PROBLEME DE TIPUL INVESTITOR-MANAGER ÎNTR-UN CADRU DINAMIC CU OPŢIUNI DE INVESTIŢII ÎN ACTIVE FINANCIARE

Bogdan IFTIMIE
Academia de Studii Economice Bucureşti
Institutul de Matematică *Simion Stoilow* al Academiei Române

Cuprins

Rezumat

În contextul problemelor principal-agent din cadrul unor instituţii financiare cum ar fi bănci, societăţi/fonduri de investiţii, sau din cadrul societăţilor de asigurări etc, o parte semnificativă din capitalul acestora este investită pe diverse pieţe financiare de către agent (managerul societăţii), de aici decurgând rolul extrem de important pe care îl are determinarea portofoliilor (strategiilor) optimale de investiţii (într-un sens ce va fi precizat). Activele în care se investeşte pot fi supuse:

- *riscului de piaţă* - apar fluctuaţii ale preţurilor activelor, ce sunt posibil generate de anumite conjuncturi ale pieţelor financiare, burselor sau de alte cauze de natură macroeconomică);
- *riscului de contrapartidă* - în cazul în care activele sunt emise de entităţi private ce pot refuza la un moment aleator de timp îndeplinirea obligaţiilor contractuale vis-a-vis de deţinătorii activelor respective.

În cadrul acestei burse postdoctorale am abordat două probleme diferite privind determinarea portofoliilor optimale de investiţie, prin portofoliu optimal inţelegând aici o strategie admisibilă pentru care investitorul îşi maximizează gradul de satisfacţie (măsurat prin intermediul unei funcţii de utilitate) aşteptat al valorii finale al portofoliului de active financiare. Am considerat numai funcţii de utilitate din clasa HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*), şi anume utilitatea de tip putere ($U(x) = \frac{x^p}{p}$, cu parametrul $p \in (0,1)$) şi utilitatea de tip

logaritmic ($U(x) = \ln(x)$), ce se poate obţine din utilitatea putere prin trecere la limita după $p \to 0$. Denumirea de utilitate tip HARA vine, în cazul funcţiei putere, de faptul ca *indicele de aversiune absoluta la risc al lui Pratt*, dat prin $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{p}{x}$, funcţie care este o hiperbolă.

Pieţele financiare considerate sunt caracterizate prin absenţa oportunităţii de arbitraj (nu pot fi realizate câştiguri fără asumarea niciunui risc, o ipoteză viabilă din punct de vedere economic) dar sunt incomplete (pot există mai multe măsuri martingale echivalente), datorită existenţei unui momentul aleator de timp τ ce nu poate fi anticipat, la care poate avea loc un salt neprevăzut în dinamica preţului unui activ tranzacţionat.

Rezultatele originale obţinute se regăsesc în capitolele doi şi trei ale acestei lucrări. Menţionez că marea parte a rezultatelor din capitolul al doilea provin din articolul *Optimization problem under change of regime interest rate* (referinţa [**17**]), având drept coautori pe Monique Jeanblanc, Thomas Lim şi Hai-Nam Nguyen, aceştia fiind afiliaţi Universitatii din Evry. Această lucrare a fost finalizată şi va fi trimisă spre publicare. Conţinutul capitolului al treilea este inspirat din lucrarea *A Portfolio Optimization Problem with a Corporate Bond* (referinţa [**16**]), acceptată spre publicare la revista cotată ISI *Mathematical Reports* .

În capitolul doi am considerat problema determinării portofoliului optimal în cazul unei pieţe financiare generate de:

- *un activ fără risc* (de ex. un depozit bancar la termen) cu rata dobânzii stohastice, modelată cu ajutorul unui proces ce poate suferi un salt (pozitiv sau negativ) la un moment aleator τ;

  şi
- *un activ cu risc* (de ex. un activ tranzacţionat la Bursă) care este supus (numai) riscului de piaţă.

Putem interpreta saltul procesului ce modeleaza rata dobânzii fără risc (ce este asimilată inflaţiei din ţara respectivă) ca un şoc manifestat in cazul unor condiţii macroeconomice exceptionale, de exemplu o puternică recesiune ce afectează economia unei ţări (de exemplu situatia din Grecia in cadrul recesiunii ce a inceput in 2009), condiţii in care are loc retrogradarea ratingului de ţară de către agenţii specializate.

Am lucrat sub aşa numita ipoteza **(H)**, ce reprezintă proprietatea de invarianţă a martingalelor sub *filtraţia de piaţă* (care este de obicei generată de o mişcare Browniana standard ce guvernează preţurile activelor cu risc tranzacţionate) şi *filtraţia lărgită* (cea mai mică filtraţie care conţine filtraţia de piaţă şi in raport cu care τ devine un timp de stopare). De asemenea am presupus existenţa intensităţii stohastice a timpului aleator τ. În cazul funcţiei de utilitate logaritmice am rezolvat in mod explicit problema utilizând o metodă directă. Pentru funcţii de utilitate putere am rezolvat problema prin două metode: abordarea duală şi o abordare directă.

În ceea ce priveşte abordarea duală, am scris problema duală utilizând două metode diferite: o metodă clasică de formulare a problemei duale scriind funcţionala ajutătoare de tip Lagrangean (conform cu referinţa clasică Luenberger [**31**]), respectiv prin aplicarea unui rezultat abstract de dualitate (conform cu referinţa Rogers [**34**]). În scopul caracterizării tuturor măsurilor de probabilitate martingal echivalente (necesar scrierii corespunzătoare a problemei duale) am utilizat un rezultat de reprezentare pentru martingalele discontinue (adaptate în raport cu filtraţia lărgită) datorat lui Kusuoka (a se vedea referinţa Kusuoka [**26**]). Am determinat apoi expresia funcţiei valoare şi a controalelor optimale pentru problema duală utilizând o metodă ce se bazează pe principiul programării dinamice in pieţe incomplete, metodă iniţiată de El Karoui şi Quenez [**11**], o serie de rezultate standard de calcul stohastic (cum ar fi Lema lui Itô pentru procese continue, respectiv cu salturi), rezultate standard sau mai puţin standard din teoria ecuaţiilor stohastice diferentiale retrograde (EDSR) Browniene sau cu salturi, rezultate privind integrabilitatea uniformă a procesului exponenţialei stohastice in cazul proceselor cu salturi. Am stabilit apoi legătura dintre funcţiile valoare asociate problemelor primală, respectiv duală.

Prin a doua metodă am rezolvat direct problema primală inspirandu-ne dintr-un articol al autorilor Hu, Imkeller, Müller (referinţa [**15**]), utilizând argumente similare cu cele care ne-au condus la rezolvarea problemei duale. In plus, am obţinut şi o formula explicită pentru strategia optimală.

Capitolul trei este dedicat unei probleme de optimizare de portofolii in cadrul unei pieţe financiare generate de un activ fără risc, un activ cu risc supus riscului de piaţă şi un activ cu risc care este in plus supus şi riscului de contrapartidă. Am lucrat de asemenea sub ipoteza **(H)** şi am presupus in plus existenţa densităţii conditionale pentru momentul aleator τ. Pentru activul supus riscului de contrapartidă am presupus ca in caz de *default* (nerespectare a obligaţiilor contractuale vis-a-vis de investitor a firmei ce a emis activul respectiv), investitorul primeşte o compensaţie ce este dată de un anumit procent din valoarea de piaţă a activului chiar înainte de producerea defaultului (*Recovery of Market Value RMV*), iar după momentul de default activul nu mai este tranzacţionat.

Am obţinut o formulă pentru dinamica valorii portofoliului. Am rezolvat direct această problema in cazul utilităţii de tip logaritmic in urma efectuării unor calcule directe. Am descris apoi o metodă generală de rezolvare in cazul utilitatilor din clasa HARA in care ne-am inspirat din articolul Jiao, Pham [**18**], articol in care problema de optimizare originală este descompusă in două subprobleme, una înainte de default şi cealaltă după default, ambele probleme fiind formulate in pieţe complete (care poseda proprietatea de existenţa a unei *unice măsuri martingale* *echivalente*) şi pentru rezolvarea carora se pot aplica metode martingale clasice sau principiul programării dinamice pentru piete complete. Am caracterizat soluţia problemei post-default cu ajutorul metodei martingale duale. In plus, in cazul unei funcţii de utilitate de tip putere, am presupus ca defaultul apare cu probabilitatea 1 pana la orizontul T al procesului de investiţie şi coeficienţii modelului şi densitatea condiţională a momentului de default τ sunt funcţii deterministe. având forma explicită a procesului valorii portofoliului, am rezolvat mai întâi problema post-default ca o problema de control optimal cu timp şi stare iniţiale aleatoare, iar apoi am rezolvat separat problema pre-default, pe care am formulat-o ca o problema de optimizare in orizont aleator şi pentru care am utilizat metode specifice de control stohastic optimal. Pentru probleme in orizont aleator am găsit in literatura de specialitate un număr redus de rezultate, dintre care mentionam referintele Blanchet-Scalliet, El Karoui, Jeanblanc şi Martellini [**3**] şi lucrarea nepublicata El Karoui, Jeanblanc şi Huang [**9**]. Am formulat un rezultat de verificare (bazat pe un rezultat clasic dat de Teorema 3.1, referinţa Fleming şi Soner [**13**]), care constituie un principiu de bază in cadrul programării dinamice, respectiv definirea corespunzatoare a unei *ecuaţii diferentiale cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman* ce este satisfăcută, in sens tare, de funcţia valoare a problemei de optimizare (atunci când aceasta posedă suficiente proprietati de regularitate). Am arătat ca funcţia valoare satisface ecuaţia HJB şi am determinat şi strategiile pre-default optimale, urmând un procedeu de separare a variabilelor in cadrul funcţiei valoare.

Cuvinte cheie: *Activ financiar, activ supus riscului de contrapartidă, invarianţă martingală, maximizarea utilităţii, utilitate tip HARA, problema duală, ecuaţii diferentiale stohastice retrograde (EDSR), dualitate convexă, control stohastic.*

In the framework of principal-agent theory including financial institutions, such as banks, investments societies/fonds, insurance companies, where an important proportion of the capital is dedicated to investment on various financial markets, and this is accomplished by the manager of the society. It can be thus noticed the huge interest in deriving explicit formulas for the optimal investment portfolios, in a sense we shall make precise. The assets which are taken into account for investment can be submitted to:

- *market risk* - when prices of assets fluctuate due to serious perturbations of financial markets, stock exchange or even from macroeconomic reasons;
- *counterparty risk* - in the case of financial assets which are issued by private entities which can decide, at some random time, to stop fulfilling their legal commitments to the holders of the assets (in this case we say that default occured).

The work I developped under this postdoctoral position consists in the treatment of two different financial markets, and more exactly in deriving the optimal financial portfolios, in the sense of maximizing the expected utility of the final wealth of a selffinanced portfolio (a utility function measures the degree of satisfaction of an investor/consumer). We considered utility functions belonging to the so-called HARA class (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*), which includes the power utility function $U(x) = \frac{x^p}{p}$, with $p \in (0,1)$, and the logarithmic utility function $U(x) = \ln(x)$ (which can be obtained by passing to the limit as $p \to 0$ from power utility $\frac{x^p-1}{x}$). The term HARA utility comes from the fact that, in the case of power utilies, *Pratt's absolute risk aversion index*, given by $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{p}{x}$, is an hyperbolic function. The financial markets under consideration do not allow arbitrage (which is a viable assumption from an economic point of vue) but are incomplete, due to the existence of the random time at which an unpredicted jump (negative or positive) in the dynamics of the price of some traded asset may arise.

The original results I obtained make the object of chapters two and three. I want to mention that most of the results from the second chapter have their origin in the paper *Optimization problem under change of regime interest rate* (reference [**17**]), having as coauthors Monique Jeanblanc, Thomas Lim and Hai-Nam Nguyen, all from the University of Evry. This paper is now in a final form and will be submitted. The third chapter is inspired from the paper *A Portfolio Optimization Problem with a Corporate Bond* (reference [**16**]), which was accepted for publication at the ISI revue *Mathematical Reports*.

In the second chapter of this work we constructed the optimal financial portfolio in the case of a financial market consisting in:

- *a riskless asset* (for instance a bank/savings account) with the dynamics of the short interest rate modelled by a process which may have a jump at some unpredicted random time (called default time) τ;
- *a risky asset* (for instance an asset which can be traded at some stock exchange) and which is submitted to market risk only.

The jump appearing in the short interest rate process may be interpreţed (as the short interest rate is usually approximatively equal to the inflation rate) as some unpredicted evolution in the economy of some country, possibly due to some serious macroeconomic conditions, for instance a severe recession (as in the case of Greece), which may lead for instance to downgrading of the country rating by specialized agencies.

We assumed in force the so called assumption **(H)** (the immersion hypothesis), which is a martingale invariance property under the market filtration (which is usually generated by a Brownian motion which drives the stock prices of the traded assets) and the enlarged filtration (which is defined as the smallest filtration which contains the market filtration and under which the default time becomes a stopping time). We assumed the existence of the stochastic intensity of the default time τ. In the case of logarithmic utility function the problem was solved by some straightforward computations. In the case of power utility function we used two different approaches: first by solving the related dual problem and secondly by a direct approach.

In what concerns the first approach, we wrote the dual problem using two different methods: a classical method for the formulation of the dual problem via a functional Lagrangean (as in Luenberger [**31**]), and by applying an abstract duality result (as in Rogers [**34**]). In order to give a proper representation to the set of all martingale measures, we applied a representation theorem for discontinuous martingales (which are adapted to the enlarged filtration), as in the reference Kusuoka ([**26**]). We next derived explicit formulas for the value function of the optimization problem and an optimal strategy using a method which relies on the dynamic programming principle in incomplete markets initiated by El Karoui and Quenez in the paper [**11**], some standard results of stochastic calculus (Itô's Lemma for continuous processes and for jump processes), some more or less standard results concerning backward stochastic differential equations (BSDEs for short) of Brownian type or with jumps, results which ensure uniform integrability of (local) martingales given by the stochastic exponential process. By a duality result relating the value functions for the primal and dual problem we derived the formula of the value function for the primal problem. By the direct approach we solved directly the primal problem by a similar argument as in Hu, Imkeller and

Müller (see the reference [**15**]). By this approach we obtained an explicit formula for the optimal strategy.

The third chapter is dedicated to a portfolio optimization problem in a financial market generated by a riskless asset, an asset submitted (only) to market risk and a third asset submitted to both market and counterparty risk. We assumed the **(H)** hypothesis and also the existence of the conditional density of the random time τ. We also assumed that in case of occurence of the default, the holder of the defaultable asset will receive a compensation given by a fraction of the value of the asset just before the default occured, called the *fractional recovery of the market value* (RMV). After the default time the asset is not traded anymore.

We obtained an explicit formula for the dynamics of the wealth process. This problem was solved explicitely in the case of logarithmic utility by performing some straightforward computations. In the case of HARA utility functions we described a general method of decomposition of the original optimization problem into two subproblems, one stated before default and a second one stated after default, both problems being formulated in complete markets (which have the property of existence of an unique equivalent martingale measure) and for which classical martingale methods of resoluţion may be applied. This method was widely inspired by a paper of Jiao and Pham (see the reference [**18**]). In the case of power utility, we characterized the soluţion of the post-default problem using martingale duality. For the same utility function, we assumed that the coefficients and the conditional density of default are deterministic, and also that the default will occur *a.s.* till maturity T. We solved first the post-default optimization problem with random iniţial conditions (which is an optimization problem in random horizon) and afterwards we treated the pre-default problem by using a stochastic control approach. We found only a few references in the related literature on investment problems in random horizon, from which we mention the papers Blanchet-Scalliet, El Karoui, Jeanblanc şi Martellini [**3**] and the unpublished draft El Karoui, Jeanblanc şi Huang [**9**].

We formulated a verification result (based on a classical result given by Theorem 3.1 of the citation Fleming and Soner [**13**]), which is a main tool of the dynamic programming principle, by defining properly a *nonlinear partial differential equation of Hamilton-Jacobi-Bellman type* which is typically satisfied by the value function. We showed that the value function has indeed the required smoothness properties and we also determined the optimal pre-default strategies via procedure of separation of the variables into the formula of the value function.

Keywords: *Financial asset, defaultable asset, martingale invariance, utility maximization, HARA utility, dual problem, Backward stochastic differential equations (BSDEs), convex duality, stochastic control.*

CAPITOLUL 1

Introducere

În cadrul problemelor de tip investitor-manager, managerul unei companii private are printre altele şi sarcina de a efectua plasamente optime pe diverse pieţe financiare utilizând capitalul firmei (care este format în principal de sumele vărsate de acţionari). Astfel, în cadrul investiţiilor pe piaţă financiară, un rol important îl joacă riscul asociat acestora, atât riscul de piaţă dar şi riscul de credit, ce este asociat investiţiei în activele emise de societăţi private, societăţi ce pot refuza la un moment dat îndeplinirea obligaţiilor asumate prin contract vis-a-vis de investitori, sau pot intra în incapacitate de plata (sau chiar faliment). Pe o piaţă financiară se întâlnesc în general mai multe active supuse investiţiilor, dintre care mentionam:

- activele fără risc - reprezentând activele în care riscul asociat este relativ scăzut, a căror randament aşteptat este aproximativ egal cu rata inflaţiei. Ne referim aici în principal la depozitele bancare la termen;
- activele cu risc - reprezentând activele a căror randament aşteptat este mai mare decât cea a activelor fără risc, dar care şi comportă un risc sporit. Ne referim aici la active tranzacţionate pe diverse pieţe reglementate, cum ar fi de exemplu la Burse.

În cadrul activelor cu risc întâlnim şi active supuse riscului de credit, active care sunt în general emise de societăţi private, pe care le mai numim în cadrul acestei lucrari şi active ce pot da 'default'.

Scopul principal al acestei lucrări postdoctorale este acela de a găsi o strategie optimală în cadrul unui proces de investiţii, precum şi o formula explicită pentru portofoliul optim. Prin strategie optimală se va inţelege acea strategie prin care se va optimiza satisfacţia investitorului privind valorea finală a portofoliului său de active, gradul de satisfacţie fiind măsurat prin *valoarea medie a utilitaţii asociate valorii finale a portofoliului*. Funcţiile de utilitate la care ne vom referi se înscriu în clasa HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*), fiind de tip putere ($U(x) = \frac{x^p}{p}$, cu parametrul $p \in (0,1)$) şi utilitatea de tip logaritmic ($U(x) = \ln(x)$), ce se poate obţine din utilitatea putere prin trecere la limita după $p \to 0$. Denumirea de utilitate tip HARA vine, in cazul funcţiei putere, de faptul ca *indicele de aversiune absoluta la risc al lui Pratt*, dat prin $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{p}{x}$, funcţie care este o hiperbolă.

Problemele de optimizare de portofolii constituie un subiect ce a suscitat şi suscită un interes crescând, începând cu anul 1971, an în care Robert Merton a publicat o lucrare de pionierat în domeniu (a se vedea referinţa [**32**]). Abordarea lui Merton s-a bazat pe elemente de control optimal stohastic, printre care principiul programării dinamice, ce constă în rezolvarea unei ecuaţii cu derivate parţiale neliniare (numită ecuaţia Hamilton-Jacobi-Bellman) ce este satisfăcută de funcţia valoare asociată problemei de optimizare. O altă lucrare ce a facut un larg ecou a fost articolul scris de Ioannis Karatzas în anul 1989 (referinţa [**19**]), în care sunt tratate o serie de probleme de optimizare a investiţiilor/consumului intermediar pentru un investitor 'mic' (small investor) (în sensul că acesta nu poate modifica preţurile, întrucât achiziţionează un volum nesemnificativ din activele supuse tranzacţionării). Metodele utilizate sunt atât de control optimal stohastic dar şi de dualitate convexă (sau metode martingale). Prin cea de a două metodă problema de optimizare originală este transformata într-o problema de optimizare statică cu o restricţie bugetară, şi care se rezolva utilizând metodă multiplicatorilor lui Lagrange, definind in mod adevat o funcţională ajutătoare de tip Lagrangean, valoarea portofoliului optimal fiind obţinuta in funcţie de conjugata convexă a funcţiei de utilitate, ţinând cont de faptul ca procesul dat de valoarea portofoliului la orice moment de timp este un martingal in raport cu orice probabilitate echivalentă neutra la risc. Lucrarile menţionate mai sus se refera la o piaţă financiară completă (in care nu există posibilitatea de arbitraj) formată din active fără risc şi active cu risc nesupuse riscului de credit, in care cursurile activelor sunt date prin procese cu traiectorii continue (mişcăre Browniene geometrice) iar filtraţia (i.e. informaţia la care au acces investitorii) este dată de filtraţia naturala a unei mişcăre Browniene standard (posibil multidimensionale).

Korn şi Kraft (2001) studiaza o problema de optimizare de portofolii într-o piaţă financiară cu un activ fără risc pentru care rata dobânzii este stohastică (urmeaza unul din modelele clasice Vasicek sau Ho-Lee) şi un activ cu risc fără default, metodele utilizate fiind o varianta a principiului programării dinamice (obţinerea ecuaţiei neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman). Teoremele standard de verificare nu pot fi aplicate in acest context datorită naturii stohastice a ratei dobânzii.

Blanchet-Scalliet, El Karoui, Jeanblanc şi Martellini [**3**] trateaza o problema de optimizare a investiţiilor in situatia in care orizontul de timp pe care se desfasoara investiţia este *aleator*. Motivatia pentru acest studiu o reprezintă posibile situatii neprevazute in care investitorul are nevoie urgenta de capital (doreste să achizitioneze o casa, are de achitat a datorie etc) şi este nevoit să-şi lichideze portofoliul financiar in mod neasteptat. Metodologia utilizata conţine atât elemente specifice de control stohastic optimal (respectiv obţinerea ecuaţiei cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman ce este satisfăcută, sub anumite condiţii de funcţia valoare asociată problemei de optimizare), cat şi elemente de dualitate martingală. O alta referinţa in probleme de optimizare de portofolii in orizont aleator o constituie lucrarea nepublicata El Karoui, Jeanblanc şi Huang [**9**], in care autorii utilizează tehnici specifice ecuaţiilor diferentiale stohastice retrograde, o presupunere cruciala fiind $P(\tau \leq T) < 1$.

