (de ex. un activ tranzactionat la Bursa) care este supus numai riscului de piata.

Putem interpreta saltul procesului ce modeleaza rata dobanzii fara risc (ce este asimilata inflatiei din tara respectiva) in cazul unor conditii macroeconomice exceptionale, de exemplu o puternica recesiune ce afecteaza economia unei tari (de exemplu Grecia in cadrul recesiunii ce a inceput in 2009), conditii in care are loc retrogradarea ratingului de tara de catre agentii specializate.

Am lucrat sub asa numita ipoteza **(H)**, ce reprezinta proprietatea de invarianta a martingalelor sub filtratia generata de miscarea Browniana standard ce guverneaza pretul activului cu risc si filtratia largita, i.e. cea mai mica filtratia prin care τ devine un timp de stopare. De asemenea am presupus existenta intensitatii timpului aleator τ. In cazul functiei de utilitate logaritmice am rezolvat in mod explicit problema utilizand o metoda directa. Pentru functii de utilitate putere am rezolvat problema prin doua metode.

Prin prima metoda am rezolvat problema duala, pe care am scris-o intr-un mod accesibil utilizand un rezultat de reprezentare a martingalelor in raport cu filtratia largita datorat lui Kusuoka. Apoi, am determinat expresia functiei valoare si a controlului optimal pentru problema duala utilizand metoda de programare dinamica pentru procese cu salturi initiata de El Karoui si Quenez [11], unele metode standard de calcul stohastic (cum ar fi Lema lui Itô pentru procese continue, respectiv cu salturi), rezultate standard sau mai putin standard din teoria ecuatiilor stohastice diferentiale retrograde (numite EDSR) Browniene sau cu salturi, rezultate de uniform integrabilitate a procesului exponentialei stohastice in cazul proceselor cu salturi. Aceasta ne-a condus la determinarea functiei valoare pentru problema principala.

Prin a doua metoda am rezolvat direct problema primala inspirandu-ne dintr-un articol al autorilor Hu, Imkeller, Müller (referinta [15]), utilizand argumente similare ca cele care ne-au condus la rezolvarea problemei duale. In plus, am obtinut si o formula explicita pentru strategia optimala.

Capitolul trei este dedicat unei probleme de optimizare de portofolii in cadrul unei piete financiare generate de un activ fara risc, un activ cu risc supus riscului de piata si un activ cu risc care este in plus supus si riscului de contrapartida. Am lucrat sub ipoteza **(H)**si de asemenea am presupus existenta densitatii conditionale pentru momentul aleator τ. Pentru activul supus riscului de contrapartida am presupus ca in caz de *default* (nerespectare a obligatiilor contractuale vis-a-vis de investitor a firmei ce a emis activul respectiv), investitorul primeste o compensatie ce este data de un anumit procent din valoarea de piata a activului chiar inainte de producerea defaultului, iar dupa default activul nu mai este tranzactionat.

Am rezolvat direct aceasta problema in cazul utilitatii de tip logaritmic. Am dat apoi o metoda generala de rezolvare in cazul utilitatilor din clasa HARA in care ne-am inspirat din articolul Jiao, Pham [16], care descompun problema de optimizare originala in doua subprobleme, una inainte de default si cealalta dupa default, ambele probleme fiind formulate in piete *complete* si pentru rezolvarea carora se pot aplica metode martingale clasice. Am caracterizat solutia problemei post-default cu ajutorul metodei martingale duale. In plus, in cazul unei functii de utilitate de tip putere, am presupus ca defaultul apare cu probabilitatea 1 pana la orizontul T al procesului de investitie si coeficientii modelului sunt functii deterministe. Avand forma explicita a procesului valorii portofoliului, am rezolvat mai intai problema post-default ca o problema de control optimal cu timp si stare initiale aleatoare, iar apoi am rezolvat separat problema pre-default, care este o problema in orizont aleator. Pentru probleme in orizont aleator exista extrem de putine rezultate in literatura de specialitate. In abordarea noastra ne-am inspirat din articolul [3] si am formulat un rezultat de verificare, care se bazeaza pe principiul programarii dinamice - definirea unei ecuatii diferentiale cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman ce este satisfacuta de functia valoare.

Capitolul 1
Introducere

În cadrul problemelor de tip investitor-manager, managerul unei companii private are printre altele şi sarcina de a efectua plasamente optime pe diverse pieţe financiare utilizând capitalul firmei (care este format în principal de sumele vărsate de acţionari). Astfel, în cadrul investiţiilor pe piaţa financiară, un rol important îl joaca riscul asociat acestora, cu preponderenţă riscul de credit, ce este asociat investiţiei în activele emise de societăţi private, societăţi ce pot refuza la un moment dat îndeplinirea obligaţiilor asumate prin contract vis-a-vis de investitori, sau pot intra în incapacitate de plata (sau chiar faliment). Pe o piaţă financiară se întâlnesc în general mai multe active supuse investiţiilor:

- activele fără risc - reprezentând activele în care riscul asociat este foarte scăzut, a căror randament aşteptat este aproximativ egal cu rata inflaţiei. Ne referim aici în principal la depozitele bancare la termen;

- activele cu risc - reprezentând activele a căror randament aşteptat este mai mare decât cea a activelor fără risc, dar care şi comportă un risc sporit. Ne referim aici la active tranzacţionate pe diverse pieţe reglementate, cum ar fi de exemplu la Burse.

În cadrul activelor cu risc întâlnim şi active supuse riscului de credit, active care sunt în general emise de societăţi mai mici, pe care le mai numim în cadrul acestei lucrari şi active ce pot da default.

Scopul principal al acestei lucrări postdoctorale este acela de a găsi o strategie optimă în cadrul unui proces de investiţii, precum şi valoarea la orice moment de timp a portofoliului optim. Prin strategie optimă se va inţelege acea strategie prin care se va optimiza satisfacţia investitorului privind valorea finală a portofoliului său de active, gradul de satisfacţie fiind măsurat prin *valoarea medie a utilitaţii asociate valorii finale a portofoliului*. Funcţiile de utilitate la care ne vom referi se înscriu în clasa HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*), fiind de tip logaritmic sau exponenţial, referindu-se la investitori care nu preferă un risc sporit.

Problemele de optimizare de portofolii constituie un subiect ce a suscitat si suscita un interes crescand, incepand cu anul 1971 in care Robert Merton (a se vedea referinta [30]) a publicat o lucrare de pionierat in domeniu. Abordarea lui Merton a constat in elemente de control optimal stohastic, printre care principiul programarii dinamice ce consta in rezolvarea unei ecuatii cu derivate partiale neliniare (numita ecuatia Hamilton-Jacobi-Bellman) ce este satisfacuta de functia valoare asociata problemei de optimizare. O alta lucrare care a facut un larg ecou a fost articolul scris de Ioannis Karatzas in anul 1989 (referinta [17]), in care sunt tratate o serie de probleme de optimizare a investitiilor/consumului intermediar pentru un investitor ”mic” (in sensul ca acesta nu poate modifica preturile, intrucat achizitioneaza un volum nesemnificativ din activele supuse tranzactionarii). Metodele utilizate sunt atat de control optimal stohastic dar si de dualitate convexa (sau metode martingale). Prin cea de a doua metoda problema de optimizare originala este transformata intr-o problema de optimizare statica cu o restrictie bugetara, si care se rezolva utilizand metoda multiplicatorilor lui Lagrange, valoarea portofoliului optim fiind obtinuta in functie de conjugata convexa a functiei de utilitate (tinand cont de faptul ca procesul dat de valoarea portofoliului la orice moment de timp este un martingal in raport cu orice probabilitate echivalenta neutra la risc). Lucrarile mentionate mai sus se refera la o piata financiara completa (in care nu exista posibilitatea de arbitraj) formata din active fara risc si active cu risc nesupuse riscului de credit, in care cursurile activelor sunt date prin procese cu traiectorii continue (miscari Browniene geometrice) iar filtratia (i.e. informatia la care au acces investitorii) este data de filtratia naturala a unei miscari Browniene standard (posibil multidimensionale).

Korn si Kraft (2001) studiaza o problema de optimizare de portofolii intr-o piata financiara cu un activ fara risc pentru care rata dobanzii este stohastica (urmeaza unul din modelele clasice Vasicek sau Ho-Lee) si un activ cu risc fara default, metodele utilizate fiind o varianta a principiului programarii dinamice (obtinerea ecuatiei neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman). Teoremele standard de verificare nu pot fi aplicate in acest context datorita naturii stohastice a ratei dobanzii.

Blanchet-Scalliet, El Karoui, Jeanblanc and Martellini (2008) trateaza o problema de optimizare a investitiilor in situatia in care orizontul de timp pe care se desfasoara investitia este *aleator*. Motivatia pentru acest studiu o reprezinta posibile situatii neprevazute in care investitorul are nevoie urgenta de capital (doreste sa achizitioneze o casa, are de achitat a datorie etc) si este nevoit sa-si lichideze portofoliul financiar in mod neasteptat.

Kramkov si Schachermayer (1999) au obtinut rezultate abstracte privind existenta solutiei unei probleme de optimizare a portofoliilor financiare intr-o piata financiara incompleta (dar lipsita de oportunitati de arbitraj) in care preturile activelor sunt reprezentate prin semimartingale scrise sub forma generala, in special in pentru functiile de utilitate din clasa HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion). Ca metodologie utilizata acestia au rezolvat problema duala asociata si au aratat ca si functiile valoare al celor doua probleme de optimizare sunt in dualitate. Nu au fost insa obtinute formule explicite pentru strategiile optimale

Bielecki and Jang (2007), Capponi and Figueroa Lopez (2011) au studiat unele probleme de optimizare in care coeficientii modelelor sunt functii deterministe, motiv pentru care au putut utiliza cu succes instrumente clasice ale principiului programarii dinamice si ecuatiilor cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman.

We study a portfolio optimization problem in a financial market, with investment opportunities in a money market account, a stock and a corporate bond (which may default at some random time τ), and where the satisfaction of the investor is measured via a HARA utility function. Following the approach of Jiao and Pham (2010), we decompose the original optimization problem into two subproblems: pre-default (till the default time) and a post-default (after the post-default time), which are stated in complete markets. We prove the existence of a solution to the portfolio optimization problem and solve explicitely the post-default problem.

O problema de optimizare stohastica cu o rata a dobanzii fara risc stohastica

Portfolio optimization problems associated with a small investor in a financial market where one/several assets may suffer a shock at some random time are of increasing interest in the last decade. A list of some of the papers devoted to this subject can be found at the bibliography (see for instance ...). Most of these results assume that the riskless asset has constant interest risk rate (which is usually taken zero for simplicity). If it is the case, the (properly defined) dual problem is known to have a solution (cf. Kramkov and Schachermayer [23]).

We consider the problem of maximization of the expectation of the degree of satisfaction of a small investor (measured via some utility function) with respect to the final wealth, in a financial market with investment opportunities in savings account which allows for a general stochastic interest rate (which may suffer a shock at some random time τ, possibly due to some serious macroeconomic issues) and a stock modelled by a diffusion process driven by a one dimensional Brownian motion B. We consider only HARA utility functions satisfying the usual Inada conditions, with the asymptotic elasticity $AE(U)$ strictly less than 1. We treat the cases of log utility function ($U(x) = \ln x$) and power utility function ($U(x) = \frac{x^p}{p}$, with $0 < p < 1$).

We assume that the so-called immersion hypothesis (or the **(H)** hypothesis) holds true for the enlarged filtration $\mathcal{G}$ generated by τ (which is not necessarily a stopping time with respect to the Brownian filtration $\mathcal{F}$, with $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$), for $t \geq 0$ and the Brownian motion B. This assumption can be interpretated as a martingale invariance property. If we denote by $\mathcal{G}$ the smallest filtration containing the Brownian filtration and for which τ is a stopping time, it means that every $\mathcal{F}$-martingale is still a martingale with respect to the enlarged filtration. We solve this problem by two different approaches: the direct approach, in which we treat the original optimization problem using an approach similar to Hu, Imkeller, Müller [15], and also by a dual approach in which we write properly the dual problem (characterizing also the set of all the equivalent martingale measures). In both approaches we derive the value function as the solution of some BSDE with jumps for which we apply some standard techniques, but also some new results due to Kharroubi and Lim [20]. Since we work under the assumption of a stochastic interest rate, well-known results of existence and uniqueness of an optimal strategy (obtained by Kramkov and Schachermayer [23], for instance) cannot be applied here.

Capitolul 2

O problemă de optimizare de portofolii într-o piaţă financiară incompletă generată de o rată stohastică discontinuă a dobânzii

2.1 Formularea cadrului şi a ipotezelor sub care lucrăm

Se consideră un camp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), P)$, cu filtratia $\mathcal{F}$ fiind data de versiunea continua la dreapta a filtratiei naturale a unei miscari Browniene unidimensionale standard (B_t), imbogatita cu toate multimile P-neglijabile , i.e. $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ for $t \geq 0$. Presupunem ca $\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{A}$. Pe acelasi spatiu de probabilitate mai este data o variabila aleatoare pozitiva τ care trebuie sa fie interpretata ca un moment aleator de timp (pe care il denumim in continuare ”default”), la care are loc o evolutie neasteptata in dinamica ratei dobanzii fara risc (asociate de exemplu depozitelor bancare la termen). Notam cu (H_t) procesul stohastic generat de variabilele care indica aparitia evenimentului nedorit (”default”), $H_t := 1_{(\tau \leq t)}$ si fie $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(H_s, 0 \leq s \leq t)$ cea mai mica filtratie ce contine filtratia Browniana $\mathcal{F}$ si pentru care τ este un $\mathcal{G}$-timp de stopare. Procedura de constructie a filtratiei $\mathcal{G}$ este cunoscuta ca *largirea progresiva a filtratiei Browniene*. $\mathcal{F}$ se numeste filtratia pietei (*market filtration*) iar $\mathcal{G}$ filtratia largita (*enlarged filtration*).

Consideram de asemenea o piata financiara ce consta din

- un activ fara risc (de ex. un depozit bancar la termen) cu o rata a dobanzii stohastice, modelata cu ajutorul unui proces $\mathcal{G}$-adaptat r,

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt,\ S_0^0 = 1, \tag{1}$$

- si un activ riscat (de ex. un activ tranzactionat la Bursa, ce presupune realizarea unor castiguri mari dar care si implica asumarea unor riscuri pe masura), pentru care dinamica procesului pretului (S_t) este dat de o miscare Browniana geometrica

$$dS_t = S_t(\nu_t dt + \sigma_t dB_t). \tag{2}$$

Vom lucra sub urmatoarele ipoteze

(H1) r_t este un proces cad-lag (i.e. cu traiectorii continue la dreapta si avand limite finite la stanga) $\mathcal{G}$-adaptat ce ia valori pozitive; $r_t \leq C$, $0 \leq t \leq T$, P - a.s.. C este o constanta pozitiva;

(H2) ν_t si σ_t sunt procese $\mathcal{F}$-adaptate, cu $|\nu_t| \leq C$ si $\frac{1}{C} \leq \sigma_t \leq C$, $0 \leq t \leq T$, P - a.s.;

(H3) Orice $\mathcal{F}$-martingal este de asemenea un martingal in raport cu filtratia largita $\mathcal{G}$. In aceste conditii spunem ca are loc ipoteza **(H)** (de invarianta a martingalelor sau de imersie).

(H4) Procesul ce indica aparitia "default" (H_t) admite un compensator ce este absolut continuu in raport cu masura Lebesgue, i.e. exista un proces $\mathcal{G}$-adaptat λ ce ia valori nenegative, numit $\mathcal{G}$-intensitatea stohastica (care ia valori pozitive pe multimea $(t < \tau)$ si ia valoarea zero pe multimea $(t > \tau)$), cu proprietatea ca procesul compensat $M_t := H_t - \int_0^t \lambda_s ds$ este un $\mathcal{G}$-martingal. Presupunem de asemenea ca $\lambda_t \leq C$, $0 \leq t \leq T$, P - a.s..

Remarca 1 *Din punct de vedere economic ar fi fost mai realist sa presupunem, in locul ipotezei* **(H)**, *ipoteza numita* **(H')** *sau ipoteza de invarianta semimartingala, care spune ca un $\mathcal{F}$-semimartingal este de asemenea si un $\mathcal{G}$-semimartingal. In acest caz insa, descompunerea $\mathcal{F}$-martingalului (B_t) (care este in particular si un $\mathcal{F}$-semimartingal) in filtratia largita $\mathcal{G}$ este data de*

$$B_t = B_t^{\mathcal{G}} + \int_0^t \eta_s ds,\ t \geq 0,$$

unde $(B_t^{\mathcal{G}})$ este un $\mathcal{G}$-martingal si $\int_0^t |\eta_s| ds < \infty$, pentru $t \geq 0$. Din nefericire, pentru constructia de mai sus procesul nu are traiectoriile marginite (pentru mai multe detalii se poate consulta El Karoui, Jeanblanc, Jiao, Zargari [12], Sectiunea 3.1) ceea ce nu ne permite utilizarea unui rezultat de existenta pentru solutia unei ecuatii diferentiale stohastice retrograde (a se vedea Propozitia ...)

Sub ipoteza **(H)** se constata ca (B_t) este o $\mathcal{G}$-miscare Browniana standard. Acest fapt este o consecinta imediata a teoremei lui Lévy de caracterizare martingala a unei miscari Browniene (a se vedea Karatzas, Shreve [23], Teorema 3.16), utilizand faptul ca (B_t) este un martingal continuu in raport cu filtratia $\mathcal{G}$, cu variatia patratica data de $\langle B \rangle_t = t$. Se constata astfel ca *dinamica procesului S_t este invarianta in raport cu cele doua filtratii.*

Definim in continuare urmatoarele spatii functionale

- $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ reprezinta multimea proceselor (X_t) progresiv masurabile in raport cu filtratia $\mathcal{G}$;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}^2$ este submultimea lui $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ ce este formata din procesele (X_t) cu traiectorii marginite aproape sigur, i.e.

$$\|X\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}}^2} := \operatorname{ess} \sup_{t \in [0,T]} |X_t| < \infty;$$

- $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(W)$ reprezinta multimea proceselor $\mathcal{G}$-predictibile de patrat integrabile (X_t), i.e.

$$\|X\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(W)} := E\left(\int_0^T X_t^2 dt\right) < \infty;$$

- $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(M)$ reprezinta multimea proceselor $\mathcal{G}$-predictibile ce satisfac

$$\|X\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(M)} := E\left(\int_0^T X_t^2 \lambda_t dt\right) < \infty.$$

Sub ipoteza **(H4)**, in mod evident are loc incluziunea $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2 \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(M)$.

Consideram acum un investitor cu optiuni de investitii in piata financiara descrisa mai sus ce investeste la momentul initial 0 capitalul x. Procesul de investitie are un orizont finit de timp T. Notam prin N_t^0, respectiv N_t cantitatea din fiecare activ detinuta de investitor la momentul t. Valoarea portofoliului la fiecare moment de timp t asociat strategiei (N_t^0, N_t) este data de

$$X_t^N = N_t^0 S_t^0 + N_t S_t,\ 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

Presupunem ca strategia este autofinantata, ceea ce inseamna ca pe parcursul procesului investitional nu sunt permise alocari suplimentare de capital sau retrageri de capital. Sunt permise asa numitele *short selling*, adica investitorul poate vinde o cantitate de active pe care nu le detine la momentul respectiv, cu obligativitatea insa de a le furniza pana la momentul T (in speranta ca in viitor le poate achizitiona la un pret redus al activelor decat cel prezent). Aceasta ipoteza ne conduce la ecuatia de autofinantare

$$dX_t^N = N_t^0 dS_t^0 + N_t dS_t = (r_t X_t + N_t S_t(\nu_t - r_t))\, dt + N_t S_t \sigma_t dB_t;\ X_0^\pi = x.$$

Aceasta ecuatie ne spune de fapt ca variatia valorii portofoliului pe intervale de timp infinitezimale provine din variatia cursurilor activelor.

In loc de cantittaea din fiecare activ detinuta (sau datorata, ca in cazul *short selling*), vom utiliza ca strategii (variabile de control) proportiile din valoarea portofoliului ce sunt investite in fiecare tip de activ, pe care le notam prin π_t^0, respectiv π_t. In mod evident $\pi_t^0 = 1 - \pi_t$, si deci strategia de finantare este unic determinata de proportia investita in activul cu risc. Ecuatia de autofinantare se poate atunci rescrie

$$dX_t^{x,\pi} = X_t^\pi \left[(r_t + \pi_t(\nu_t - r_t))dt + \pi_t \sigma_t dB_t\right];\ X_0^\pi = x. \tag{4}$$ wealtheq

Fie (R_t) procesul de actualizare (in raport cu rata dobanzii asociata activului fara risc), definit prin $R_t := e^{-\int_0^t r_s ds}$. Notam prin $(\tilde{S}_t)$ procesul preturilor actualizate ale activului riscat, i.e. $\tilde{S}_t := R_t S_t$, si prin $\mathcal{M}(P)$ multimea tuturor masurilor martingale echivalente cu probabilitatea istorica P, in raport cu filtratia $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{M}(P) := \{Q \text{ masura de probabilitate pe } \mathcal{G}_T \mid Q \sim P \text{ si } (\tilde{S}_t) \text{ este un } \mathcal{G}\text{-martingal}\}.$$

Definitia 1 Multimea $\mathcal{A}(x)$ a strategiilor (portofoliilor) admisibile este formata din procesele (π_t) ce sunt $\mathcal{G}$-predictibile si care satisfac $E\int_0^T \pi_s^2\sigma_s^2 ds < \infty$.

Ecuatia (4) este o ecuatie diferentiala stohastica liniara cu solutia data prin formula explicita

$$\begin{aligned} X_t^{x,\pi} &= x\exp\left(\int_0^t (r_s + \pi_s(\nu_s - r_s))ds\right)\ \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot \pi_s\sigma_s dB_s\right)_t \\ &= x\exp\left(\int_0^t (r_s + \pi_s(\nu_s - r_s) - \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma_s^2)ds\right)\exp\left(\int_0^t \pi_s\sigma_s dB_s\right). \end{aligned} \tag{5}$$

explX

Prin $\mathcal{E}(Y_\cdot)_t$ intelegem *exponentiala stohastica Doleans-Dade* a unui martingal (Y). In cazul in care (Y) este un proces cu traiectorii continue, este adevarata formula

$$\mathcal{E}(Y_\cdot)_t := \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t\right),$$

unde $\langle Y\rangle_t$ reprezinta variatia patratica a procesului (Y_t). Procesul exponentialei stohastice este un martingal (local).

O consecinta imediata a formulei (5) este faptul ca valoarea portofoliului $(X_t^{x,\pi})$ ia valori strict pozitive la orice moment de timp t.

Remarca 2 *Forma multiplicativa (5) a valorii portofoliului ne permite sa observam ca multimea strategiilor admisibile nu depinde de capitalul investit x, motiv pentru care vom nota aceasta multime prin $\mathcal{A}$.*

Suntem interesati de problema maximizarii utilitatii asteptate (gradului de satisfactie), in raport cu toate strategiile admisibile π, a investitorului de pe urma obtinerii valorii finale a portofoliului $X_T^{x,\pi}$. Vom considera functii de utilitate $U : (0,\infty) \to (0,\infty)$ derivabile, strict crescatoare si strict concave, satisfacand in plus si conditiile uzuale Inada: $\lim_{x\to 0} U'(x) = \infty$ si $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$. Clasa acestor functii o notam prin $\mathcal{U}$, in cadrul careia vom considera urmatoarele functii de utilitate tip *HARA* (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*).

- functia de utilitate de tip logaritmic: $U(x) = \ln x$;
- functia de utilitate de tip putere: $U(x) = \frac{x^p}{p}$, cu $0 < p < 1$.

Problema de optimizare pe care ne-am propus sa o studiem este data de

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} E\left[U\left(X_T^{x,\pi}\right)\right]. \tag{6}$$ primal

Obiectivele principale constau in caracterizarea functiei valoare V si, in caz de existenta, a determinarii unei strategii optimale π^*.

Daca π este o strategie admisibila, notam

$$J^\pi(x) = E\left[U\left(X_T^{x,\pi}\right)\right],$$

ceea ce inseamna ca problema de optimizare se poate rescrie sub forma

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} J^\pi(x).$$

In continuare vom utiliza notatia simplificata X_t^π (in loc de $X_t^{x,\pi}$) atunci cand nu este pericol de confuzie.

2.2 Cazul utilităţii de tip logaritmic

In cadrul acestei sectiuni vom relaxa ipotezele $(\mathbf{H1})$, $(\mathbf{H2})$ precum si definirea strategiilor admisibile. Vom presupune ca procesele $(r_t), (\nu_t), (\sigma_t)$ si *premiul de risk* (*risk premium*) (μ_t) definit prin $\mu_t := \frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}$ sunt de patrat integrabile, i.e. apartin spatiului $L^2([0,T] \times \Omega)$. O conditie suficienta pentru ca procesul premiului de risc (μ_t) sa fie de patrat integrabil este ca (r_t) si (ν_t) sa fie de patrat integrabil si σ_t sa fie marginit inferior de o constanta strict pozitiva.

Multimea strategiilor admisibile va fi formata din multimea

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' = &\Big\{\pi_t \text{ este un proces } \mathcal{G}\text{-adaptat } \Big| E\int_0^T |\pi_t(\nu_t - r_t)|dt < \infty, \\ &E\int_0^T \pi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty\Big\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Pentru $U(x) = \ln x$, obtinem

$$U\left(X_T^{x,\pi}\right) = \ln x + \int_0^T \left(r_s + \pi_s(\nu_s - r_s) - \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma_s^2 \right) ds + \int_0^T \pi_s\sigma_s dB_s,$$

si daca $\pi \in \mathcal{A}'(x)$ atunci procesul integralei stohastice $(\int_0^t \pi_s\sigma_s dB_s)$ este un $\mathcal{G}$-martingal de medie 0. Rezulta

$$J^\pi(x) = \ln x + J^\pi(1) = \ln x + E\int_0^T (r_s + \pi_s(\nu_s - r_s) - \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma_s^2)ds.$$

Suntem astfel condusi la rezolvarea unei probleme de optimizare pe traiectorii (*pathwise*). Pentru $t \in [0, T]$ fixat, functia de gradul II

$$-\frac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 + \pi(\nu_t - r_t) + r_t$$

isi atinge valoarea maxima in punctul

$$\pi_t^* := \frac{r_t - \nu_t}{\sigma_t^2}. \tag{8}$$ $\boxed{\texttt{optportflog}}$

Strategia π^* obtinuta mai sus este in mod evident admisibila, intrucat

$$E\int_0^T (\pi_t^*)^2\sigma_t^2 dt = E\int_0^T \left(\frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}\right)^2 dt < \infty,$$

conform ipotezelor facute. Se observa de asemenea ca $\pi_t^*(\nu_t - r_t) = -\left(\frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}\right)^2$.

Enuntam acum rezultatul principal al acestei sectiuni.

Teorema 1 *Functia valoare a problemei de optimizare*

$$V(x) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}'} E\left[\ln\left(X_T^{x,\pi}\right)\right]$$

este finita si are expresia

$$V(x) = \ln x + E\int_0^T \left(r_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}\right)^2 \right) dt. \tag{9}$$

In plus, problema admite o unica strategie optimala π^* care este data de formula optportflog (8).

Remarca 3 *Se observa ca strategia optimala coincide cu strategia optimala obtinuta de Merton (a se vedea Merton* Me *[**?**]). Acest rezultat nu este deloc surprinzator intrucat ecuatiile satisfacute de preturile activelor sunt aceleasi in raport cu cele doua filtratii.*

2.3 Cazul utilităţii de tip putere. Abordarea cu ajutorul problemei duale

In cele ce urmeaza vom considera cazul unei functii utilitate de tip putere, $U(x) = \frac{x^p}{p}$, cu $0 < p < 1$. Intrucat coeficientii preturilor activelor sunt aleatori, o abordare directa utilizand formula explX (5) similara cu cea din cazul utilitatii de tip logaritmic nu poate fi utilizata.

Fie U^* conjugata convexa a functiei concave U, care este definita prin

$$U^*(y) := \sup_{x>0}(U(x) - xy),\ y > 0.$$

Supremumul din ultima formula este atins in punctul $I(y) := (U')^{-1}(y)$ si un calcul elementar ne conduce la $I(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ si

$$U^*(y) = U(I(y)) - yI(y) = \frac{1-p}{p} y^{\frac{p}{p-1}}.$$

In continuare dorim sa caracterizam multimea masurilor martingale echivalente, multime pe care o vom nota prin $\mathcal{M}(P)$.

2.3.1 Caracterizarea mulţimii $\mathcal{M}(P)$

Dinamica pretului actualizat al activului cu risc $\tilde{S}_t$ este obtinuta cu ajutorul formulei lui Itô

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\nu_t - r_t)dt + \sigma_t dB_t) = \sigma_t \tilde{S}_t(\mu_t dt + dB_t). \quad (10)$$ discontS

Intr-un mod similar deducem ecuatia pretului actualizat al valorii portofoliului

$\tilde{X}_t = R_t X_t^\pi$,

$$d\tilde{X}_t = \pi_t \tilde{X}_t((\nu_t - r_t)dt + \sigma_t dB_t) = \pi_t \sigma_t \tilde{X}_t(\mu_t dt + dB_t),$$

unde am notat $\mu_t := \frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}$. Fie Q o masura de probabilitate echivalenta cu P si fie L_T^Q densitatea Radon-Nikodym $\frac{dQ}{dP}\big|_{\mathcal{G}_T}$. L_T^Q este o variabila aleatoare pozitiva $\mathcal{G}_T$-masurabila ce satisface $E(L_T^Q) = 1$. Definim procesul densitatilor Radon-Nikodym $(L_t^Q)_{0 \le t \le T}$ prin $L_t^Q := E(L_T^Q | \mathcal{G}_t)$.

In conformitate cu Teorema lui Kusuoka de reprezentare a proceselor predictibile (a se vedea referinta Kusuoka [24]), orice proces care este un $\mathcal{G}$-martingal de patrat integrabil poate fi descompus ca suma dintre valoarea sa initiala, un martingal continuu dat printr-o integrala stohastica in raport cu miscarea Browniana B si un martingal discontinuu dat printr-o integrala stohastica in raport cu martingalul cu salturi M (martingalul compensat al lui (H_t)). Atunci, procesul L_t^Q poate fi reprezentat ca

$$L_t^Q = 1 + \int_0^t \tilde{\theta}_s dB_s + \int_0^t \tilde{\gamma}_s dM_s, \tag{11}$$

unde $\tilde{\theta}_t, \tilde{\gamma}_t$ sunt procese $\mathcal{G}$-predictibile. Intrucat L_t^Q ia valori strict pozitive, notand $\theta_t = \frac{\tilde{\theta}_t}{L_{t-}^Q}$ si $\gamma_t = \frac{\tilde{\gamma}_t}{L_{t-}^Q}$, se obtine urmatoarea formula

$$L_t^Q = 1 + \int_0^t L_{s-}^Q \theta_s dB_s + \int_0^t L_{s-}^Q \gamma_s dM_s, \text{ cu } \gamma_t > -1.$$

Rezulta

$$\begin{aligned} L_t^Q &= \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot \theta_s dB_s\right)_t \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot \gamma_s dM_s\right)_t \\ &= \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right) \exp\left(\int_0^t \ln(1+\gamma_s) dH_s - \int_0^t \gamma_s \lambda_s ds\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Teorema clasica a lui Girsanov poate fi atunci extinsa in cazul martingalelor cu salturi.

RND **Propoziţia 1** *Procesul*

$$\hat{B}_t := B_t - \int_0^t \theta_s ds$$

este o $\mathcal{G}$-miscare Browniana sub Q, iar procesul

$$\hat{M}_t := M_t - \int_0^t \gamma_s \lambda_s ds = H_t - \int_0^t (1+\gamma_s)\lambda_s ds$$

este un $\mathcal{G}$-martingal discontinuu sub Q, ortogonal cu $(\hat{B}_t)$.

Sub Q procesul (H_t) admite intensitatea stohastica $\hat{\lambda}_t = (1+\gamma_t)\lambda_t$.

Utilizand formula (10), este usor de vazut ca o masura Q este o probabilitate neutra la risc numai daca $\theta_t = -\mu_t = \frac{r_t - \nu_t}{\sigma_t}$.

EMMdens **Corolarul 1** *Multimea masurilor martingale echivalente $\mathcal{M}(P)$ este determinata de masurile de probabilitate Q echivalente cu P, pentru care procesul densitatilor Radon-Nikodyim are forma*

$$L_t^Q = \exp\left(-\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds\right)\ \exp\left(\int_0^t \ln(1+\gamma_s) dH_s - \int_0^t \gamma_s \lambda_s ds\right), \tag{13}$$

unde (γ_t) este un proces $\mathcal{G}$-predictibil cu $\gamma_t > -1$ si $E(L_T^Q) = 1$.

In cele ce urmeaza, pentru o masura $Q \in \mathcal{M}(P)$ vom utiliza notatia $L_t^\gamma := L_t^Q$, unde procesul (γ_t) este ca in corolarul precedent.

2.3.2 Caracterizarea problemei duale utilizând o teoremă abstractă

Vom urma rationamentul lui L.C.G. Rogers (conform referintei Rogers [31]) in scopul deducerii problemei duale asociate problemei de optimizare (6). In acest scop, urmarim sa construim un semimartingal (in raport cu filtratia $\mathcal{G}$) pozitiv (Z_t), solutie a ecuatiei diferentiale stohastice

$$dZ_t = Z_t(\delta_t dt + \alpha_t dB_t + \beta_t dM_t);\ Z_0 = z,$$

unde procesele δ, α and β sunt $\mathcal{G}$-predictibile, si $\beta_t > -1$. Reamintim dinamica procesului $X^{x,\pi}$

$$dX_t^{x,\pi} = X_t^{x,\pi}\left[(r_t + \sigma_t\mu_t\pi_t)dt + \pi_t\sigma_t dB_t\right];\ X_0^{x,\pi} = x. \tag{14}$$

dynwealth

Calculam in doua moduri integrala $\int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi}$, mai intai tinand cont de ecuatia (14), iar apoi utilizand formula de integrare prin parti si tinand cont de dinamica procesului ajutator (Z_t). Obtinem astfel

$$\int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi} = \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(r_t + \sigma_t\mu_t\pi_t)dt + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}\pi_t\sigma_t dB_t,$$

si de asemenea

$$\begin{aligned}\int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi} &= Z_T X_T^{x,\pi} - xz - \int_0^T X_t^{x,\pi} dZ_t - \langle Z, X^{x,\pi}\rangle_t \\ &= Z_T X_T^{x,\pi} - xz - \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(\delta_t + \alpha_t\pi_t\sigma_t)dt \\ &\quad - \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}\alpha_t dB_t - \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}\beta_t dM_t.\end{aligned} \tag{15}$$

Presupunand ca procesele $\int_0^\cdot Z_s X_s^{x,\pi}\pi_s\sigma_s dB_s$, $\int_0^\cdot Z_s X_s^{x,\pi}\alpha_s dB_s$ and $\int_0^\cdot Z_s X_s^{x,\pi}\beta_s dM_s$ sunt martingale adevarate (si nu numai martingale locale), se obtine

$$E\Big[\int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(r_t + \sigma_t\mu_t\pi_t)dt\Big] = E\Big[Z_T X_T^{x,\pi} - xz - \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(\delta_t + \alpha_t\pi_t\sigma_t)dt\Big].$$

Atunci, daca U este o functie de utilitate ce apartine clasei $\mathcal{U}$

$$
\begin{aligned}
E(U(X_T^{x,\pi})) &= E\Big[U(X_T^{x,\pi})) - \int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi} + \int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi}\Big] \\
&= E\Big[U(X_T^{x,\pi}) + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(r_t + \sigma_t\mu_t\pi_t)dt - Z_T X_T^{x,\pi} + xz \\
&\quad + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(\delta_t + \alpha_t\pi_t\sigma_t)dt\Big] \\
&= xz + E\Big[U(X_T^{x,\pi}) - Z_T X_T^{x,\pi} \\
&\quad + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(r_t + \delta_t + \sigma_t\mu_t\pi_t + \alpha_t\pi_t\sigma_t)dt\Big].
\end{aligned}
$$

Definim acum Lagrangeanul

$$
\begin{aligned}
\Lambda(Z) := \sup_{X^{x,\pi}\geq 0,\pi} \Big\{ & xz + E\Big[U(X_T^{x,\pi}) - Z_T X_T^{x,\pi} \\
& + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(\delta_t + r_t + \sigma_t\pi_t(\alpha_t + \mu_t))dt\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Maximizam mai intai in raport cu X_T. In mod evident (a se vedea definitia functiei U^*)

$$\sup_{X_T} E\left[U(X_T) - Z_T X_T\right] = U^*(Z_T).$$

Apoi, maximizand dupa toate strategiile admisibile π (tinand cont de faptul ca procesele Z and X iau valori pozitive), obtinem o valoare finita numai daca $\alpha_t + \mu_t \leq 0$. De asemenea, cand maximizam dupa $X_t \geq 0$, obtinem$\delta_t + r_t \leq 0$. In mod intuitiv, ultimele doua inegalitati trebuie sa fie de fapt egalitati atunci cand dorim s aobtinem valoarea maxima a expresiei dintre acolade, si deci

$$\alpha_t := -\mu_t = \theta_t \text{ and } \delta_t = -r_t. \tag{16}$$

Rezulta ca dinamica procesului Z_t poate fi rescrisa ca

$$dZ_t = Z_t(-r_t dt - \mu_t dB_t + \beta_t dM_t);\; Z_0 = z. \tag{17}$$ eqZ

Deducem ca exista o masura martingala echivalenta Q (a se vedea si formula (EMM 12)) astfel incat

$$Z_t = zR_tL_t^Q.$$

Intuim atunci ca duala problemei (6) ar trebui sa aiba forma

$$\begin{aligned} V^*(z) &:= \inf_Z \Lambda(Z) = \inf_Z U^*(Z_T) = \inf_Q U^*(zR_TL_T^Q) \\ &= z^q \inf_{Q\,EMM} \frac{1-p}{p} E\left[(R_TL_T^Q)^q)\right] = z^q \inf_\gamma \frac{1-p}{p} E\left[(R_TL_T^\gamma)^q)\right], \end{aligned} \tag{18}$$

cu $q := \frac{p}{p-1} < 0$ si unde procesul γ este ca in Corolarul **??**.

Impunand o serie de ipoteze (ce le vom verifica in continuare), vom putea aplica o teorema abstracta privind dualitatea functiilor valoare ale cuplului de probleme (6) si (18) (a se vedea [31], Teorema 1). Aceasta teorema abstracta are urmatorul enunt.

Teorema 2 *Functiile valoare V and V^* sunt intr-o relatie duala, adica*

$$V^*(z) = \sup_{x\geq 0} (V(x) - xz)$$

si

$$V(x) = \inf_{z\geq 0} (V^*(z) + xz).$$

Verificam acum in contextul nostru ipotezele enuntate in [31], Sectiunea 3. Definim spatiul de masura finita $(S, \mathcal{S}, \mu) := (\Omega, \mathcal{G}_T, P)$. Notam prin $\mathcal{X}(x)$ multimea tuturor variabilelor aleatoare f ce sunt marginite, pozitive, $\mathcal{G}_T$-masurabile, si care sunt dominate de valoarea finala a unui proces (X_t) ce satisface ecuatia (4). Definim de asemenea

$$\mathcal{Z}_1(z) := \{Z_T | \text{ satisface ecuatia (17)}\},$$

$\mathcal{Z}_0(z)$ este multimea variabilelor aleatoare h ce sunt nenegative si $\mathcal{G}_T$-masurabile a.i. exista $Z \in \mathcal{Z}_1(z)$ cu $h \leq Z_T$. Fie $\mathcal{Z}(z)$ inchiderea multimii $\mathcal{Z}_0(z)$ in spatiul $L^0(\Omega, \mathcal{G}_T, P)$.

Verificam mai intai conditia $(X1)$, care ne spune ca multimea $\mathcal{X}(x)$ este convexa. Fie X^1 si X^2 apartinand multimii $\mathcal{X}(x)$ (cu strategiile corespunzatoare π_1 si π_2) si fie $\lambda \in [0,1]$. Notam $\tilde{X} := \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2$. Dinamica procesului $\tilde{X}$

este data de

$$
\begin{aligned}
d\tilde{X}_t &= \tilde{X}_t r_t dt + \sigma_t \mu_t (\lambda X_t^1 \pi_t^1 + (1-\lambda) X_t^2 \pi_t^2) dt \\
&\quad + \sigma_t (\lambda X_t^1 \pi_t^1 + (1-\lambda) X_t^2 \pi_t^2) dB_t \\
&= \tilde{X}_t \left[(r_t + \sigma_t \mu_t \tilde{\pi}_t) dt + \sigma_t \tilde{\pi}_t dB_t \right],
\end{aligned}
\tag{19}
$$

cu

$$\tilde{\pi}_t := \pi_t^1 X_t^1 / \tilde{X}_t + (1-\lambda) \pi_t^2 X_t^2 / \tilde{X}_t.$$

In mod evident $\tilde{X}_0^{x,\pi} = x$ si $\tilde{\pi} \in \mathcal{A}(x)$. Rezulta ca $\mathcal{X}(x)$ este o multime convexa.

Ipotezele $(X2)$ si $(X3)$ se verifica cu usurinta. Verificam acum ipoteza $(X4)$, si anume ca functia $f \equiv 1$ apartine multimii $\mathcal{X}$, unde

$$\mathcal{X} = \bigcup_{x \geq 0} \mathcal{X}(x) = \bigcup_{x \geq 0} x \mathcal{X}(1)$$

(in scrierea celei de a doua egalitati in formula de mai sus utilizam proprietatea $(X2)$: $\mathcal{X}(\alpha x) = \alpha \mathcal{X}(x)$, daca $\alpha > 0$). Pentru $\pi \equiv 0$, deducem ca procesul (X_t) ce satisface ecuatia (6) este data prin $X_t = x \exp(\int_0^t r_s ds)$. Intrucat r ia valori pozitive, pentru orice $x \geq 1$ va rezulta ca

$$X_t \geq 1, \text{ pentru orice } t \geq 0,$$

si astfel ipoteza $(X4)$ este verificata. Proprietatile $(Y1)$ si $(Y2)$ sunt usor de verificat, in timp ce pentru orice functie de utilitate $U \in \mathcal{U}$ ipotezele $(U1) - (U5)$ sunt satisfacute in mod evident. Mai ramane de aratat proprietatea $(\mathbf{XY})$, care spune ca pentru orice $f \in \mathcal{X}$ si $z \geq 0$,

$$\sup_{h \in \mathcal{Z}(z)} E(fh) = \inf_{x \in B(f)} xz,$$

unde am notat $B(f) := \{x \geq 0 | f \in \mathcal{X}(x)\}$.