Kramkov şi Schachermayer [**25**] au obţinut rezultate abstracte privind existenţa soluţiei unei probleme de optimizare a portofoliilor financiare într-o piaţă financiară incompleta (dar lipsita de oportunităţi de arbitraj) in care preţurile activelor sunt reprezentate prin semimartingale (scrise sub forma generală), in special pentru funcţiile de utilitate din clasa HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion). Ca metodologie utilizata aceştia au rezolvat problema duală asociată şi au arătat ca şi funcţiile valoare al celor două probleme de optimizare se afla într-o relatie de (bi)dualitate. Nu au fost însă obţinute formule explicite pentru strategiile optimale.

Bielecki şi Jang [**1**], Capponi şi Figueroa Lopez [**6**] au studiat unele probleme de optimizare in care coeficienţii modelelor sunt funcţii deterministe, motiv pentru care au putut utiliza cu succes instrumente clasice ale principiului programării dinamice şi ecuaţiilor cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman.

Hu, Imkeller şi Müller [**15**] studiaza probleme de optimizare a portofoliilor într-o piaţă incompleta definită de o serie de active supuse riscului de piaţă, modelate prin procese adaptate unei filtratii Browniene, impunand restrictii asupra strategiilor admisibile, şi anume mulţimea strategiilor admisibile este considerata o mulţime inchisa (şi nu convexă). Sunt obţinute rezultate pentru toate cele trei tipuri importante de funcţii de utilitate, respectiv utilitate exponenţială, utilitate funcţie putere şi utilitate logaritmică. Metodologia utilizata este dată de principiul programării dinamice pentru pieţe incomplete ce conduce la definirea unei familii de procese stohastice, indexata după mulţimea tuturor strategiilor admisibile, procese ce sunt *supermartingale* pentru orice strategie admisibilă, şi pentru o anumita strategie (ce se va dovedi strategia optimală) procesul respectiv va fi *martingal*. Autorii mai utilizează rezultate de existenţa pentru ecuaţii doferentiale stohastice retrograde (EDSR) Browniene şi rezultate din teoria martingalelor uniform integrabile de tipul BMO. Morlais [**33**] studiaza aceeasi problema cu restrictii (mulţimea strategiilor admisibile este presupusa compacta) in cazul unei pieţe financiare incomplete cu active financiare a caror dinamică sunt date prin procese cu salturi. O parte din rezultatele continute in capitolul al doilea al acestei lucrari se bazează pe metodologia utilizata de Hu, Imkeller şi Müller. Autorii Rouge şi El Karoui [**12**] studiaza acelasi tip de problema in cazul in care mulţimea strategiilor admisibile este un con convex, in cazul utilităţii exponentiale, utilizând tehnici specifice EDSR.

Lim şi Quenez [**30**] trateaza de asemenea problema determinării portofoliilor optimale, dar şi cea a determinării preţului de indiferenta a unei optiuni, într-o piaţă financiară generată de un activ cu risc şi un activ supus riscului de contrapartidă (procesul preţului activului cu risc putand avea un salt la un moment aleator de timp τ ce nu poate fi anticipat), pentru toate cele trei tipuri importante de funcţii de utilitate, in cazul in care nu sunt impuse restrictii asupra strategiilor admisibile sau in cazul in care mulţimea strategiilor admisibile este o mulţime compacta. In cazul cu restrictii funcţia valoare este caracterizata ca subsoluţia maximala a unei EDSR nonstandard, sau ca limita a unui sir monoton de soluţii asociat unei familii de EDSR Lipschitziene.

Din literatura privind teoria generală a EDSR cu aplicaţii in finante mentionam aici referintele El Karoui, Hamadene şi Matoussi [**8**] pentru EDSR Browniene, şi articolele Royer

[**35**], respectiv Kharroubi şi Lim [**22**] pentru rezultate privind existenţa şi unicitatea soluţiilor EDSR cu salturi.

O serie de autori utilizează in cadrul problemelor de optimizare de portofolii in pieţe financiare incomplete ipoteza existenţei densităţii conditionale (in raport cu filtraţia pieţii, care este generată de o mişcare Browniana ce guvernează preţurile activelor tranzacţionate) asociate momentului de default. Această ipoteză a fost introdusă de Jacod (1983) iar recente contribuţii in dezvoltarea acestei teorii au fost aduse de El Karoui, Jeanblanc şi Jiao [**5**]. In acest context, Jiao şi Pham [**18**] studiaza problema de optimizare a portofoliilor într-o piaţă incompleta generată de un activ fără risc şi un activ cu posibil default. utilizând formula de descompunere (canonică) pentru procese predictibile şi adaptate (in raport cu filtraţia lărgită), respectiv progresiv măsurabile formulate de Jeulin (1980), problema de optimizare originală a fost descompusă in două subprobleme: problema de optimizare *pre-default*, respectiv cea *post-default*. Ambele probleme sunt formulate in pieţe complete pentru care se pot aplica cele două tipuri de metode standard: metodă dualitatii martingale (convexe), respectiv metodă programării dinamice. Ipoteza existenţei densităţii conditionale este cruciala in studiul problemei post-default.

In capitolul al doilea am considerat problema maximizarii utilităţii asteptate a unui investitor *mic (small)* (ce nu poate influenta preţurile activelor), in raport cu valoarea finală a unui portofoliu financiar, într-o piaţă financiară generată de un activ fără risc (de exemplu un depozit la termen) pentru care rata dobânzii fără risc (ce este de obicei asimilată ratei inflaţiei) este stohastică şi poate avea un salt la un moment aleator de timp τ neanticipat (posibil datorită unei probleme macroeconomice grave ale economiei unei tari), şi un activ cu risc (supus riscului de piaţă) modelat ca un proces de difuzie guvernat de o mişcare Browniana standard unidimensionala $B(t)$. Vom consideră numai funcţii de utilitate ce satisfac conditiile uzuale de tip Inada şi pentru care elasticitatea asimptotică $AE(U)$ este strict subunitară. Mai precis vom consideră funcţii de utilitate din clasa HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion), clasa din care fac parte utilitatea logaritmică ($U(x) = \ln x$) şi utilitatea putere ($U(x) = \frac{x^p}{p}$, cu $0 < p < 1$).

filtraţia pieţii (sau filtraţia de referinţa) este dată de filtraţia naturala a miscarii Browniene $B(t)$, $\mathscr{F}_t := \mathscr{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t))$, pentru $t \geq 0$. Presupunem ca momentul aleator τ nu este un timp de stopare al filtratiei $\mathscr{F}$, şi definim filtraţia lărgită $\mathscr{G}$ ca cea mai mică filtraţie care conţine filtraţia pieţii $\mathscr{F}$ şi in raport cu care τ devine un timp de stopare.

Am presupus ca are loc aşa numită ipoteza **(H)** (sau ipoteza de imersie), care este o ipoteza de invarianţă martingală intre filtratiile $\mathscr{F}$ şi $\mathscr{G}$. Această înseamnă ca orice $\mathscr{F}$-martingal este şi un $\mathscr{G}$-martingal.

Întrucât lucram sub ipoteza unei rate a dobânzii fără risc r stohastice, rezultate clasice de existenţa şi unicitate a strategiei optimale, cum ar fi de exemplu cele obţinute de Kramkov şi Schachermayer [**25**], in cazul in care $r = 0$, nu pot fi aplicate in contextul nostru. Problema de optimizare este rezolvata prin două metode diferite:

- metodă de rezolvare cu ajutorul problemei duale - prin care scriem in mod corespunzator problema duală utilizând două abordari diferite: o metodă clasică de formulare a problemei duale (conform cu referinţa clasică Luenberger [**31**]), respectiv prin aplicarea unui rezultat abstract de dualitate (conform cu referinţa Rogers [**34**]). Am utilizat apoi un rezultat de reprezentare pentru martingalele discontinue (adaptate in raport cu filtraţia lărgită $\mathscr{G}$) datorat lui Kusuoka (a se vedea referinţa Kusuoka [**26**]), in scopul caracterizarii multimii tuturor măsurilor martingale echivalente. In continuare

am construit, utilizând principiul programării dinamice pentru pieţe incomplete initiat de El Karoui şi Quenez in referinţa [**11**], o familie de procese (indexata după mulţimea strategiilor admisibile), a.i. fiecare proces fiind un *submartingal* pentru o strategie admisibilă oarecare şi este un *martingal* pentru strategia optimală.
- metodă directă - prin care utilizam o metodă asemanatoare cu cea utilizata de Hu, Imkeler şi Müller in articolul [**15**]. Prin această metodă se găseşte o formula explicită pentru strategia optimală.

In cadrul ambelor abordari am obţinut expresia funcţiei valoare ca şi soluţia unei ecuaţii diferentiale stohastice retrograde cu salturi, a carei existenţa a fost demonstrata cu ajutorul unui rezultat recent datorat autorilor Kharroubi şi Lim [**22**].

Mentionez ca marea parte a rezultatelor din capitolul al doilea provin din articolul *Optimization problem under change of regime interest rate* (referinţa [**17**]), având drept coautori pe Monique Jeanblanc, Thomas Lim şi Hai-Nam Nguyen.

Capitolul trei este dedicat unei probleme de optimizare de portofolii in cadrul unei pieţe financiare generate de un activ fără risc, un activ cu risc supus riscului de piaţă şi un activ cu risc care este in plus supus şi riscului de contrapartidă. Am lucrat de asemenea sub ipoteza **(H)** şi am presupus in plus existenţa densităţii conditionale pentru momentul aleator τ. Pentru activul supus riscului de contrapartidă am presupus ca in caz de *default* (nerespectare a obligaţiilor contractuale vis-a-vis de investitor a firmei ce a emis activul respectiv), investitorul primeşte o compensaţie ce este dată de un anumit procent din valoarea de piaţă a activului chiar înainte de producerea defaultului (*Recovery of Market Value RMV*), iar după default activul nu mai este tranzacţionat.

Am obţinut o formula explicită pentru dinamica valorii portofoliului. Am rezolvat direct această problema in cazul utilităţii de tip logaritmic in urma efectuării unor calcule directe. Am descris apoi o metodă generală de rezolvare in cazul utilitatilor din clasa HARA conform cu articolul Jiao şi Pham [**18**], problema de optimizare originală este descompusă in două subprobleme, una înainte de default şi cealaltă după default, ambele probleme fiind formulate in pieţe complete (care poseda proprietatea de existenţa a unei *unice măsuri martingale echivalente*) şi pentru rezolvarea carora se pot aplica metode martingale clasice. Am caracterizat soluţia problemei post-default cu ajutorul metodei martingale duale. In plus, in cazul unei funcţii de utilitate de tip putere, am presupus ca defaultul apare cu probabilitatea 1 pana la orizontul T al procesului de investiţie şi coeficienţii modelului sunt funcţii deterministe. având forma explicită a procesului valorii portofoliului, am rezolvat mai întâi problema post-default ca o problema de control optimal cu timp şi stare iniţiale aleatoare, iar apoi am rezolvat separat problema pre-default, care este o problema de optimizare in orizont aleator şi pe care am formulat-o ca o problema de control stohastic optimal. Am enunţat şi demonstrat un rezultat de verificare (bazat pe un rezultat clasic dat de Teorema 3.1, referinţa Fleming şi Soner [**13**]), care constituie un principiu de bază in cadrul programării dinamice, respectiv definirea corespunzatoare a unei *ecuaţii diferentiale cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman* ce este satisfăcută, in sens clasic, de funcţia valoare a problemei de optimizare (atunci când această poseda suficiente proprietati de regularitate). Am arătat ca funcţia valoare satisface ecuaţia HJB şi am dat formule explicite pentru funcţia valoare şi strategiile pre-default optimale. Conţinutul capitolului al treilea este inspirat din lucrarea *A Portfolio Optimization Problem with a Corporate Bond* (referinţa [**17**]), acceptata spre publicare la revista cotată ISI *Mathematical Reports*.

Metodologia utilizata a constat in găsirea rezultatelor semnificative obţinute de alti autori in raport cu tema propusa, identificarea metodelor şi tehnicilor specifice cercetarii şi selectarea şi aplicarea in obţinerea de noi rezultate. Am utilizat notiuni şi rezultate clasice sau mai puţin standard consistand in

- elemente fundamentale de teoria calculului stohastic, dintre care enumeram: teoreme de reprezentare pentru martingale in raport cu o filtraţie Browniena (respectiv filtraţia lărgită), formulele lui Itô de calcul integral pentru funcţionale de procese continue (respectiv de procese cu salturi);
- procedeul de largire al filtratiei (*enlargement of filtration*) - se refera la filtraţia (notata $\mathscr{G}$) obţinuta cu ajutorul unei aşa numite filtratii de referinţa $\mathscr{F}$ (care este de obicei filtraţia naturala a unei mişcăre Browniene) imbogatita cu filtraţia generată de o variabila aleatoare pozitivă τ (care nu este un timp de stopare in raport cu filtraţia de referinţa). filtraţia lărgită reprezintă cea mai mică filtraţie in raport cu care τ devine un timp de stopare. Această construcţie se aplica atunci când pe o piaţă financiară avem un activ (respectiv o serie de active) care are un salt neasteptat (care nu poate fi anticipat) la un moment aleator τ in dinamica procesului preţului (preţurilor).

  Am lucrat sub ipoteza de imersie (numită şi ipoteza **H**) sau ipoteza de invarianţă martingală, care presupune ca orice $\mathscr{F}$-martingal rămâne un martingal şi in raport cu filtraţia lărgită $\mathscr{G}$. Am lucrat de asemenea şi sub ipoteza existenţei intensităţii lui τ, i.e. am presupus ca procesul (H_t) ce indica aparitia momentului τ, definit prin $H_t := 1_{(\tau \leq t)}$, admite in filtraţia $\mathscr{G}$ un compensator absolut continuu in raport cu măsura Lebesgue. Am utilizat şi formulele standard de descompunere (înainte şi după momentul τ) a unui proces $\mathcal{G}$-adaptat, respectiv $\mathcal{G}$-predictibil.

- notiuni de teoria martingalelor uniform integrabile de tipul *BMO* (*Bounded Martingale Oscillation*), pe care le-am aplicat in cazul martingalelor date de procesul exponenţialei stohastice al unui martingal (posibil discontinuu);
- rezultate clasice şi recente din teoria ecuaţiilor diferentiale stohastice retrograde (EDSR) Browniene şi cu salturi. Un rezultat fundamental pentru studiul nostru il reprezintă o teorema de existenţa a soluţiei pentru o EDSR cu salturi, obţinuta de Kharroubi şi Lim (conform referinţei [**22**]), care descompun ecuaţia cu salturi in mai multe familii de EDSR Browniene pentru care se pot aplica rezultate clasice de existenţa a soluţiei. Rezultatul lor are loc intr-un cadru mai general, atunci când se consideră un numar finit de momente de salt $\tau_1, \ldots, \tau_n$, carora li se pot eventual asocia şi marimile salturilor $\Delta X(\tau_i) := X(\tau_i) - X(\tau_i -)$.
- elemente de dualitate martingală - se bazează pe definirea conjugatei convexe a funcţiei de utilitate (care este concavă) ;
- elemente de control optimal stohastic - principiul programării dinamice: definirea corespunzatoare a unei ecuaţii cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman şi formularea unui rezultat de verificare ce leaga funcţia valoare a problemei de optimizare de soluţia ecuaţiei HJM şi prin care se poate determina şi strategia optimală.

considerăm ca rezultatele obţinute in cadrul acestei burse postdoctorale, respectiv obţinerea de formule explicite a strategiilor optimale in cadrul portofoliilor de investiţii financiare, vor avea un impact potential in raport cu obiectivele transversale *Dezvoltare durabila* şi *Societate Informationala.* Astfel, o activitate cat mai eficienta a societatilor in cadrul carora o componenta semnificativa a activitatii este bazata pe partea de investiţii, şi putem enumera aici bancile (private sau de stat), fondurile de investiţii, societatile de asigurari etc poate duce la o dezvoltare durabila in condiţii cat mai eficiente. Prin activitate cat mai eficienta intelegem şi alocarea optima a unei părţi a resurselor financiare ale societatilor, in cadrul portofoliilor financiare de investiţii. Societatile la care ne referim au in general portofolii de investiţie echilibrate, in cadrul carora intra:

- active fără risc (gen depozite la termen la banci cu rating ridicat, obligaţiuni guvernamentale), cu un randament scazut (corelat in general cu rata inflaţiei) dar garantat;
- active cu risc, care pot fi supuse riscului de piaţă (de exemplu activele tranzacţionate pe pieţe bursiere, al caror preţuri sunt afectate, ca şi preţurile celorlalte active tranzacţionate, in cazul unor evenimente negative ce se rasfrang asupra pieţei bursiere, evenimente cum ar fi o stare de recesiune generală, retrogradarea ratingului unei tari sau in cazul apariţiei unor fenomene naturale neprevazute ce pot antrena consecinte de ordin economic deosebit de grave), cu un randament ce poate fi ridicat dar şi in conditiile unui risc ridicat;
- active cu risc care sunt supuse atât riscului de piaţă, cat şi riscului de contrapartidă (existenţa riscului ca la un moment aleator de timp firma emitatoare a activului să refuze indeplinirea obligaţiilor contractuale vis-a-vis de investitor).

considerăm astfel ca cercetarea efectuata in cadrul acestei burse postdoctorale, ce a condus la rezultatele prezentate in capitolele doi şi trei privind strategiile optime de investiţie in cadrul problemelor de maximizare a utilităţii valorii finale a portofoliilor financiare, in pieţe financiare generate de active fără risc, active supuse riscului de piaţă şi/sau active supuse atât riscului de piaţă cat şi riscului de credit (sau active care sufera un salt la un moment aleator de timp ce nu poate fi anticipat) se vor dovedi utile managerilor societatilor de investiţii, ce pot compara portofoliile de investiţii pe care le-au urmat/le urmeaza cu strategiile optimale propuse in cadrul acestui studiu.

Am urmarit obţinerea de rezultate noi şi originale in cadrul problemelor de tipul principal-agent, cu accentul pus pe partea investiţionala a activitatii desfasurate de manager. Rezultatele obţinute, materializate in elaborarea a două articole ştiinţifice, ne indreptatesc să afirmam ca obiectivele propuse au fost indeplinite.

CAPITOLUL 2

O problemă de optimizare de portofolii într-o piaţă financiară incompletă generată de o rată stohastică discontinuă a dobânzii

In cadrul acestui capitol studiem problema gasirii portofoliului optimal şi a funcţiei valoare asociată problemei de optimizare de portofolii ce constă in maximizarea utilităţii asteptate a valorii finale a unui portofoliu financiar pentru un investitor ce urmeaza o strategie autofinanţata, in cadrul unei pieţe financiare *incomplete* generate de un activ fără risc dar cu o rata a dobânzii *r stohastică şi care poate avea un salt la un moment aleator de timp* τ, şi un activ cu risc care se modeleaza ca un proces adaptat unei filtratii Browniene.

2.1. Formularea cadrului şi a ipotezelor de lucru

Se consideră un camp de probabilitate $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{F}_t), P)$, unde filtraţia $\mathscr{F}$ este dată de versiunea continuă la dreapta a filtratiei naturale a unei mişcăre Browniene unidimensionale standard (B_t), imbogatita cu toate multimile P-neglijabile , i.e. $\mathscr{F}_t := \mathscr{F}^B_{t+} \wedge \mathscr{N}$, unde am notat $\mathscr{F}^B_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ pentru $t \geq 0$ iar $\mathscr{N}$ reprezintă mulţimea evenimentelor de P-măsura nula. Presupunem ca $\mathscr{F}_\infty \subseteq \mathscr{A}$. Pe acelasi spatiu de probabilitate mai este dată o variabila aleatoare pozitivă τ care trebuie să fie interpreţata ca un moment aleator de timp (pe care il denumim in continuare *default*), la care are loc o evolutie neasteptata in dinamica ratei dobânzii fără risc (asociate de exemplu depozitelor bancare la termen). Notăm cu (H_t) procesul stohastic generat de variabilele care indica aparitia evenimentului nedorit ("default"), $H_t := 1_{(\tau \leq t)}$ şi fie $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(H_s, 0 \leq s \leq t)$ cea mai mică filtraţie ce conţine filtraţia Browniana $\mathcal{F}$ şi pentru care τ este un timp de stopare. Procedura de construcţie a filtratiei $\mathcal{G}$ este cunoscuta ca *largirea progresiva a filtratiei Browniene*. $\mathcal{F}$ se numeste filtraţia de referinţa (*reference filtration*) iar $\mathcal{G}$ filtraţia lărgită (*enlarged filtration*).

Considerăm de asemenea o piaţă financiară ce constă din urmatoarele active

- un activ fără risc (de ex. un depozit bancar la termen) cu o rata a dobânzii stohastică, al carui preţ este modelat cu ajutorul unui proces $\mathcal{G}$-adaptat r,

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt,\ S_0^0 = 1; \tag{2.1}$$

şi

- un activ riscat (de ex. un activ tranzacţionat la Bursă ce presupune realizarea unor castiguri mari dar care şi implica asumarea unor riscuri pe măsura), pentru care dinamica procesului preţului (S_t) este dat de o mişcare Browniana geometrica,

$$dS_t = S_t(\nu_t dt + \sigma_t dB_t). \tag{2.2}$$

Vom lucra sub urmatoarele ipoteze

(H1) r_t este un proces cad-lag (i.e. cu traiectorii continue la dreapta şi având limite finite la stânga) $\mathcal{G}$-adaptat ce ia valori pozitive; $r_t \leq C$, $0 \leq t \leq T$, P - a.s.. C este o constanta pozitivă;

(H2) ν_t şi σ_t sunt procese $\mathcal{F}$-adaptate, cu $|\nu_t| \leq C$ şi $\frac{1}{C} \leq \sigma_t \leq C$, $0 \leq t \leq T$, P - a.s.;

(H3) Orice $\mathcal{F}$-martingal este de asemenea un martingal in raport cu filtraţia lărgită $\mathcal{G}$. In aceste condiţii spunem ca are loc ipoteza **(H)** (de invarianţă a martingalelor sau de imersie).

(H4) Procesul ce indica aparitia "default" (H_t) admite un compensator ce este absolut continuu in raport cu măsura Lebesgue, i.e. există un proces $\mathcal{G}$-adaptat λ ce ia valori nenegative, numit $\mathcal{G}$-intensitatea stohastică (care ia valori pozitive pe mulţimea $(t < \tau)$ şi ia valoarea zero pe mulţimea $(t > \tau)$), cu proprietatea ca procesul compensat $M_t := H_t - \int_0^t \lambda_s ds$ este un $\mathcal{G}$-martingal. Presupunem de asemenea ca $\lambda_t \leq C$, $0 \leq t \leq T$, P - a.s..

OBSERVAŢIA 2.1. *Din punct de vedere economic ar fi fost mai realist să presupunem, in locul ipotezei* **(H)**, *ipoteza numită* **(H')** *sau ipoteza de invarianţă semimartingala, care spune ca un $\mathcal{F}$-semimartingal este de asemenea şi un $\mathcal{G}$-semimartingal. In acest caz însă, descompunerea $\mathcal{F}$-martingalului (B_t) (care este in particular şi un $\mathcal{F}$-semimartingal) in filtraţia lărgită $\mathcal{G}$ este dată de*

$$B_t = B_t^{\mathcal{G}} + \int_0^t \eta_s ds,\ t \geq 0,$$

unde $(B_t^{\mathcal{G}})$ este un $\mathcal{G}$-martingal şi $\int_0^t |\eta_s| ds < \infty$, pentru $t \geq 0$. Din nefericire, pentru construcţia de mai sus procesul nu are in general traiectoriile marginite (pentru mai multe detalii se poate consulta El Karoui, Jeanblanc, Jiao, Zargari [**10**], *Sectiunea 3.1) ceea ce nu ne permite utilizarea unui rezultat de existenţa pentru soluţia unei ecuaţii diferentiale stohastice retrograde.*

Sub ipoteza **(H)** se constata ca (B_t) rămâne o mişcare Browniana standard şi sub filtraţia $\mathcal{G}$. Acest fapt este o consecinţă imediată a teoremei lui Lévy de caracterizare martingală a unei mişcăre Browniene (a se vedea Karatzas, Shreve [**25**], Teorema 3.16), utilizând faptul ca (B_t) este un martingal continuu in raport cu filtraţia $\mathcal{G}$, cu variaţia pătratică dată de $\langle B \rangle_t = t$. Se constata astfel ca *dinamica procesului S_t este invarianţă in* *raport cu cele două filtratii.* Definim in continuare urmatoarele spatii funcţionale

- $\mathscr{P}(\mathscr{G})$ reprezintă mulţimea proceselor (X_t) progresiv măsurabile in raport cu filtraţia $\mathscr{G}$;
- $\mathscr{S}^2_{\mathscr{G}}$ este submulţimea lui $\mathscr{P}(\mathscr{G})$ ce este formată din procesele (X_t) cu traiectorii marginite aproape sigur, i.e.
$$\|X\|_{\mathscr{S}^2_{\mathscr{G}}} := \text{ess} \sup_{t\in[0,T]} |X_t| < \infty;$$
- $\mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(W)$ reprezintă mulţimea proceselor $\mathscr{G}$-predictibile de patrat integrabile (X_t), i.e.
$$\|X\|^2_{\mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(W)} := E\left(\int_0^T X_t^2 dt\right) < \infty;$$
- $\mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(M)$ reprezintă mulţimea proceselor $\mathscr{G}$-predictibile ce satisfac
$$\|X\|^2_{\mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(M)} := E\left(\int_0^T X_t^2 \lambda_t dt\right) < \infty.$$

Sub ipoteza **(H4)**, in mod evident are loc incluziunea $\mathscr{H}^2_{\mathscr{G}} \subseteq \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(M)$.

Considerăm acum un investitor cu optiuni de investiţii pe piaţă financiară descrisa mai sus ce investeste la momentul iniţial 0 capitalul x. Procesul de investiţie are un orizont finit de timp T. Notăm prin N_t^0, respectiv N_t cantitatea din fiecare activ detinuta de investitor la momentul t. Astfel, valoarea portofoliului la fiecare moment de timp t asociat strategiei (N_t^0, N_t) este dată de

$$X_t^N = N_t^0 S_t^0 + N_t S_t,\ 0 \le t \le T. \tag{2.3}$$

Presupunem ca strategia este autofinanţata, ceea ce înseamnă ca pe parcursul procesului investiţional nu sunt permise alocari suplimentare de capital sau retrageri de capital. Sunt însă permise aşa numitele *short selling*, adica investitorul poate vinde o cantitate de active pe care nu le detine la momentul respectiv, cu obligaţivitatea însă de a le furniza pana la momentul T (in speranta ca in viitor le poate achizitiona la un preţ redus decat cel de la momentul prezent). Ipoteza de autofinanţare ne conduce la ecuaţia de autofinanţare

$$dX_t^N = N_t^0 dS_t^0 + N_t dS_t = (r_t X_t + N_t S_t(\nu_t - r_t))\,dt + N_t S_t \sigma_t dB_t;$$
$$X_0^\pi = x.$$

Această ecuaţie ne spune de fapt ca variaţia valorii portofoliului pe intervale de timp infinitezimale provine numai din variaţia cursurilor activelor pe intervalele respective.

In loc de cantităţile din fiecare activ deţinute (sau datorate, aşa cum se intampla in cazul *short selling*), vom utiliza ca strategii (variabile de control) proportiile din valoarea portofoliului ce sunt investite in fiecare tip de activ, pe care le notăm prin π_t^0, respectiv π_t. In mod evident $\pi_t^0 = 1 - \pi_t$, şi deci strategia de finantare este unic determinata de proportia investita in activul cu risc. ecuaţia de autofinanţare se poate atunci rescrie sub forma

$$dX_t^{x,\pi} = X_t^\pi\left[(r_t + \pi_t(\nu_t - r_t))dt + \pi_t \sigma_t dB_t\right];\ X_0^\pi = x. \tag{2.4}$$

Fie (R_t) procesul de actualizare (in raport cu rata dobânzii r asociată activului fără risc), definit prin $R_t := e^{-\int_0^t r_s ds}$. Notăm prin $(\tilde{S}_t)$ procesul preţurilor actualizate ale activului riscat, i.e. $\tilde{S}_t := R_t S_t$, şi prin $\mathscr{M}(P)$ mulţimea tuturor măsurilor martingale echivalente cu probabilitatea istorica P, definite pe corpul borelian $\mathscr{G}_T$, $\mathscr{M}(P) := \{Q$ măsura de probabilitate pe $\mathscr{G}_T \mid Q \sim P$ şi $(\tilde{S}_t)$ este un $\mathscr{G}$-martingal$\}$.

DEFINIŢIA 2.2. *Mulţimea $\mathscr{A}(x)$ a strategiilor (portofoliilor) admisibile este formată din procesele (π_t) ce sunt $\mathscr{G}$-predictibile şi care satisfac $E\int_0^T \pi_s^2 \sigma_s^2 ds < \infty$.*

Ecuaţia (2.4) este o ecuaţie diferenţială stohastică liniara cu soluţia dată prin formula explicită

(2.5)

$$\begin{aligned} X_t^{x,\pi} &= x \exp\big(\int_0^t (r_s + \pi_s(\nu_s - r_s))ds\big)\, \mathscr{E}\big(\int_0^\cdot \pi_s\sigma_s dB_s\big)_t \\ &= x \exp\big(\int_0^t (r_s + \pi_s(\nu_s - r_s)) - \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma_s^2)ds\big) \exp\big(\int_0^t \pi_s\sigma_s dB_s\big). \end{aligned}$$

Prin $\mathscr{E}(Y_\cdot)_t$ intelegem *exponenţială stohastică Doleans-Dade* a unui martingal (Y). In cazul in care (Y) este un proces cu traiectorii continue, este adevarata formula

$$\mathscr{E}(Y_\cdot)_t := \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t\right),$$

unde $\langle Y\rangle_t$ reprezintă variaţia pătratică a procesului (Y_t). Procesul exponenţialei stohastice este un martingal (local).

O consecinţă imediată a formulei (2.5) este faptul ca valoarea portofoliului $(X_t^{x,\pi})$ ia valori strict pozitive la orice moment de timp t.

OBSERVAŢIA 2.3. *Forma multiplicativa* (2.5) *a valorii portofoliului ne permite să observam ca mulţimea strategiilor admisibile nu depinde de capitalul investit x, motiv pentru care vom nota această mulţime prin* $\mathscr{A}$.

Suntem interesati de problema maximizarii utilităţii asteptate (gradului de satisfactie) a investitorului de pe urma obţinerii valorii finale a portofoliului $X_T^{x,\pi}$, in raport cu toate strategiile admisibile π.

Vom consideră funcţii de utilitate U definite pe $(0,\infty)$, derivabile, strict crescătoare şi strict concave, satisfacand in plus şi conditiile uzuale Inada: $\lim_{x\to 0} U'(x) = \infty$ şi $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$. Clasa acestor funcţii o notăm prin $\mathscr{U}$, iar in cadrul acesteia vom consideră urmatoarele funcţii de utilitate tip *HARA* (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*)

- funcţia de utilitate de tip logaritmic: $U(x) = \ln x$;
- funcţia de utilitate de tip putere: $U(x) = \frac{x^p}{p}$, cu $0 < p < 1$.

Problema de optimizare este o problema de control optimal, in care variabila de control este dată de strategia π, iar funcţia valoare asociată este definită prin

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathscr{A}} E\left[U\left(X_T^{x,\pi}\right)\right]. \tag{2.6}$$

Obiectivele principale pe care ni le-am propus constau in caracterizarea funcţiei valoare V şi a determinării unei strategii optimale π^*.

Dacă π este o strategie admisibilă, notăm

$$J^\pi(x) = E\left[U\left(X_T^{x,\pi}\right)\right],$$

ceea ce înseamnă ca problema de optimizare se poate rescrie sub forma

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathscr{A}} J^\pi(x).$$

In continuare vom utiliza notatia simplificata X_t^π (in loc de $X_t^{x,\pi}$) atunci când nu există pericol de confuzie.

2.2. Cazul utilităţii de tip logaritmic

In cadrul acestei secţiuni vom relaxa ipotezele (**H1**), (**H2**). Vom presupune ca procesele $(r_t),(\nu_t),(\sigma_t)$ şi *premiul de risk* (*risk premium*) (μ_t) definit prin $\mu_t := \frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}$ sunt de patrat integrabile, i.e. apartin spatiului $L^2([0,T] \times \Omega)$. O condiţie suficienta pentru ca procesul premiului de risc (μ_t) să fie de patrat integrabil este ca (r_t) şi (ν_t) să fie de patrat integrabil şi σ_t să fie marginit inferior de o constanta strict pozitivă.

Mulţimea strategiilor admisibile va fi formată in acest caz din mulţimea

(2.7)

$$\mathscr{A}' = \Big\{ \pi_t \text{ este un proces } \mathscr{G}\text{-adaptat } \Big| E\int_0^T |\pi_t(\nu_t - r_t)|dt < \infty, \\ E\int_0^T \pi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty \Big\}.$$

Pentru $U(x) = \ln x$, obţinem

$$U\left(X_T^{x,\pi}\right) = \ln x + \int_0^T \left(r_s + \pi_s(\nu_s - r_s) - \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma_s^2 \right) ds + \int_0^T \pi_s\sigma_s dB_s,$$

şi dacă $\pi \in \mathscr{A}'$ atunci procesul integralei stohastice $(\int_0^t \pi_s\sigma_s dB_s)$ este un $\mathscr{G}$-martingal de medie 0. Rezultă

$$J^\pi(x) = \ln x + J^\pi(1) = \ln x + E\int_0^T (r_s + \pi_s(\nu_s - r_s) - \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma_s^2)ds.$$

Suntem astfel condusi la rezolvarea unei probleme de optimizare pe traiectorii (*pathwise optimization*). Pentru $t \in [0,T]$ fixat, funcţia de gradul II

$$-\frac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 + \pi(\nu_t - r_t) + r_t$$

isi atinge valoarea maxima in punctul

$$\pi_t^* := \frac{r_t - \nu_t}{\sigma_t^2}. \tag{2.8}$$

Strategia π^* obţinuta mai sus este in mod evident admisibilă, întrucât

$$E\int_0^T (\pi_t^*)^2\sigma_t^2 dt = E\int_0^T \left(\frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}\right)^2 dt < \infty,$$

conform ipotezelor făcute. Se observă de asemenea ca $\pi_t^*(\nu_t - r_t) = -\left(\frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}\right)^2$.

Enuntam acum rezultatul principal al acestei secţiuni.

TEOREMA 2.4. *funcţia valoare a problemei de optimizare*

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathscr{A}'} E\left[\ln\left(X_T^{x,\pi}\right)\right]$$

este finita şi are expresia

$$V(x) = \ln x + E\int_0^T \left(r_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}\right)^2\right)dt. \tag{2.9}$$

In plus, problema admite o unică strategie optimală π^* *care este dată de formula* (2.8)*.*

OBSERVAŢIA 2.5. *Se observă ca strategia optimală coincide cu strategia optimală obţinuta de Merton (a se vedea Merton* [**32**]*). Acest rezultat nu este deloc surprinzator întrucât ecuaţiile satisfăcute de preţurile activelor sunt invariante in raport cu cele două filtratii.*

2.3. Cazul utilităţii de tip putere. Abordarea cu ajutorul problemei duale

In cele ce urmeaza vom consideră cazul functiilor utilitate de tip putere, $U(x) = \frac{x^p}{p}$, cu $0 < p < 1$. Întrucât coeficienţii preţurilor activelor sunt aleatori, o abordare directă similara cu cea din cazul utilităţii de tip logaritmic este ineficienta.

Fie U^* conjugata convexă a funcţiei concave U, care este definită prin

$$U^*(y) := \sup_{x>0}(U(x) - xy),\ y > 0. \tag{2.10}$$

Supremumul din ultima formula este in mod evident atins in punctul $I(y) := (U')^{-1}(y)$ şi un calcul elementar ne conduce la $I(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ şi

$$U^*(y) = U(I(y)) - yI(y) = \frac{1-p}{p}y^{\frac{p}{p-1}}. \tag{2.11}$$

In continuare dorim să caracterizam mulţimea măsurilor martingale echivalente $\mathscr{M}(P)$.

2.3.1. Caracterizarea mulţimii $\mathscr{M}(P)$. Dinamică preţului actualizat al activului cu risc $\tilde{S}_t$ este obţinuta cu ajutorul formulei lui Itô

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\nu_t - r_t)dt + \sigma_t dB_t) = \sigma_t \tilde{S}_t(\mu_t dt + dB_t), \tag{2.12}$$

unde am notat $\mu_t := \frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}$. Intr-un mod similar deducem ecuaţia preţului actualizat al valorii portofoliului $\tilde{X}_t^\pi = R_t X_t^\pi$,

$$d\tilde{X}_t^\pi = \pi_t \tilde{X}_t^\pi((\nu_t - r_t)dt + \sigma_t dB_t) = \pi_t \sigma_t \tilde{X}_t^\pi(\mu_t dt + dB_t).$$

Fie Q o măsura de probabilitate martingală echivalentă (cu P) şi fie L_T^Q densitatea Radon-Nikodym $\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathscr{G}_T}$. L_T^Q este o variabila aleatoare pozitivă $\mathscr{G}_T$-măsurabilă ce satisface $E(L_T^Q) = 1$. Definim procesul densităţilor Radon-Nikodym $(L_t^Q)_{0\le t\le T}$ prin $L_t^Q := E(L_T^Q|\mathscr{G}_t)$.

In conformitate cu Teorema lui Kusuoka de reprezentare a proceselor predictibile (a se vedea referinţa Kusuoka [**26**]), orice $\mathscr{G}$-martingal de patrat integrabil poate fi descompus ca suma dintre valoarea să iniţiala, un martingal continuu dat prîntr-o integrala stohastică in raport cu miscarea Browniana B şi un martingal discontinuu dat prîntr-o integrala stohastică in raport cu martingalul cu salturi M (martingalul compensat al lui (H_t)). Rezultă ca procesul L_t^Q poate fi reprezentat ca

$$L_t^Q = 1 + \int_0^t \tilde{\theta}_s dB_s + \int_0^t \tilde{\gamma}_s dM_s, \tag{2.13}$$

unde $\tilde{\theta}_t, \tilde{\gamma}_t$ sunt procese $\mathscr{G}$-predictibile. Întrucât L_t^Q ia valori strict pozitive, notand $\theta_t = \frac{\tilde{\theta}_t}{L_{t-}^Q}$ şi $\gamma_t = \frac{\tilde{\gamma}_t}{L_{t-}^Q}$, se obţine urmatoarea formula

$$L_t^Q = 1 + \int_0^t L_{s-}^Q \theta_s dB_s + \int_0^t L_{s-}^Q \gamma_s dM_s, \text{ cu } \gamma_t > -1.$$

Atunci

(2.14)

$$L_t^Q = \mathscr{E}\big(\int_0^\cdot \theta_s dB_s\big)_t \mathscr{E}\big(\int_0^\cdot \gamma_s dM_s\big)_t$$
$$= \exp\big(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\big)\exp\big(\int_0^t \ln(1+\gamma_s)dH_s - \int_0^t \gamma_s\lambda_s ds\big).$$

Teorema clasică a lui Girsanov poate fi atunci extinsa in cazul martingalelor cu salturi.

PROPOZIŢIA 2.6. *Procesul* $\hat{B}_t := B_t - \int_0^t \theta_s ds$ *este o* $\mathscr{G}$-*mişcare Browniana sub Q, iar procesul*

$$\hat{M}_t := M_t - \int_0^t \gamma_s\lambda_s ds = H_t - \int_0^t (1+\gamma_s)\lambda_s ds$$

este un $\mathscr{G}$*-martingal discontinuu sub Q, ortogonal cu* $(\hat{B}_t)$*. Sub Q procesul* (H_t) *admite intensitatea stohastică* $\hat{\lambda}_t = (1+\gamma_t)\lambda_t$*.*

Utilizând formula (2.12), este usor de vazut ca o măsura Q este o probabilitate neutra la risc numai dacă $\theta_t = -\mu_t = \frac{r_t - \nu_t}{\sigma_t}$.

COROLARUL 2.7. *Mulţimea măsurilor martingale echivalente* $\mathscr{M}(P)$ *este determinata de măsurile de probabilitate Q echivalente cu P, pentru care procesul densităţilor Radon-Nikodyim are forma*

(2.15)

$$L_t^Q = \exp\big(-\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds\big)\ \exp\big(\int_0^t \ln(1+\gamma_s)dH_s - \int_0^t \gamma_s\lambda_s ds\big),$$

unde (γ_t) *este un proces* $\mathscr{G}$*-predictibil cu* $\gamma_t > -1$ *şi* $E(L_T^Q) = 1$*.*

Întrucât o măsura $Q \in \mathscr{M}(P)$ este unic determinata de procesul $\mathscr{G}$-predictibil (γ_t) ca mai sus, in continuare vom utiliza notatia $L_t^\gamma := L_t^Q$.

2.3.2. Caracterizarea problemei duale utilizând o teoremă abstractă. Vom urma raţionamentul lui L.C.G. Rogers (conform referinţei Rogers [**34**]) in scopul deducerii problemei duale asociate problemei de optimizare (2.6). In acest scop, urmarim să construim un $\mathscr{G}$-semimartingal pozitiv (Z_t), soluţie a ecuaţiei diferentiale stohastice

$$dZ_t = Z_t(\delta_t dt + \alpha_t dB_t + \beta_t dM_t);\ Z_0 = z,$$

unde procesele δ, α şi β sunt $\mathscr{G}$-predictibile, şi in plus $\beta_t > -1$. Reamintim ca dinamica procesului $X^{x,\pi}$ este dată de

$$dX_t^{x,\pi} = X_t^{x,\pi}\left[(r_t + \sigma_t \mu_t \pi_t)dt + \pi_t \sigma_t dB_t\right];\ X_0^{x,\pi} = x. \tag{2.16}$$

Calculam in două moduri integrala $\int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi}$, mai întâi ţinând cont de ecuaţia (2.16), iar apoi utilizând formula de integrare prin părţi şi ţinând cont de dinamica procesului ajutătoare (Z_t). Obţinem astfel

$$\int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi} = \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(r_t + \sigma_t \mu_t \pi_t)dt + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi} \pi_t \sigma_t dB_t,$$

şi de asemenea

$$\begin{aligned}\int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi} &= Z_T X_T^{x,\pi} - xz - \int_0^T X_t^{x,\pi} dZ_t - \langle Z, X^{x,\pi}\rangle_t \\ &= Z_T X_T^{x,\pi} - xz - \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(\delta_t + \alpha_t \pi_t \sigma_t)dt \\ &\quad - \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi} \alpha_t dB_t - \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi} \beta_t dM_t.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Presupunand ca procesele integralelor stohastice $\int_0^\cdot Z_s X_s^{x,\pi} \pi_s \sigma_s dB_s$, $\int_0^\cdot Z_s X_s^{x,\pi} \alpha_s dB_s$ şi

$\int_0^\cdot Z_s X_s^{x,\pi} \beta_s dM_s$ sunt martingale adevarate (şi nu numai martingale locale), se obţine

$$E\Big[\int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(r_t + \sigma_t \mu_t \pi_t)dt\Big] = E\Big[Z_T X_T^{x,\pi} - xz - \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(\delta_t + \alpha_t \pi_t \sigma_t)dt\Big].$$

Atunci, dacă U este o funcţie de utilitate ce apartine clasei $\mathscr{U}$

$$\begin{aligned} E(U(X_T^{x,\pi})) &= E\Big[U(X_T^{x,\pi})) - \int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi} + \int_0^T Z_t dX_t^{x,\pi}\Big] \\ &= E\Big[U(X_T^{x,\pi}) + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(r_t + \sigma_t \mu_t \pi_t)dt - Z_T X_T^{x,\pi} \\ &\quad + xz + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(\delta_t + \alpha_t \pi_t \sigma_t)dt\Big] \\ &= xz + E\Big[U(X_T^{x,\pi}) - Z_T X_T^{x,\pi} \\ &\quad + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(r_t + \delta_t + \sigma_t \mu_t \pi_t + \alpha_t \pi_t \sigma_t)dt\Big]. \end{aligned}$$

Definim acum Lagrangeanul

$$\Lambda(Z) := \sup_{X^{x,\pi} \geq 0, \pi} \Big\{ xz + E\Big[U(X_T^{x,\pi}) - Z_T X_T^{x,\pi} + \int_0^T Z_t X_t^{x,\pi}(\delta_t + r_t + \sigma_t \pi_t(\alpha_t + \mu_t))dt\Big]\Big\}.$$

Maximizam mai întâi funcţia dintre acolade in raport cu X_T. In mod evident (a se vedea definiţia funcţiei convex conjugate U^*)

$$\sup_{X_T} E\left[U(X_T) - Z_T X_T\right] = U^*(Z_T).$$

Apoi, maximizand după toate strategiile admisibile π (ţinând cont de faptul ca procesele Z and X iau valori pozitive), obţinem o valoare finita numai dacă $\alpha_t + \mu_t \leq 0$. De asemenea, când maximizam după $X_t \geq 0$, obţinem $\delta_t + r_t \leq 0$. In mod intuitiv, ultimele două inegalitati trebuie să fie de fapt egalitati atunci când dorim să obţinem valoarea maxima a expresiei dintre acolade, şi deci

$$\alpha_t := -\mu_t = \theta_t \text{ şi } \delta_t = -r_t. \tag{2.18}$$

Rezultă ca dinamica procesului Z_t poate fi rescrisa sub forma

$$dZ_t = Z_t(-r_t dt - \mu_t dB_t + \beta_t dM_t);\ Z_0 = z. \tag{2.19}$$

Deducem ca există o măsura martingală echivalentă Q (a se vedea şi formula (2.7)) astfel incat

$$Z_t = zR_t L_t^Q.$$

Intuim atunci ca duală problemei (2.6) ar trebui să aiba forma

(2.20)

$$\begin{aligned} V^*(z) &:= \inf_Z \Lambda(Z) = \inf_Z U^*(Z_T) = \inf_Q U^*(zR_T L_T^Q) \\ &= z^q \inf_{Q\,EMM} \frac{1-p}{p} E\left[(R_T L_T^Q)^q)\right] = z^q \inf_\gamma \frac{1-p}{p} E\left[(R_T L_T^\gamma)^q)\right], \end{aligned}$$

cu $q := \frac{p}{p-1} < 0$ şi unde procesul γ este ca in Corolarul 1.