Aratam mai intai inegalitatea

$$\sup_{h \in \mathcal{Z}(z)} E(fh) \leq \inf_{x \in B(f)} xz.$$

Presupunem ca X este solutia ecuatiei (14) si ca Z rezolva ecuatia (17). Utilizand formula de integrare prin parti obtinem

$$\begin{aligned} d(X_t Z_t) &= X_t dZ_t + Z_t dX_t + \langle X, Z\rangle_t \\ &= X_t Z_t(-\mu_t + \pi_t \sigma_t) dB_t + X_t Z_t dM_t, \end{aligned}$$

de unde deducem ca procesul $X_t Z_t$ este un martingal local pozitiv, deci este un supermartingal. Rezulta

$$E(X_T Z_T) \leq E(X_0 Z_0) = xz.$$

Fie x un numar real strict pozitiv si $f \in \mathcal{X}(x)$ arbitrar aleasa. In mod evident

$$\sup_{h\in\mathcal{Z}(z)} E(fh) \leq xz,$$

si luand acum infimumul $x \in B(f)$ obtinem inegalitatea dorita.

Ramane de demonstrat ca daca $f \in \mathcal{X}$ (i.e. $f \in \mathcal{X}(\tilde{x})$, pentru un numar real pozitiv $\tilde{x}$), si daca

$$\xi := \sup_{h\in\mathcal{Z}(1)} E(fh) \leq x,$$

atunci $f \in \mathcal{X}(x)$. Este suficient de aratat ca $f \in \mathcal{X}(\xi)$.

Utilizand argumentele lui Rogers (a se veeda citarea Rogers [31]), se poata arata ca supremumul in ultima ecuatie de mai sus este atins intr-un punct $\tilde{h} \in \mathcal{Z}(1)$. Tinand cont de modul de definire al multimilor $\mathcal{Z}_0(z)$ si $\mathcal{Z}(z)$, putem presupune $\tilde{h} \in \mathcal{Z}_0(1)$. Rezulta deci ca exista un proces $\tilde{Z}$ ce satisface ecuatia (17) a.i. $\tilde{h} \leq \tilde{Z}_T$. In mod evident $\tilde{h} = \tilde{Z}_T$, intrucat altfel am avea $\xi > E(f\tilde{h})$, ceea ce ne-ar conduce la o contradictie. Astfel

$$\xi = E(f\tilde{Z}_T), \text{ with } \tilde{Z}_T = R_T L_T^{\tilde{Q}}.$$

$L_T^{\tilde{Q}}$ reprezinta densitatea Radon-Nikodyim a unei masuri martingale echivalente $\tilde{Q}$ (pe $\mathcal{G}_T$), i.e. $L_T^{\tilde{Q}} = \frac{d\tilde{Q}}{dP}\big|_{\mathcal{G}_T}$. Exista atunci un proces $\mathcal{G}$-predictibil $\tilde{\gamma}$ cu $\tilde{\gamma}_t > -1$

a.i.

$$\tilde{Z}_T = \exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) \exp\left(-\int_0^T \mu_t dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T \mu_t^2 dt\right)$$
$$\exp\left(\int_0^T \ln(1+\tilde{\gamma}_t) dH_t - \int_0^T \tilde{\gamma}_t \lambda_t dt\right).$$

Conform cu propozitia RND, procesul

$$\hat{B}_t := B_t + \int_0^t \mu_s ds$$

este o $\mathcal{G}$-miscare Browniana sub $\tilde{Q}$. De asemenea, procesul

$$\tilde{M}_t := M_t - \int_0^t \tilde{\gamma}_s \lambda_s ds = H_t - \int_0^t (1+\tilde{\gamma}_s)\lambda_s ds$$

este un $\mathcal{G}$-martingal discontinuu sub $\tilde{Q}$, ortogonal lui $\hat{B}$. In mod evident

$$\xi = E(fR_T L_T^{\tilde{Q}}) = \tilde{E}(fR_T),$$

unde $\tilde{E}$ reprezinta operatorul de medie in raport cu $\tilde{Q}$. Utilizand teorema de reprezentare tip Kusuoka pentru martingalul $\tilde{N}$, rezulta

$$\tilde{N}_t := \tilde{E}(fR_T|\mathcal{G}_t) = \xi + \int_0^t \tilde{N}_s \hat{\theta}_s d\hat{B}_s + \int_0^t \tilde{N}_s \hat{\gamma}_s d\tilde{M}_s$$

$\hat{\theta}$ si $\hat{\gamma}$ sunt procese $\mathcal{G}$-predictibile cu $\hat{\gamma}_t > -1$. Notam

$$\tilde{X}_t := R_t^{-1}\tilde{N}_t = S_t^0 \tilde{N}_t$$

In mod evident

$$\tilde{X}_0 = \tilde{N}_0 = E^*(\tilde{N}_T) = \xi \tag{20}$$ xi

si

$$\tilde{X}_T = R_T^{-1}\tilde{N}_T = R_T^{-1} f R_T = f. \tag{21}$$ f

Atunci

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t &= S_t^0 d\tilde{N}_t + \tilde{N}_t dS_t^0 = \tilde{X}_t(r_t dt + \hat{\theta}_t d\hat{B}_t + \hat{\gamma}_t d\tilde{M}_t) \\ &= \tilde{X}_t \left[r_t dt + \left(\mu_t \hat{\theta}_t - \lambda_t \tilde{\gamma}_t \hat{\gamma}_t \right) dt + \hat{\theta}_t dB_t + \hat{\gamma}_t dM_t \right] \\ &= \tilde{X}_t \left[r_t dt + \tilde{\pi}_t \sigma_t (\mu_t dt + dB_t) \right] + \hat{\gamma}_t \tilde{X}_t (-\lambda_t \tilde{\gamma}_t dt + dM_t), \end{aligned}$$

unde $\tilde{\pi}_t := \frac{\hat{\theta}_t}{\sigma_t}$. Am construit astfel un portofoliu $\tilde{X}$, cu strategia admisibila $\tilde{\pi}_t$. Tinand cont si de ecuatiile (20) si (21), am aratat faptul ca $f \in \mathcal{X}(\xi)$.

2.3.3 Definirea problemei de optimizare duale conform teoriei clasice a dualităţii convexe

Problema duala asociata probemei primale de optimizare (6) poate fi definita si in concordanta cu teoria clasica a dualitatii convexe (se pot studia referintele Luenberger [29], sau Callegaro si Vargiolu [4]). Definim mai intai functionala Lagrangean

$$\begin{aligned} L^{\gamma,\lambda}(x) &:= \lambda x + \sup_{X_T^\pi} E\big(U(X_T^\pi) - \lambda R_T L_T^\gamma X_T^\pi\big) = \lambda x + E\big(U^*(\lambda R_T L_T^\gamma)\big) \\ &= \lambda x + \frac{1-p}{p} \lambda^q E\left((R_T L_T^\gamma)^q\right), \end{aligned} \tag{22}$$

unde procesul γ_t satisface ipotezele Corolarului , X_t^π satisface ecuatia (4) (sau echivalent ecuatia (5)) si $\lambda > 0$. Reamintim ca q este conjugatul lui p si este definit prin $q = \frac{p}{p-1}$. Problema duala are urmatoarea forma

$$\inf_{\gamma,\lambda} L^{\gamma,\lambda}(x). \tag{23}$$

dual1

Vom gasi mai valoarea minima a functiei $L^{\gamma,\lambda}(x)$ in raport cu γ, pentru $\lambda >$ fixat. Suntem astfel condusi la problema de optimizare

$$V^*(y) = \big(-\frac{1}{q} \big)\, y^q \inf_{Q \in \mathcal{M}(P)} E\left[(R_T L_T^Q)^q \right]. \tag{24}$$

dual

O aplicatie directa a formulei lui Itô pentru procese cu salturi aplicata procesului

$$(R_t L_t^\gamma)^q = \exp\Big(-q\int_0^t \big(r_s + \frac{1}{2}\mu_s^2 + \gamma_s\lambda_s\big)ds - q\int_0^t \mu_s dB_s + \int_0^t \ln(1+\gamma_s)^q dH_s\Big) \tag{25}$$

ne conduce la

$$\begin{aligned} d\left[(R_t L_t^\gamma)^q\right] &= (R_t L_{t-}^\gamma)^q\big(-qr_t - \frac{1}{2}q\mu_t^2 - q\gamma_t\lambda_t - q\mu_t dB_t\big) \\ &\quad + (R_t L_t^\gamma)^q\big(\frac{1}{2}q^2\mu_t^2\big)dt + (R_t L_{t-}^\gamma)^q\left((1+\gamma_t)^q - 1\right)dH_t \\ &= (R_t L_{t-}^\gamma)^q\Big(\big(-qr_t + \frac{1}{2}q(q-1)\mu_t^2 + \lambda_t((1+\gamma_t)^q - q\gamma_t - 1)\big)dt \\ &\quad - q\mu_t dB_t + \left((1+\gamma_t)^q - 1\right)dM_t\Big). \end{aligned} \tag{26}$$

$\boxed{\texttt{expldual}}$

In continuare dorim sa construim un proces (Φ_t) care este un $\mathcal{G}$-semimartingal, solutie a unei ecuatii diferentiale stogastice retrograde (BSDE) de forma

$$d\Phi_t = \varphi_t dt + \hat{\varphi}_t dB_t + \tilde{\varphi}_t dM_t, \tag{27}$$

$\boxed{\texttt{BSDEPhi}}$

a.i.

- procesul $Y_t^\gamma := (R_t L_t^\gamma)^q\Phi_t$ este un $\mathcal{G}$-*submartingal* pentru orice (γ_t) admisibil;
- este un $\mathcal{G}$-*martingal* pentru un anumit (γ_t^*) admisibil;
- $Y_T^\gamma = 1$;
- Valoarea initiala Y_0^γ este o constanta determinista independenta de (γ_t).

In aceste conditii, va rezulta

$$\begin{aligned} E\left[(R_T L_T^\gamma)^q\right] &= E\left[(R_T L_T^\gamma)^q\Phi_T\right] \geq E\left[(R_0 L_0^\gamma)^q\Phi_0\right] = E\left[\Phi_0\right] \\ &= E\left[(R_0 L_0^{\gamma^*})^q\Phi_0\right] = E\left[(R_T L_T^{\gamma^*})^q\Phi_T\right] = E\left[(R_T L_T^{\gamma^*})^q\right], \end{aligned} \tag{28}$$

$\boxed{\texttt{optgamma*}}$

relatie care ne va permite sa deducem ca γ^* *este optimal pentru problema de optimizare duala*.

Aplicam acum formula de integrare prin parti pentru procesele $(R_tL_t^\gamma)^q$ si Φ_t, tinand cont de formulele (26) si (37). Se obtine

$$
\begin{aligned}
dY_t^\gamma &= \Phi_{t-}d(R_tL_{t-}^\gamma)^q + (R_tL_{t-}^\gamma)^q d\Phi_t + d\langle (R_\cdot L_\cdot^\gamma)^q, \Phi_\cdot\rangle_t \\
&= \Phi_{t-}(R_tL_t^\gamma)^q\Big(\big(-qr_t + \frac{1}{2}q(q-1)\mu_t^2 + \lambda_t((1+\gamma_t)^q - q\gamma_t - 1)\big)dt \\
&\quad - q\mu_t dB_t + ((1+\gamma_t)^q - 1)\, dM_t\Big) + (R_tL_{t-}^\gamma)^q\,(\varphi_t dt + \hat\varphi_t dB_t + \tilde\varphi_t dM_t) \\
&\quad - (R_tL_t^\gamma)^q q\mu_t\hat\varphi_t dt + (R_tL_{t-}^\gamma)^q\tilde\varphi_t\,((1+\gamma_t)^q - 1)\, dH_t \\
&= (R_tL_t^\gamma)^q\Big[\Phi_t\big(-qr_t + \frac{1}{2}q(q-1)\mu_t^2 + \lambda_t((1+\gamma_t)^q - q\gamma_t - 1)\big) \\
&\quad + \varphi_t - q\mu_t\hat\varphi_t + \lambda_t\tilde\varphi_t\,((1+\gamma_t)^q - 1)\Big]dt \\
&\quad + (R_tL_t^\gamma)^q(\hat\varphi_t - q\mu_t\Phi_t)dB_t + (R_tL_{t-}^\gamma)^q\big[(\Phi_{t-} + \tilde\varphi_t)(1+\gamma_t)^q - \Phi_{t-}\big]dM_t.
\end{aligned}
\tag{29}
$$
explY

Termenul cu variatie finita ce apare in descompunerea lui Y_t^γ de mai sus este dat prin

$$
\begin{aligned}
A_t^\gamma := (R_tL_t^\gamma)^q\Big[&\varphi_t - qr_t\Phi_t + \frac{1}{2}q(q-1)\mu_t^2\Phi_t - \lambda_t\Phi_t - q\mu_t\hat\varphi_t - \lambda_t\tilde\varphi_t \\
&+ \lambda_t\big((\Phi_t + \tilde\varphi_t)(1+\gamma_t)^q - q\Phi_t\gamma_t\big)\Big].
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Definim acum pe multimea $(t < \tau)$ functia (aleatoare)

$$g : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \big(\Phi_t + \tilde\varphi_t)(1+x)^q - q\Phi_t x,$$

Propozitia 2 *Presupunem ca procesele Φ_t and $\tilde\varphi_t$ iau valori pozitive pe multimea $(t < \tau)$. Atunci functia g isi atinge valoarea maxima in punctul*

$$\gamma_t^* := \left(\frac{\Phi_t}{\Phi_t + \tilde\varphi_t}\right)^{\frac{1}{q-1}} - 1. \tag{31}$$
gamma*

Demonstratia acestui rezultat decurge in urma unor calcule elementare de analiza matematica. De remarcat ca punctul γ_t^* este unicul punct stationar al functiei g si conform tabelului de semne al derivatei g' deducem ca punctul γ_t^* este punct de maxim absolut pentru g. Intrucat λ_t ia valori pozitive pe multimea

$(t < \tau)$, rezulta ca $\sup_\gamma A_t^\gamma = A_t^{\gamma^*}$.

Vom construi acum generatorul φ_t al ecuatiei diferentiale stohastice retrograde BSDEPhi (37) punand conditia $A_t^{\gamma^*} = 0$. Se obtine

$$\begin{aligned}\varphi_t = {} & q r_t \Phi_t - \frac{1}{2} q(q-1)\mu_t^2 \Phi_t + \lambda_t \Phi_t + q\mu_t \hat{\varphi}_t + \lambda_t \tilde{\varphi}_t \\ & - \lambda_t \big((\Phi_t + \tilde{\varphi}_t)(1+\gamma_t^*)^q - q\Phi_t \gamma_t^* \big).\end{aligned} \tag{32}$$

genBSDE

Se poate scrie

$$\begin{aligned}(\Phi_t + \tilde{\varphi}_t)(1+\gamma_t^*)^q - q\Phi_t\gamma_t^* &= (\Phi_t + \tilde{\varphi}_t)\left(\frac{\Phi_t}{\Phi_t + \tilde{\varphi}_t}\right)^{\frac{q}{q-1}} - q\Phi_t \left(\frac{\Phi_t}{\Phi_t + \tilde{\varphi}_t}\right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &= (\Phi_t + \tilde{\varphi}_t)\left(\frac{\Phi_t}{\Phi_t + \tilde{\varphi}_t}\right)^{p} (1-q) \\ &= (1-q)(\Phi_t + \tilde{\varphi}_t)^{1-p}\, \Phi_t^p.\end{aligned} \tag{33}$$

Teorema 3 *Ecuatia diferentiala stohastica retrograda*

$$\begin{aligned}\Phi_t = 1 - \int_t^T & \Big(\big(q r_s - \frac{1}{2} q(q-1)\mu_s^2 + \lambda_s\big)\Phi_s + q\mu_s \hat{\varphi}_s + \lambda_s \tilde{\varphi}_s \\ & - (1-q)\lambda_s (\Phi_s + \tilde{\varphi}_s)^{1-p}\, \Phi_s^p \Big) ds - \int_t^T \hat{\varphi}_s dB_s - \int_t^T \tilde{\varphi}_s dM_s\end{aligned} \tag{34}$$

BSDEPhi0

admite o solutie $(\Phi_t, \hat{\varphi}_t, \tilde{\varphi}_t)$ ce apartine multimii $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}^\infty(0,T) \times \mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(W) \times \mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(M)$. In plus, $\Phi_t > 0$ si $\Phi_t + \tilde{\varphi}_t > 0$.

Remarca 4 *In mod heuristic, in virtutea inegalitatii standard a lui Young cu exponenti Hölderieni conjugati*

$$ab \le \frac{a^r}{r} + \frac{b^s}{s}, \; \textit{pentru } a, b \ge 0, \; r, s > 0, \; \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$

rezulta, in cazul nostru, cu $r = \frac{1}{1-p}$ si $s = \frac{1}{p}$,

$$(\Phi_t^1 + \tilde{\varphi}_t)^{1-p}\, \Phi_t^p \le (1-p)(\Phi_t + \tilde{\varphi}_t) + p\Phi_t.$$

Aceasta inegalitate, impreuna cu ipotezele $(\mathbf{H1})$, $(\mathbf{H2})$ and $(\mathbf{H4})$ si faptul ca *generatorul φ_t are crestere liniara implica existenta unei solutii pentru ecuatia (37).*

Demonstratie. Demonstratia acestei propozitii are loc in mai multi pasi.

Reamintim mai intai formula (standard) de descompunere pentru un proces $\mathcal{G}$-adaptat $(\psi_t)_{0\le t\le T}$. Aceasta este data de

$$\psi_t = \psi_t^0 1_{(t<\tau)} + \psi_t^1(\tau) 1_{(t\le\tau<T)}. \tag{35}$$

In formula de mai sus procesul ψ_t^0 este $\mathcal{F}$-adaptat. De asemenea procesul $\psi_\cdot^1(u)$ (parametrizat dupa u numar real pozitiv) este $\mathcal{F}$-adaptat, iar pentru $t \in [0,T]$ fixat, aplicatia $\psi_t^1(\cdot,\cdot)$ este $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,\infty))$- masurabila. Daca $(\psi_t)_{0\le t\le T}$ este un proces $\mathcal{G}$-predictibil, formula de descompunere este

$$\psi_t = \psi_t^0 1_{(t\le\tau)} + \psi_t^1(\tau) 1_{(t<\tau<T)}, \tag{36}$$

unde procesele ψ_t^0 si $\psi_\cdot^1(u)$ sunt $\mathcal{F}$-predictibile.

In concordanta cu formulele de mai sus, descompunerile canonice pentru procesele $\mathcal{G}$-adaptate r_t, λ_t si μ_t sunt date prin

$$r_t = r_t^0 1_{(t<\tau)} + r_t^1(\tau) 1_{(t\le\tau<T)},$$

$$\lambda_t = \lambda_t^0 1_{(t<\tau)} + \lambda_t^1(\tau) 1_{(t\le\tau<T)},$$

cu $\lambda_t^1(\tau) = 0$, si

$$\mu_t = \mu_t^0 1_{(t<\tau)} + \mu_t^1(\tau) 1_{(t\le\tau<T)}.$$

In ultima formula, $\mu_t^0 = \frac{\nu_t - r_t^0}{\sigma_t}$ si $\theta_t^1(u) = \frac{\nu_t - r_t^1(u)}{\sigma_t}$.

Rescriem ecuatia (34) sub forma

$$\begin{aligned} d\Phi_t = \Big(\big(qr_t - \frac{1}{2}q(q-1)\mu_t^2 + \lambda_t\big)\Phi_t + q\mu_t\hat{\varphi}_t - (1-q)\lambda_t(\Phi_t + \tilde{\varphi}_t)^{1-p}\Phi_t^p\Big)dt \\ + \hat{\varphi}_t dB_t + \tilde{\varphi}_t dH_t; \qquad \Phi_T = 1. \end{aligned} \tag{37}$$

Vom arata existenta unei solutii pentru ecuatia de mai sus utilizand o metoda noua, initiata de Kharroubi, Lim [20], prin care vom transforma ecuatia diferentiala stohastica retrograda *cu salturi* intr-un sistem de recursiv format din doua familii de ecuatii diferentiale stohastice retrograde *Browniene*, pentru care exista o literatura vasta privind rezulttae de existenta si unicitate.

Mentionam ca rezultatele obtinute de Kharroubi si Lim sunt valide intr-un cadru mult mai general, putand fi aplicate cu succes in cazul ecuatiilor stohastice retrograde in cazul unui numar finit de timpi aleatori $\tau_i, 1 \leq i \leq n$.