Impunand o serie de ipoteze (ce le vom verifica in continuare), vom putea aplica o teorema abstracta privind dualitatea functiilor valoare ale cuplului de probleme (2.6) şi (2.20) (a se vedea [**34**], Teorema 1). Această teorema abstracta are următorul enunt.

TEOREMA 2.8. *Funcţiile valoare V şi V^* sunt într-o relatie duală, adica*

$$V^*(z) = \sup_{x \geq 0} (V(x) - xz)$$

şi

$$V(x) = \inf_{z \geq 0} (V^*(z) + xz).$$

Verificam acum in contextul nostru ipotezele enunţate in referinta [**34**], Sectiunea 3. Definim spatiul de măsura finita $(S,\mathscr{S},\mu) := (\Omega,\mathscr{G}_T,P)$. Notăm prin $\mathscr{X}(x)$ mulţimea tuturor variabilelor aleatoare f $\mathscr{G}_T$-măsurabile, marginite, pozitive, şi pentru care există un proces (X_t) ce satisface ecuaţia (2.4) a.i. $f \le X_T$. Definim de asemenea

$$\mathscr{Z}_1(z) := \{Z_T |\ \text{satisface ecuaţia (2.19)}\},$$

$\mathscr{Z}_0(z)$ este mulţimea variabilelor aleatoare h ce sunt nenegative şi $\mathscr{G}_T$-măsurabile a.i. există $Z \in \mathscr{Z}_1(z)$ cu $h \le Z_T$. Fie $\mathscr{Z}(z)$ inchiderea multimii $\mathscr{Z}_0(z)$ in spatiul $L^0(\Omega,\mathscr{G}_T,P)$.

Verificam mai întâi condiţia $(X1)$, care ne spune ca mulţimea $\mathscr{X}(x)$ este convexă. Fie X^1 şi X^2 apartinand multimii $\mathscr{X}(x)$ (cu strategiile corespunzatoare π_1 şi π_2) şi fie $\lambda \in [0,1]$. Notăm $\tilde{X} := \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2$. Dinamică procesului $\tilde{X}$ este dată de

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t &= \tilde{X}_t r_t dt + \sigma_t\mu_t(\lambda X_t^1\pi_t^1 + (1-\lambda)X_t^2\pi_t^2)dt \\ &\quad + \sigma_t(\lambda X_t^1\pi_t^1 + (1-\lambda)X_t^2\pi_t^2)dB_t \\ &= \tilde{X}_t\left[(r_t + \sigma_t\mu_t\tilde{\pi}_t)dt + \sigma_t\tilde{\pi}_t dB_t\right], \end{aligned} \tag{2.21}$$

cu

$$\tilde{\pi}_t := \pi_t^1 X_t^1/\tilde{X}_t + (1-\lambda)\pi_t^2 X_t^2/\tilde{X}_t.$$

In mod evident $\tilde{\pi} \in \mathscr{A}$. Rezultă ca $\mathscr{X}(x)$ este o mulţime convexă.

Ipotezele $(X2)$ şi $(X3)$ se verifica cu uşurinţă. Verificam acum ipoteza $(X4)$, şi anume ca funcţia $f \equiv 1$ apartine multimii $\mathscr{X}$, unde

$$\mathscr{X} = \bigcup_{x\ge 0}\mathscr{X}(x) = \bigcup_{x\ge 0} x\mathscr{X}(1)$$

(in scrierea celei de a două egalitati in formula de mai sus am utilizat proprietatea $(X2)$: $\mathscr{X}(\alpha x) = \alpha\mathscr{X}(x)$, dacă $\alpha > 0$). Pentru $\pi \equiv 0$, deducem ca procesul (X_t) ce satisface ecuaţia (2.6) are forma $X_t = x\exp(\int_0^t r_s ds)$. Întrucât r ia valori pozitive, pentru orice $x \geq 1$ va rezulta ca

$$X_t \geq 1, \text{ pentru orice } t \geq 0,$$

şi astfel ipoteza $(X4)$ este verificata. Proprietatile $(Y1)$ şi $(Y2)$ sunt triviale de verificat, in timp ce ipotezele $(U1)-(U5)$ sunt in mod evident satisfăcute de orice funcţie de utilitate $U \in \mathscr{U}$. Mai rămâne de arătat proprietatea (XY), care spune ca pentru orice $f \in \mathscr{X}$ şi $z \geq 0$,

$$\sup_{h \in \mathscr{Z}(z)} E(fh) = \inf_{x \in B(f)} xz,$$

unde am notat $B(f) := \{x \geq 0 | f \in \mathscr{X}(x)\}$.

Arătăm mai întâi inegalitatea

$$\sup_{h \in \mathscr{Z}(z)} E(fh) \leq \inf_{x \in B(f)} xz.$$

Presupunem ca X este soluţia ecuaţiei (2.16) şi ca Z rezolva ecuaţia (2.19). Utilizând formula de integrare prin părţi obţinem

$$\begin{aligned} d(X_t Z_t) &= X_t dZ_t + Z_t dX_t + \langle X, Z \rangle_t \\ &= X_t Z_t(-\mu_t + \pi_t \sigma_t) dB_t + X_t Z_t dM_t, \end{aligned}$$

de unde deducem ca procesul $X_t Z_t$ este un martingal local pozitiv, deci este un supermartingal. Rezultă

$$E(X_T Z_T) \leq E(X_0 Z_0) = xz.$$

Fie x un numar real strict pozitiv şi $f \in \mathscr{X}(x)$ arbitrar aleasa. In mod evident

$$\sup_{h \in \mathscr{Z}(z)} E(fh) \leq xz,$$

şi luand acum infimumul $x \in B(f)$ obţinem inegalitatea dorita.

Rămâne de demonstrat ca dacă $f \in \mathscr{X}$ (i.e. $f \in \mathscr{X}(\tilde{x})$, pentru un numar real pozitiv $\tilde{x}$), şi dacă

$$\xi := \sup_{h \in \mathscr{Z}(1)} E(fh) \leq x,$$

atunci $f \in \mathscr{X}(x)$. Este suficient de arătat ca $f \in \mathscr{X}(\xi)$.

Utilizând argumentele lui Rogers, se poata arata ca supremumul in ultima ecuaţie de mai sus este atins intr-un punct $\tilde{h} \in \mathscr{Z}(1)$. Ţinând cont de modul de definire al multimilor $\mathscr{Z}_0(z)$ şi $\mathscr{Z}(z)$, putem presupune $\tilde{h} \in \mathscr{Z}_0(1)$. Rezultă atunci ca există un proces $\tilde{Z}$ ce satisface ecuaţia (2.19) a.i. $\tilde{h} \leq \tilde{Z}_T$. In mod evident $\tilde{h} = \tilde{Z}_T$, întrucât in caz contrar am avea $\xi > E(f\tilde{h})$, ceea ce ne-ar conduce la o contradictie. Astfel

$$\xi = E(f\tilde{Z}_T), \text{ with } \tilde{Z}_T = R_T L_T^{\tilde{Q}}.$$

$L_T^{\tilde{Q}}$ reprezintă densitatea Radon-Nikodyim a unei măsuri martingale echivalente $\tilde{Q}$ (pe $\mathscr{G}_T$), i.e. $L_T^{\tilde{Q}} = \frac{d\tilde{Q}}{dP}\big|_{\mathscr{G}_T}$. Există atunci un proces $\mathscr{G}$-predictibil $\tilde{\gamma}$ cu $\tilde{\gamma}_t > -1$ a.i.

$$\tilde{Z}_T = \exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) \exp\left(-\int_0^T \mu_t dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T \mu_t^2 dt\right)$$
$$\exp\left(\int_0^T \ln(1+\tilde{\gamma}_t) dH_t - \int_0^T \tilde{\gamma}_t \lambda_t dt\right).$$

Conform cu Propozitia 2.6, procesul

$$\hat{B}_t := B_t + \int_0^t \mu_s ds$$

este o $\mathscr{G}$-mişcare Browniana sub $\tilde{Q}$. De asemenea, procesul

$$\tilde{M}_t := M_t - \int_0^t \tilde{\gamma}_s \lambda_s ds = H_t - \int_0^t (1+\tilde{\gamma}_s)\lambda_s ds$$

este un $\mathscr{G}$-martingal discontinuu sub $\tilde{Q}$, ortogonal lui $\hat{B}$. In mod evident

$$\xi = E(f R_T L_T^{\tilde{Q}}) = \tilde{E}(f R_T),$$

unde $\tilde{E}$ reprezintă operatorul de medie in raport cu $\tilde{Q}$. Utilizând teorema de reprezentare pentru procese predictibile a lui Kusuoka pentru martingalul $\tilde{N}$, rezultă

$$\tilde{N}_t := \tilde{E}(f R_T | \mathscr{G}_t) = \xi + \int_0^t \tilde{N}_s \hat{\theta}_s d\hat{B}_s + \int_0^t \tilde{N}_s \hat{\gamma}_s d\tilde{M}_s,$$

unde $\hat{\theta}$ şi $\hat{\gamma}$ sunt procese $\mathscr{G}$-predictibile cu $\hat{\gamma}_t > -1$. Notăm

$$\tilde{X}_t := R_t^{-1}\tilde{N}_t = S_t^0\tilde{N}_t$$

In mod evident

$$\tilde{X}_0 = \tilde{N}_0 = E^*(\tilde{N}_T) = \xi \tag{2.22}$$

şi

$$\tilde{X}_T = R_T^{-1}\tilde{N}_T = R_T^{-1} f R_T = f. \tag{2.23}$$

Atunci

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t &= S_t^0 d\tilde{N}_t + \tilde{N}_t dS_t^0 = \tilde{X}_t(r_t dt + \hat{\theta}_t d\hat{B}_t + \hat{\gamma}_t d\tilde{M}_t) \\ &= \tilde{X}_t\left[r_t dt + \left(\mu_t\hat{\theta}_t - \lambda_t\tilde{\gamma}_t\hat{\gamma}_t\right)dt + \hat{\theta}_t dB_t + \hat{\gamma}_t dM_t\right] \\ &= \tilde{X}_t\left[r_t dt + \tilde{\pi}_t\sigma_t(\mu_t dt + dB_t)\right] + \hat{\gamma}_t\tilde{X}_t(-\lambda_t\tilde{\gamma}_t dt + dM_t), \end{aligned}$$

unde $\tilde{\pi}_t := \frac{\hat{\theta}_t}{\sigma_t}$. Am construit astfel un portofoliu $\tilde{X}$ asociat strategiei admisibile $\tilde{\pi}$. Ţinând cont şi de ecuaţiile (2.22) şi (2.23), rezultă faptul ca $f \in \mathscr{X}(\xi)$.

2.3.3. Definirea problemei de optimizare duale conform teoriei clasice a dualităţii convexe. Problema duală asociată probemei primale de optimizare (2.6) poate fi definită şi in concordanţă cu teoria clasică a dualitatii convexe (in acest sens mentionam referintele Luenberger [**31**], Callegaro şi Vargiolu [**4**], Sectiunea 4). Trebuie să tinem cont de restricţia dată de faptul ca valoarea finală a portofoliului actualizata la momentul inceperii investiţiei, in raport cu orice măsura martingală echivalentă nu poate fi mai mare decat suma investita x, in situatia in care nu există arbitraj. Această condiţie este scrisa sub forma

$$E^Q(\tilde{X}_T^\pi) = E(L_T^Q R_T X_T^\pi) \le x,$$

pentru orice $Q \in \mathscr{M}(P)$. In virtutea Corolarului 2.7, condiţia de mai sus este echivalentă cu

$$E(L_T^\gamma R_T X_T^\pi) \le x,$$

unde X_t^{π} satisface ecuaţia (2.4) (sau echivalent ecuaţia (2.5)) şi procesul γ_t satisface ipotezele Corolarului 2.7. Această inegalitate este o *restricţie bugetară* uzuala in problemele de optimizare de portofolii. Vom vedea ca pentru măsura martingală echivalentă Q^* optimală pentru problema duală, restricţia bugetară este satisfăcută cu egalitate.

Definim in continuare funcţionala duală de tip Lagrangean

$$
\begin{aligned}
L^{\gamma,\lambda}(x) &:= \sup_{X_T^{\pi}} \left[E\left(U(X_T^{\pi})\right) - \lambda(E(L_T^Q R_T X_T^{\pi}) - x)\right] \\
&= \lambda x + \sup_{X_T^{\pi}} E\left(U(X_T^{\pi}) - \lambda R_T L_T^{\gamma} X_T^{\pi}\right) \\
&= \lambda x + E\left(U^*(\lambda R_T L_T^{\gamma})\right) \\
&= \lambda x - \frac{1}{q}\lambda^q E\left((R_T L_T^{\gamma})^q\right),
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

cu multiplicatorul lui Lagrange $\lambda > 0$. In obţinerea formulei explicite de mai sus am utilizat formula de definire (2.10) şi formula explicită (2.10) pentru funcţia convex conjugata U^*. De asemenea, reamintim ca q este conjugatul lui p, fiind dat prin relatia $q = \frac{p}{p-1}$. Problema duală are atunci urmatoarea forma

$$
\inf_{\gamma,\lambda} L^{\gamma,\lambda}(x). \tag{2.25}
$$

Vom determina mai întâi infimumul funcţiei $L^{\gamma,\lambda}(x)$ in raport cu γ, pentru λ fixat. Suntem astfel condusi la problema de optimizare

$$
\inf_{Q \in \mathscr{M}(P)} E\left[(R_T L_T^Q)^q\right]. \tag{2.26}
$$

Aplicând formula lui Itô pentru procese cu salturi se obţine

(2.27)
$$(R_tL_t^\gamma)^q = \exp\Big(-q\int_0^t \big(r_s+\frac{1}{2}\mu_s^2+\gamma_s\lambda_s\big)ds - q\int_0^t \mu_s dB_s + \int_0^t \ln(1+\gamma_s)^q dH_s\Big)$$

ne conduce la

(2.28)
$$\begin{aligned} d\left[(R_tL_t^\gamma)^q\right] &= (R_tL_{t-}^\gamma)^q\big(-qr_t-\frac{1}{2}q\mu_t^2-q\gamma_t\lambda_t-q\mu_t dB_t\big) \\ &\quad + (R_tL_t^\gamma)^q\big(\frac{1}{2}q^2\mu_t^2\big)dt + (R_tL_{t-}^\gamma)^q\left((1+\gamma_t)^q-1\right)dH_t \\ &= (R_tL_{t-}^\gamma)^q\big[\big(-qr_t+\frac{1}{2}q(q-1)\mu_t^2+\lambda_t((1+\gamma_t)^q \\ &\quad -q\gamma_t-1)\big)dt - q\mu_t dB_t + \left((1+\gamma_t)^q-1\right)dM_t\big]. \end{aligned}$$

In continuare dorim să construim un proces (Φ_t) care este un $\mathscr{G}$-semimartingal, soluţie a unei ecuaţii diferentiale stohastice retrograde (EDSR) de forma

$$d\Phi_t = \varphi_t dt + \hat{\varphi}_t dB_t + \tilde{\varphi}_t dM_t, \qquad (2.29)$$

a.i. să fie satisfăcute urmatoarele

- procesul $Y_t^\gamma := (R_tL_t^\gamma)^q\Phi_t$ este un $\mathscr{G}$-*submartingal* pentru orice (γ_t) admisibil;
- este un $\mathscr{G}$-*martingal* pentru un anumit (γ_t^*) admisibil;
- $Y_T^\gamma = 1$;
- valoarea iniţiala Y_0^γ este o constanta determinista Y_0 independenta de (γ_t).

Prin aplicarea formulei lui Itô de integrare prin părţi pentru procesele $(R_tL_t^\gamma)^q$ şi Φ_t, şi ţinând cont de formulele (2.28) şi

(2.38) se obţine

(2.30)

$$
\begin{aligned}
dY_t^\gamma &= \Phi_{t-} d(R_t L_{t-}^\gamma)^q + (R_t L_{t-}^\gamma)^q d\Phi_t + d\langle (R_\cdot L_\cdot^\gamma)^q, \Phi_\cdot \rangle_t \\
&= \Phi_{t-}(R_t L_t^\gamma)^q \Big(\big(-q r_t + \frac{1}{2} q(q-1)\mu_t^2 + \lambda_t ((1+\gamma_t)^q - q\gamma_t - 1) \big) dt \\
&\quad - q\mu_t dB_t + ((1+\gamma_t)^q - 1)\, dM_t \Big) \\
&\quad + (R_t L_{t-}^\gamma)^q \,(\varphi_t dt + \hat{\varphi}_t dB_t + \tilde{\varphi}_t dM_t) \\
&\quad - (R_t L_t^\gamma)^q q\mu_t \hat{\varphi}_t dt + (R_t L_{t-}^\gamma)^q \tilde{\varphi}_t \,((1+\gamma_t)^q - 1)\, dH_t \\
&= (R_t L_t^\gamma)^q \Big[\Phi_t \big(-q r_t + \frac{1}{2} q(q-1)\mu_t^2 + \lambda_t ((1+\gamma_t)^q - q\gamma_t - 1) \big) \\
&\quad + \varphi_t - q\mu_t \hat{\varphi}_t + \lambda_t \tilde{\varphi}_t \,((1+\gamma_t)^q - 1) \Big] dt \\
&\quad + (R_t L_t^\gamma)^q (\hat{\varphi}_t - q\mu_t \Phi_t) dB_t \\
&\quad + (R_t L_{t-}^\gamma)^q \big[(\Phi_{t-} + \tilde{\varphi}_t)(1+\gamma_t)^q - \Phi_{t-} \big] dM_t .
\end{aligned}
$$

Termenul cu variatie finita ce apare in descompunerea lui Y_t^γ de mai sus este dat prin

(2.31)

$$
\begin{aligned}
A_t^\gamma := (R_t L_t^\gamma)^q \Big[&\varphi_t - q r_t \Phi_t + \frac{1}{2} q(q-1)\mu_t^2 \Phi_t - \lambda_t \Phi_t - q\mu_t \hat{\varphi}_t - \lambda_t \tilde{\varphi}_t \\
&+ \lambda_t \big((\Phi_t + \tilde{\varphi}_t)(1+\gamma_t)^q - q\Phi_t \gamma_t \big) \Big].
\end{aligned}
$$

Definim acum pe mulţimea $(t < \tau)$ funcţia (aleatoare)

$$g : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \big(\Phi_t + \tilde{\varphi}_t\big)(1+x)^q - q\Phi_t x.$$

PROPOZIŢIA 2.9. *Presupunem ca procesele Φ_t and $\tilde{\varphi}_t$ iau valori pozitive pe mulţimea $(t < \tau)$. Atunci funcţia g isi atinge valoarea maxima in punctul*

$$\gamma_t^* := \left(\frac{\Phi_t}{\Phi_t + \tilde{\varphi}_t} \right)^{\frac{1}{q-1}} - 1. \tag{2.32}$$

Demonstraţia acestui rezultat decurge in urma unor calcule elementare de analiza matematica. Remarcam ca punctul γ_t^* este unicul punct stationar al funcţiei g şi conform tabelului de semne al derivatei g' deducem ca punctul γ_t^* este punct de maxim absolut pentru g. Întrucât λ_t ia valori pozitive pe mulţimea $(t<\tau)$, rezultă ca $\sup_\gamma A_t^\gamma = A_t^{\gamma^*}$.

Vom construi acum generatorul φ_t al ecuaţiei diferentiale stohastice retrograde (2.38) punand condiţia $A_t^{\gamma^*}=0$. Se obţine

$$\begin{aligned}\varphi_t = qr_t\Phi_t - \frac{1}{2}q(q-1)\mu_t^2\Phi_t + \lambda_t\Phi_t + q\mu_t\hat{\varphi}_t + \lambda_t\tilde{\varphi}_t \\ - \lambda_t\big((\Phi_t+\tilde{\varphi}_t)(1+\gamma_t^*)^q - q\Phi_t\gamma_t^*\big).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Se poate scrie

$$\begin{aligned}(\Phi_t+\tilde{\varphi}_t)(1+\gamma_t^*)^q - q\Phi_t\gamma_t^* &= (\Phi_t+\tilde{\varphi}_t)\Big(\frac{\Phi_t}{\Phi_t+\tilde{\varphi}_t}\Big)^{\frac{q}{q-1}} \\ &\quad - q\Phi_t\Big(\frac{\Phi_t}{\Phi_t+\tilde{\varphi}_t}\Big)^{\frac{1}{q-1}} + q\Phi_t \\ &= (\Phi_t+\tilde{\varphi}_t)\Big(\frac{\Phi_t}{\Phi_t+\tilde{\varphi}_t}\Big)^{p}(1-q) + q\Phi_t \\ &= (1-q)(\Phi_t+\tilde{\varphi}_t)^{1-p}\,\Phi_t^p + q\Phi_t.\end{aligned} \tag{2.34}$$

PROPOZIŢIA 2.10. *Ecuaţia diferenţială stohastică retrogradă*

$$\begin{aligned}\Phi_t = 1 - \int_t^T \Big(\big(qr_s - \frac{1}{2}q(q-1)\mu_s^2 + \lambda_s\big)\Phi_s + q\mu_s\hat{\varphi}_s + \lambda_s\tilde{\varphi}_s \\ - (1-q)\lambda_s(\Phi_s+\tilde{\varphi}_s)^{1-p}\,\Phi_s^p - q\lambda_s\Phi_s\Big)ds \\ - \int_t^T \hat{\varphi}_s dB_s - \int_t^T \tilde{\varphi}_s dM_s\end{aligned} \tag{2.35}$$

admite o soluţie $(\Phi_t, \hat{\varphi}_t, \tilde{\varphi}_t)$ *ce apartine multimii* $\mathscr{S}_{\mathscr{G}}^\infty(0,T)\times\mathscr{H}_{\mathscr{G}}^2(W)\times\mathscr{H}_{\mathscr{G}}^2(M)$. *In plus,* $\Phi_t>0$ *şi* $\Phi_t+\tilde{\varphi}_t>0$.