Pasul 1. Rezolvam mai intai ecuatia "post default" (pentru $t \geq \tau$), care se obtine din ecuatia (37), "parametrizand" timpul aleator τ si impunand $\tilde{\varphi}_t \equiv 0$. Suntem astfel condusi la ecuatia retrograda Browniana

$$d\Phi_t^1(u) = \left[\left(qr_t^1(u) - \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^1(u))^2\right)\Phi_t^1(u) + q\mu_t^1(u)\hat{\varphi}_t^1(u)\right]dt + \hat{\varphi}_t^1(u)dB_t, \tag{38}$$

BSDEafter

pentru $u \leq t \leq T$, cu conditia finala $\Phi_T^1(u) = 1$ (u este un numar real fixat din intervalul $[0, T]$). Generatorul acestei BSDE este

$$g^1(t, y, z; u) := \big(-qr_t^1(u) + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^1(u))^2\big)y - q\mu_t^1(u)z.$$

Aceasta ecuatie este o ecuatie liniara cu coeficienti marginiti, pentru care existenta si unicitatea solutiei $(\Phi_t^1(u), \hat{\varphi}_t^1(u))_{u \leq t \leq T} \in \mathcal{S}_{\mathcal{G}}^\infty(0,T) \times \mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(W)$ rezulta de exemplu conform cu citarea El Karoui, Hamadene, Matoussi [9], Propozitia 1.3, iar $\Phi_t^1(u)$ poate fi reprezentat sub forma

$$\Phi_t^1(u) = E\left(\Phi_T^1(u)\Gamma_t^T(u)|\mathcal{F}_t\right) = E\left(\Gamma_t^T(u)|\mathcal{F}_t\right). \tag{39}$$

eqPhi1

$(\Gamma_t^s)_{t \leq s \leq T}$ reprezinta procesul adjunct definit de ecuatia stohastica liniara

$$d\Gamma_t^s(u) = \Gamma_t^s(u)\Big(\big(-qr_t^1(u) + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^1(u))^2\big)dt - q\mu_t^1(u)dB_t\Big),\ \Gamma_t^t = 1.$$

Atunci

$$\Gamma_t^s(u) = \exp\left(\int_t^s \big(-qr_v^1(u) + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_v^1(u))^2\big)dv\right)\mathcal{E}\left(-\int_t^\cdot q\mu_v^1(u)dB_v\right)_s. \tag{40}$$

Gammats

Definim acum pe $\mathcal{F}_T$ masura martingala echivalenta $\tilde{Q}_u$, ce admite densitatea Radon-Nikodym $\tilde{Z}_T(u) := \mathcal{E}\left(-\int_0^{\cdot} q\mu_v^1(u)dB_v\right)_T$. Notam de asemenea $\tilde{Z}_t(u) := \mathcal{E}\left(-\int_0^{\cdot} q\mu_v^1(u)dB_v\right)_t$. Aplicand acum formula lui Bayes si tinand cont de ecuatia (39), rezulta

$$\begin{aligned}
\Phi_t^1(u) &= E\left[\exp\left(\int_t^T \big(-qr_s^1(u) + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_s^1(u))^2\big)ds\right)\frac{\tilde{Z}_T(u)}{\tilde{Z}_t(u)}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E^{\tilde{Q}_u}\left[\exp\left(\int_t^T \big(-qr_s^1(u) + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_s^1(u))^2\big)ds\right)\Big|\mathcal{F}_t\right] \geq 1,
\end{aligned} \tag{41}$$

deoarece $q < 0$. In plus, se observa cu usurinta ca integrantul ce apare in ultima formula este marginit superior. Deducem ca aplicatia $\Phi_t^1(u)$ este uniform marginita.

Pasul 2. Rezolvam acum BSDE ”pre-default” (pentru $t < \tau$), care se obtine prin inlocuirea in generatorul BSDE (37) a termenului $\tilde{\varphi}_t$ cu diferenta dintre solutia $\Phi_t^1(u)$ a BSDE ”post-default” calulata in punctul $u = t$, si solutia Φ_t^0. De asemenea, neglijam integrala in raport cu H_t. Intrucat suntem interesati de obtinerea unei solutii pozitive Φ_t^0 (pentru ca exponentiala $(\Phi_t^0)^p$ sa poata fi definita in mod riguros), vom rezolva BSDE modificata

$$\begin{aligned}
d\Phi_t^0 = \Big[&\big(qr_t^0 - \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2 + \lambda_t\big)\Phi_t^0 + q\mu_t^0\hat{\varphi}_t^0 \\
&- (1-q)\lambda_t\left(\Phi_t^1(t)\right)^{1-p}(\Phi_t^0 \vee 0)^p\big)\Big]dt + \hat{\varphi}_t^0 dB_t,
\end{aligned} \tag{42}$$

cu conditia finala $\Phi_T^0 = 1$. Generatorul acestei BSDE este dat de

$$g^0(t,y,z) := \big(-qr_t^0 + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2 - \lambda_t\big)y - q\mu_t^0 z + (1-q)\lambda_t\left(\Phi_t^1(t)\right)^{1-p}(y \vee 0)^p.$$

In mod evident $(y \vee 0)^p \leq C(1 + |y|)$ (intrucat $p \in (0,1)$), aplicatia $\Phi_t^1(u)$ este uniform marginita , si utilizand de asemenea ipotezele (**H1**), (**H2**) and (**H4**), se obtine ca g^0 are crestere liniara, uniform in raport cu t. In plus, aplicatia $(y,z) \to g^0(t,y,z)$ este continua, $dt \otimes dP$ $a.s.$ Rezulta atunci, conform Teoremei 1 din citarea Lepeltier, San Martin [26], ca BSDE (42) admite o solutie minimala $(\underline{\Phi}_t^0, \underline{\hat{\varphi}}_t^0) \in \mathcal{S}_{\mathcal{G}}^\infty(0,T) \times \mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(W)$. Solutia este minimala in urmatorul sens: daca (Y_t, Z_t) este de asemenea o solutie, atunci in mod necesar $\Phi_t^0 \leq Y_t$,

$dt \otimes dP \; a.s.$. Intr-un mod similar putem construi o solutie maximala pe care o notam prin $(\Phi_t^0, \hat{\varphi}_t^0)$.

Pasul 3. Vom arata acum ca BSDE (42) admite o solutie pozitiva Φ_t^0, via un rezultat de comparatie privind solutiile ecuatiilor stohastice retrograde. In mod evident

$$g^0(t,y,z) \geq \big(- qr_t^0 + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2 - \lambda_t \big) y - q\mu_t^0 z := \underline{g}^0(t,y,z)$$

Ecuatia

$$d\underline{Y}_t = \Big[\big(qr_t^0 - \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2 + \lambda_t \big) \underline{Y}_t + q\mu_t^0 \underline{Z}_t \Big] dt + \underline{Z}_t dB_t; \; \underline{Y}_T = 1, \quad (43)$$

este o ecuatie liniara cu coeficienti constanti. Intr-un mod similar celui utilizat pentru rezolvarea ecuatiei (38), obtinem formula explicita

$$\begin{aligned} \underline{Y}_t &= E\left(\underline{Y}_T \underline{\Gamma}_t^T | \mathcal{F}_t \right) = E\left(\underline{\Gamma}_t^T | \mathcal{F}_t \right) \\ &= E^{\bar{Q}} \left[\exp\left(\int_t^T \big(- qr_s^0 + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_s^0)^2 - \lambda_s \big) ds \right) \Big| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned} \quad (44)$$

unde $\underline{\Gamma}_t^T$ reprezinta solutia ecuatiei stohastice liniare

$$d\Gamma_t^s = \Gamma_t^s \Big(\big(- qr_t^0 + \frac{1}{2}q(q-1)\mu_t^2 \lambda_t \big) dt - q\mu_t dB_t \Big), \; \Gamma_t^t = 1,$$

and masura martingala echivalenta $\bar{Q}$ este definita prin $\frac{d\bar{Q}}{dP} = \mathcal{E}\left(- \int_0^\cdot q\mu_s^0 dB_s \right)_T$. Conform cu ipoteza **(H4)** si cum $q < 0$, rezulta

$$\underline{Y}_t \geq E^{\tilde{Q}} \Big[\exp\Big(\int_t^T (-C) \Big) | \mathcal{F}_t) \Big] \geq \exp(-TC).$$

Aplicam acum un rezultat de comparatie pentru solutiile ecuatiilor stohastice retrograde (42) si (43). Deducem

$$\Phi_t^0 \geq \underline{Y}_t \geq \exp(-TC),$$

ceea ce arata ca $\Phi_t^0 > 0$. In plus, Φ_t^0 este solutia ecuatiei

$$
\begin{aligned}
d\Phi_t^0 = \Big[\big(q r_t^0 - \frac{1}{2} q(q-1)\mu_t^2 + \lambda_t \big) \Phi_t^0 + q\mu_t \hat{\varphi}_t^0 \\
- (1-q)\lambda_t \left(\Phi_t^1(t) \right)^{1-p} (\Phi_t^0)^p) \Big] dt + \hat{\varphi}_t^0 dB_t,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

ce admite generatorul

$$
\bar{g}^0(t,y,z) := \big(-q r_t^0 + \frac{1}{2} q(q-1)\mu_t^2 - \lambda_t \big) y - q\mu_t z + (1-q)\lambda_t \left(\Phi_t^1(t) \right)^{1-p} y^p.
$$

Obtinem astfel ca o solutie pentru BSDE (34) este data de

$$
\Phi_t = \Phi_t^0 1_{(t<\tau)} + \Phi_t^1(\tau) 1_{(t \geq \tau)}. \tag{46}
$$

De asemenea, conform cu referinta Kharroubi, Lim [20], Theorem 3.1., o solutie $\mathcal{G}$-predictibila a BSDE (34) este data de

$$
\tilde{\varphi}_t = (\Phi_t^1(t) - \Phi_t^0) 1_{(t \leq \tau)}. \tag{47}
$$

Deducem ca

$$
\Phi_t + \tilde{\varphi}_t = \Phi_t^1(t) 1_{(t<\tau)} + \Phi_t^1(\tau) 1_{(t \geq \tau)} = \Phi_t^1(t \wedge \tau).
$$

Propoziţia 3 *Procesul γ^* definit in formula (31) este admisibil.*

Demonstratie. Procesul γ^* este in mod evident predictibil. In plus, conform teoremei 1, observam ca exista o constanta C a.i. $-1 < \gamma_t^* \leq C$, pentru orice $t \in [0,T]$, ceea ce implica faptul ca $E[L_T^{\gamma^*}] = 1$.

Propoziţia 4 *Procesul $Y_t^\gamma := (R_t L_t^\gamma)^q \Phi_t$ este un $\mathcal{G}$-submartingal pentru orice proces admisibil (γ_t) si este un martingal pentru procesul (γ_t^*) definit in ecuatia (31).*

Demonstratie. Rescriem dinamica procesului (Y_t^γ), tinand cont de ecuatiile

genBSDE gamma*
(32) si (31)

$$dY_t^\gamma = Y_t^\gamma \lambda_t \Big[\Big(1 + \frac{\tilde{\varphi}_t}{\Phi_t}\Big) \Big((1+\gamma_t)^q - (1+\gamma_t^*)^q \Big) - q(\gamma_t - \gamma_t^*) \Big] dt$$
$$- Y_t^\gamma q \mu_t dB_t + Y_{t-}^\gamma \Big(\Big(1 + \frac{\tilde{\varphi}_t}{\Phi_{t-}}\Big)(1+\gamma_t)^q - 1 \Big) dM_t.$$

Rezulta ca Y_t^γ este exponentiala stohastica data de

$$\begin{aligned} Y_t^\gamma &= Y_0^\gamma \exp \left(\int_0^t \lambda_s \Big[\Big(1 + \frac{\tilde{\varphi}_s}{\Phi_s}\Big) \Big((1+\gamma_s)^q - (1+\gamma_s^*)^q \Big) - q(\gamma_s - \gamma_s^*) \Big] ds \right) \\ &\quad \mathcal{E} \left(- \int_0^\cdot q \mu_s dB_s + \int_0^\cdot \Big(\Big(1 + \frac{\tilde{\varphi}_s}{\Phi_{s-}}\Big)(1+\gamma_s)^q - 1 \Big) dM_s \right)_t \\ &= Y_0^\gamma B_t \ \exp \big(N_t - \frac{1}{2} \langle N \rangle_t \big), \end{aligned} \tag{48}$$

Ytgamma

unde procesul cu variatie marginita (B_t) si martingalul (exponential) discontinuu (N_t) sunt definite corespunzator. Intrucat procesele $(\mu_t), (\gamma_t)$ si $(\tilde{\varphi}_t)$ sunt marginite si $\Phi_t > c > 0$, utilizand un rezultat al (conform referintei ...) deducem ca procesul integralei stohastice ce apare in al doilea rand al formulei (48) este un martingal. In plus, integrantul ce apare in primul rand al aceleiasi formule ia valori negative pentru orice γ admisibil si se anuleaza pentru $\gamma = \gamma^*$.

Enuntam acum un prim rezultat principal.

Teorema 4 *Valoarea finala a portofoliului optimal este data de*

$$X_T^* = I\left(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*}\right) = \left(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{49}$$

optwealth

cu multiplicatorul λ^* dat prin

$$\lambda^* = \left(\frac{x}{E[(R_T L_T^{\gamma^*})^q]} \right)^{\frac{1}{q-1}}. \tag{50}$$

optlambda

Demonstratie. Multiplicatorul optimal λ^* a problemei de optimizare duale (23) este obtinut scriind conditiile de optimalitate de ordinul I. Avem de rezolvat ecuatia $\frac{\partial L^{\gamma^*,\lambda}(x)}{\partial \lambda} = 0$ in raport cu λ. Intrucat

$$\frac{\partial L^{\gamma,\lambda}(x)}{\partial \lambda} = x - \lambda^{q-1} E[(R_T L_T^{\gamma^*})^q],$$

se obtine cu usurinta forma explicita pentru λ^* dat de formula (50). In continuare, pentru a arata ca valoarea optimala a portofoliului la momentul final T este data de formula (49), vom demonstra urmatoarele afirmatii

- admisibilitatea primala a lui $X_T^* := \left(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*}\right)^{\frac{1}{p-1}}$;
- marja de dualitate asociata $J^{\pi^*}(x) - L^{\gamma^*,\lambda^*}(x)$ este nula.

In mod evident regiunile admisibile pentru cele probleme, primala si duala sunt nevide. Este binecunoscut faptul ca pentru orice strategie admisibila π pentru problema primala (6) si controale admisibile (γ, λ) pentru problema duala (23), are loc inegalitatea

$$J^{\pi}(x) \leq L^{\gamma,\lambda}(x),$$

ceea ce inseamna ca marja de dualitate $J^{\pi}(x) - L^{\gamma,\lambda}(x)$ este negativa. Luand acum supremumul dupa toate strategiile admisibile π, precum si infimumul dupa toate controalele admisibile (γ, λ), obtinem

$$V(x) \leq \inf_{\gamma,\lambda} L^{\gamma,\lambda}(x),$$

Utilizand acum un rezultat clasic datorat lui Luenberger (conform referintei [29]), deducem ca in situatia in care X_T^* si (γ^*, λ^*) sunt admisibile (pentru problemele corespunzatoare) si daca marja de dualitate $J^{\pi^*}(x) - L^{\gamma^*,\lambda^*}(x)$ este nula, atunci X_T^* si (γ^*, λ^*) sunt optimale pentru problemele (6), si respectiv (23).

Vom arata ca pentru X_T^* si (γ^*, λ^*) definiti in ecuatiile (49), (31) si (50) marja de dualitate este nula. Tinand cont de formulele (31) si (50), rezulta

$$\begin{aligned} L^{\gamma^*,\lambda^*}(x) &= \lambda^* x - \frac{1}{q}(\lambda^*)^q E\left((R_T L_T^{\gamma^*})^q\right) \\ &= \lambda^* x - \frac{1}{q}(\lambda^*)^q \frac{x}{(\lambda^*)^{q-1}} = \frac{1}{p}\lambda^* x \end{aligned} \tag{51}$$

si

$$E(U(X_T^*)) = \frac{1}{p}(\lambda^*)^q E\left((R_T L_T^{\gamma^*})^q\right) = \frac{1}{p}(\lambda^*)^q \frac{x}{(\lambda^*)^{q-1}} = \frac{1}{p}\lambda^* x, \qquad (52)$$

relatii care ne conduc la afirmatia dorita.

Demonstratia teoremei este incheiata daca aratam admisibilitatea (pentru problema primala) a lui X_T^* dat prin formula (49), i.e.

$$E^Q(R_T X_T^*) \leq x, \text{ pentru orice EMM } Q.$$

Vom arata ca X_T^* defined in formula (49) reprezinta valoarea finala asociata unui portofoliu autofinantat. Conform cu unele rezultate standard ce sunt adevarate in piete financiare incomplete, afirmatia dorita este echivalenta cu

$$E^{Q_1}(R_T X_T^*) = E^{Q_2}(R_T X_T^*), \ \forall \ EMM \ Q_1, Q_2$$

$\Longleftrightarrow$ exista o masura martingala echivalenta Q^* pentru care

$$E^{Q^*}(R_T X_T^*) = \inf_{Q \ EMM} E^Q(R_T X_T^*).$$

Vom arata ca

$$x = E^{Q^*}(R_T X_T^*) = E(R_T X_T^* L_T^{\gamma^*}) \leq E^Q(R_T X_T^*) = E(R_T X_T^* L_T^{\gamma}), \qquad (53)$$

dupl

pentru orice proces $\mathcal{G}$-predictibil (γ), cu $\gamma_t > -1$.

Fie (γ) ca mai sus si fie l_T o densitate Radon-Nikodym obtinuta ca o combinatie convexa de densitatile L_T^{γ} si $L_T^{\gamma^*}$, i.e.

$$L_T^{\varepsilon} = \varepsilon L_T^{\gamma} + (1-\varepsilon) L_T^{\gamma^*}, \text{ for } \varepsilon \in [0,1].$$

Tinand cont de optimalitatea lui γ^*, rezulta

$$\frac{1}{\varepsilon} E(U^*(\lambda^* R_T L_T^{\varepsilon}) - E(U^*(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*})) \geq 0.$$

Trecand acum la limita dupa $\varepsilon \to 0$ se obtine

$$E((U^*)'(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*}) R_T (L_T^{\gamma} - L_T^{\gamma^*})) \geq 0,$$

si tinand cont de faptul ca $X_T^* = -(U^*)'(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*})$ deducem ca formula (53) este adevarata.

2.4 Cazul utilitatii tip putere. O abordare directa

In aceasta sectiune vom rezolva problema de optimizare

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} E[(X_T^{\pi})^p], \tag{54}$$ diroptprob

utilizand o metoda directa. Urmarim sa aratam existenta unui proces Ψ a.i., definind $Y_t^{\pi} := (X_t^{\pi})^p \exp(\Psi_t)$, familia de procese Y^{π} (indexata dupa toate strategiile admisibile π) sa satisfaca urmatoarele

(a) $Y_T^{\pi} = (X_T^{\pi})^p$ (i.e. $\Psi_T = 0$);

(b) Y^{π} este un $\mathcal{G}$-supermartingal, pentru orice $\pi \in \mathcal{A}(x)$;

(c) Exista o strategie admisibila π^* a.i. procesul Y^{π^*} este un $\mathcal{G}$-martingal;

(d) Valoarea initiala Ψ_0 este o constanta determinista ce nu depinde de π.

In acest scop, vom determina a functie aleatoare $\tilde{f}(t, \omega, y, z, u)$ definita pe $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3$ a.i. ecuatia stohastica retrograda

$$\Psi_t = 0 - \int_t^T \tilde{f}(s, \Psi_s, \hat{\Psi}_s, \tilde{\Psi}_s) ds - \int_t^T \hat{\Psi}_s dB_s - \int_t^T \tilde{\Psi}_s dM_s \tag{55}$$ BSDEPsi

admite o solutie $(\Psi, \hat{\Psi}, \tilde{\Psi})$ ce apartine multimii $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}^{\infty}(0, T) \times \mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(W) \times \mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2(M)$ si pentru care cerintele de mai sus sunt indeplinite. Forma diferentiala a ecuatiei (55) este data de

$$d\Psi_t = \tilde{f}(t, \Psi_t, \hat{\Psi}_t, \tilde{\Psi}_t) dt + \hat{\Psi}_t dB_t + \tilde{\Psi}_t dM_t. \tag{56}$$ difBSDEPsi

Y^π poate fi scrisa sub forma multiplicativa $Y^\pi = \exp(I^\pi)$, cu procesul I^π dat prin

$$
\begin{aligned}
I_t^\pi := &\int_0^t \Big[pr_s - p\sigma_s\theta_s\pi_s - \frac{p}{2}\sigma_s^2\pi_s^2 + \hat{f}_s - \lambda_s\tilde{\Psi}_s\Big]\,ds \\
&+ \int_0^t (p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)dB_s + \int_0^t \tilde{\Psi}_s dH_s,
\end{aligned}
\tag{57}
$$

unde $\hat{f}_t := \tilde{f}(t, \Psi_t, \hat{\Psi}_t, \tilde{\Psi}_t)$. Am tinut cont de formulele (5), (56) precum si de expresia $\mathcal{G}$-martingalului M.

Procesul (continuu la dreapta) I^π are (cel mult) un salt la momentul τ dat prin $\Delta I_\tau^\pi = \tilde{\Psi}_\tau \Delta H_\tau = \tilde{\Psi}_\tau$. Atunci, pentru $t \in [0, T]$ fixat putem scrie

$$
\begin{aligned}
\sum_{0<s\leq t} \Delta \exp(I_s^\pi) &= \exp(I_{\tau-}^\pi)\left(\exp(\Delta I_\tau^\pi) - 1\right) 1_{(\tau\leq t)} \\
&= \int_0^t \exp(I_{s-}^\pi)\Big(\exp(\tilde{\Psi}_s) - 1\Big)\,dH_s.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Conform formulei lui Itô pentru procese cu salt rezulta

$$
\begin{aligned}
dY_t^\pi = d\left(\exp(I_t^\pi)\right) = Y_t^\pi\Big[&pr_t - p\sigma_t\theta_t\pi_t - \frac{p}{2}\sigma_t^2\pi_t^2 + \hat{f}_t - \lambda_t\tilde{\Psi}_t + \frac{1}{2}(p\sigma_t\pi_t + \hat{\Psi}_t)^2 \\
&+ \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t) - 1)\Big]dt + Y_t^\pi(p\sigma_t\pi_t + \hat{\Psi}_t)dB_t + Y_{t-}^\pi(\exp(\tilde{\Psi}_t) - 1)dM_t.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Notam prin A^π termenul dintre parantezele drepte din formula de mai sus, i.e.

$$
A_t^\pi := \hat{f}_t + pr_t + \frac{p(p-1)}{2}\sigma_t^2\pi_t^2 + p\sigma_t\pi_t(\hat{\Psi}_t - \theta_t) + \frac{1}{2}\hat{\Psi}_t^2 + \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t) - \tilde{\Psi}_t - 1).
$$

Atunci Y_t^π poate fi scris sub forma multiplicativa

$$
Y_t^\pi = \exp\Big(\int_0^t A_s^\pi ds\Big)\mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot (p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)dB_s + \int_0^\cdot (\exp(\tilde{\Psi}_s) - 1)dM_s\Big)_t.
$$

Vom determina generatorul $\hat{f}_\cdot$ al ESDR (55) a.i. A^π ia valori negative pentru toate strategiile admisibile π si este egala cu zero pentru o anumita strategie π^*. Pentru t fixat, vom determina valoarea maxima a aplicatiei A_t^π (vazuta ca o functie depinzand de π_t).

Functia de gradul al doilea (cu coeficientul dominant negativ)

$$g_t(x) := \frac{p(p-1)}{2}\sigma_t^2 x^2 + p\sigma_t(\hat{\Psi}_t - \theta_t)x$$

isi atinge valoarea maxima in punctul $x = \frac{\hat{\Psi}_t - \theta_t}{(1-p)\sigma_t}$. Fie

$$\pi_t^* := \frac{\hat{\Psi}_t - \theta_t}{(1-p)\sigma_t}. \tag{60}$$

optpi*

Valoarea maxima a functiei $g_t(\cdot)$ este data de

$$g_t(\pi_t^*) = \frac{p}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t - \theta_t)^2.$$

Punand conditia ca $A_t^{\pi^*} = 0$, rezulta

$$\hat{f}_t = -\frac{1}{2(1-p)}\hat{\Psi}_t^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t\hat{\Psi}_t - \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t) - \tilde{\Psi}_t - 1) - pr_t - \frac{p}{2(1-p)}\theta_t^2.$$

Obtinem atunci urmatoarea formula pentru functia aleatoare f

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t,\omega,y,z,u) = &-\frac{1}{2(1-p)}z^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t(\omega)z - \lambda_t(\omega)(\exp(u) - u - 1)\\ &- p\, r_t(\omega) - \frac{p}{2(1-p)}\theta_t(\omega)^2.\end{aligned} \tag{61}$$

gentildef

Ne indreptam acum atentia asupra rezolvarii EDSR (55) (care admite ca generator aplicatia $\tilde{f}$ definita mai sus) si aratam existenta unei solutii. In acest scop vom utiliza tehnici specifice ecuatiilor stohastice retrograde similare cu cele utilizate in rezolvarea ecuatiei (37). Vom transforma ecuatia intr-un sistem recursiv de ecuatii stohastice retrograde Browniene, pre-default si post-default.

Propozitia 5 *EDSR (55) admite o solutie* $(\Psi, \hat{\Psi}, \tilde{\Psi}) \in \mathcal{S}_{\mathcal{G}}^{\infty}([0,T]) \times \mathcal{H}_{\mathcal{G}}^2([0,T]) \times \mathcal{H}_M^2$.

Demonstratie. Rescriem ecuatia (55) sub forma

$$\begin{cases} d\Psi_t &= \Big[-\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t)^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t\hat{\Psi}_t - \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t)-1) \\ & \quad -pr_t - \frac{p}{2(1-p)}\theta_t^2\Big]dt + \hat{\Psi}_t dB_t + \tilde{\Psi}_t dH_t,\ 0 \le t \le T, \\ \Psi_T^0 &= 0. \end{cases} \tag{62}$$

BSDEH

Consideram urmatorele sisteme de EDSR

$$\begin{cases} d\Psi_t^1(u) &= \Big[-\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t^1(u))^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t^1(u)\hat{\Psi}_t^1(u) - pr_t^1(u) \\ & \quad -\frac{p}{2(1-p)}(\theta_t^1(u))^2\Big]dt + \hat{\Psi}_t^1(u)dB_t, \quad u \le t \le T, \\ \Psi_T^1(u) &= 0, \end{cases} \tag{63}$$

postdefBSDE

and

$$\begin{cases} d\Psi_t^0 &= \Big[-\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t^0)^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t^0\hat{\Psi}_t^0 - \lambda_t\left(\exp(\Psi_t^1(t) - \Psi_t^0) - 1\right) \\ & \quad -pr_t^0 - \frac{p}{2(1-p)}(\theta_t^0)^2\Big]dt + \hat{\Psi}_t^0 dB_t, \quad 0 \le t \le T, \\ \Psi_T^0 &= 0. \end{cases} \tag{64}$$

predefBSDE

Familia de EDSR (63) este parametrizata dupa $u \in [0,T]$ (u trebuie interpretat ca momentul de default) si este formulata pe intervalul $[u,T]$, din acest motiv vorbim de EDSR post-default.

In conformitate cu presupunerile facute, se observa ca generatorul EDSR (63) (pe care il rescriem ca o functie aleatoare $\tilde{f}_u^1(t,z)$) are crestere patratica in raport cu z si satisface acelasi tip de estimari ca in [21] (conditia $(H1)$), uniform in raport cu u. Atunci, conform teoremei 2.3 in [21], deducem, pentru orice $u \in [0,T]$, existenta unei solutii $(\Psi^1(u), \hat{\Psi}^1(u)) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^{\infty}([u,T]) \times \mathcal{H}_{\mathcal{F}}^2([u,T])$. $\Psi^1(u)$ poate fi ales un proces continuu. Urmand demonstratia rezultatului citat, se obtine ca familia proceselor $\Psi^1(u)$ este unifrom marginita (a se vedea Teorema 2.3, pagina 571).

Fie $K > 0$ a.i. $\lambda_t \leq K$, P a.s. si fie $c = -KT$. Consideram acum EDSR

$$\begin{cases} d\Psi^0_t &= \Big[-\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}^0_t)^2 + \frac{p}{1-p}\theta^0_t\hat{\Psi}^0_t - \lambda_t \left(\exp(\Psi^1_t(t) - (\Psi^0_t \vee c)) - 1\right) \\ & \qquad -pr^0_t - \frac{p}{2(1-p)}(\theta^0_t)^2\Big]dt + \hat{\Psi}^0_t dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \Psi^0_T &= 0. \end{cases} \tag{65}$$

predefBSDEc

Generatorul acestei EDSR satisface acelasi tip dee stimari ca in [21] (conditia $(H1)$), intrucat procesul $\Psi^1_\cdot(\cdot)$ este marginit (in virtutea marginirii uniforme a procesului $\Psi^1(u)$), si de asemenea $0 < \exp(-(y \vee c)) \leq e^{-c}$. Utilizand din nou Teorema 2.3 din referinta [21] deducem existenta unei solutii $(\Psi^0, \hat{\Psi}^0) \in \mathcal{S}^\infty_{\mathcal{F}}([0,T]) \times \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ a EDSR (65). Ψ^0 poate fi ales un proces cu traiectoriile continue.

Fie $t \in [0,T]$. Scriem

$$\begin{aligned} \Psi^0_t - \Psi^0_T = \Psi^0_t = \int_t^T \Big[&\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}^0_s)^2 - \frac{p}{1-p}\theta^0_s\hat{\Psi}^0_s + \lambda_s\big(\exp(\Psi^1_s(s) \\ &- (\Psi^0_s \vee c)) - 1\big) + pr^0_s + \frac{p}{2(1-p)}(\theta^0_s)^2\Big]ds - \int_t^T \hat{\Psi}^0_s dB_s. \end{aligned} \tag{66}$$

Procesul $B^\theta_t := B_t + \frac{p}{1-p}\int_0^t \theta^0_s ds$ este o miscare Browniana standard sub probabilitatea echivalenta Q^θ, a carei densitate in raport cu $P|_{\mathcal{G}_T}$ este data prin expresia $Z^\theta_T := \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot \frac{p}{p-1}\theta^0_s dB_s\right)_T$. Procesul $(\int_0^\cdot \hat{\Psi}^0_s dB^\theta_s)$ este un $\mathcal{G}$-martingal local sub Q^θ.

Definim $\tau_n := \inf\{t \in [0,T] \mid \int_0^t (\hat{\Psi}^0_s ds)^2 \geq n\}$, care este un $\mathcal{G}$-timp de stopare. Atunci $\tau_n \uparrow T$ si pentru fiecare n, procesul $(\int_0^{\cdot\wedge\tau_n} \hat{\Psi}^0_s dB^\theta_s)$ este un martingal. Rezulta

$$\begin{aligned} \Psi^0_{t\wedge\tau_n} = E^{Q^\theta}\left[\Psi^0_{t\wedge\tau_n} | \mathcal{G}_{t\wedge\tau_n}\right] &= \int_{t\wedge\tau_n}^T E^{Q^\theta}\Big\{\Big[\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}^0_s)^2 + \lambda_s\big(\exp(\Psi^1_s(s) \\ &\quad - (\Psi^0_s \vee c)) - 1\big) + pr^0_s + \frac{p}{2(1-p)}(\theta^0_s)^2\Big]\Big|\mathcal{G}_{t\wedge\tau_n}\Big\}ds \\ &\geq \int_{t\wedge\tau_n}^T E^{Q^\theta}(-\lambda_s | \mathcal{G}_{t\wedge\tau_n})ds \geq c, \end{aligned} \tag{67}$$

ceea ce inseamna ca $\Psi_t^0 \geq c$. Asadar perechea $(\Psi^0, \hat{\Psi}^0)$ este o solutie a ecuatiei (65).

Definim acum

$$\begin{aligned}
\Psi_t &:= \Psi_t^0 1_{t<\tau} + \Psi_t^1(\tau) 1_{t\geq\tau}, \\
\hat{\Psi}_t &:= \hat{\Psi}_t^0 1_{t<\tau} + \hat{\Psi}_t^1(\tau) 1_{t\geq\tau}, \\
\tilde{\Psi}_t &:= (\Psi_t^1(t) - \Psi_t^0) 1_{t<\tau}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Concluzia propozitiei este acum evidenta, in virtutea teoremei 3.1. din referinta Kharroubi, Lim ([20]).

Propozitia 6 *Procesul Y^π este un $\mathcal{G}$-supermartingal pentru orice strategie admisibila π.*

Demonstratie. Vom enunta mai intai cateva rezultate cunoscute din teoria martingalelor de tipul BMO (pentru o discutie detaliata pe aceasta tema se poate consulta referinta Kazamaki [17]). Fie $p \geq 1$ si $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ un $\mathcal{G}$-martingal continuu cu $Y_0 = 0$. Procesul Y se numeste un martingal de tipul BMO_p daca exista o constanta $C > 0$ a.i.

$$E\left(|Y_T - Y_v|^p \mid \mathcal{G}_v\right) \leq C, \tag{69}$$

estBMO

pentru orice $\mathcal{G}$ timp de stopare v. Se stie ca daca Y este un martingal de tipul BMO_q, pentru un $q \geq 1$ oarecare, atunci Y este un martingal de tipul BMO_p pentru orice $p \geq 1$. Din acest motiv martingalele BMO_p se numesc simplu martingale de tipul BMO.

Pentru a arata ca un anumit proces Y este un martingal de tipul BMO, se verifica estimarea (69) pentru $p = 2$, i.e.

$$E\left(\langle Y\rangle_T - \langle Y\rangle_v \mid \mathcal{G}_v\right) \leq C, \tag{70}$$

estBMO2

pentru orice $\mathcal{G}$ timp de stopare v. Se stie ca procesul exponentialei stohastice a unui martingal de tipul BMO este un martingal uniform integrabil.

Y_t^π poate fi scris sub forma exponentiala ca

$$Y_t^\pi = \exp\Big(\int_0^t A_s^\pi ds\Big)\mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot (p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)dB_s + \int_0^\cdot (\exp(\tilde{\Psi}_s) - 1)dM_s\Big)_t. \tag{71}$$

expY

Primul termen din partea din dreapta a ultimei formule este descrescator in raport cu t, pentru orice strategie π. Marimea saltului este $\exp(\tilde{\Psi}_t)-1 \geq -1+\delta$, $P\ a.s.$, (pentru o constanta strict pozitiva δ), intrucat procesul $\tilde{\Psi}$ este marginit. Apoi, pentru a arata ca procesul integralei stohastice este un $\mathcal{G}$ martingal uniform integrabil, este suficient sa aratam ca procesul $\int_0^\cdot (p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)dB_s$ este un martingal de tipul BMO. Dorim sa obtinem acum o estimare similara cu (70). Vom arata ca exista o constanta $C>0$ a.i.

$$E\Big(\int_v^T (p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)^2 \ \Big|\ \mathcal{G}_v\Big) \leq C,$$

pentru orice $\mathcal{G}$ timp de stopare v.

Aratam mai intai ca procesul $\int_0^\cdot \hat{\Psi}_s dB_s$ este un martingal de tipul BMO.

Fie $\tilde{M}$ o constanta strict pozitiva si fie $\delta > 0$ a.i. $\Psi_t \leq \tilde{M} - \delta$, P a.s., pentru orice $t \in [0,T]$. Fie de asemenea v un $\mathcal{G}$ timp de stopare arbitrar. Aplicam formula lui Itô pentru procese cu salturi procesului $\Psi_t - \tilde{M}$ pe intervalul $[v,T]$. Se obtine

$$\begin{aligned}(\Psi_v - \tilde{M})^2 - \tilde{M}^2 &= 2\int_v^T (\Psi_s - \tilde{M})\bar{f}_s ds - 2\int_v^T (\Psi_s - \tilde{M})\hat{\Psi}_s dB_s \\ &\quad - \int_v^T (\hat{\Psi}_s)^2 ds + \big[(\Psi_\tau - \tilde{M})^2 - (\Psi_{\tau-} - \tilde{M})^2\big] 1_{v\leq\tau\leq T}\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\bar{f}_t &:= \frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t)^2 - \frac{p}{1-p}\theta_t\hat{\Psi}_t + \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t)-1) + pr_t + \frac{p}{2(1-p)}\theta_t^2 \\ &\geq -\frac{p}{1-p}\theta_t\hat{\Psi}_t - \lambda_t.\end{aligned}$$

Asadar

$$\begin{aligned}
E\Big(\int_v^T (\hat{\Psi}_s)^2 ds \;\Big|\; \mathcal{G}_v \Big) &\leq -E\big[(\Psi_v - \tilde{M})^2 \mid \mathcal{G}_v \big] + \tilde{M}^2 \\
&\quad + 2E\Big[\int_v^T (\Psi_s - \tilde{M}) \bar{f}_s ds \;\Big|\; \mathcal{G}_v \Big] + C \\
&\leq C + 2\delta E\Big[\frac{p}{1-p} \theta_t \hat{\Psi}_t + \lambda_t \;\Big|\; \mathcal{G}_v \Big] \\
&\leq C + CE\Big(\int_v^T |\hat{\Psi}_s + 1| ds \;\Big|\; \mathcal{G}_v \Big) \\
&\leq C + \frac{1}{2} E\Big(\int_v^T (\hat{\Psi}_s)^2 ds \;\Big|\; \mathcal{G}_v \Big),
\end{aligned}$$

unde $C > 0$ este o constanta generica ce poate varia in formula de mai sus.

The process $\int_0^\cdot (p\sigma_s \pi_s + \hat{\Psi}_s) dB_s$ will be a BMO martingale, once we prove the estimate

$$E\Big(\int_v^T (\pi_s^2 + 2\pi_s \hat{\Psi}_s) ds \;\Big|\; \mathcal{G}_v \Big) \leq C.$$

Concluzia propozitiei va rezulta in urma unui procedeu standard de localizare, utilizand faptul ca procesul exponentialei stohastice ce apare in formula (71) este un martingal uniform integrabil.

Teorema 5 *Strategia π^* definita in formula (60) este optimala pentru problema (54). In plus, functia valoare este data de*

$$V(x) = x^p \exp(\Psi_0), \tag{72}$$

unde Ψ este o solutie a ecuatiei (62).

Demonstratie. Pentru a arata ca strategia π^* este admisibila, vom verifica ca $\pi^* \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{G}}([0,T])$. Aceasta rezulta imediat din faptul ca procesele σ si θ sunt marginite si $\hat{\Psi} \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{G}}([0,T])$.

Tinand cont de faptul ca $A^{\pi^*} = 0$, utilizand rationamentul din Propozitia rezulta usor ca procesul Y^{π^*} este un $\mathcal{G}$-martingal. Mai mult, in virtutea relatiilor $(a) - (d)$ satisfacute de procesul Y^π, daca $\pi \in \mathcal{A}$ obtinem

$$E[(X_T^\pi)^p] = E[Y_T^\pi] \leq E\,[Y_0^\pi] = x^p \exp(\Psi_0) = E[Y_0^{\pi^*}] = E[Y_T^{\pi^*}] = E[(X_T^{\pi^*})^p], \tag{73}$$

ceea ce arata optimalitatea strategiei π^* si ultima afirmatie din teorema.

Capitolul 3

O problemă de optimizare cu un activ supus riscului de credit

In acest capitol studiem o problema de optimizare de portofolii intr-o piata financiara cu oportunitati de investitii date de un activ fara risc (*bond*), un activ riscat supus riscului de piata (*stock*)si un activ riscat supus riscului de contrapartida (i.e. exista riscul ca firma emitatoare a activului sa nu-si indeplineasca la un anumit moment de timp aleator (necunoscut apriori) fata de un potential investitor obligatiile asumate printr-un contract). Gradul de satisfactie al investitorului este masurat We study a portfolio optimization problem in a financial market, with investment opportunities in a money market account, a stock and a corporate bond (which may default at some random time τ), and where the satisfaction of the investor is measured via a HARA utility function. Following the approach of Jiao and Pham (2010), we decompose the original optimization problem into two subproblems: pre-default (till the default time) and a post-default (after the post-default time), which are stated in complete markets. We prove the existence of a solution to the portfolio optimization problem and solve explicitely the post-default problem.

3.1 Specificarea cadrului şi a ipotezelor sub care lucrăm

Se considera un spatiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, inzestrat cu o filtratie $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, data de versiunea continua la dreapta a filtratiei naturale generate de o miscare Browniana unidimensioanala, completate cu multimile de P-masura nule. Aceasta filtratie se numeste filtratia *de referinta* sau filtratia *pietii fara default*. Probabilitatea P se numeste probabilitatea *istorica*. Vom studia problema de optimizare a portofoliului financiar pentru un investitor pe o piata financiara cu urmatoarele oportunitati de investitie:

- un activ fara risc (*savings account*), de exemplu un depozit bancar;
- un activ cu risc (tranzactionat pe o piata financiara reglementata, de exemplu Bursa de Valori) ce nu este supus riscului de contrapartida in sensul ca nu da default (*stock*);
- obligatiune emisa de o companie privata (*corporate bond*) ce poate intra in incapacitate de plata (poate da default);

  Procesul investitional are orizontul finit T.

Dinamica pretului activului fara risc este data de

$$dR(t) = R(t)r(t)dt. \tag{74}$$

Procesul stohastic al pretului activului cu risc este o miscare Browniana geometrica cu coeficienti neomogeni

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)).$$

Presupunem ca $r \geq 0$, μ, $\sigma \geq 0$ sunt procese $\mathcal{F}$-adaptate marginite , cu $\sigma(t) > c$, P a.s., c fiind o constanta strict pozitiva. Fie $\theta(t) := \frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}$, expresie care este cunoscuta ca *pretul de piata al riscului*.

Activul ce este supus riscului de contrapartida poate da default la un moment aleator de timp τ care nu poate fi prezis, ci doar observat imediat dupa aparitie. ca si in capitolul precedent, vom utiliza abordarea formei reduse (*reduced form approach*), numita si abordarea prin intensitatea defaultului (*intensity approach*). Presupunem

- $P(\tau = 0) = 0$ (defaultul nu poate aparea la momentul inceperii investitiei);
- Pentru orice $t \in [0, T]$, $P(\tau > t) > 0$ (defaultul poate aparea la orice moment de timp).

Notam prin $H_t := 1_{(\tau \leq t)}$, procesul ce ne indica aparitia defaultului pana la momentul de timp t si fie $\mathcal{G}$ cea mai mica filtratie ce contine filtratia de referinta

$\mathcal{F}$ si in raport cu care τ este un timp de stopare, i.e.

$$\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(H_s; s \leq t) = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge t).$$

Acest procedeu se numeste procedeul de largire progresiva a filtratiei initiale $\mathcal{F}$ (*progressive enlargement of filtration*) iar filtratia $\mathcal{G}$ se numeste *filtratia largita*, sau *filtratia completa*.