OBSERVAŢIA 2.11. *Dacă am sti ca $\Phi_t > 0$ şi $\Phi_t + \tilde{\varphi}_t > 0$, atunci, in virtutea inegalitatii standard a lui Young cu exponenti Hölderieni conjugati*

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^s}{s}, \text{ pentru } a,b \geq 0,\ r,s > 0,\ \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$

rezultă, in cazul nostru, cu $r = \frac{1}{1-p}$ şi $s = \frac{1}{p}$,

$$(\Phi_t + \tilde{\varphi}_t)^{1-p}\,\Phi_t^p \leq (1-p)(\Phi_t + \tilde{\varphi}_t) + p\Phi_t.$$

Această inegalitate, impreuna cu ipotezele (**H1**)*,* (**H2**) *and* (**H4**) *şi faptul ca generatorul φ_t are crestere liniara implica existenţa unei soluţii pentru ecuaţia* (2.38)*.*

Demonstraţie. Demonstraţia acestei propozitii are loc in mai multi pasi.

Reamintim mai întâi formula (standard) de descompunere pentru un proces $\mathscr{G}$-adaptat $(\psi_t)_{0\leq t\leq T}$. Aceasta este dată de

$$\psi_t = \psi_t^0 1_{(t<\tau)} + \psi_t^1(\tau) 1_{(t\leq\tau<T)}. \tag{2.36}$$

In formula de mai sus procesul ψ_t^0 este $\mathscr{F}$-adaptat. De asemenea procesul $\psi_\cdot^1(u)$ (parametrizat după u numar real pozitiv) este $\mathscr{F}$-adaptat, iar pentru $t \in [0,T]$ fixat, aplicaţia $\psi_t^1(\cdot,\cdot)$ este $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,\infty))$-măsurabilă.

Enuntam şi formula de descompunere pentru un proces $\mathscr{G}$-predictibil, $(\psi_t)_{0\leq t\leq T}$, care este dată de

$$\psi_t = \psi_t^0 1_{(t\leq\tau)} + \psi_t^1(\tau) 1_{(t<\tau<T)}, \tag{2.37}$$

unde procesele ψ_t^0 şi $\psi_\cdot^1(u)$ sunt $\mathscr{F}$-predictibile, iar aplicaţia $\psi_t^1(\cdot,\cdot)$ este $\mathscr{P}(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{B}([0,\infty))$-măsurabilă. Prin $\mathscr{P}(\mathscr{F})$ am notat σ-algebra generată de procesele $\mathscr{F}$-adaptate şi continue la stânga.

In concordanţă cu formula de descompunere pentru procese $\mathscr{G}$-adaptate, descompunerile canonice pentru procesele $\mathscr{G}$-adaptate (r_t), (λ_t) şi (μ_t) sunt date prin

$$r_t = r_t^0 1_{(t<\tau)} + r_t^1(\tau) 1_{(t\leq\tau<T)},$$

$$\lambda_t = \lambda_t^0 1_{(t<\tau)} + \lambda_t^1(\tau) 1_{(t\leq\tau<T)} = \lambda_t^0 1_{(t<\tau)},$$

şi

$$\mu_t = \mu_t^0 1_{(t<\tau)} + \mu_t^1(\tau) 1_{(t\leq\tau<T)}.$$

In ultima formula, $\mu_t^0 = \frac{\nu_t - r_t^0}{\sigma_t}$ şi $\theta_t^1(u) = \frac{\nu_t - r_t^1(u)}{\sigma_t}$.

Rescriem ecuaţia (2.35) sub forma

$$\begin{aligned} d\Phi_t = \Big(\big(qr_t - \frac{1}{2}q(q-1)\mu_t^2 + \lambda_t\big)\Phi_t + q\mu_t\hat{\varphi}_t \\ - (1-q)\lambda_t(\Phi_t + \tilde{\varphi}_t)^{1-p}\Phi_t^p - q\lambda_t\Phi_t \Big) dt \\ + \hat{\varphi}_t dB_t + \tilde{\varphi}_t dH_t; \qquad \Phi_T = 1. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Vom arata existenţa unei soluţii pentru ecuaţia de mai sus utilizând o metodă recent introdusa, initiata de Kharroubi, Lim (conform referinţei Kharroubi, Lim [**22**]), prin care se transforma ecuaţia diferenţială stohastică retrogradă *cu salturi* intr-un sistem recursiv format din două familii de ecuaţii diferentiale stohastice retrograde *Browniene*. Mentionam faptul ca in literatura de specialitate există numeroase rezultate privind existenţa şi unicitatea soluţiei pentru EDSR Browniene. Dorim să precizam ca rezultatele obţinute de Kharroubi şi Lim sunt valide intr-un cadru mult mai general, putand fi aplicate cu succes in cazul ecuaţiilor stohastice retrograde cu salturi in cazul unui numar finit de timpi de salt aleatori $\tau_i, 1 \leq i \leq n$ (carora li se pot asocia şi marimile salturilor).

Pasul 1. Rezolvam mai întâi ecuaţia "post default" (pentru $t \geq \tau$), care se obţine din ecuaţia (2.38) "parametrizand" ("inghetand") timpul aleator τ şi egaland $\tilde{\varphi}_t$ cu 0. Suntem astfel condusi la ecuaţia retrogradă Browniana

$$
\begin{aligned}
d\Phi_t^1(u) = \big[\big(qr_t^1(u) - \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^1(u))^2\big)\Phi_t^1(u) \\
+ q\mu_t^1(u)\hat{\varphi}_t^1(u)\big]dt + \hat{\varphi}_t^1(u)dB_t,
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

pentru $u \leq t \leq T$, cu condiţia finală $\Phi_T^1(u) = 1$. u este un numar real fixat din intervalul $[0,T]$ şi care trebuie interpreţat ca momentul de default. Generatorul acestei EDSR este definit prin

$$
g^1(t,y,z;u) := \big(-qr_t^1(u) + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^1(u))^2\big)y - q\mu_t^1(u)z.
$$

ecuaţia (2.39) este o ecuaţie liniara cu coeficienţi marginiti, pentru care existenţa şi unicitatea soluţiei $(\Phi_t^1(u), \hat{\varphi}_t^1(u))_{u\leq t\leq T} \in \mathscr{S}_{\mathscr{G}}^{\infty}(0,T) \times \mathscr{H}_{\mathscr{G}}^2(W)$ rezultă de exemplu conform cu referinţa El Karoui, Hamadene, Matoussi [**8**], Propozitia 1.3. In plus, $\Phi_t^1(u)$ poate fi reprezentat sub forma

$$
\Phi_t^1(u) = E\left(\Phi_T^1(u)\Gamma_t^T(u)|\mathscr{F}_t\right) = E\left(\Gamma_t^T(u)|\mathscr{F}_t\right). \tag{2.40}
$$

$(\Gamma_t^s(u))_{t\leq s\leq T}$ reprezintă *procesul adjunct* şi este dat de soluţia ecuaţiei stohastice liniare

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_t^s(u) &= \Gamma_t^s(u)\Big(\big(-qr_t^1(u) + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^1(u))^2\big)dt - q\mu_t^1(u)dB_t\Big), \\
\Gamma_t^t &= 1.
\end{aligned}
$$

Atunci

$$
\begin{aligned}
\Gamma_t^s(u) = \exp\left(\int_t^s \big(-qr_v^1(u) + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_v^1(u))^2\big)dv\right) \\
\times \mathscr{E}\left(-\int_t^{\cdot} q\mu_v^1(u)dB_v\right)_s.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Definim acum pe $\mathscr{F}_T$ măsura martingală echivalentă $\tilde{Q}_u$, ce admite densitatea Radon-Nikodym $\tilde{Z}_T(u) := \mathscr{E}\left(-\int_0^{\cdot} q\mu_v^1(u)dB_v\right)_T$. Notăm de asemenea procesul densităţilor

Radon-Nikodym $\tilde{Z}_t(u) := \mathscr{E}\left(-\int_0^{\cdot} q\mu_v^1(u)dB_v\right)_t$. Aplicând acum formula lui Bayes pentru medii condiţionate (conform referinţei [**25**], Capitolul 3, Lema 5.3) şi ţinând cont de ecuaţia (2.40), rezultă

(2.42)
$$\Phi_t^1(u) = E\Big[\exp\Big(\int_t^T \big(-qr_s^1(u)+\frac{1}{2}q(q-1)(\mu_s^1(u))^2\big)ds\Big)\frac{\tilde{Z}_T(u)}{\tilde{Z}_t(u)}\big|\mathscr{F}_t\Big]$$
$$= E^{\tilde{Q}_u}\Big[\exp\Big(\int_t^T \big(-qr_s^1(u)+\frac{1}{2}q(q-1)(\mu_s^1(u))^2\big)ds\Big)\Big|\mathscr{F}_t\Big] \geq 1,$$

deoarece $q<0$. In plus, datorită faptului ca procesele (r_t) şi (μ_t) sunt marginite se arata cu uşurinţă ca integrantul ce apare in ultima formula este marginit superior. Deducem ca aplicaţia $\Phi_t^1(u)$ este uniform marginita.

Pasul 2. Rezolvam acum EDSR "pre default" (pentru $t<\tau$), care se obţine prin inlocuirea in generatorul EDSR (2.38) a termenului $\tilde{\varphi}_t$ cu diferenta dintre soluţia $\Phi_t^1(t)$ a EDSR "post default" calulata in punctul $u=t$ şi soluţia Φ_t^0. De asemenea, neglijam integrala in raport cu H_t întrucât $dH_t=0$ pentru $t<\tau$. Întrucât suntem interesati de obţinerea unei soluţii pozitive Φ_t^0 (pentru ca exponenţială $(\Phi_t^0)^p$ să poata fi definită in mod riguros), vom rezolva EDSR modificata

(2.43)
$$d\Phi_t^0 = \Big[\big(qr_t^0-\frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2+\lambda_t\big)\Phi_t^0+q\mu_t^0\hat{\varphi}_t^0$$
$$-(1-q)\lambda_t\left(\Phi_t^1(t)\right)^{1-p}(\Phi_t^0\vee 0)^p-q\lambda_t\Phi_t^1(t)\Big]dt+\hat{\varphi}_t^0 dB_t,$$

cu condiţia finală $\Phi_T^0=1$. Generatorul acestei EDSR este dat de

$$g^0(t,y,z) := \big(-qr_t^0+\frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2-\lambda_t\big)y-q\mu_t^0 z$$
$$+(1-q)\lambda_t\left(\Phi_t^1(t)\right)^{1-p}(y\vee 0)^p-q\lambda_t\Phi_t^1(t).$$

In mod evident $(y \vee 0)^p \le C(1+|y|)$ (întrucât $p \in (0,1)$), aplicaţia $\Phi_t^1(u)$ este uniform marginita, şi utilizând de asemenea ipotezele (**H1**), (**H2**) and (**H4**), se obţine ca g^0 are crestere liniara, uniform in raport cu t. In plus, aplicaţia $(y,z) \to g^0(t,y,z)$ este continuă, $dt \otimes dP$ $a.s.$ Rezultă atunci, conform referinţei Lepeltier, San Martin [**28**], Teorema 1 ca EDSR (2.43) admite o soluţie minimala $(\underline{\Phi}_t^0, \underline{\hat{\varphi}}_t^0) \in \mathscr{S}_{\mathscr{G}}^{\infty}(0,T) \times \mathscr{H}_{\mathscr{G}}^2(W)$. Soluţia este minimala in următorul sens: dacă (Y_t, Z_t) este de asemenea o soluţie, atunci in mod necesar $\Phi_t^0 \le Y_t$, $dt \otimes dP$ $a.s.$. Intr-un mod similar se poate construi o soluţie maximala pe care o notăm prin $(\Phi_t^0, \hat{\varphi}_t^0)$.

Pasul 3. Vom arata acum ca EDSR (2.43) admite o soluţie pozitivă Φ_t^0, utilizând un rezultat de comparatie privind soluţiile ecuaţiilor stohastice retrograde. In mod evident

$$g^0(t,y,z) \ge \big(-qr_t^0 + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2 - \lambda_t\big)y - q\mu_t^0 z := \underline{g}^0(t,y,z)$$

ecuaţia diferenţială stohastică retrogradă ce admite ca generator pe $\underline{g}^0(t,y,z)$

(2.44)

$$d\underline{Y}_t = \big[\big(qr_t^0 - \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2 + \lambda_t\big)\underline{Y}_t + q\mu_t^0 \underline{Z}_t\big]dt + \underline{Z}_t dB_t;\ \underline{Y}_T = 1,$$

este o ecuaţie liniara cu coeficienţi constanti. Intr-un mod similar celui utilizat pentru rezolvarea ecuaţiei (2.39), se obţine formula explicită

(2.45)

$$\begin{aligned}\underline{Y}_t &= E\left(\underline{Y}_T \underline{\Gamma}_t^T | \mathscr{F}_t\right) = E\left(\underline{\Gamma}_t^T | \mathscr{F}_t\right)\\ &= E^{\bar{Q}}\big[\exp\big(\int_t^T \big(-qr_s^0 + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_s^0)^2 - \lambda_s\big)ds\big)\big|\mathscr{F}_t\big],\end{aligned}$$

unde $\underline{\Gamma}_t^s$ reprezintă soluţia ecuaţiei stohastice liniare

$$d\underline{\Gamma}_t^s = \underline{\Gamma}_t^s\Big(\big(-qr_t^0 + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2\lambda_t\big)dt - q\mu_t^0 dB_t\Big),\ s \ge t,\ \underline{\Gamma}_t^t = 1,$$

şi unde măsura martingală echivalentă $\bar{Q}$ (pe $\mathscr{F}_T$) este definită via densitatea Radon-Nikodym $\frac{d\bar{Q}}{dP} = \mathscr{E}\left(-\int_0^{\cdot} q\mu_s^0 dB_s\right)_T$. Conform cu ipoteza **(H4)** şi cum $q < 0$, rezultă

$$\underline{Y}_t \geq E^{\tilde{Q}}\Big[\exp\Big(\int_t^T (-C)\Big)|\mathscr{F}_t)\Big] \geq \exp(-TC).$$

Aplicam acum un rezultat de comparatie pentru soluţiile ecuaţiilor stohastice retrograde (2.43) şi (2.44). Deducem ca

$$\Phi_t^0 \geq \underline{Y}_t \geq \exp(-TC),$$

ceea ce arata ca $\Phi_t^0 > 0$. In plus, Φ_t^0 este soluţia ecuaţiei

(2.46)

$$d\Phi_t^0 = \Big[\big(qr_t^0 - \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2 + \lambda_t\big)\Phi_t^0 + q\mu_t^0\hat{\varphi}_t^0 - (1-q)\lambda_t\left(\Phi_t^1(t)\right)^{1-p}(\Phi_t^0)^p\big) - q\lambda_t\Phi_t^1(t)\Big]dt + \hat{\varphi}_t^0 dB_t,$$

ce admite generatorul

$$\bar{g}^0(t,y,z) := \big(-qr_t^0 + \frac{1}{2}q(q-1)(\mu_t^0)^2 - \lambda_t\big)y - q\mu_t^0 z + (1-q)\lambda_t\left(\Phi_t^1(t)\right)^{1-p} y^p - q\lambda_t\Phi_t^1(t).$$

Conform cu referinţa Kharroubi, Lim [**22**], Teorema 3.1. deducem ca procesele (Φ_t), $(\tilde{\varphi}_t)$, $(\hat{\varphi}_t)$ definite prin

$$\Phi_t = \Phi_t^0 1_{(t<\tau)} + \Phi_t^1(\tau)1_{(t\geq\tau)}, \tag{2.47}$$

$$\hat{\varphi}_t = \hat{\varphi}_t^0 1_{(t<\tau)} + \hat{\varphi}_t^1(\tau)1_{(t\geq\tau)}, \tag{2.48}$$

şi

$$\tilde{\varphi}_t = (\Phi_t^1(t) - \Phi_t^0)1_{(t\leq\tau)} \tag{2.49}$$

satisfac EDSR (2.35). Rezultă

$$\Phi_t + \tilde{\varphi}_t = \Phi_t^1(t)1_{(t<\tau)} + \Phi_t^1(\tau)1_{(t\geq\tau)} = \Phi_t^1(t\wedge\tau).$$

Observam ca prin acest procedeu de construcţie a soluţiei sunt satisfăcute şi ipotezele din Propozitia 2.9.

PROPOZIŢIA 2.12. *Procesul* (γ_t^*) *definit in formula* (2.32) *este admisibil.*

Demonstraţie. Procesul (γ_t^*) este in mod evident $\mathscr{G}$-predictibil. In plus, conform propozitiei 3, observam ca există o constanta C a.i. $-1 < \gamma_t^* \leq C$, pentru orice $t \in [0,T]$, ceea ce implica faptul ca procesul (γ_t^*) este marginit, ceea ce ne conduce la formula $E(L_T^{\gamma^*}) = 1$.

Vom enunţa acum cateva rezultate cunoscute din teoria martingalelor de tipul BMO (pentru o discutie detaliata pe această tema se poate consulta referinţa Kazamaki [**19**]). Fie $p \geq 1$ şi $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ un $\mathscr{G}$-martingal continuu cu $Y_0 = 0$. Procesul Y se numeste un martingal de tipul BMO_p dacă există o constanta $C > 0$ a.i.

$$E\left(|Y_T - Y_\upsilon|^p \mid \mathscr{G}_\upsilon\right) \leq C, \tag{2.50}$$

pentru orice $\mathscr{G}$ timp de stopare υ. Se stie ca dacă Y este un martingal de tipul BMO_q, pentru un $q \geq 1$ oarecare, atunci Y este un martingal de tipul BMO_p pentru orice $p \geq 1$. Din acest motiv martingalele BMO_p se numesc simplu martingale de tipul BMO.

Pentru a arata ca un anumit proces Y este un martingal de tipul BMO, se verifica estimarea (2.50) pentru $p = 2$, i.e.

$$E\left(\langle Y \rangle_T - \langle Y \rangle_\upsilon \mid \mathscr{G}_\upsilon\right) \leq C, \tag{2.51}$$

pentru orice $\mathscr{G}$ timp de stopare υ. Se stie ca procesul exponenţialei stohastice a unui martingal continuu de tipul BMO este un martingal, care este uniform integrabil sub anumite ipoteze suplimentare.

DEFINIŢIA 2.13. *Spunem ca un martingal (posibil) discontinuu Y de patrat integrabil apartine clasei BMO dacă există o* *constanta $C > 0$ a.i.*

$$E\left(\langle Y^c\rangle_T - \langle Y^c\rangle_\upsilon \mid \mathscr{G}_\upsilon\right) \le C, \tag{2.52}$$

şi

$$\Delta Y_\upsilon \le C$$

pentru orice $\mathscr{G}$ timp de stopare υ.

In cazul unui martingal discontinuu Y, o condiţie suficienta care asigura faptul ca procesul exponenţialei stohastice Doleans-Dade este un martingal uniform integrabil este dat de următorul rezultat, al carui enunt poate fi găsit in referinţa Kazamaki [**19**].

LEMA 2.14. *(Criteriul lui Kazamaki) Fie Y un martingal (posibil discontinuu) de tipul BMO (in sensul Definitiei 2.13). Dacă există o constanta $\delta > 0$ a.i. $\Delta Y_t \ge -1+\delta$, pentru orice $t \in [0,T]$, P a.s., atunci procesul $(\mathscr{E}(Y)_t)$ este un martingal uniform integrabil.*

PROPOZIŢIA 2.15. *Procesul $Y_t^\gamma := (R_t L_t^\gamma)^q \Phi_t$ este un $\mathscr{G}$-submartingal pentru orice proces admisibil (γ_t) şi este un martingal pentru procesul (γ_t^*) definit in formula* (2.32).