Presupunem ca piata financiara definita mai sus este lipsita de oportunitatea de arbitraj (nu sunt permise acumularile de capital fara asumarea niciunui risc), ceea ce inseamna din punct de vedere matematic ca exista cel putin o masura martingala echivalenta Q, sub care preturile actualizate ale activelor (in raport cu rata dobanzii r asociata activului fara risc) sunt $\mathcal{G}$-martingale. Aparitia posibila (in mod neasteptat) a defaultului implica faptul ca piata financiara este incompleta, insemnand ca multimea masurilor martingal echivalente contine mai mult de un singur element Q. Presupunem in continuare ca este data o astfel de masura martingal echivalenta Q.

Presupunem de asemenea ca are loc proprietatea de invarianta martingala intre filtratiile $\mathcal{F}$ si $\mathcal{G}$, cunoscuta si ca ipoteza $(\mathbf{H})$.

In scopul evaluarii pretului activului ce este supus riscului de contrapartida (conform cu Abordarea Martingala), vom presupune ca procesul (H_t) admite, sub masura de probabilitate Q, un compensator absolut continuu in raport cu masura Lebesgue. Exista astfel un proces $\mathcal{G}$-adaptat $(\tilde{\lambda}^{\mathcal{G}}(t))$, cu $\tilde{\lambda}^{\mathcal{G}}(t)) = 0$ pe multimea $(t > \tau)$, a.i. procesul compensat

$$\tilde{M}(t) := H_t - \int_0^t \tilde{\lambda}^{\mathcal{G}}(s)ds \tag{75}$$ tildeM

este un $\mathcal{G}$-martingal sub Q. $\tilde{\lambda}^{\mathcal{G}}(t)$ se numeste *$\mathcal{G}$-intensitatea defaultului* τ (sau rata de hazard (*hazard rate*)) sub probabilitatea Q. Aceasta poate fi scrisa sub forma $\tilde{\lambda}^{\mathcal{G}}(t) = 1_{(t\leq\tau)}\tilde{\lambda}^{\mathcal{F}}(t)$. Procesul $(\tilde{\lambda}^{\mathcal{F}}(t))$ este $\mathcal{F}$-adaptat si se numeste *$\mathcal{F}$-intensitatea defaultului* sub Q. In loc de $\tilde{\lambda}^{\mathcal{F}}$ vom scrie simplu $\tilde{\lambda}$.

Notam de asemenea prin λ $\mathcal{F}$-intensitatea defaultului τ sub probabilitatea istorica P, ceea ce inseamna ca procesul $(M(t))$ definit prin

$$M(t) := H_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda(s)ds = H_t - \int_0^t (1-H_s)\lambda(s)ds \tag{76}$$ M

este un $\mathcal{G}$-martingal sub P.

In continuare vom da o metoda de constructie a unui default τ cu o intensitate data (numita si metoda canonica) si pentru care are loc ipoteza($\mathbf{H}$).

Remarca 1. *Presupunem ca pe un spatiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ este dat un proces $\mathcal{F}$-predictibil γ_t ce ia valori pozitive (ce va juca rolul de intensitate a defaultului) si fie η o variabila aleatoare independenta de filtratia $\mathcal{F}$ ce urmeaza o repartitie uniforma. Definim defaultul τ prin*

$$\tau := \inf\big\{t \geq 0 \big| \int_0^t \gamma_s ds \geq \eta\big\}.$$

Se poate arata ca

$$P(\tau \leq t|\mathcal{F}_t) = P(\tau \leq t|\mathcal{F}_\infty),$$

ceea ce inseamna ca are loc ipoteza ($\mathbf{H}$).

Intrucat masura Q este absolut continua in raport cu P (pe $\mathcal{G}_T$), deducem existenta densitatii Radon-Nikodym $Z_T := \frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{G}_T}$, ce este o variabila aleatoare $\mathcal{G}_T$-masurabila ce ia valori pozitive cu $E(Z_T) = 1$. Procesul densitatilor Radon-Nikodym $Z_t := E(Z_T|\mathcal{G}_t)$, definit pentru $t < T$ este un $\mathcal{G}$-martingal sub P, si conform teoremei de reprezentare pentru martingale $\mathcal{G}$-predictibile a lui Kusuoka (cf. referintei Kusuoka Ku [24]), rezulta

$$dZ_t = Z_{t-}(\eta(t)dW(t) + \gamma(t)dM(t)),\ Z_0 = 1, \tag{77}$$ SDERN

unde $\eta(t), \gamma(t)$ sunt procese $\mathcal{G}$-predictibile, cu $\gamma(t) > -1$.

Daca X is a $\mathcal{G}$-martingal continuu la dreapta, exponentiala stohastica Doleans-Dade $(\mathcal{E}(X.)_t)$ se defineste prin

$$\mathcal{E}(X.)_t = \exp\big(X_t^c - \frac{1}{2}[X^c, X^c]_t\big) \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s),$$

unde X^c reprezinta partea continua a lui X si $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ reprezinta marimea saltului procesului X la momentul s. $\mathcal{E}(X_\cdot)$ este solutia EDS

$$dZ_t^X = Z_{t-}^X dX_t, \; Z_0^X = 1.$$

Fie

$$\begin{aligned} Y(t) &:= \int_0^t \eta(s)dW(s) + \int_0^t \gamma(s)dM(s) \\ &= \int_0^t \eta(s)dW(s) + \int_0^t (1-H_s)\lambda(s)\gamma(s)ds + \int_0^t \gamma(s)dH_s. \end{aligned}$$

Fie $t \in [0,T]$ fixat. Y are cel mult un salt in intervalul $[0,t]$, si numai la momentul τ (daca $\tau \leq t$), salt de marime $\Delta Y(\tau) = \gamma(\tau)\Delta H_\tau = \gamma(\tau)$. Atunci, pe multimea $(\tau \leq t)$,

$$\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta Y_s) = 1+\gamma(\tau) = \exp\big(\ln(1+\gamma(\tau))\Delta H_\tau\big) = \exp\big(\int_0^t \ln(1+\gamma(s))dH_s\big).$$

Pe multimea $(\tau > t)$ integrala de pe ultimul rand al formulei precedente este egala cu 0, iar partea discontinua a lui Y nu aduce nici o contributie la calculul mediei $\mathcal{E}(Y_\cdot)_t$. Putem atunci enunta

SDERN

Propoziţia 1 *Solutia EDS (77) este data de exponentiala stohastica*

$$\begin{aligned} Z_t = \mathcal{E}(Y_\cdot)_t = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_0^t \eta^2(s)ds + \int_0^t \eta(s)dW(s)\big) \\ \exp\big(\int_0^t \ln(1+\gamma(s))dH_s + \int_0^{t\wedge\tau} \gamma(s)\lambda(s)ds\big). \end{aligned} \tag{78}$$

Zt

In plus, procesul

$$\tilde{W}(t) := W(t) - \int_0^t \eta(s)ds$$

este o miscare Browniana standard sub Q, iar procesul

$$\bar{M}_t := M_t - \int_0^{t\wedge\tau} \gamma(s)\lambda(s)ds = H_t - \int_0^{t\wedge\tau} (1+\gamma(s))\lambda(s)ds \tag{79}$$

tildeM

este un $\mathcal{G}$-martingal discontinuu sub Q, ortogonal cu $\tilde{W}(t)$.

Comparand ecuatiile (79) and (76) observam ca in mod necesar are loc egalitatea $\tilde{M} = \bar{M}$ iar $\mathcal{F}$-intensitatile defaultului τ sub Q, respectiv P sunt legate prin relatia

$$\tilde{\lambda}(t) = (1 + \gamma(t))\lambda(t).$$

Notam prin $\tilde{S}(t) := e^{-\int_0^t r(s)} S(t)$ pretul actualizat al activului cu risc. Conform formulei lui Itô, rezulta

$$\begin{aligned} d\tilde{S}(t) &= \tilde{S}(t)((\mu(t) - r(t))\, dt + \sigma(t) dW(t)) \\ &= \tilde{S}(t)((\mu(t) - r(t) + \sigma(t)\eta(t))\, dt + \sigma(t) d\tilde{W}(t)). \end{aligned}$$

Intrucat pretul actualizat al activelor tranzactionate trebuie sa fie $\mathcal{G}$-martingale sub Q, rezulta ca termenul cu variatie marginita din formula de mai sus se anuleaza. Asadar $\eta(t) = \frac{r(t) - \mu(t)}{\sigma(t)} := -\theta(t)$. Dinamica lui S_t sub Q este data de

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma(t)d\tilde{W}(t))$$

si remarcam ca sub orice masura martingala echivalenta rata asteptata de castig pentru activul cu risc este data de rata dobanzii fara risc r (numita si *short interest rate*).

In continuare ne propunem sa obtinem o formula explicita pentru procesul pretului activului supus riscului de contrapartida. Procesul asociat al dividendelor $D(t)$ este definit prin

$$D(t) := X 1_{(\tau > T)} + z_\tau 1_{(\tau \le t)} = X 1_{(\tau > T)} + \int_0^t z_s dH_s,\ t \le T. \tag{80}$$

Cantitatea $D_u - D_t$ reprezinta toate incasarile intre momentele de timp t si u a unei persoane ce a cumparat la momentul t o obligatiune cu default. Atunci, conform cu referinta Bielecki and Rutkovski [2], Sectiunea 8.3, rezulta ca pretul la momentul t al acestui tip de activ cu maturitatea T este dat de formula

$$\begin{aligned} D(t,T) &= E^Q\big(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} dD(s)\big|\mathcal{G}_t\big) \\ &= E^Q\big(1_{(\tau>T)} e^{-\int_t^T r_u du} X + 1_{(t<\tau\leq T)} e^{-\int_t^\tau r_u ds} z_\tau \big|\mathcal{G}_t\big) \qquad (81) \\ &= 1_{(\tau>t)} E^Q\big(e^{-\int_t^T (r_u+\tilde{\lambda}_u)du} X + \int_t^T e^{-\int_t^s (r_u+\tilde{\lambda}_u)du} z_s \tilde{\lambda}_s ds \big|\mathcal{F}_t\big). \end{aligned}$$

Adoptam rata de recuperare in cazul aparitiei defaultului data de valoarea de piata a defaultului *market value of default RMV* (conform cu Duffie, Singleton ([8]) sau monografia Bielecki, Rutkovski ([2])). Se presupune astfel ca la momentul aparitiei defaultului (daca acesta se produce) cumparatorul obligatiunii primeste o compensatie data de un procent $(1 - L(t))$ din valoarea obligatiunii chiar inainte de producerea defaultului $D(\tau-, T)$, daca $\tau < T$. Astfel, compensatia are forma $z(t) = (1 - L(t))D(t-, T)$. Presupunem ca $0 < L(t) < 1$, $Pa.s.$. Atunci

$$D(t,T) = 1_{(\tau>t)} E^Q\left(e^{-\int_t^T (r_s+\tilde{\lambda}_s L_s)ds)} X|\mathcal{F}_t\right) := 1_{(\tau>t)} B(t,T) = \tilde{H}(t)B(t,T), \qquad (82)$$

Am notat $\tilde{H}(t) := 1-H(t)$ iar $B(t,T)$ reprezinta valoarea chiar inainte de default a obligatiunii, fiind data de valoarea unei obligatiuni nesupuse riscului de contrapartida cu rata dobanzii ajustata in functie de riscul datorat aparitiei posibile a defaultului (*default risk adjusted interest rate*) $\hat{r}(t) := r(t) + \tilde{\lambda}(t)L(t)$, cu termenul de corectie (spreadul) dat de $\tilde{\lambda}(t)L(t)$. Conform formulei (82) si utilizand continuitatea procesului $B(t,T)$, se obtine urmatoarea formula pentru compensatia primita in cazul defaultului

$$z(\tau) = (1 - L(\tau))D(\tau-, T) = (1 - L(\tau))B(\tau, T).$$

Vom presupune fara a diminua generalitatea ca valoarea X primita la maturitate in cazul neaparitiei defaultului este egala cu o unitate monetara.

3.2 Rezultate ajutătoare

3.2.1 Dinamica preţului activului cu default sub probabili-

tatea istorică

Se observa fara dificultate ca $\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = Z^{\mathcal{F}}(t)$, unde

$$Z^{\mathcal{F}}(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds\right).$$

Utilizand regula lui Bayes rule pentru medii conditionate rezulta

$$\tilde{m}(t) := E^Q\left(e^{-\int_0^T \hat{r}(s)ds}\big|\mathcal{F}_t\right) = (Z^{\mathcal{F}}(t))^{-1}E\left(e^{-\int_0^T \hat{r}(s)ds}Z^{\mathcal{F}}(T)\big|\mathcal{F}_t\right),$$

unde prin E^Q am notat operatorul de medie in raport cu probabilitatea Q. Fie $m(t) := E\left(e^{-\int_0^T \hat{r}(s)ds}Z^{\mathcal{F}}(T)\big|\mathcal{F}_t\right)$. Aplicand mai intai teorema de reprezentare a martingalelor Browniene $\mathcal{F}$-martingalului pozitiv $(m(t))$, si apoi formula lui Itô's procesului $(\ln(m(t)))$ (pentru mai multe detalii se poate consulta referinta Lamberton, Lapeyre ([25]), Propozitia 6.1.1.), deducem existenta unui proces $\mathcal{F}$-adaptat $(q(t))$ a.i.

$$m(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t q^2(s)ds + \int_0^t q(s)dW(s)\right).$$

Se obtine astfel

$$\begin{aligned} B(t,T) &= B(0,T)\exp\big(\int_0^t \hat{r}(s)ds\big)(Z^{\mathcal{F}}(t))^{-1}m_t \\ &= B(0,T)\exp\Big(\int_0^t \big(\hat{r}(s) + \frac{1}{2}(\theta^2(s) - q^2(s))\big)ds + \int_0^t (\theta(s) + q(s))dW(s)\Big). \end{aligned} \tag{83}$$

Aplicand acum formula lui Itô procesului exponential $(B(t,T))$, deducem

$$\begin{aligned} dB(t,T) &= B(t,T)\Big[\big(\hat{r}(t) + \frac{1}{2}(\theta^2(t) - q^2(t))\big)ds + (\theta(t) + q(t))dW(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\theta(t) + q(t))^2dt\Big] \\ &= B(t,T)\big((\hat{r}(t) + \theta(t)\beta(t))dt + \beta(t)dW(t)\big), \end{aligned} \tag{84} \quad \boxed{\texttt{eqB}}$$

unde $\beta(t) := \theta(t) + q(t)$.

Reamintim ca $D(t,T) = \tilde{H}_t B(t,T)$, si $H_t = M(t) + \int_0^t \tilde{H}_s \lambda(s) ds$. Atunci, prin aplicarea formulei lui Itô pentru procese cu salturi, obtinem dinamica pretului activului supus riscului de contrapartida sub probabilitatea P

$$\begin{aligned}
dD(t,T) &= \tilde{H}_{t-} dB(t,T) + B(t-,T) d\tilde{H}_t + d\Big(\sum_{0<s\le t} \Delta \tilde{H}_s \Delta B(s,T) \Big) \\
&= \tilde{H}_t dB(t,T) - B(t,T) dH_t = \tilde{H}_t dB(t,T) - B(t,T) \tilde{H}_{t-} dH_t \\
&= \tilde{H}_t B(t,T) \big((\hat{r}(t) + \theta(t)\beta(t)) dt + \beta(t) dW(t) \big) \\
&\quad - B(t,T) \tilde{H}_{t-} (dM(t) + \lambda(t) \tilde{H}_t dt) \\
&= D(t,T) \big((\hat{r}(t) + \theta(t)\beta(t) - \lambda(t)) dt + \beta(t) dW(t) \big) - D(t-,T) dM(t) \\
&= D(t-,T) \big[(\hat{r}(t) + \theta(t)\beta(t) - \lambda(t)) dt + \beta(t) dW(t) - dM(t) \big].
\end{aligned}$$

in virtutea continuitatii procesului $(B(t,T))$, a ecuatiilor $d\tilde{H}_t = -dH_t$ and $\tilde{H}_t^2 = \tilde{H}_t$. Am utilizat de asemenea si identitatea $dH_t = \tilde{H}_{t-} dH_t$, sau, sub forma integrala, $\int_0^t dH_s = \int_0^t \tilde{H}_{s-} dH_s$. Pentru $\tau > t$ (dupa default) ambele integrale sunt0 (intrucat nu avem nici un salt pana la momentul t), si pentru $\tau \le t$

$$\int_0^t \tilde{H}_{s-} dH_s = \tilde{H}_{\tau-} \Delta H_\tau = \Delta H_\tau = \int_0^t dH_s \ (=1),$$

ceea ce arata identitatea dorita. Am obtinut in aceasta sectiune urmatorul rezultat

Propoziţia 2

Pretul $D(t,T)$ al activului supus riscului de contrapartida admite dinamica

$$dD(t,T) = D(t-,T) \big[(\hat{r}(t) + \theta(t)\beta(t) - \lambda(t)) dt + \beta(t) dW(t) - dM(t) \big]. \quad (85)$$ eqD

3.2.2 Densitatea condiţională a defaultului

In rezolvarea problemei de optimizare a unui investitor in piata financiara descrisa la inceputul capitolului, care este formulata intr-o piata incompleta (datorita posibilitatii aparitiei defaultului), vom descompune problema in doua subprobleme de optimizare, una inainte de default si o a doua dupa default, ce sunt formulate in piete financiare complete si pot fi abordate cu notiuni uzuale de dualitate martingala sau control stohastic optimal.

In studiul problemei de optimizare *post default* notiunea de intensitate a defaultului nu este suficienta. In schimb, notiunea de $\mathcal{F}$-densitate conditionala a defaultului (a se vedea pentru detalii suplimentare referintele El Karoui, Jeanblanc, Jiao ([5]) sau Jiao, Pham ([16])) se va dovedi extrem de utila. Presupunem ca pentru fiecare $t \in [0, T]$ si $s \geq 0$, exista o familie de variabile aleatoare $(\alpha_t(s))$, a.i. $\alpha_t(s)$ este $\mathcal{F}_t$ adaptata, si

$$P(\tau \leq s|\mathcal{F}_t) = \int_0^s \alpha_t(u)du,$$

sau echivalent $E(f(\tau)|\mathcal{F}_t) = \int_0^\infty f(s)\alpha_t(s)ds$, pentru orice functie f marginita si masurabila Borel. In plus, pentru o variabila aleatoare $X_t(x)$ care este $\mathcal{F}_t \otimes \mathbb{B}$ masurabila,

$$E(X_t(\tau)|\mathcal{F}_t) = \int_0^\infty X_t(s)\alpha_t(s)ds.$$

Definim $F_t := P(\tau \leq t|\mathcal{F}_t)$. Atunci $G_t := 1 - F_t = P(\tau > t|\mathcal{F}_t)$ se numeste *procesul conditional de supravietuire* asociat cu τ. Pentru s fixat , procesul $(\alpha_t(s))_{0 \leq t \leq T}$ este un $\mathcal{F}$-martingal. Sub ipoteza **(H)** este adevarata relatia,

$$P(\tau \leq t|\mathcal{F}_t) = P(\tau \leq t|\mathcal{F}_T),$$

Ipoteza

$$\alpha_T(t) = \alpha_t(t), \ \forall t \in [0, T].$$

este o conditie suficienta pentru ca ipoteza (**H**) sa aiba loc, si o presupunem in restul articolului. Se poate arata ca intensitatea $\lambda(t)$ este complet determinata de densitatile conditionale $\alpha_t(s)$,

$$\lambda(t) = \frac{\alpha_t(t)}{F_t}.$$

Reciproc, se pot recupera numai partial densitatile conditionale $\alpha_t(s)$, plecand de la intensitatile defaultului, si aceasta se poate realiza numai pentru $s \geq t$ (i.e. pentru momentele de timp t anterioare defaultului). Vom simplifica notatia $\alpha(t) := \alpha_t(t)$.

3.2.3 Portofoliul investitorului

Consideram acum un investitor cu oportunitati de investitie in piata financiara descrisa la inceputul capitolului, ce investeste la momentul initial capitalul x si urmeaza o strategie de investitie autofinantata pe intervalul de timp $[0,T]$. Notam prin $N_R(t)$, $N_S(t)$ si $N_D(t)$ cantitatile din fiecare tip de activ detinute de investitor la momentul t. $N_R(t)$, $N_S(t)$ si $N_D(t)$ sunt presupuse procese $\mathcal{G}$-predictibile. Intrucat $N_D(t) = N_D(t)1_{(t\le\tau)}$ (activul supus riscului de contrapartida inceteaza sa existe la momentul producerii defaultului) putem presupune ca $N_D(t)$ este $\mathcal{F}$-predictibil. Aceasta afirmatie este o consecinta a descompunerii standard pentru procese $\mathcal{G}$-predictibile (a se vedea formula (**??**)).