Demonstraţie. Rescriem dinamica procesului (Y_t^γ), ţinând cont de ecuaţiile (2.33) şi (2.32)

$$\begin{aligned} dY_t^\gamma = {} & Y_t^\gamma \lambda_t \Big[\big(1+\frac{\tilde{\varphi}_t}{\Phi_t}\big)\big((1+\gamma_t)^q - (1+\gamma_t^*)^q\big) - q(\gamma_t - \gamma_t^*)\Big]dt \\ & + Y_t^\gamma\big(\frac{\hat{\varphi}_t}{\Phi_t} - q\mu_t\big)dB_t + Y_{t-}^\gamma\Big(\big(1+\frac{\tilde{\varphi}_t}{\Phi_{t-}}\big)(1+\gamma_t)^q - 1\Big)dM_t. \end{aligned}$$

Rezultă ca Y_t^γ se poate scrie sub urmatoarea forma multiplicativa

(2.53)

$$\begin{aligned}
Y_t^\gamma &= Y_0^\gamma \exp\Big(\int_0^t \lambda_s\big[\big(1+\frac{\tilde{\varphi}_s}{\Phi_s}\big)\big((1+\gamma_s)^q-(1+\gamma_s^*)^q\big)-q(\gamma_s-\gamma_s^*)\big]ds\Big) \\
&\quad \mathscr{E}\Big(\int_0^\cdot (\frac{\hat{\varphi}_s}{\Phi_s}-q\mu_s)dB_s+\int_0^\cdot \big(\big(1+\frac{\tilde{\varphi}_s}{\Phi_{s-}}\big)(1+\gamma_s)^q-1\big)dM_s\Big)_t \\
&= Y_0^\gamma \exp(D_t)\ \exp\big(N_t^c-\frac{1}{2}\langle N^c\rangle_t\big)\prod_{0<s\le t}(1+\Delta N_s).
\end{aligned}$$

In formula de mai sus (D_t) este procesul cu variatie marginita

$$D_t=\int_0^t \lambda_s\big[\big(1+\frac{\tilde{\varphi}_s}{\Phi_s}\big)\big((1+\gamma_s)^q-(1+\gamma_s^*)^q\big)-q(\gamma_s-\gamma_s^*)\big]ds,$$

iar martingalul (discontinuu) (N_t) este dat prin

$$N_t=\int_0^t (\frac{\hat{\varphi}_s}{\Phi_s}-q\mu_s)dB_s+\int_0^t \big(\big(1+\frac{\tilde{\varphi}_s}{\Phi_{s-}}\big)(1+\gamma_s)^q-1\big)dM_s.$$

Partea continuă a procesului N are expresia

$$N_t^c=\int_0^t (\frac{\hat{\varphi}_s}{\Phi_s}-q\mu_s)dB_s-\int_0^t \lambda_s\big(\big(1+\frac{\tilde{\varphi}_s}{\Phi_{s-}}\big)(1+\gamma_s)^q-1\big)ds,$$

şi are variaţia pătratică $\langle N^c\rangle_t=\int_0^t(\frac{\hat{\varphi}_s}{\Phi_s}-q\mu_s)^2ds$. In plus, pe intervale de forma $[0,t]$, pe mulţimea $(\tau\le t)$ procesul N va avea un salt la momentul τ de marime

(2.54)
$$\begin{aligned}
\Delta N_\tau = N_\tau - N_{\tau-} &= \big(1+\frac{\tilde{\varphi}_\tau}{\Phi_{\tau-}}\big)(1+\gamma_\tau)^q-1 \\
&= \int_0^t \big(\big(1+\frac{\tilde{\varphi}_s}{\Phi_{s-}}\big)(1+\gamma_s)^q-1\big)dH_s.
\end{aligned}$$

Rezultă ca

$$\prod_{0<s\le t}(1+\Delta N_s)=1+\int_0^t \big(\big(1+\frac{\tilde{\varphi}_s}{\Phi_{s-}}\big)(1+\gamma_s)^q-1\big)dH_s.$$

Întrucât procesele $(\mu_t), (\gamma_t)$ şi $(\tilde{\varphi}_t)$ sunt marginite şi $\Phi_t > c > 0$, rezultă, utilizând formula (2.54), ca există constantele strict pozitive C şi δ a.i.

$$-1 + \delta \leq \Delta N_t \leq C, \text{ pentru orice } t \in [0, T]$$

şi $\langle N^c \rangle_T \leq C$.

In virtutea Lemei 2.14 deducem ca procesul integralei stohastice $(\mathscr{E}(N)_t)$ este un martingal uniform integrabil. In plus, integrantul ce apare in primul rand al aceleiasi formule ia valori negative pentru orice γ admisibil şi se anuleaza pentru $\gamma = \gamma^*$. Concluzia propozitiei este aratata.

Enuntam acum un prim rezultat principal.

TEOREMA 2.16. *Controlul γ^* definit in ecuaţia* (2.32) *este optimal pentru problema duală* (2.25). *Valoarea finală a portofoliului optimal (pentru problema primală* (2.6)*) este dată de*

$$X_T^* = I\big(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*}\big) = \big(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*}\big)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{2.55}$$

unde multiplicatorul Lagrange λ^* este dat prin

$$\lambda^* = \Big(\frac{x}{E\big[(R_T L_T^{\gamma^*})^q\big]}\Big)^{\frac{1}{q-1}}. \tag{2.56}$$

Demonstraţie. Fie γ un control admisibil. Putem scrie

$$\begin{aligned} E\big[(R_T L_T^{\gamma})^q\big] &= E\big[(R_T L_T^{\gamma})^q \Phi_T\big] = E[Y_T^{\gamma}] \geq E[Y_0^{\gamma}] \\ &= E\big[(R_0 L_0^{\gamma})^q \Phi_0\big] = E\big[\Phi_0\big] = E\big[(R_0 L_0^{\gamma^*})^q \Phi_0\big] \\ &= E[Y_0^{\gamma^*}] = E[Y_T^{\gamma^*}] = E\big[(R_T L_T^{\gamma^*})^q\big], \end{aligned} \tag{2.57}$$

de unde deducem ca γ^* este optimal pentru problema de optimizare duală.

Expresia multiplicatorului optimal λ^* pentru problema de optimizare duală (2.25) este obţinuta scriind conditiile de optimalitate de ordinul I. Avem de rezolvat ecuaţia $\frac{\partial L^{\gamma^*,\lambda}(x)}{\partial \lambda} = 0$ in raport cu λ. Întrucât

$$\frac{\partial L^{\gamma,\lambda}(x)}{\partial \lambda} = x - \lambda^{q-1} E[(R_T L_T^{\gamma^*})^q],$$

se obţine cu uşurinţă forma explicită pentru λ^* dată de formula (2.56). In continuare, pentru a arata ca valoarea optimală a portofoliului la momentul final T este cea din formula (2.55), vom arata urmatoarele afirmaţii

- admisibilitatea primală a lui $X_T^* := \left(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*}\right)^{\frac{1}{p-1}}$;
- "decalajul" de dualitate (*duality gap*) definit prin expresia $J^{\pi^*}(x) - L^{\gamma^*,\lambda^*}(x)$ este zero.

In mod evident regiunile admisibile pentru cele problemele primală şi duală sunt nevide. Este binecunoscut faptul ca pentru orice strategie admisibilă π pentru problema primală (2.6) şi controale admisibile (γ, λ) pentru problema duală (2.25), are loc inegalitatea

$$J^{\pi}(x) \leq L^{\gamma,\lambda}(x),$$

ceea ce înseamnă ca "decalajul" de dualitate $J^{\pi}(x) - L^{\gamma,\lambda}(x)$ este negativ. Luand acum supremumul după toate strategiile admisibile π, precum şi infimumul după toate controalele admisibile (γ, λ), obţinem

$$V(x) \leq \inf_{\gamma,\lambda} L^{\gamma,\lambda}(x).$$

Utilizând acum un rezultat clasic datorat lui Luenberger (conform referinţei [**31**]), deducem ca in situatia in care X_T^* şi (γ^*, λ^*) sunt admisibile (pentru problemele corespunzatoare) şi dacă "decalajul" de dualitate $J^{\pi^*}(x) - L^{\gamma^*,\lambda^*}(x)$ este zero, atunci X_T^* şi (γ^*, λ^*) sunt optimale pentru problemele (2.6), şi respectiv (2.25).

Vom arata ca pentru X_T^* şi (γ^*, λ^*) definiţi in ecuaţiile (2.55), (2.32) şi (2.56) "decalajul" de dualitate este zero. Ţinând cont de formulele (2.32) şi (2.56), rezultă

(2.58)
$$\begin{aligned} L^{\gamma^*,\lambda^*}(x) &= \lambda^* x - \frac{1}{q}(\lambda^*)^q E\left((R_T L_T^{\gamma^*})^q\right) \\ &= \lambda^* x - \frac{1}{q}(\lambda^*)^q \frac{x}{(\lambda^*)^{q-1}} = \frac{1}{p}\lambda^* x \end{aligned}$$

şi

(2.59)
$$E(U(X_T^*)) = \frac{1}{p}(\lambda^*)^q E\left((R_T L_T^{\gamma^*})^q\right) = \frac{1}{p}(\lambda^*)^q \frac{x}{(\lambda^*)^{q-1}} = \frac{1}{p}\lambda^* x,$$

relatii care ne conduc la afirmaţia dorita.

Demonstraţia teoremei este incheiata dacă arătăm admisibilitatea (pentru problema primală) a lui X_T^* dat prin formula (2.55), i.e.

$E^Q(R_T X_T^*) \leq x$, pentru orice măsura martingală echivalentă Q.

Vom arata ca X_T^* definit in formula (2.55) se poate scrie ca valoarea finală asociată unui portofoliu autofinanţat. Conform unor rezultate standard ce sunt adevarate in pieţe financiare incomplete, afirmaţia pe care dorim să o arătăm este echivalentă cu

$$E^{Q_1}(R_T X_T^*) = E^{Q_2}(R_T X_T^*),$$

pentru orice măsuri martingale echivalente Q_1, Q_2
$\Longleftrightarrow$ există o măsură martingală echivalentă Q^* pentru care

$$E^{Q^*}(R_T X_T^*) = \inf_{Q \in \mathscr{M}(P)} E^Q(R_T X_T^*).$$

Vom arata ca

(2.60)
$$x = E^{Q^*}(R_T X_T^*) = E(R_T X_T^* L_T^{\gamma^*}) \leq E^Q(R_T X_T^*) = E(R_T X_T^* L_T^{\gamma}),$$

pentru orice proces $\mathscr{G}$-predictibil (γ), cu $\gamma_t > -1$.

Fie (γ) ca mai sus şi fie L_T^ε o densitate Radon-Nikodym obţinuta ca o combinatie convexă de densităţile L_T^γ şi $L_T^{\gamma^*}$, i.e.

$$L_T^\varepsilon = \varepsilon L_T^\gamma + (1-\varepsilon)L_T^{\gamma^*}, \text{ pentru un } \varepsilon \in [0,1].$$

Ţinând cont de optimalitatea lui γ^*, rezultă

$$\frac{1}{\varepsilon}E(U^*(\lambda^* R_T L_T^\varepsilon) - E(U^*(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*})) \geq 0.$$

Trecând acum la limita după $\varepsilon \to 0$ se obţine

$$E((U^*)'(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*})R_T(L_T^\gamma - L_T^{\gamma^*})) \geq 0,$$

şi ţinând cont de faptul ca $X_T^* = -(U^*)'(\lambda^* R_T L_T^{\gamma^*})$ deducem ca formula (2.60) este adevarata.

2.4. Cazul utilităţii tip putere. O abordare directă

In această secţiune vom rezolva problema de optimizare

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathscr{A}} E[(X_T^\pi)^p], \tag{2.61}$$

utilizând o metodă directă. Dorim să arătăm existenţa unui proces Ψ a.i., definind $Y_t^\pi := (X_t^\pi)^p \exp(\Psi_t)$, familia de procese Y^π (indexata după toate strategiile admisibile π) să satisfaca urmatoarele afirmaţii

(a) $Y_T^\pi = (X_T^\pi)^p$ (i.e. $\Psi_T = 0$);
(b) Y^π este un $\mathscr{G}$-supermartingal, pentru orice $\pi \in \mathscr{A}$;
(c) există o strategie admisibilă π^* pentru care procesul Y^{π^*} este un $\mathscr{G}$-martingal;
(d) valoarea iniţiala Ψ_0 este o constanta determinista ce este independenta de toate strategiile admisibile π.

In acest scop, vom determina o funcţie aleatoare $\tilde{f}(t,\omega,y,z,u)$ definită pe $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3$ a.i. ecuaţia stohastică retrogradă

(EDSR)
(2.62)

$$\Psi_t = 0 - \int_t^T \tilde{f}(s, \Psi_s, \hat{\Psi}_s, \tilde{\Psi}_s)ds - \int_t^T \hat{\Psi}_s dB_s - \int_t^T \tilde{\Psi}_s dM_s$$

admite o soluţie $(\Psi, \hat{\Psi}, \tilde{\Psi})$ ce apartine spatiului $\mathscr{S}^\infty_{\mathscr{G}}(0,T) \times \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(W) \times \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(M)$ şi pentru care proprietatile de mai sus sunt indeplinite. Forma diferenţială a ecuaţiei (2.62) este dată de

$$d\Psi_t = \tilde{f}(t, \Psi_t, \hat{\Psi}_t, \tilde{\Psi}_t)dt + \hat{\Psi}_t dB_t + \tilde{\Psi}_t dM_t,\ \Psi_T = 0. \tag{2.63}$$

Procesul Y^π poate fi scris sub forma multiplicativa $Y^\pi_t = \exp(I^\pi_t)$, cu procesul (I^π_t) dat prin

$$\begin{aligned} I^\pi_t := & \int_0^t \left[pr_s - p\sigma_s\theta_s\pi_s - \frac{p}{2}\sigma_s^2\pi_s^2 + \hat{f}_s - \lambda_s\tilde{\Psi}_s \right] ds \\ & + \int_0^t (p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)dB_s + \int_0^t \tilde{\Psi}_s dH_s, \end{aligned} \tag{2.64}$$

unde $\hat{f}_t := \tilde{f}(t, \Psi_t, \hat{\Psi}_t, \tilde{\Psi}_t)$. In obţinerea acestei expresii am ţinut cont de formulele (2.5), (2.63) precum şi de forma $\mathscr{G}$-martingalului M.

Procesul (continuu la dreapta) I^π are (cel mult) un salt (care apare la momentul τ), salt a carui marime este dat prin $\Delta I^\pi_\tau = \tilde{\Psi}_\tau \Delta H_\tau = \tilde{\Psi}_\tau$. Atunci, pentru $t \in [0,T]$ fixat putem scrie

$$\begin{aligned} \sum_{0<s\le t} \Delta\exp(I^\pi_s) &= \exp(I^\pi_{\tau-})\,(\exp(\Delta I^\pi_\tau) - 1)\, 1_{(\tau\le t)} \\ &= \int_0^t \exp(I^\pi_{s-}) \left(\exp(\tilde{\Psi}_s) - 1\right) dH_s. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Conform formulei lui Itô pentru procese cu salturi rezultă

(2.66)

$$
\begin{aligned}
dY_t^\pi = d\left(\exp(I_t^\pi)\right) = Y_t^\pi \Big[& pr_t - p\sigma_t\theta_t\pi_t - \frac{p}{2}\sigma_t^2\pi_t^2 + \hat{f}_t - \lambda_t\tilde{\Psi}_t \\
& + \frac{1}{2}(p\sigma_t\pi_t + \hat{\Psi}_t)^2 + \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t) - 1)\Big] dt \\
& + Y_t^\pi(p\sigma_t\pi_t + \hat{\Psi}_t)dB_t + Y_{t-}^\pi(\exp(\tilde{\Psi}_t) - 1)dM_t.
\end{aligned}
$$

Notăm prin A^π termenul dintre parantezele drepte din formula de mai sus, i.e.

$$
\begin{aligned}
A_t^\pi := \hat{f}_t + pr_t + \frac{p(p-1)}{2}\sigma_t^2\pi_t^2 + p\sigma_t\pi_t(\hat{\Psi}_t - \theta_t) \\
+ \frac{1}{2}\hat{\Psi}_t^2 + \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t) - \tilde{\Psi}_t - 1).
\end{aligned}
$$

Atunci Y_t^π poate fi scris sub forma multiplicativa

$$
Y_t^\pi = \exp\Big(\int_0^t A_s^\pi ds\Big)\mathscr{E}\Big(\int_0^\cdot (p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)dB_s + \int_0^\cdot (\exp(\tilde{\Psi}_s) - 1)dM_s\Big)_t.
$$

Vom determina generatorul $\hat{f}_\cdot$ al ESDR (2.62) impunand conditiile ca A^π să ia valori negative pentru toate strategiile admisibile π şi să fie egala cu zero pentru o anumita strategie π^*, strategie care vom arata ca este optimală pentru problema noastra. In acest scop, pentru t fixat, vom determina valoarea maxima a aplicaţiei A_t^π (vazuta ca o funcţie depinzand de π_t).

Funcţia de gradul al doilea (cu coeficientul dominant negativ)

$$
g_t(x) := \frac{p(p-1)}{2}\sigma_t^2 x^2 + p\sigma_t(\hat{\Psi}_t - \theta_t)x
$$

isi atinge valoarea maxima in punctul $x = \frac{\hat{\Psi}_t - \theta_t}{(1-p)\sigma_t}$. Fie

$$
\pi_t^* := \frac{\hat{\Psi}_t - \theta_t}{(1-p)\sigma_t}. \tag{2.67}
$$

Valoarea maxima a funcţiei $g_t(\cdot)$ este dată in mod evident de expresia

$$g_t(\pi_t^*) = \frac{p}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t - \theta_t)^2.$$

Punand condiţia ca $A_t^{\pi^*} = 0$, rezultă

$$\hat{f}_t = -\frac{1}{2(1-p)}\hat{\Psi}_t^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t\hat{\Psi}_t - \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t) - \tilde{\Psi}_t - 1)$$
$$- pr_t - \frac{p}{2(1-p)}\theta_t^2.$$

Obţinem atunci urmatoarea formula explicită pentru funcţia aleatoare $\tilde{f}$

(2.68)

$$\tilde{f}(t,\omega,y,z,u) = -\frac{1}{2(1-p)}z^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t(\omega)z - \lambda_t(\omega)(\exp(u)$$
$$- u - 1) - p\, r_t(\omega) - \frac{p}{2(1-p)}\theta_t(\omega)^2.$$

Ne indreptam acum atentia asupra rezolvarii EDSR (2.62) (care admite ca generator aplicaţia $\tilde{f}$ definită mai sus) şi arătăm existenţa unei soluţii. In acest scop vom utiliza tehnici specifice ecuaţiilor stohastice retrograde similare cu cele utilizate in rezolvarea ecuaţiei (2.38). Utilizând procedeul de construcţie a unei soluţii pentru EDSR cu salturi, procedeu initiat, aşa cum am precizat in secţiunea precedenta, de către Kharroubi şi Lim [**22**]. Vom reduce astfel rezolvarea EDSR (2.62) la rezolvarea unui sistem recursiv de ecuaţii stohastice retrograde Browniene, pre-default (înainte de momentul de default τ) şi post-default (după momentul de default τ).

PROPOZIŢIA 2.17. *EDSR* (2.62) *admite o soluţie* $(\Psi, \hat{\Psi}, \tilde{\Psi}) \in \mathscr{S}^\infty_{\mathscr{G}}([0,T]) \times \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}([0,T]) \times \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(M)$.

Demonstraţie. In scopul evidentierii termenului cu salt (*pure jump*), vom rescriem ecuaţia (2.62) sub forma

(2.69)
$$\begin{cases} d\Psi_t &= \Big[-\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t)^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t\hat{\Psi}_t - \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t)-1) \\ & \quad -pr_t - \frac{p}{2(1-p)}\theta_t^2\Big]dt + \hat{\Psi}_t dB_t + \tilde{\Psi}_t dH_t,\ 0 \le t \le T, \\ \Psi_T &= 0. \end{cases}$$

Definim acum următorele sisteme de EDSR Browniene

(2.70)
$$\begin{cases} d\Psi_t^1(u) &= \Big[-\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t^1(u))^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t^1(u)\hat{\Psi}_t^1(u) - pr_t^1(u) \\ & \quad -\frac{p}{2(1-p)}(\theta_t^1(u))^2\Big]dt + \hat{\Psi}_t^1(u)dB_t, \quad u \le t \le T, \\ \Psi_T^1(u) &= 0, \end{cases}$$

şi

(2.71)
$$\begin{cases} d\Psi_t^0 &= \big[-\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t^0)^2 + \frac{p}{1-p}\theta_t^0\hat{\Psi}_t^0 - \lambda_t\big(\exp(\Psi_t^1(t) - \Psi_t^0) \\ & \quad -1\big) - pr_t^0 - \frac{p}{2(1-p)}(\theta_t^0)^2\big]dt + \hat{\Psi}_t^0 dB_t, \quad 0 \le t \le T, \\ \Psi_T^0 &= 0. \end{cases}$$

Familia de EDSR (2.70) este parametrizata după $u \in [0,T]$ (u trebuie interpreţat ca momentul de default) şi este formulata pe intervalul $[u,T]$, din acest motiv vorbim de EDSR post-default.

In conformitate cu presupunerile făcute, se observă ca generatorul EDSR (2.70) (pe care il rescriem ca o funcţie aleatoare $\tilde{f}_u^1(t,z)$) are crestere pătratică in raport cu z şi satisface acelasi tip de estimari ca in referinţa Kobylanski [**23**] (a se vedea ipoteza **(H1)** din articolul citat), uniform in raport cu variabila u. Atunci, conform teoremei 2.3 din referinţa citata mai sus deducem, pentru orice $u \in [0,T]$, existenţa unei soluţii $(\Psi^1(u), \hat{\Psi}^1(u)) \in \mathscr{S}_{\mathscr{F}}^\infty([u,T]) \times \mathscr{H}_{\mathscr{F}}^2([u,T])$. $\Psi^1(u)$ poate fi ales un proces cu traiectoriile continue. urmând demonstraţia rezultatului citat, se obţine ca familia proceselor $\Psi^1(u)$ este uniform marginita (a se vedea [**23**], Teorema 2.3, pagina 571).

Fie $K > 0$ a.i. $\lambda_t \le K$, P a.s. şi fie $c = -KT$. considerăm acum EDSR

(2.72)
$$\begin{cases} d\Psi^0_t &= \Big[-\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}^0_t)^2 + \frac{p}{1-p}\theta^0_t\hat{\Psi}^0_t - \lambda_t\big(\exp(\Psi^1_t(t)\\ & \quad -(\Psi^0_t \vee c)) - 1\big) - pr^0_t - \frac{p}{2(1-p)}(\theta^0_t)^2\Big]dt + \hat{\Psi}^0_t dB_t, \\ \Psi^0_T &= 0. \end{cases}$$

Generatorul acestei EDSR satisface acelasi tip de estimari ca in [**23**] (ipoteza **(H1)**), întrucât procesul $\Psi^1_\cdot(\cdot)$ este marginit (in virtutea marginirii uniforme a procesului $\Psi^1(u)$), şi de asemenea $0 < \exp(-(y \vee c)) \le e^{-c}$. Utilizând din nou Teorema 2.3 din referinţa [**23**] deducem existenţa unei soluţii $(\Psi^0, \hat{\Psi}^0) \in \mathscr{S}^\infty_{\mathscr{F}}([0,T]) \times \mathscr{H}^2_{\mathscr{F}}([0,T])$ a EDSR (2.72). Ψ^0 poate fi ales un proces cu traiectoriile continue.