Valoarea portofoliului $X^{N,x}(t)$ este definita prin

$$X^{N,x}(t) = x + N_R(t)R(t) + N_S(t)S(t) + N_D(t)D(t,T).$$

Conditia de autofinantare dicteaza

$$dX^{N,x}(t) = N_R(t)dR(t) + N_S(t)dS(t) + N_D(t)dD(t,T). \qquad (86)$$

selffin

Fie $\pi_R(t)$, $\pi_S(t)$ and $\pi_D(t)$ fractiunile corespunzatoare sumelor investite in fiecare activ, i.e.

$$\pi_R(t) := \frac{N_R(t)R(t)}{X^{N,x}(t-)}, \pi_S(t) := \frac{N_S(t)S(t)}{X^{N,x}(t-)}, \pi_D(t) := \frac{N_D(t)D(t-,T)}{X^{N,x}(t-)}.$$

In mod evident $\pi_R(t) + \pi_S(t) + \pi_D(t) = 1$. Vom identifica o strategie de investitii cu un proces continuu la stanga $\pi(t) := (\pi_R(t), \pi_S(t), \pi_D(t))$ si vom nota prin $(X_t^{\pi,x}; 0 \le t \le T)$ valoarea corespunzatoare a portofoliului. Conditia de autofinantare se poate rescrie sub forma

$$\begin{cases} dX^{\pi,x}(t) &= X^{\pi,x}(t-)\big(\pi_R(t)\frac{dR(t)}{R(t)} + \pi_S(t)\frac{dS(t)}{S(t)} + \pi_D(t)\frac{dD(t,T)}{D(t-,T)}\big); \\ X^{\pi,x}(0) &= x. \end{cases} \qquad (87)$$

dynportf

Pentru ultimul termen din partea dreapta facem conventia $\frac{0}{0} = 0$ (dupa default activul supus riscului de contrapartida nu se mai tranzactioneaza, deci $\pi_D(t) = 0$ si $D(t,T) = 0$, pentru $t > \tau$). Tinand cont de dinamica activelor tranzactionate si ecuatia de autofinantare, putem scrie

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t-)\big[\big(r(t) + \pi_S(t)(\mu(t) - r(t)) + \pi_D(t)\big(\lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - 1) \\ + \theta(t)\beta(t)\big)\big)dt + \big(\pi_S(t)\sigma(t) + \pi_D(t)\beta(t)\big)dW(t) - \pi_D(t)dM(t)\big]. \tag{88}$$

dynexpXt

De fapt, $\pi = \underline{\pi}(t)1_{(t\le\tau)} + \overline{\pi}(t)1_{(\tau>t)}$, unde $\underline{\pi}(t) = (\underline{\pi}_R(t), \underline{\pi}_S(t), \pi_D(t))$ reprezinta strategia pre-default iar $\overline{\pi}(t) = (\overline{\pi}_R(t), \overline{\pi}_S(t), 0)$ reprezinta strategia post-default.

Dinamica procesului valorii portofoliului este guvernata de ecuatiile

$$dX^{\underline{\pi}}(t) = X^{\underline{\pi}}(t)\big[\big(r(t) + \underline{\pi}_S(t)(\mu(t) - r(t)) + \pi_D(t)(\lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - 1) \\ + \theta(t)\beta(t)))dt + (\underline{\pi}_S(t)\sigma(t) + \pi_D(t)\beta(t))\, dW(t)\big], \text{ for } t < \tau, \tag{89}$$

befdef

si

$$dX^{\overline{\pi}}(t) = X^{\overline{\pi}}(t)\left[r(t) + \overline{\pi}_S(t)(\mu(t) - r(t))\right]dt + \overline{\pi}_S(t)\sigma(t)dW(t), \text{ for } t \ge \tau. \tag{90}$$

valaftdef

Definitia 1 *Multimea $\mathcal{A}(x)$ a strategiilor admisibile este formata din procesele $(\pi(t); 0 \le t \le T)$ continue la stanga si de patrat integrabile, ce satisfac in plus $\pi_D(t) < 1,\ 0 \le t \le T,\ Pa.s.$.*

Remarca 2 *Este natural sa presupunem ca investitorul, indiferent de apetitul la risc manifestat va prefera sa nu-si investeasca intreg capitalul in activul supus riscului de contrapartida, la nici un moment de timp (conditia $\pi_D(t) < 1$, pentru orice $t \in [0, T]$), existand probabilitatea deloc neglijabila ca in aceasta situatie sa sufere pierderi foarte mari.*

Ca si in capitolul precedent, com considera functii de utilitate U definite pe $(0, \infty) \to$, ce sunt derivabile, strict crescatoare si strict concave, satisfacand in plus conditiile uzuale ale lui Inada: $\lim_{x\to 0} U'(x) = \infty$ si $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$. Vom trata numai cazurile functiilor de utilitate de tip logaritmic si de tip putere. Notam prin E^x media conditionata $E(\cdot|X^\pi(0) = x)$. Investitorul doreste sa-si maximizeze utilitatea asteptata de pe urma valorii finale (la momentul T) a portofoliului, dupa toate strategiile admisibile. Functia valoare V a problemei de optimizare se poate scrie sub forma

$$V(x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} E[U(X^{\pi,x}(T))] = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} J^x(\pi). \tag{91}$$ origoptprob

3.3 Cazul utilităţii de tip logaritmic

Procesul valorii portofoliului este dat in mod evident de exponentiala stohastica a procesului (Y_t^π), ce apare scris intre paranteze drepte in formula (dynexpXt 88), i.e.

$$\begin{aligned}
X^{\pi,x}(t) = \mathcal{E}(Y_\cdot^\pi)_t = x \exp\Big(\int_0^t \big(r(s) + \pi_S(s)(\mu(s) - r(s)) + \pi_D(s)(\lambda(s) \\
(\gamma(s)L(s) + L(s) - 1) + \theta(s)\beta(s)) - \frac{1}{2}(\pi_S(s)\sigma(s) + \pi_D(s)\beta(s))^2\big) ds\Big) \\
\exp\Big(\int_0^t \big(\pi_S(s)\sigma(s) + \pi_D(s)\beta(s)\big) dW(s)\Big) \\
\times \exp\Big(\int_0^t \ln(1 - \pi_D(s)) dH_s\Big).
\end{aligned} \tag{92}$$ Xt

Am utilizat faptul ca, in mod evident, pentru un moment de timp fixat t, marimea saltului procesului (Y^π) la momentul τ (avem salt numai daca $\tau \le t$) este data de $\Delta Y^\pi(\tau) = -\pi_D(\tau)$. In continuare procedam in acelasi mod in care am obtinut formula explicita (Zt 78) pentru procesul densitatilor Radon Nikodym (Z_t). Deducem

$$\begin{aligned}
\ln\left(X^{\pi,x}(t)\right) = \ln(x) + \int_0^t \big[r(s) + \pi_S(s)(\mu(s) - r(s)) + \pi_D(s)(\lambda(s)(\gamma(s)L(s) \\
+ L(s) - 1) + \theta(s)\beta(s)) - \frac{1}{2}(\pi_S(s)\sigma(s) + \pi_D(s)\beta(s))^2 \\
+ \tilde{H}_s \lambda(s) \ln(1 - \pi_D(s))\big] ds \\
+ \int_0^t \big(\pi_S(s)\sigma(s) + \pi_D(s)\beta(s)\big) dW(s) + \int_0^t \ln(1 - \pi_D(s)) dM(s),
\end{aligned}$$

unde am rescris integrala $\int_0^t \ln(1 - \pi_D(s)) dH_s$ tinand cont de formula $dH_t =$

$dM_t + \tilde{H}_t \lambda(t) dt$. Sub ipotezele noastre procesele date de integralele stohastice din formula scrisa pe mai multe randuri de mai sus sunt martingale adevarate, de medie 0. Rezulta

$$\begin{aligned} J^x(\pi) = \ln(x) + E\Big\{ \int_0^T & \big[r(s) + \pi_S(s)(\mu(s) - r(s)) + \pi_D(s)(\lambda(s)(\gamma(s)L(s) \\ & + L(s) - 1) + \theta(s)\beta(s)) - \frac{1}{2}(\pi_S(s)\sigma(s) + \pi_D(s)\beta(s))^2 \\ & + \tilde{H}_s \lambda(s) \ln(1 - \pi_D(s)) \big] ds \Big\}. \end{aligned}$$

Problema de optimizare stohastica se reduce astfel la o problema de optimizare pe traiectorii (pentru fiecare traiectorie ω fixata), pe care o rezolvam inainte de default si dupa default. Pentru problema pre-default, definim, pentru $t \leq \tau \wedge T$, functia aleatoare

$$\begin{aligned} \tilde{g}_t(y, z) = r(t) + (\mu(t) - r(t))y + (\lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - 1) + \theta(t)\beta(t))z \\ - \frac{1}{2}(\sigma(t)y + \beta(t)z)^2 + \lambda(t) \ln(1 - z), \end{aligned}$$

pentru $y \in \mathbb{R}$ asi $z < 1$, unde am tinut cont de faptul ca $\tilde{H}_t = 1$, P a.s., pentru $t \leq \tau$. Pentru problema post-default, i.e. pentru $t > \tau$, stim ca $\pi_D(t) = 0$ si de asemenea $\tilde{H}_t = 0$. Vom defini astfel

$$\bar{g}_t(y) = r(t) + (\mu(t) - r(t))y - \frac{1}{2}\sigma(t)^2 y^2.$$

Suntem astfel condusi la determinarea punctului de maxim pentru functia aleatoare

$$g_t(y, z) = \tilde{g}_t(y, z) 1_{(t \leq \tau \wedge T)} + \bar{g}_t(y) 1_{(t > \tau \wedge T)}.$$

Pentru problema pre-default, conditiile de optimalitate de ordinul I devin

$$\frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial y}(y, z) = \mu(t) - r(t) - (\sigma(t)y + \beta(t)z)\sigma(t) = 0,$$

si

$$\frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial z}(y, z) = \lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - 1) + \theta(t)\beta(t) - (\sigma(t)y + \beta(t)z)\beta(t) - \frac{\lambda(t)}{1 - z} = 0.$$

Deducem ca

$$\sigma(t)\tilde{y}^* + \beta(t)\tilde{z}^* = \theta,$$

si inlocuind in cea de a doua ecuatie se obtine

$$\tilde{z}^* = 1 - \frac{1}{\gamma(t)L(t) + L(t) - 1}.$$

In mod evident z^* este admisibil numai daca $\gamma(t) > \frac{1}{L(t)} - 1$, ceea ce inseamna ca $\gamma(t) > -1$. In acest caz obtinem de asemenea

$$y^* = \frac{\theta(t)}{\sigma(t)} - \frac{\beta(t)}{\sigma(t)}\big(1 - \frac{1}{\gamma(t)L(t) + L(t) - 1}\big).$$

Scriind matricea Hessiana asociata functiei g_t, se observa ca (y^*, z^*) este punct de maxim pentru aplicatia $\tilde{g}_t$. De asemenea, in mod evident, punctul $\bar{y}^* = \frac{\theta(t)}{\sigma(t)}$ este punct de maxim pentru $\bar{g}_t$. Putem acum formula rezultatul principal al acestei sectiuni.

Teorema 1 *Presupunem ca $U(x) = \ln(x)$ si, in plus fata de presupunerile facute, impunem conditia*

$$\gamma_(t) > \frac{1}{L(t)} - 1, \ \forall t \leq T.$$

Atunci strategia $\pi_t^* = (\pi_S^*(t), \pi_D^*(t))$ data prin

$$\pi_S^*(t) = \Big(\frac{\theta(t)}{\sigma(t)} - \frac{\beta(t)}{\sigma(t)}\big(1 - \frac{\tilde{H}_t}{\gamma(t)L(t) + L(t) - 1}\big)\Big)1_{(t \leq \tau \wedge T)} + \frac{\theta(t)}{\sigma(t)}1_{(t > \tau \wedge T)}, \quad (93)$$

si

$$\pi_D^*(t) = \Big(1 - \frac{\tilde{H}_t}{\gamma(t)L(t) + L(t) - 1}\Big)1_{(t \leq \tau \wedge T)} \quad (94)$$

este o strategie optimala pentru problema (91). origoptprob

3.4 Existenta unei solutii pentru problema de optimizare in cazul general

Utilizand Teorema 2.2 din referinta Kramkov, Schachermayer ([23]), stim ca problema (91) admite o solutie optima sub ipotezele

(i) Coeficientul de elasticitate asimptotica a functiei de utilitate U satisface conditia
$$AE(U) := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1;$$

(ii) Exista cel putin o masura martingala echivalenta Q;

(iii) Exista un $x > 0$ pentru care functia valoare $V(x)$ este finita.

Presupunerea (i) este in mod evident satisfacuta in cazul functiilor de utilitate de tip HARA considerate. De asemenea, am presupus existenta unei masuri martingale echivalente in scopul obtinerii pretului activului supus riscului de contrapartida. Apoi, conform referintei Kramkov, Schachermayer ([23]), $V(x)$ este finita intr-un punct x daca conjugata functiei valoare V^* ia valoare finita in punctul $y = V'(x)$. O conditie suficienta pentru ca ultima afirmatie sa fie adevarata este
$$E[U^*(yZ_T)] < \infty, \text{ pentru un anumit } y > 0,$$
unde U^* este conjugata convexa a functiei de utilitate (concave) U (vom da mai jos forma aplicatiei U^*). Vom preupune in continuarea acestei sectiuni ca formula de mai sus este verificata.

Rezultatele obtinute in articolul mentionat mai sus ne permit sa dam o caracterizare duala a functiei valoare si a strategiei optimale (in situatia in care aceasta exista), dar in general nu se pot gasi formule explicite pentru functia valoare.

In continuare urmam argumentele din articolul Jiao, Pham ([16]), prin care vom descompune problema de optimizare originala in doua subprobleme ce sunt formulate in piete financiare complete. Daca π este o strategie admisibila oarecare putem scrie

$$\begin{aligned}
J^x(\pi) = E[U(X^{\pi,x}(T))] &= E\Big[E\big(U(\tilde{X}^{\pi,x}(T))1_{(\tau>T)} \\
&\quad + U(X^{\pi,x}(T))1_{(\tau\le T)}|\mathcal{F}_T\big)\Big] \\
&= E\left[U(\tilde{X}^{\pi,x}(T))P\left(\tau > T|\mathcal{F}_T\right)\right] + E\left[E\left(U(X^{\overline{\pi},x}(T))1_{(\tau\le T)}|\mathcal{F}_T\right)\right] \\
&= E\left[U(\tilde{X}^{\pi,x}(T))G_T\right] + E\left[\int_0^T U(X_s^{\overline{\pi},x}(T))\alpha_T(s)ds\right].
\end{aligned}$$

In deducerea formulei de mai sus am utilizat faptul ca orice variabila aleatoare $\mathcal{G}_T$-masurabila Y poate fi descompusa sub forma

$$Y = \frac{E\left(Y1_{(\tau>T)}|\mathcal{F}_T\right)}{G_T} + Y_\tau 1_{(\tau\le T)},$$

unde Y_τ este $\mathcal{F}_T \otimes \sigma(\tau)$ masurabila. $\tilde{X}^{\pi,x}$ este solutia ecuatiei (89) befdef si $\pi = \underline{\pi}$ (suntem in cazul in care nu a aparut defaultul). Avem

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T U(X_s^{\overline{\pi},x}(T))\alpha_T(s)ds\right] &= \int_0^T E\left[E\left(U(X_s^{\overline{\pi},x}(T))\alpha_s|\mathcal{F}_s\right)\right]ds \\
&= E\left[\int_0^T E\left(U(X_s^{\overline{\pi},x}(T))\alpha_s|\mathcal{F}_s\right)ds\right].
\end{aligned} \tag{95}$$

Problema de optimizare post-default este definita ca

$$\bar{V}_s(x) = \sup_{\overline{\pi}_S} E\left(U(\bar{X}_s^{\overline{\pi}_S,x}(T))\alpha_s(s)\middle|\mathcal{F}_s\right) = \sup_{\overline{\pi}_S} J_s(\overline{\pi}_S, x), \tag{96}$$ postdef

unde procesul valoare post-default $(\bar{X}_s^{\overline{\pi},x})$ pleaca la momentul s din starea x. Aceasta problema nu este o problema clasica de optimizare de portofolii intrucat functia pe care trebuie sa o maximizam este data de functia de utilitate ponderata insa cu o functie aleatoare.

Conform cu referinta articolul Jiao, Pham ([16] JP), Teorema 3.1, obtinem urmatoarea formula de programare dinamica asociata problemei noastre de cntrol optimal

$$V(x) = \sup_{\pi_S, \pi_D} E\left[U(\tilde{X}^{\underline{\pi}}(T))G_T + \int_0^T \bar{V}_s(\tilde{X}^{\underline{\pi}}(s)(1-\pi_D(s)))ds\right] \qquad (97)$$ dynprog

Remarca 3 *Aceasat ecuatie ne spune ca pentru a rezolva problema de optimizare (91), este suficient sa rezolvam doua sub-probleme de optimizare: problema inainte de default si problema posterioara defaultului, probleme ce sunt formulate in piete financiare complete si pentru care pot fi utilizate argumente de tipul dualitatii convexe. Cu ajutorul formulei (97) se observa usor ca va trebui sa rezolvam mai intai problema post-default (96), dupa care vom utiliza functia valoare obtinuta $\bar{V}$ in rezolvarea problemei (97). Rezolvarea problemei post-default este deosebit de complexa din punct de vedere tehnic motiv pentru care ne vom restrange doar la rezolvarea problemei pre-default.*

3.4.1 Problema de optimizare post-default

Dinamica procesului valoare pentru problema posterioara defaultului (ce satisface ecuatia (90)) se poate rescrie sub forma

$$d\bar{X}^{\overline{\pi}}_s(t) = \bar{X}^{\overline{\pi}}_s(t)\left[r(t) + \overline{\pi}_S(t)(\mu(t) - r(t))\right]dt + \overline{\pi}_S(t)\sigma(t)dW(t);\ \bar{X}^{\overline{\pi}}_s(s) = x.$$

Reamintim formula densitatilor Radon-Nikodym

$$Z^{\mathcal{F}}(t) = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)du - \int_0^t \theta(u)dW(u)\big),$$

si notam $Z_s^t := \frac{Z^{\mathcal{F}}(t)}{Z^{\mathcal{F}}(s)}$, for $t \geq s$. Pentru s fixat definim pe $\mathcal{F}_T$ probabilitatea Q^s prin $\frac{dQ^s}{dP}|_{\mathcal{F}_T} := Z_s^T$. In mod evident $\frac{dQ^s}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = Z_s^t$. Fie de asemenea

$$H_s^t = e^{-\int_s^t r(u)du} Z_s^t = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_s^t (r(u)+\theta^2(u))du - \int_s^t \theta(u)dW(u)\big),\ \text{pentru } t \geq s.$$

H_s^t se numeste (*deflator*). Se poate observa cu usurinta ca valoarea actualizata a valorii portofoliului este un $\mathcal{G}$-martingal local (sub Q^s) ce ia valori pozitive, si deci este un supermartingal. Rezulta

$$E(H_s^T \bar{X}_s^{\pi}(T)|\mathcal{F}_s) \leq E(H_s(s)\bar{X}_s^{\pi}(s)) = x. \tag{98}$$

restr

Asa cum am precizat mai sus, notam prin U^* conjugata convexa a functiei concave U, care este definita prin

$$U^*(y) := \sup_{x>0}(U(x) - xy),\ y > 0.$$

In mod evident, supremumul in formula de mai sus este atins in punctul $I(y) := (U')^{-1}(y)$, ceea ce ne conduce la

$$U^*(y) = U(I(y)) - yI(y).$$

Functia I este definita pe $(0, \infty)$ cu valori in $(0, \infty)$ si este strict descrescatoare.

Intrucat am considerat cazul functiei logaritmice in sectiunea precedenta, vom trata numai cazul utilitatii de tip putere $U(x) = \frac{x^p}{p}$. Un calcul elementar arata ca $I(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ si deci $U^*(y) = \frac{1-p}{p} y^{\frac{p}{p-1}}$. Putem scrie de asemenea $U^*(y) = -\frac{y^q}{q}$, unde q este conjugatul lui p, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Tinand contul de faptul ca suntem intr-o piata financiara completa si vom transforma problema intr-o problema statica de optimizare pe care o vom rezolva cu ajutorul metodei multiplicatorilor lui Lagrange, tinand cont de restrictia (98). In acest sens definim Lagrangianul

$$L(X, \lambda) := U(\alpha_s X) + \lambda(x - H_s(T)X)$$

Derivand formal in raport cu X se obtine

$$\alpha_s(s)U'(\alpha_s X) - \lambda H_s(T) = 0,$$

de unde deducem

$$X = I\left(\frac{\lambda H_s(T)}{\alpha_s}\right).$$

Impunem acum ca X gasit mai sus sa satisfaca restrictia (98) ca o egalitate. De-

ducem
$$E\Big(H_s(T)I\big(\frac{\lambda H_s(T)}{\alpha_s}\big)|\mathcal{F}_s\Big) = x, \tag{99}$$
eqlambda

si privim aceasta ecuatie ca o ecuatie cu necunoscuta λ. Fie

$$g(\lambda) := E\Big(H_s(T)I\big(\frac{\lambda H_s(T)}{\alpha_s}\big)\big|\mathcal{F}_s\Big) = \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}}{\alpha_s^{\frac{1}{p-1}}}E\big((H_s(T))^q\big|\mathcal{F}_s\big).$$

Facem presupunerea ca g ia valori finite pentru toate numerele $\lambda > 0$. Se poate arata intr-un mod standard ca functia g este strict descrescatoare si continua pe $(0, \infty)$, precum si
$$\lim_{\lambda\searrow 0} g(\lambda) = \infty, \ \lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) = 0.$$
Deducem atunci ca ecuatia (99) admite o solutie unica data de $\lambda^* = g^{-1}(x)$. Notam
$$X^* = I\big(\frac{\lambda^* H_s(T)}{\alpha_s(s)}\big). \tag{100}$$
X*

Presupunem acum ca X^π este un proces admisibil pentru valoarea portofoliului, ce satsiface restrictia (98). Aplicand inegalitatea satisfacuta de orice functie concava si diferentiabila h

$$h(y) - h(x) \leq (y - x)h'(x),$$

functiei de utilitate U si punctelor $x = X^*$, $y = X^\pi$, considerand operatorul de medie si tinand cont de restrictia (98) ne conduce la optimalitatea procesului X^*. Putem acum formula rezultatul principal al acestei sectiuni.

Teorema 2 *Presupunem ca $g(\lambda)$ este finita pentru orice valoare pozitiva a lui λ. Atunci valoarea finala optima pentru problema post-default (96) este data de*

$$X^* = I\big(\frac{g^{-1}(x)H_s(T)}{\alpha_s}\big) = \frac{(g^{-1}(x))^{\frac{1}{p-1}}}{\alpha_s^{\frac{1}{p-1}}}(H_s(T))^{\frac{1}{p-1}}.$$

In plus, o strategie optimala $\overline{\pi}^*$ este definita prin

$$\overline{\pi}^*(t) = \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma^2(t)} + \frac{\eta^*(t)}{\sigma(t)}, \textit{ for } t \geq s, \tag{101}$$
pioptim

unde η^* este un proces $\mathcal{F}$-adaptat ce va fi precizat mai jos.

Demonstratia acestei teoreme este completa daca aratam ca X^* definit in relatia (100) este duplicabil, i.e. daca exista o strategie π^* a.i. procesul valoare asociat $X_s^{\overline{\pi}^*,x}$ satisface $X_s^{\overline{\pi}^*,x}(T) = X^*$. Asa cum am precizat procesul dat de valoarea actualizata a portofoliului este un $\mathcal{F}$-martingal sub orice masura martingala echivalenta, deci si sub Q^s. Obtinem

$$e^{-\int_s^t r(u)du} X_s^{\overline{\pi}^*,x}(t) = E^{Q^s}\left(e^{-\int_s^T r(u)du} X^* \big| \mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{Z_s(t)} M_s^*(t),$$

unde procesul $M_s^*(t) := E\left(e^{-\int_s^T r(u)du} X^* Z_s(T) \big| \mathcal{F}_t\right)$, definit pentru $t \geq s$ este un $\mathcal{F}$-martingal sub probabilitatea P. Aplicand din nou 6.1.1. din referinta Lamberton, Lapeyre ([25]) si tinand cont de faptul ca $\mathcal{F}$ este o filtratie Browniana, deducem existenta unui proces $\mathcal{F}$-adaptat η^* a.i. $M_s^*(t)$ este egal cu exponentiala stohastica $\mathcal{E}\big(\int_0^\cdot \eta^*(s)dW(s)\big)_t$, sau echivalent $M_s^*(t)$ este solutia EDS

$$dM_s^*(t) = M_s^*(t)\ \eta^*(t)dW(t).$$

Pe de alta parte, conform formulei de integrare prin parti a lui Itô pentru produsul a doua procese, deducem

$$d\big(Z_s(t)e^{-\int_s^t r(u)du} X_s^{\overline{\pi}^*,x}(t)\big) = Z_s(t)e^{-\int_s^t r(u)du} X_s^{\overline{\pi}^*,x}(t)(\overline{\pi}_S^*(t)\sigma(t) - \theta(t))dW(t).$$

Tinand apoi cont de ultimele trei formule si identificand termenii stohastici $...dW(t)$ se obtine formula (101) pentru strategia optima. In mod evident $\overline{\pi}^*$ este admisibil.

3.5 O formula explicita intr-un caz particular

In cadrul acestei sectiuni vom presupune ca toti coeficientii activelor tranzactionate sunt functii deterministe marginite, si de asemenea ca defaultul se va produce cu probabilitatea 1 pana la maturitatea T, i.e.

$$P(0 < \tau < T) = 1. \qquad (102)$$

Intrucat

$$P(0 \le \tau \le T) = E\left[E\left(1_{(0\le\tau\le T)}|\mathcal{F}_T\right)\right] = E\big(\int_0^T \alpha_T(u)du\big) = E\big(\int_0^T \alpha_u(u)du\big),$$

se observa ca relatia (102) tauT este echivalenta cu

$$E\big(\int_0^T \alpha_u(u)du\big) = 1.$$

Daca π este o strategie admisibila, valoarea finala a portofoliului asociat este data de

$$\begin{aligned} X_T^{\pi} = X^{\overline{\pi}}(T) = X^{\pi}(\tau)\exp\big(\int_\tau^T \big(r(s) + \overline{\pi}_S(s)(\mu(s) - r(s)) - \frac{1}{2}\overline{\pi}_S^2(s)\sigma^2(s)\big)ds\big) \\ \times \exp\big(\int_\tau^T \overline{\pi}_S(s)\sigma(s)dW(s)\big), \end{aligned} \tag{103}$$

cu

$$X^{\pi}(\tau) = X^{\underline{\pi}}(\tau)(1 - \underline{\pi}_D(\tau)L(\tau)).$$

Problema de optimizare post-default este data de

$$\overline{V}(t,x) = \sup_{\overline{\pi}\in\overline{\mathcal{A}}(t,x)} E\left[(X_T^{\overline{\pi}})^p | X_t^{\overline{\pi}} = x\right].$$

Intrucat suntem interesati in a rezolva aceasta problema cu conditii initiale date de variabile aleatoare (pentru $t = \tau$ si $x = X^{\pi}(\tau) = X^{\underline{\pi}}(\tau)(1 - \pi_D(\tau))$, vom rezolva de fapt problema de optimizare

$$\overline{V}(\tau,\eta) = \sup_{\overline{\pi}\in\overline{\mathcal{A}}(\tau,\eta)} E\left[(X_T^{\overline{\pi},\tau,\eta})^p\right] = \sup_{\overline{\pi}\in\overline{\mathcal{A}}(\tau,\eta)} \overline{J}(\tau,\eta,\overline{\pi}), \tag{104}$$ Vrand

unde η este o variabila pozitiva $\mathcal{G}_\tau$-masurabila si $X^{\overline{\pi},\tau,\eta}$ reprezinta solutia ecuatiei

valaftdef
(90), ce pleaca la momentul initial τ din starea η. In mod evident

$$(X_T^{\overline{\pi}})^p = \eta^p \exp\Big(p \int_\tau^T \big(r(s) + \overline{\pi}_S(s)(\mu(s) - r(s)) - \frac{1-p}{2}\overline{\pi}_S^2(s)\sigma^2(s)\big)ds\Big) \\ \times \mathcal{E}\Big(\int_\tau^\cdot p\overline{\pi}_S(s)\sigma(s)dW(s)\Big)_T. \tag{105}$$

Notam prin $\overline{\pi}_t^*$ punctul de maxim al functiei de gradul al doilea

$$h_t(x) = r(t) + (\mu(t) - r(t))x - \frac{1-p}{2}\sigma^2(t)x^2,$$

punct care este dat de

$$\overline{\pi}_t^* = \frac{1}{1-p}\frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma^2(t)} = \frac{1}{1-p}\frac{\theta(t)}{\sigma(t)}.$$

Propoziţia 3 *Strategia determinista* $\overline{\pi}_t^* = \frac{\mu(t)-r(t)}{(1-p)\sigma^2(t)}$ *este optimala pentru prob-*
Vrand
lema (104).

Demonstraţie. Fie

$$M_t^{\overline{\pi}} = \mathcal{E}\big(\int_\tau^\cdot p\overline{\pi}_S(s)\sigma(s)dW(s)\big)_t, \ t \geq \tau.$$

Fie de asemenea $\overline{\pi}$ un element arbitrar al multimii $\overline{\mathcal{A}}(\tau, \xi)$. Atunci procesul integralei stohastice $\big(\int_\tau^\cdot p\overline{\pi}_S(s)\sigma(s)dW(s)\big)$ este un $\mathcal{G}$-martingal (intrucat coeficientii modelului sunt functii marginite) si deci exponentiala stohastica $(M_t^{\overline{\pi}}; t \geq \tau)$ este de asemenea un martingale, cu $M_\tau^{\overline{\pi}} = 1$. Deducem

$$\begin{aligned}
\overline{J}(\tau,\eta,\overline{\pi}) &= E\Big[\eta^p \exp\Big(p\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s)ds\Big)M_T^{\overline{\pi}}\Big] \\
&\le E\Big[\eta^p \exp\Big(p\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\Big)M_T^{\overline{\pi}}\Big] \\
&= E\Big[\eta^p \exp\Big(p\big(\int_0^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds - \int_0^\tau h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)\Big)M_T^{\overline{\pi}}\Big] \\
&= E\Big\{E\Big[\eta^p \exp\Big(p\big(\int_0^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds - \int_0^\tau h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)\Big)M_T^{\overline{\pi}}|\mathcal{G}_\tau\Big]\Big\} \\
&= E\Big\{\eta^p \exp\Big(p\big(\int_0^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds - \int_0^\tau h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)\Big)E\Big[M_T^{\overline{\pi}}|\mathcal{G}_\tau\Big]\Big\} \\
&= E\Big[\eta^p \exp\Big(p\big(\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)\Big)M_\tau^{\overline{\pi}}\Big] \\
&= E\Big[\eta^p \exp\Big(p\big(\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)E\Big(M_T^{\overline{\pi}^*}|\mathcal{G}_\tau\Big)\Big)\Big] \\
&= E\Big[\eta^p \exp\Big(p\big(\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)\Big)M_T^{\overline{\pi}^*}\Big] = \overline{J}(\tau,\eta,\overline{\pi}^*).
\end{aligned} \tag{106}$$

Am utilizat teorema de stopare a lui Doob si faptul ca strategia $\overline{\pi}^*$ si aplicatiile h_t sunt deterministe.

Remarca 4 *In rezolvarea problemei de optimizare* (Vrand 104) *nu avem nevoie de presupunerea facuta privind existenta densitatii conditionale a lui τ.*

Pentru o strategie admisibila $\pi \in \mathcal{A}(x)$ definim

$$J(x,\pi) := E\left[(X_T^{\pi,x})^p\right].$$

Procesul (π) poate fi reprezentat ca $\pi_t = \underline{\pi}_t 1_{(t<\tau)} + \overline{\pi}_t 1_{(t\ge\tau)}$. Se observa ca

$$J(x,\pi) = \overline{J}(\tau, X_\tau^{\pi}(1-\underline{\pi}_D(\tau)), \overline{\pi}) \le \overline{J}(\tau, X_\tau^{\pi}(1-\underline{\pi}_D(\tau)), \overline{\pi}^*).$$

In formula scrisa pe mai multe randuri de mai sus am obtinut, conditionand in raport cu $\mathcal{G}_\tau$ (reamintim ca $M_\tau^{\overline{\pi}^*} = 1$),

$$\overline{J}(\tau,\eta,\overline{\pi}^*) = E\left[\eta^p \exp\left(p(G_T^* - G_\tau^*)\right)\right],$$

unde $G_t^* := \int_0^t g_s(\overline{\pi}_s^*)ds$. Asadar, pentru a rezolva complet problema (**??**) este suficient sa determinam functia valoare a problemei de optimizare *pre-default*

$$\underline{V}(x) = \sup_{\underline{\pi}} \overline{J}(\tau, X_\tau^{\underline{\pi}}(1 - \underline{\pi}_D(\tau)), \overline{\pi}^*), \tag{107}$$

unde am notat prin abuz de notatie $\underline{\pi}(t) = (\underline{\pi}_S(t), \underline{\pi}_D(t))$.

Aceasta este o problema de optimizare de portofolii in orizont aleator. In literatura de specialitate nu am gasit (prin cautari in baze de date internationale) multe referinte ce trateaza acest subiect. Mentionam doua dintre acestea: Blanchet-Scalliet, El Karoui, Jeanblanc si Martellini [3] si lucrarea nepublicata El Karoui, Jeanblanc si Huang [10]. In cea de a doua lucrare autorii utilizeaza abordarea prin ecuatiile diferentiale stohastice retrograde, o presupunere cruciala fiind $P(\tau \leq T) < 1$, dar care este in neconcordanta cu contextul in care lucram. Vom adapta in cadrul nostru rezultatele obtinute in primul articol citat, unde autorii studiaza o problema de optimizare a portofoliilor in cazul unei piete financiare definite de mai multe active (nesupuse riscului de credit) modelate cu ajutorul unor miscari Browniene geometrice, avand coeficientii functii deterministe si sub ipoteza existentei densitatii conditionale α_t ca o functie determinista.

Ipoteza existentei densitatii conditionale a lui τ implica

$$\begin{aligned} &E\left[((X_\tau^{\underline{\pi}}(1 - \underline{\pi}_D(\tau)))^p \exp\left(p(G_T^* - G_\tau^*)\right)\right] \\ &\quad = E\left\{E\left[((X_\tau^{\underline{\pi}}(1 - \underline{\pi}_D(\tau)))^p \exp\left(p(G_T^* - G_\tau^*)\right)\middle|\mathcal{F}_T\right]\right\} \\ &\quad = E\int_0^T (X_t^{\underline{\pi}})^p\,(1 - \underline{\pi}_D(t))^p \exp\left(p(G_T^* - G_t^*)\right)\alpha_t dt. \end{aligned}$$

Vom defini acum o versiune dinamica a functiei valoare $\underline{V}(x)$ (care este formulata doar pentru $t = 0$), prin

$$\underline{V}(t, x) = E\int_t^T (X_s^{\underline{\pi}})^p\,(1 - \underline{\pi}_D(s))^p \exp\left(p(G_T^* - G_s^*)\right)\alpha_s ds,$$

unde $(X_s^{\underline{\pi}})$ reprezinta solutia ecuatiei (89) ce pleaca la momentul t din starea x, avand drept control strategia $(\underline{\pi}(s))$ definita pentru $s \in [t, T]$.

$(X^{\underline{\pi}})$ este solutia ecuatiei liniare

$$dX_t = f(t, X_t, u_t)dt + \underline{\sigma}(t, X_t, u_t)dW(t),\ u_t = (\underline{\pi}_S(t), \underline{\pi}_D(t)),$$

cu coeficienti aleatori $f(t,u)$ si $\underline{\sigma}(t,u)$ dati prin

$$f(t,x,u) = x\big[r(t) + u_1(\mu(t) - r(t)) + u_2(\lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - 1) + q(t)\beta(t))\big],$$

si

$$\underline{\sigma}(t,x,u) = x\big(\sigma(t)u_1 + \beta(t)u_2\big).$$

Problema de optimizare admite functionala tip cost

$$F(t,x,u) = x^p(1-u_2)\exp\left(p(G_T^* - G_t^*)\right)\alpha_t$$

(in referinta [3] functionala de cost are o forma mai simpla). Regiunea admisibila pentru variabila de control u este data de $\mathcal{U} = \mathbb{R}\times(-\infty, 1)$. In mod evident F are crestere liniara in raport cu x si u, intrucat $|F(t,x,u)| \le K(1+|x|)$ ($p \in (0,1)$).

Formulam acum o teorema de verificare, care se bazeaza pe un rezultat general (a se vedea referinta [13], Teorema 3.1, Capitolul IV). Toate ipotezele necesare aplicarii rezultatului mentionat sunt verificate.

Teorema 3 *Presupunem ca exista o solutie W de clasa $\mathcal{C}^{1,2}$ a ecuatiei cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacoby-Bellman*

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t}(t,x) + \sup_{\pi\in\mathcal{U}} H(t,x,\pi) &= 0; \\ W(T,x) &= 0. \end{cases} \tag{108}$$

cu Hamiltonianul

$$\begin{aligned} H(t,x,\pi) &:= f(t,x,u)\frac{\partial W}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2(t,x,u)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,x) + F(t,x,u) \\ &= x\big(r(t) + u_1(\mu(t)-r(t)) + u_2(\tilde{\lambda}_t L_t - q(t)\beta(t))\big)\frac{\partial W}{\partial x}(t,x) \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2\big(\sigma(t)u_1 + \beta(t)u_2\big)^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,x) \\ &\quad + x^p(1-u_2L_t)\exp\left(p(G_T^* - G_t^*)\right)\alpha_t. \end{aligned}$$

Then

(a) $W(t,x) \leq \underline{J}(t,x,\pi)$*, pentru orice strategie admisibila* π*.*

(b) Daca

$$\underline{\pi}_S^*(t) =$$

$$\pi_D^*(t) =$$

atunci $\underline{V}(t,x) = W(t,x)$ *si o strategie optimala este data prin* $\underline{\pi}^* = (\underline{\pi}_S^*, \pi_D^*)$*.*

References

BJ [1] T. R. Bielecki, I. Jang, *Portfolio optimization with a defaultable security*, *Asia-Pacific Financial Markets* **13**, 113–127, 2007.

BR [2] Bielecki, T. R., Rutkowski, M. (2002) *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer Finance.

SKJM [3] C. Blanchet-Scaillet, N. El Karoui, M. Jeanblanc, L. Martellini, Optimal investment decisions when time-horizon is uncertain, *Journal of Mathematical Economics* **44**, 1100–1113, 2008.

CV [4] Callegaro, G., Vargiolu, T. (2009) Optimal portfolio for HARA utility functions in a pure jump multidimensional incomplete market, *Int. J. Risk Assessment and Management* **11**, Nos. 1/2, 180–200.

EJJ [5] N. El Karoui, M. Jeanblanc, Y. Jiao, What happens after a default: the conditional density approach, *Stoch. Process. Appl.* **120**, 1011–1032, 2010.

CJZ [6] Callegaro, G., Jeanblanc, M., Zargari, B. (2011) Carthagian enlargement of filtrations, to appear in *ESAIM*.

CFL [7] A. Capponi, J. E. Figueroa-Lopez, Dynamic portfolio optimization with a defaultable security and regime switching, submitted, arXiv:1105.0042v2[q-fin.PM], 40 pages, 2011.

DS [8] D. Duffie, K. Singleton, Modeling term structures of default risky bonds, *Review of Financial Studies* **12**, 687–720, 1999.

EHM [9] El Karoui, N., Hamadene, S., Matoussi, A. (1997) Backward Stochastic Differential Equations and Applications, 1–51.

EKHJ [10] El Karoui, N., Huang, S., Jeanblanc, M. (2004) Random horizon, Draft.

EKQ [11] El Karoui, N., Quenez, M.-C. (1995) Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market, SIAM J. Control Optim. **33**, 29–66.

EJJZ [12] El Karoui, N., Jeanblanc, M., Jiao, Y., Zargari, B. (2010) Conditional default probability and density, 18 pages, preprint.

FS [13] Fleming, W. H., Soner, M. (2006) *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Second Edition, Stochastic Modelling and Applied Probability Series, Springer.

HJ [14] Y. Hou, X. Jin, Optimal investment with default risk, Draft, 2002.

HIM [15] Hu, Y., Imkeller, P., Müller, M. (2004) Utility maximization in incomplete markets, *Annals of Applied Probability* **15**, 1691–1712.

JP [16] Jiao, Y., Pham, H. (2010) Optimal investment with counterparty risk: a default density model approach, *Finance and Stochastics*.

Ka [17] I. Karatzas Optimization problems in the theory of continuous trading, *SIAM J. Control and Optimization* **27**, 1221-1259, 1989.

KS [18] Karatzas, I., Shreve, S. (1999) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2^{nd} edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag.

Kaz [19] Kazamaki, N. (1994) *Continuous exponential martingales and BMO*, *Lecture Notes in Mathematics* **1579**, Springer, Berlin.

KL [20] Kharroubi, I., Lim, T. (2011) Progressive enlargement of filtrations and backward SDEs with jumps, 33 pages, submitted.

Ko [21] Kobylanski, M. (2000) Backward Stochastic Differential Equations and Partial Differential Equations with Quadratic Growth, *Annals of Applied Probability* **28**, 552–602.

KK [22] R. Korn, H. Kraft, A stochastic control approach to portfolio problems with stochastic interest rates, *SIAM J. Control Optim.* **40**, No. 4, 1250–1269, 2001.

KS [23] Kramkov, D., Schachermayer, W. (1999) The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets, *Annals of Applied Probability* **9**, No. 3, 904–950.

Ku [24] Kusuoka, S. (1999) A remark on default risk models, *Adv. Math. Econom.* **1**, 69–82.

LL [25] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, 2008.

LSM [26] Lepeltier, J.-P., San Martin, J. (1997) Backward stochastic differential equations with continuous coefficient, *Statistics & Probability Letters* **32**, 425–430.

LM [27] Lepingle, D., Mémin, J. (1978) Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebeite* **42**, 175–203.

LQ [28] Lim, T., Quenez, M.-C. (2011) Portfolio optimization in a default model under full/partial information, submitted.

L [29] Luenberger, D. G. (1969) *Optimization by Vector Space Methods*, New York Wiley.

M [30] R. C. Merton Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory* **3**, 373-413, 1971.

Ro [31] Rogers, L. C. G. (2001) Duality in constrained optimal investment and consumption problems: a synthesis, University of Cambridge.

Roy [32] Royer, M. (2006) Backward stochastic differential equations with jumps and related non-linear expectations, *Stochastic Processes and their Applications* **116**, 1358–1376.