Fie $t \in [0,T]$. Scriem

(2.73)
$$\Psi^0_t - \Psi^0_T = \Psi^0_t = \int_t^T \Big[\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}^0_s)^2 - \frac{p}{1-p}\theta^0_s\hat{\Psi}^0_s + \lambda_s\big(\exp(\Psi^1_s(s)$$
$$-(\Psi^0_s \vee c)) - 1\big) + pr^0_s + \frac{p}{2(1-p)}(\theta^0_s)^2\Big]ds - \int_t^T \hat{\Psi}^0_s dB_s.$$

Procesul $B^\theta_t := B_t + \frac{p}{1-p}\int_0^t \theta^0_s ds$ este o mişcare Browniana standard in raport cu măsura de probabilitate echivalentă Q^θ, a carei densitate Radon-Nikodym in raport cu $P|_{\mathscr{G}_T}$ are expresia $Z^\theta_T := \mathscr{E}\left(\int_0^\cdot \frac{p}{p-1}\theta^0_s dB_s\right)_T$. Procesul $(\int_0^\cdot \hat{\Psi}^0_s dB^\theta_s)$ este un $\mathscr{G}$-martingal (local) sub Q^θ.

Definim, pentru orice numar natural $n \ge 1$, momentul aleator $\tau_n := \inf\{t \in [0,T] \mid \int_0^t (\hat{\Psi}^0_s ds)^2 \ge n\}$, care este un $\mathscr{G}$-timp de stopare. Atunci $\tau_n \uparrow T$ atunci când $n \to \infty$ şi pentru fiecare n, procesul $(\int_0^{\cdot\wedge\tau_n} \hat{\Psi}^0_s dB^\theta_s)$ este un martingal adevarat (nu numai local). Rezultă atunci ca $E^{Q^\theta}(\int_{t\wedge\tau_n}^{T\wedge\tau_n}\hat{\Psi}^0_s dB^\theta_s) = 0$ şi putem scrie

(2.74)

$$\begin{aligned}\Psi^0_{t\wedge\tau_n} &= E^{Q^\theta}\left[\Psi^0_{T\wedge\tau_n}|\mathscr{G}_{t\wedge\tau_n}\right]\\ &= \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} E^{Q^\theta}\Big\{\Big[\frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}^0_s)^2 + \lambda_s\big(\exp(\Psi^1_s(s)\\ &\quad -(\Psi^0_s\vee c)) - 1\big) + pr^0_s + \frac{p}{2(1-p)}(\theta^0_s)^2\Big]\Big|\mathscr{G}_{t\wedge\tau_n}\Big\}ds\\ &\geq \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} E^{Q^\theta}(-\lambda_s|\mathscr{G}_{t\wedge\tau_n})ds \geq c,\end{aligned}$$

de unde deducem, prin trecere la limita după $n\to\infty$ ca $\Psi^0_t \geq c$. In consecinţă, am demonstrat ca perechea $(\Psi^0, \hat{\Psi}^0)$ este o soluţie a ecuaţiei (2.72).

Definim acum

$$\begin{aligned}\Psi_t &:= \Psi^0_t 1_{(t<\tau)} + \Psi^1_t(\tau)1_{(t\geq\tau)},\\ \hat{\Psi}_t &:= \hat{\Psi}^0_t 1_{(t<\tau)} + \hat{\Psi}^1_t(\tau)1_{(t\geq\tau)},\\ \tilde{\Psi}_t &:= (\Psi^1_t(t) - \Psi^0_t)1_{(t<\tau)}.\end{aligned} \tag{2.75}$$

Concluzia propozitiei este acum evidenta, in virtutea teoremei 3.1. din referinţa Kharroubi, Lim ([**22**]).

PROPOZIŢIA 2.18. *Procesul Y^π este un $\mathscr{G}$-supermartingal pentru orice strategie admisibilă π.*

Demonstraţie. Procesul Y^π_t poate fi scris sub forma exponenţială ca

(2.76)

$$Y^\pi_t = \exp\Big(\int_0^t A^\pi_s ds\Big)\mathscr{E}\Big(\int_0^\cdot (p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)dB_s + \int_0^\cdot(\exp(\tilde{\Psi}_s)-1)dM_s\Big)_t.$$

Integrala Riemann $\int_0^t A^\pi_s ds$, privita ca o funcţie in variabila t este o funcţie monoton descrescatoare, datorită faptului ca integrantul ia valori negative. Martingalul cu salturi ce apare in cadrul exponenţialei stohastice din formula de mai sus are cel mult un salt la momentul aleator τ, salt de marime $\exp(\tilde{\Psi}_\tau) - 1 \geq -1+\delta, P\, a.s.$, (pentru o constanta strict pozitivă δ), întrucât procesul $\tilde{\Psi}$ este marginit. Apoi, pentru a arata ca procesul integralei stohastice este un $\mathscr{G}$-martingal uniform integrabil, este suficient să arătăm ca procesul $\int_0^{\cdot}(p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)dB_s$ este un martingal de tipul BMO (in sensul definiţiei 2) ce satisface ipotezele Criteriului lui Kazamaki. In acest scop, dorim să obţinem o estimare similara cu (2.51). Vom arata ca există o constanta $C > 0$ a.i.

$$E\Big(\int_\upsilon^T (p\sigma_s\pi_s + \hat{\Psi}_s)^2 \,\Big|\, \mathscr{G}_\upsilon\Big) \leq C,$$

pentru orice $\mathscr{G}$ timp de stopare υ.

Arătăm mai întâi ca procesul $\int_0^{\cdot} \hat{\Psi}_s dB_s$ este un martingal de tipul BMO.

Fie $\tilde{M}$ o constanta strict pozitivă şi fie $\delta > 0$ a.i. $\Psi_t \leq \tilde{M} - \delta$, P a.s., pentru orice $t \in [0,T]$. Fie de asemenea υ un $\mathscr{G}$ timp de stopare arbitrar. Aplicam formula lui Itô pentru procese cu salturi procesului $(\Psi_t - \tilde{M}_t)$ pe intervalul $[\upsilon, T]$. Se obţine

$$\begin{aligned}(\Psi_\upsilon - \tilde{M})^2 - \tilde{M}^2 &= 2\int_\upsilon^T (\Psi_s - \tilde{M})\bar{f}_s ds - 2\int_\upsilon^T (\Psi_s - \tilde{M})\hat{\Psi}_s dB_s \\ &\quad - \int_\upsilon^T (\hat{\Psi}_s)^2 ds + \big[(\Psi_\tau - \tilde{M})^2 - (\Psi_{\tau-} - \tilde{M})^2\big] 1_{\upsilon\leq\tau\leq T}\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}\bar{f}_t &:= \frac{1}{2(1-p)}(\hat{\Psi}_t)^2 - \frac{p}{1-p}\theta_t\hat{\Psi}_t + \lambda_t(\exp(\tilde{\Psi}_t) - 1) + pr_t \\ &\quad + \frac{p}{2(1-p)}\theta_t^2 \geq -\frac{p}{1-p}\theta_t\hat{\Psi}_t - \lambda_t.\end{aligned}$$

Asadar

$$
\begin{aligned}
E\Big(\int_{\upsilon}^{T}(\hat{\Psi}_s)^2 ds \,\Big|\, \mathscr{G}_{\upsilon}\Big) &\leq -E\big[(\Psi_{\upsilon}-\tilde{M})^2 \mid \mathscr{G}_{\upsilon}\big]+\tilde{M}^2 \\
&\quad + 2E\Big[\int_{\upsilon}^{T}(\Psi_s-\tilde{M})\bar{f}_s ds \,\Big|\, \mathscr{G}_{\upsilon}\Big]+C \\
&\leq C+2\delta E\Big[\frac{p}{1-p}\theta_t\hat{\Psi}_t+\lambda_t \,\Big|\, \mathscr{G}_{\upsilon}\Big] \\
&\leq C+CE\Big(\int_{\upsilon}^{T}|\hat{\Psi}_s+1|ds \,\Big|\, \mathscr{G}_{\upsilon}\Big) \\
&\leq C+\frac{1}{2}E\Big(\int_{\upsilon}^{T}(\hat{\Psi}_s)^2 ds \,\Big|\, \mathscr{G}_{\upsilon}\Big),
\end{aligned}
$$

unde $C > 0$ este o constanta generica ce poate varia de la rand la rand in formula de mai sus.

Intr-un mod asemanator se poate arata ca şi procesul $\int_0^{\cdot} \sigma_s \pi_s dB_s$ este un martingal de tipul BMO, fapt ce va rezulta ca o consecinţă a estimarii

$$
E\Big(\int_{\upsilon}^{T}\pi_s^2 ds \mid \mathscr{G}_{\upsilon}\Big) \leq C, \text{ pentru orice } \mathscr{G}-\text{timp de stopare } \upsilon.
$$

Concluzia propozitiei va rezulta adevarată in urma aplicării unui procedeu standard de localizare, utilizând faptul ca procesul exponenţialei stohastice ce apare in formula (2.76) este un martingal uniform integrabil.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este dat de urmatoarea teorema.

TEOREMA 2.19. *Strategia* π^* *definită in formula* (3.34) *este optimală pentru problema* (2.61). *In plus, funcţia valoare asociată aceleiasi probleme de optimizare are expresia*

$$
V(x) = x^p \exp(\Psi_0), \tag{2.77}
$$

unde Ψ *este o soluţie a ecuaţiei* (2.69).

Demonstraţie. Pentru a arata ca strategia π^* este admisibilă, vom verifica ca procesul $\pi^* \in \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}([0,T])$. Această afirmaţie este o consecinţă imediată a faptului ca procesele σ şi θ sunt marginite şi ca $\hat{\Psi} \in \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}([0,T])$.

Ţinând cont de faptul ca $A^{\pi^*} = 0$, deducem ca procesul Y^{π^*} este un $\mathscr{G}$-martingal. Mai mult, in virtutea afirmaţiilor $(a)-(d)$ satisfăcute de procesul Y^{π}, dacă π este o strategie admisibilă oarecare obţinem

$$\begin{aligned} E[(X_T^{\pi})^p] &= E(Y_T^{\pi}) \leq E(Y_0^{\pi}) = x^p \exp(\Psi_0) = E(Y_0^{\pi^*}) \\ &= E(Y_T^{\pi^*}) = E[(X_T^{\pi^*})^p], \end{aligned} \tag{2.78}$$

de unde deducem atât optimalitatea strategiei π^* cat şi forma explicită a funcţiei valoare V.

CAPITOLUL 3

O problemă de optimizare cu un activ supus riscului de credit

In acest capitol studiem o problema de optimizare de portofolii într-o piaţă financiară cu oportunităţi de investiţii date de un activ fără risc (*bond*), un activ riscat supus riscului de piaţă (*stock*)şi un activ riscat supus riscului de contrapartidă (i.e. există riscul ca firma emitatoare a activului să nu-şi indeplineasca la un anumit moment de timp aleator (necunoscut apriori) fata de un potential investitor obligaţiile asumate printr-un contract). Lucram sub ipoteza de imersie **(H)** şi presupunem in plus existenţa *densităţii conditionale* pentru momentul aleator τ, ipoteza ce se va dovedi extrem de utila in studiul problemei de optimizare post-default. Privitor la activul supus riscului de contrapartidă am presupus ca in caz de *default* (nerespectare a obligaţiilor contractuale vis-a-vis de investitor a firmei ce a emis activul respectiv), investitorul primeşte o compensaţie ce este dată de un anumit procent din valoarea de piaţă a activului chiar înainte de producerea defaultului (*Recovery of Market Value RMV*), iar după momentul de default activul nu mai este tranzacţionat.

Vom obţine o formulă pentru dinamica valorii portofoliului. Vom rezolva direct problema de optimizare in cazul utilităţii de tip logaritmic. Descriem apoi o metodă generală de rezolvare in cazul utilitatilor din clasa HARA in care am utilizat ca sursa de inspiraţie referinţa Jiao şi Pham [**18**]. Cei doi autori descompun problema de optimizare originală in două subprobleme, una înainte de default şi cealaltă după default, ambele probleme fiind formulate in pieţe complete (care poseda proprietatea de existenţa a unei *unice măsuri martingale echivalente*). Vom caracteriza soluţia problemei post-default cu ajutorul metodei martingale duale, utilizând presupunerea facuta privind existenţa densităţii conditionale a momentului aleator τ. In plus, in cazul unei funcţii de utilitate de tip putere, am presupus ca defaultul apare cu probabilitatea 1 pana la orizontul T al procesului de investiţie şi coeficienţii modelului sunt funcţii deterministe. Având forma explicită a procesului valorii portofoliului, rezolvăm mai întâi problema post-default ca o problema de control optimal cu timp şi stare iniţiale aleatoare, iar apoi tratam separat problema pre-default, care este problema de optimizare in orizont aleator şi pe care o formulăm ca o problema de control optimal stohastic. Formulăm un rezultat de verificare (bazat pe un rezultat clasic dat de Teorema 3.1, referinţa Fleming şi Soner [**13**]), care constituie un instrument de bază in cadrul programării dinamice, respectiv definirea corespunzatoare a unei *ecuaţii diferentiale cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman* ce este satisfăcută in general de funcţia valoare a problemei de optimizare (atunci când aceasta posedă suficiente proprietati de regularitate). Arătăm ca funcţia valoare satisface ecuaţia HJB şi determinăm strategiile pre-default optimale, urmând un procedeu de separare a variabilelor in cadrul funcţiei valoare.

3.1. Specificarea cadrului şi a ipotezelor de lucru

Se consideră un spatiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, inzestrat cu o filtraţie $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, dată de versiunea continuă la dreapta a filtratiei naturale generate de o mişcare Browniana unidimensionala, completata cu multimile P-neglijabile. Această filtraţie este denumita in literatura de specialitate filtraţia *de referinţa* sau filtraţia *pieţii*. Probabilitatea P se numeste probabilitatea *istorica*, sau probabilitatea de referinţa. Vom studia problema de optimizare a portofoliului financiar pentru un investitor pe o piaţă financiară cu urmatoarele oportunităţi de investiţie:

- un activ fără risc (*savings account*), de exemplu un depozit bancar la termen sau un cont de economii;
- un activ cu risc (*stock*) (tranzacţionat pe o piaţă financiară reglementata, de exemplu Bursă de Valori) ce nu este supus riscului de contrapartidă;
- o obligaţiune emisa de o companie privata (*corporate bond*) ce poate intra in incapacitate de plata sau poate decide ca la un moment aleator de timp să refuze indeplinirea obligaţiilor contractuale vis-a-vis de un investitor, existand astfel riscul de contrapartidă (de default).

Vom presupune ca procesul investiţional are orizontul finit T.

Dinamică preţului activului fără risc are forma

$$dR(t) = R(t)r(t)dt. \tag{3.1}$$

Procesul stohastic generat de preţul activului cu risc este o mişcare Browniana geometrica cu coeficienţi neomogeni

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)).$$

Presupunem ca $r \geq 0$, μ, $\sigma \geq 0$ sunt procese $\mathscr{F}$-adaptate marginite , cu $\sigma(t) > c$, P a.s., c fiind o constanta strict pozitivă. Rata dobânzii r este numită şi *short interest rate*. Definim $\theta(t) := \frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}$, expresie care este cunoscuta ca *preţul de piaţă al riscului* (*market price of risk*).

Activul ce este supus riscului de contrapartidă poate da default la un moment aleator de timp τ care nu poate fi anticipat, ci doar observat imediat după apariţie. Această noua informaţie se adauga informaţiei deja disponibile investitorului (care este dată de preţurile activelor tranzacţionate ce nu dau default). Ca şi in capitolul precedent, vom utiliza abordarea formei reduse (*reduced form approach*), numită şi abordarea prin intensitatea defaultului (*intensity approach*). Presupunem

- $P(\tau = 0) = 0$ (defaultul nu poate aparea la momentul demararii procesului de investiţie);
- Pentru orice $t \in [0,T]$, $P(\tau > t) > 0$ (defaultul poate aparea la orice moment de timp).

Notăm, pentru fiecare $t \in [0,T]$, prin $H_t := 1_{(\tau \leq t)}$, procesul ce ne indica aparitia defaultului pana la momentul de timp t şi fie $\mathscr{G}$ cea mai mică filtraţie ce conţine filtraţia de referinţa $\mathscr{F}$ şi in raport cu care τ este un timp de stopare, ce este definită prin

$$\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_t \vee \sigma(H_s; s \leq t) = \mathscr{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge t).$$

Acest procedeu se numeste procedeul de largire progresiva a filtratiei iniţiale $\mathscr{F}$ (*progressive enlargement of filtration*) iar filtraţia $\mathscr{G}$ se numeste *filtraţia lărgită* (*enlarged filtration*), sau *filtraţia completă* (*complete filtration*). Se observă ca pentru $t < \tau$ (înainte de default) cele două filtratii coincid.

Presupunem ca piaţa financiară definită mai sus este lipsita de oportunitatea de arbitraj (nu sunt permise acumularile de capital fără asumarea niciunui risc), ceea ce înseamnă din punct de vedere matematic ca există cel puţin o *măsura martingală echivalentă Q*, sub care preţurile actualizate ale activelor (in raport cu rata dobânzii r asociată activului fără risc) sunt *$\mathscr{G}$-martingale*. Aparitia posibila (in mod neasteptat) a defaultului implica faptul ca piaţă financiară este incompleta, insemnand ca mulţimea măsurilor martingale echivalente conţine mai mult de un singur element Q. Presupunem in continuare ca este fixata o astfel de măsura martingală echivalentă Q.

Presupunem de asemenea ca are loc proprietatea de invarianţă martingală intre filtratiile $\mathscr{F}$ şi $\mathscr{G}$, cunoscuta şi ca ipoteza (**H**). Aceasta înseamnă ca orice $\mathscr{F}$-martingal (de patrat integrabil) este şi un $\mathscr{G}$-martingal (de patrat integrabil).

In scopul evaluarii preţului activului ce este supus riscului de contrapartidă (in conformitate cu abordarea martingală), vom presupune ca procesul (H_t) admite, sub măsura de probabilitate Q, un compensator absolut continuu in raport cu măsura Lebesgue. Există astfel un proces $\mathscr{G}$-adaptat $(\tilde{\lambda}^{\mathscr{G}}(t))$, cu $\tilde{\lambda}^{\mathscr{G}}(t) = 0$ pe mulţimea $(t > \tau)$ (întrucât, conform presupunerilor făcute există riscul apariţiei unui singur default), a.i. procesul compensat

$$\tilde{M}(t) := H_t - \int_0^t \tilde{\lambda}^{\mathscr{G}}(s)ds \tag{3.2}$$

este un $\mathscr{G}$-martingal sub Q. $(\tilde{\lambda}^{\mathscr{G}}(t))$ se numeste *$\mathscr{G}$-intensitatea defaultului* τ (sau rata de hazard (*hazard rate*)) sub probabilitatea Q. Aceasta poate fi scrisa sub forma $\tilde{\lambda}^{\mathscr{G}}(t) = 1_{(t\leq\tau)}\tilde{\lambda}^{\mathscr{F}}(t)$, unde procesul $(\tilde{\lambda}^{\mathscr{F}}(t))$ este $\mathscr{F}$-adaptat şi se numeste *$\mathscr{F}$-intensitatea defaultului* sub Q. In loc de $\tilde{\lambda}^{\mathscr{F}}$ vom scrie simplu $\tilde{\lambda}$.

Notăm de asemenea prin λ $\mathscr{F}$-intensitatea defaultului τ sub probabilitatea istorica P, ceea ce înseamnă ca procesul $(M(t))$ definit prin

$$M(t) := H_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda(s)ds = H_t - \int_0^t (1 - H_s)\lambda(s)ds \tag{3.3}$$

este un $\mathscr{G}$-martingal sub P.

In continuare vom da o metodă de construcţie a unui moment de default τ cu o intensitate dată (numită şi metodă canonică) şi pentru care are loc ipoteza(**H**). Această procedură este cunoscuta sub numele de *metodă canonică de construcţie a lui* τ.

OBSERVAŢIA 3.1. *Presupunem ca pe un spatiu de probabilitate* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *este dat un proces $\mathscr{F}$-predictibil* γ_t *ce ia valori pozitive (ce va juca rolul de $\mathscr{F}$-intensitate a defaultului) şi fie* η *o variabila aleatoare independenta de filtraţia* $\mathscr{F}$ *ce urmeaza o* *repartitie uniformă. Definim momentul aleator (defaultul) τ prin*

$$\tau := \inf\left\{t \geq 0 \mid \int_0^t \gamma_s ds \geq \eta\right\}.$$

Se poate arata ca

$$P(\tau \leq t|\mathscr{F}_t) = P(\tau \leq t|\mathscr{F}_\infty),$$

ceea ce reprezintă o condiţie suficienta pentru ca ipoteza **(H)** *să aiba loc.*

Întrucât măsura Q este absolut continuă in raport cu P (pe $\mathscr{G}_T$), deducem existenţa densităţii Radon-Nikodym $Z(T) := \frac{dQ}{dP}|_{\mathscr{G}_T}$, ce este o variabila aleatoare $\mathscr{G}_T$-măsurabilă ce ia valori pozitive, şi $E(Z(T)) = 1$. Procesul densităţilor Radon-Nikodym $Z(t) := E(Z(T)|\mathscr{G}_t)$, cu $0 \leq t \leq T$ este un $\mathscr{G}$-martingal sub P, şi conform teoremei de reprezentare pentru martingale $\mathscr{G}$-predictibile a lui Kusuoka (a se vedea referinţa Kusuoka [**26**]), rezultă

$$dZ(t) = Z(t-)(\eta(t)dW(t) + \gamma(t)dM(t)),\ Z(0) = 1, \tag{3.4}$$

unde $(\eta(t)), (\gamma(t))$ sunt procese $\mathscr{G}$-predictibile, cu $\gamma(t) > -1$, P a.s.

Dacă X este un $\mathscr{G}$-semimartingal discontinuu (presupus continuu la dreapta şi având limite finite la stânga), exponenţiala stohastică Doléans-Dade $(\mathscr{E}(X.)_t)$ se defineste prin

$$\mathscr{E}(X.)_t = \exp\left(X_t^c - \frac{1}{2}[X^c, X^c]_t\right) \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s),$$

unde X^c reprezintă partea continuă a lui X şi $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ reprezintă marimea saltului procesului X la momentul s. $\mathscr{E}(X.)$ reprezintă soluţia ecuaţiei diferentiale stohastice

$$dZ^X(t) = Z^X(t-)dX_t,\ Z^X(0) = 1.$$

Fie

$$
\begin{aligned}
Y(t) &:= \int_0^t \eta(s)dW(s) + \int_0^t \gamma(s)dM(s) \\
&= \int_0^t \eta(s)dW(s) - \int_0^t (1-H_s)\lambda(s)\gamma(s)ds + \int_0^t \gamma(s)dH_s.
\end{aligned}
$$

Fie $t \in [0,T]$ fixat. Y are cel mult un salt in intervalul $[0,t]$ (la momentul τ, dar numai dacă $\tau \le t$), salt de marime $\Delta Y(\tau) = \gamma(\tau)\Delta H_\tau = \gamma(\tau)$. Atunci, pe mulţimea $(\tau \le t)$,

$$
\begin{aligned}
\prod_{0<s\le t}(1+\Delta Y_s) = 1+\gamma(\tau) &= \exp\big(\ln(1+\gamma(\tau))\Delta H_\tau\big) \\
&= \exp\big(\int_0^t \ln(1+\gamma(s))dH_s\big).
\end{aligned}
$$

Pe mulţimea $(\tau > t)$ integrala de pe ultimul rand al formulei precedente este egala cu 0, iar in acest caz partea discontinua a lui Y nu aduce nici o contribuţie la calculul mediei $\mathscr{E}(Y.)_t$. Putem atunci enunţa

PROPOZIŢIA 3.2. *Soluţia EDS* (3.4) *este dată de exponenţiala stohastică*

$$
\begin{aligned}
Z(t) = \mathscr{E}(Y.)_t = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_0^t \eta^2(s)ds + \int_0^t \eta(s)dW(s)\big) \\
\exp\big(\int_0^t \ln(1+\gamma(s))dH_s - \int_0^{t\wedge\tau}\gamma(s)\lambda(s)ds\big).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

In plus, procesul

$$
\tilde{W}(t) := W(t) - \int_0^t \eta(s)ds
$$

este o mişcare Browniana standard sub Q, iar procesul

$$
\bar{M}_t := M_t - \int_0^{t\wedge\tau}\gamma(s)\lambda(s)ds = H_t - \int_0^{t\wedge\tau}(1+\gamma(s))\lambda(s)ds
\tag{3.6}
$$

este un $\mathscr{G}$-martingal discontinuu sub Q, ortogonal lui $\tilde{W}(t)$.

Comparand ecuaţiile (3.6) and (3.3) observam ca in mod necesar are loc egalitatea $\tilde{M}_t = \bar{M}_t, \forall t \in [0,T]$ iar intre $\mathscr{F}$-intensitatile defaultului τ sub Q, respectiv P are loc relatia

$$\tilde{\lambda}(t) = (1+\gamma(t))\lambda(t).$$

Notăm prin $\tilde{S}(t) := e^{-\int_0^t r(s)} S(t)$ preţul actualizat al activului cu risc. Conform formulei lui Itô, rezultă

$$\begin{aligned} d\tilde{S}(t) &= \tilde{S}(t)((\mu(t)-r(t))\,dt + \sigma(t)dW(t)) \\ &= \tilde{S}(t)((\mu(t)-r(t)+\sigma(t)\eta(t))\,dt + \sigma(t)d\tilde{W}(t)). \end{aligned}$$

Întrucât preţul actualizat al activelor tranzacţionate trebuie să fie un $\mathscr{G}$-martingal sub Q, rezultă ca termenul cu variatie marginita din formula de mai sus trebuie să se anuleze. Asadar $\eta(t) = \frac{r(t)-\mu(t)}{\sigma(t)} := -\theta(t)$. Dinamică lui S_t sub Q este dată de

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma(t)d\tilde{W}(t))$$

şi remarcam ca sub o măsura martingală echivalentă rata dobânzii asteptate pentru activul cu risc este egala cu rata dobânzii fără risc r (numită şi *short interest rate*).

In continuare ne propunem să obţinem o formula explicită pentru procesul preţului activului supus riscului de contrapartidă. Procesul asociat al dividendelor $D(t)$ este definit prin

$$D(t) := X1_{(\tau>T)} + z_\tau 1_{(\tau\le t)} = X1_{(\tau>T)} + \int_0^t z_s dH_s,\ t \le T, \tag{3.7}$$

unde X reprezintă suma primita de investitor (la momentul T) in cazul neapariţiei defaultului iar $(z(t))$ reprezintă procesul compensatiilor primite in cazul producerii defaultului. Expresia $D_u - D_t$ reprezintă toate incasarile intre momentele de timp t şi u a unei persoane ce a cumparat la momentul t o unitate din acest tip de activ. Atunci, conform cu referinţa Bielecki and Rutkovski [**2**], Sectiunea 8.3, rezultă ca preţul la momentul t al unei unitati de activ cu maturitatea T este dat de formula

(3.8)

$$\begin{aligned}
D(t,T) &= E^{Q}\Big(\int_t^T e^{-\int_t^s r(u)du} dD(s)\big|\mathscr{G}_t\Big)\\
&= E^{Q}\big(1_{(\tau>T)}e^{-\int_t^T r(u)du}X + 1_{(t<\tau\leq T)}e^{-\int_t^\tau r(u)du}z_\tau\big|\mathscr{G}_t\big)\\
&= 1_{(\tau>t)}E^{Q}\big(e^{-\int_t^T (r(u)+\tilde{\lambda}(u))du}X\\
&\quad + \int_t^T e^{-\int_t^s (r(u)+\tilde{\lambda}(u))du}z(s)\tilde{\lambda}(s)ds\big|\mathscr{F}_t\big),
\end{aligned}$$

unde prin E^Q am notat operatorul de medie in raport cu probabilitatea Q. Adoptam in continuare modelul de compensare in cazul apariţiei defaultului dată de valoarea de piaţă a defaultului *Recovery of the Market Value of default RMV* (conform cu Duffie, Singleton ([**7**]) sau monografia Bielecki, Rutkovski ([**2**])). Se presupune astfel ca la momentul apariţiei defaultului (dacă acesta se produce) activul nu mai este tranzacţionat iar cumparatorul obligaţiunii primeşte o compensaţie dată de un procent $(1-L(t))$ din valoarea obligaţiunii chiar înainte de producerea defaultului $D(\tau-,T)$, dacă $\tau<T$. Astfel, compensatia are forma $z(t)=(1-L(t))D(t-,T)$. Presupunem ca $0<L(t)<1$, $Pa.s$. Atunci

$$\begin{aligned}
D(t,T) &= 1_{(\tau>t)}E^{Q}\left(e^{-\int_t^T (r(s)+\tilde{\lambda}(s)L(s))ds)}X|\mathscr{F}_t\right)\\
&:= 1_{(\tau>t)}B(t,T)=\tilde{H}_tB(t,T).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Am notat $\tilde{H}_t := 1-H_t$ iar $B(t,T)$ reprezintă valoarea chiar înainte de default a obligaţiunii, care este dată de valoarea unei obligaţiuni nesupuse riscului de contrapartidă cu rata dobânzii ajustata in funcţie de riscul datorat apariţiei posibile a defaultului (*default risk adjusted interest rate*) $\hat{r}(t) := r(t)+\tilde{\lambda}(t)L(t)$, cu termenul de corectie (spreadul) dat de $\tilde{\lambda}(t)L(t)$. Conform formulei (3.9), se obţine urmatoarea formula pentru compensatia primita in cazul defaultului

$$z(\tau) = (1 - L(\tau))D(\tau-, T) = (1 - L(\tau))B(\tau, T).$$

Presupunem in continuare, fără a diminua generalitatea, ca valoarea X primita la maturitate in cazul neapariţiei defaultului este egala cu o unitate monetara.

3.2. Rezultate ajutătoare

3.2.1. Dinamică preţului activului cu default sub probabilitatea istorică. Se observă fără dificultate ca procesul densităţilor Radon-Nikodym pentru probabilitatea absolut continuă Q (in raport cu P) este dat de $\frac{dQ}{dP}|_{\mathscr{F}_t} = Z^{\mathscr{F}}(t)$, unde

$$Z^{\mathscr{F}}(t) = \exp\big(-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds\big).$$

utilizând regula lui Bayes pentru medii condiţionate (conform referinţei [**25**], lema 3.5.3) rezultă

$$\tilde{m}(t) := E^Q\big(e^{-\int_0^T \hat{r}(s)ds}\big|\mathscr{F}_t\big) = (Z^{\mathscr{F}}(t))^{-1}E\big(e^{-\int_0^T \hat{r}(s)ds}Z^{\mathscr{F}}(T)\big|\mathscr{F}_t\big).$$

Fie $m(t) := E\big(e^{-\int_0^T \hat{r}(s)ds}Z^{\mathscr{F}}(T)\big|\mathscr{F}_t\big)$. Aplicând mai întâi teorema de reprezentare a martingalelor Browniene (conform referinţei [**25**], teorema 3.4.2) $\mathscr{F}$-martingalului pozitiv $(m(t))$, şi apoi formula lui Itô procesului $(\ln(m(t)))$ (pentru mai multe detalii se poate consulta referinţa Lamberton, Lapeyre ([**27**]), Propozitia 6.1.1.), deducem existenţa unui proces $\mathscr{F}$-adaptat $(q(t))$ a.i.

$$m(t) = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_0^t q^2(s)ds + \int_0^t q(s)dW(s)\big).$$

Se obţine astfel

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= B(0,T)\exp\Big(\int_0^t \hat{r}(s)ds\Big)(Z^{\mathscr{F}}(t))^{-1}m_t \\
&= B(0,T)\exp\Big(\int_0^t \big(\hat{r}(s)+\frac{1}{2}(\theta^2(s)-q^2(s))\big)ds \qquad (3.10)\\
&\quad + \int_0^t (\theta(s)+q(s))dW(s)\Big).
\end{aligned}
$$

Aplicând acum formula lui Itô procesului exponential $(B(t,T))$, deducem

$$
\begin{aligned}
dB(t,T) &= B(t,T)\big[\big(\hat{r}(t)+\frac{1}{2}(\theta^2(t)-q^2(t))\big)ds \\
&\quad + (\theta(t)+q(t))dW(t)+\frac{1}{2}(\theta(t)+q(t))^2dt\big] \qquad (3.11)\\
&= B(t,T)\big((\hat{r}(t)+\theta(t)\beta(t))dt+\beta(t)dW(t)\big),
\end{aligned}
$$

unde $\beta(t) := \theta(t)+q(t)$.

Reamintim ca $D(t,T) = \tilde{H}_t B(t,T)$, $H_t = M(t)+\int_0^t \tilde{H}_s\lambda(s)ds$. Atunci, prin aplicarea formulei lui Itô pentru procese cu salturi, obţinem dinamica preţului activului supus riscului de contrapartidă sub probabilitatea P

$$
\begin{aligned}
dD(t,T) &= \tilde{H}_{t-}dB(t,T)+B(t-,T)d\tilde{H}_t+d\Big(\sum_{0<s\le t}\Delta\tilde{H}_s\Delta B(s,T)\Big) \\
&= \tilde{H}_t dB(t,T)-B(t,T)dH_t = \tilde{H}_t dB(t,T)-B(t,T)\tilde{H}_{t-}dH_t \\
&= \tilde{H}_t B(t,T)\big((\hat{r}(t)+\theta(t)\beta(t))dt+\beta(t)dW(t)\big) \\
&\quad - B(t,T)\tilde{H}_{t-}(dM(t)+\lambda(t)\tilde{H}_t dt) \\
&\quad + \beta(t)dW(t)\big) - D(t-,T)dM(t) \\
&= D(t,T)\big((\hat{r}(t)+\theta(t)\beta(t)-\lambda(t))dt \\
&= D(t-,T)\big[(\hat{r}(t)+\theta(t)\beta(t)-\lambda(t))dt \\
&\quad + \beta(t)dW(t)-dM(t)\big].
\end{aligned}
$$

in virtutea continuitatii procesului $(B(t,T))$, a formulelor $d\tilde{H}_t = -dH_t$ şi $\tilde{H}_t^2 = \tilde{H}_t$. Am utilizat de asemenea şi identitatea $dH_t = \tilde{H}_{t-}dH_t$, sau, sub forma integrala, $\int_0^t dH_s = \int_0^t \tilde{H}_{s-}dH_s$. Intr-adevar, pentru $\tau > t$ (înainte de default) ambele integrale iau valoarea zero (întrucât nu avem nici un salt pana la momentul t), şi pentru $\tau \leq t$ (după default)

$$\int_0^t \tilde{H}_{s-}dH_s = \tilde{H}_{\tau-}\Delta H_\tau = \Delta H_\tau = \int_0^t dH_s \ (=1),$$

ceea ce arata identitatea dorita. Enuntam acum rezultatul obţinut.

PROPOZIŢIA 3.3. *Preţul $D(t,T)$ al activului supus riscului de contrapartidă admite dinamica*

(3.12)
$$dD(t,T) = D(t-,T)\big[(\hat{r}(t) + \theta(t)\beta(t) - \lambda(t))dt + \beta(t)dW(t) - dM(t)\big].$$

3.2.2. Densitatea condiţională a defaultului. In rezolvarea problemei de optimizare a unui investitor in piaţă financiară descrisa la inceputul capitolului, care este formulata într-o *piaţă incompleta* (datorită posibilitatii apariţiei defaultului), vom urma procedura lui Jiao şi Pham (conform citarii [**18**]), prin care vom descompune problema in două subprobleme de optimizare formulate in *pieţe domplete*, una înainte de default (*pre-default*) şi o a doua după default (*post-default*), ce pot fi abordate cu tehnici uzuale de dualitate martingală sau control stohastic.

In studiul problemei de optimizare *post-default* ipoteza existenţei intensităţii defaultului nu este suficienta. In schimb, notiunea de $\mathscr{F}$-densitate condiţională a defaultului (a se vedea pentru detalii suplimentare referintele El Karoui, Jeanblanc, Jiao ([**5**]) sau Jiao, Pham ([**18**])) se va dovedi extrem de utila.

Presupunem ca pentru fiecare $t \in [0,T]$ şi $s \geq 0$, există o familie de variabile aleatoare $(\alpha_t(s))$, a.i. $\alpha_t(s)$ este $\mathscr{F}_t$-măsurabilă, şi

$$P(\tau \leq s|\mathscr{F}_t) = \int_0^s \alpha_t(u)du,$$

sau echivalent $E(f(\tau)|\mathscr{F}_t) = \int_0^\infty f(s)\alpha_t(s)ds$, pentru orice funcţie f marginita şi măsurabilă Borel. In plus, dacă $X_t(x)$ este o variabila aleatoare $\mathscr{F}_t \otimes \mathbb{B}$ măsurabilă, atunci

$$E(X_t(\tau)|\mathscr{F}_t) = \int_0^\infty X_t(s)\alpha_t(s)ds.$$

Definim $F_t := P(\tau \leq t|\mathscr{F}_t)$. Atunci $G_t := 1 - F_t = P(\tau > t|\mathscr{F}_t)$ se numeste *procesul conditional de supravietuire* asociat lui τ. Pentru s fixat, procesul $(\alpha_t(s))_{0 \leq t \leq T}$ este un $\mathscr{F}$-martingal sub P. Sub ipoteza **(H)** este adevarata relatia,

$$P(\tau \leq t|\mathscr{F}_t) = P(\tau \leq t|\mathscr{F}_T),$$

Ipoteza

$$\alpha_T(t) = \alpha_t(t),\ \forall t \in [0,T]$$

este o condiţie suficienta pentru ca ipoteza $(\mathbf{H})$ să aiba loc, pe care o presupunem in continuare. Se poate arata ca intensitatea $\lambda(t)$ este complet determinata de densităţile conditionale $\alpha_t(s)$,

$$\lambda(t) = \frac{\alpha_t(t)}{F_t}.$$

Reciproc, se pot determina numai partial densităţile conditionale $\alpha_t(s)$, plecand de la intensitatile defaultului, şi aceasta se poate realiza numai pentru $s \geq t$ (i.e. pentru momentele de timp t anterioare defaultului). Vom simplifica notatia scriind $\alpha(t) := \alpha_t(t)$.

3.2.3. Portofoliul investitorului. Considerăm acum un investitor cu oportunităţi de investiţie in piaţa financiară descrisa la inceputul capitolului, ce investeste la momentul iniţial capitalul x şi urmeaza o strategie de investiţie autofinanţata pe intervalul de timp $[0,T]$. Notăm prin $N_R(t)$, $N_S(t)$ şi $N_D(t)$ cantităţile din fiecare tip de activ deţinute de investitor la momentul t. $(N_R(t))$, $(N_S(t))$ şi $(N_D(t))$ sunt presupuse procese $\mathscr{G}$-predictibile. Întrucât $N_D(t) = N_D(t)1_{(t\le\tau)}$ (activul supus riscului de contrapartidă inceteaza să existe la momentul producerii defaultului) putem presupune ca $N_D(t)$ este $\mathscr{F}$-predictibil. Această afirmaţie este o consecinţă a descompunerii standard pentru procese $\mathscr{G}$-predictibile (a se vedea formula de reprezentare (2.37) din capitolul precedent).

Valoarea portofoliului $X^{N,x}(t)$ are expresia

$$X_t^{N,x} = x + N_R(t)R(t) + N_S(t)S(t) + N_D(t)D(t,T).$$

Condiţia de autofinanţare (o ipoteza uzuala impusa portofoliilor financiare) dicteaza

$$dX_t^{N,x} = N_R(t)dR(t) + N_S(t)dS(t) + N_D(t)dD(t,T). \tag{3.13}$$

Notăm prin $\pi_R(t)$, $\pi_S(t)$ and $\pi_D(t)$ ponderile corespunzatoare sumelor investite in fiecare activ

$$\pi_R(t) := \frac{N_R(t)R(t)}{X_{t-}^{N,x}}, \pi_S(t) := \frac{N_S(t)S(t)}{X_{t-}^{N,x}}, \pi_D(t) := \frac{N_D(t)D(t-,T)}{X_{t-}^{N,x}}.$$

In mod evident $\pi_R(t) + \pi_S(t) + \pi_D(t) = 1$. Vom identifica o strategie de investiţie cu un proces continuu la stânga $\pi(t) := (\pi_R(t), \pi_S(t), \pi_D(t))$ şi vom nota prin $(X_t^{\pi,x}; 0 \le t \le T)$ valoarea corespunzatoare a portofoliului. Condiţia de autofinanţare se poate rescrie sub forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX_t^{\pi,x} & = & X_{t-}^{\pi,x}\left(\pi_R(t)\frac{dR(t)}{R(t)} + \pi_S(t)\frac{dS(t)}{S(t)} + \pi_D(t)\frac{dD(t,T)}{D(t-,T)}\right); \\ X_0^{\pi,x} & = & x. \end{array} \right. \tag{3.14}$$

Pentru ultimul termen din partea dreapta facem conventia $\frac{0}{0} = 0$. după default activul supus riscului de contrapartidă nu se mai tranzactioneaza, deci $\pi_D(t) = 0$ şi de asemenea $D(t,T) = 0$, pentru $t > \tau$. Ţinând cont de dinamica activelor tranzacţionate şi ecuaţia de autofinanţare, putem scrie

(3.15)
$$
\begin{aligned}
dX_t^\pi = X_{t-}^\pi \Big[\big(r(t) + \pi_S(t)(\mu(t) - r(t)) + \pi_D(t) \big(\lambda(t)(\gamma(t)L(t) \\
+ L(t) - 1) + \theta(t)\beta(t) \big) \big) dt \\
+ \big(\pi_S(t)\sigma(t) + \pi_D(t)\beta(t) \big) dW(t) - \pi_D(t) dM(t) \Big].
\end{aligned}
$$

Conform formulei standard de descompunere pentru procese predictibile, rezultă ca putem scrie $\pi = \underline{\pi}(t)1_{(t\leq\tau)} + \overline{\pi}(t)1_{(\tau>t)}$, unde $\underline{\pi}(t) = (\underline{\pi}_R(t), \underline{\pi}_S(t), \pi_D(t))$ reprezintă strategia pre-default iar $\overline{\pi}(t) = (\overline{\pi}_R(t), \overline{\pi}_S(t), 0)$ reprezintă strategia post-default.

Dinamică proceselelor valorilor portofoliilor pre-default, respectiv post-default este dată de ecuaţiile

(3.16)
$$
\begin{aligned}
dX_t^{\underline{\pi}} = X_t^{\underline{\pi}} \Big[\big(r(t) + \underline{\pi}_S(t)\sigma(t)\theta(t) + \pi_D(t)(\lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - 1) \\
+ \theta(t)\beta(t))\big) dt + (\underline{\pi}_S(t)\sigma(t) + \pi_D(t)\beta(t))\, dW(t) \Big],\ t < \tau \wedge T,
\end{aligned}
$$

şi

(3.17)
$$
dX_t^{\overline{\pi}} = X_t^{\overline{\pi}} [r(t) + \overline{\pi}_S(t)\sigma(t)\theta(t)]\, dt + \overline{\pi}_S(t)\sigma(t) dW(t),\ t \geq \tau \wedge T.
$$

DEFINIŢIA 3.4. *Mulţimea $\mathscr{A}(x)$ a strategiilor admisibile este formată din procesele $(\pi(t); 0 \leq t \leq T)$ continue la stânga, ce satisfac*

$$
E\int_0^T \pi_S^2(t) < \infty,\ E\int_0^T \pi_D^2(t) < \infty,\ \pi_D(t) < 1,\ 0 \leq t \leq T,\ P\ a.s.
$$

OBSERVAŢIA 3.5. *Este natural să presupunem ca investitorul, indiferent de apetitul la risc manifestat va prefera să nu-şi investeasca intreg capitalul in activul supus riscului de contrapartidă, la nici un moment de timp (a se vedea condiţia*

$\pi_D(t) < 1$, *pentru orice* $t \in [0,T]$*), existand probabilitatea deloc neglijabila ca in caz contrar să sufere pierderi foarte mari.*

Ca şi in capitolul precedent, com consideră funcţii de utilitate U definite pe $(0,\infty)$, ce sunt derivabile, strict crescătoare şi strict concave, satisfacand in plus conditiile uzuale ale lui Inada: $\lim_{x\to 0} U'(x) = \infty$ şi $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$. Vom trata numai cazurile functiilor de utilitate de tip logaritmic şi de tip putere. Notăm prin E^x media condiţionata $E(\cdot|X_0^\pi = x)$. Investitorul doreste să-şi maximizeze utilitatea asteptata de pe urma valorii finale (la momentul T) a portofoliului, după toate strategiile admisibile $\pi \in \mathscr{A}(x)$. Funcţia valoare V a problemei de optimizare se poate scrie sub forma

$$V(x) := \sup_{\pi\in\mathscr{A}(x)} E[U(X_T^{\pi,x})] = \sup_{\pi\in\mathscr{A}(x)} J^x(\pi). \tag{3.18}$$

3.3. Cazul utilităţii de tip logaritmic

Fie (Y_t^π) procesul ce apare scris intre parantezele drepte din formula (3.15). Acesta se poate rescrie sub forma

$$\begin{aligned} Y_t^\pi = \big(r(t) + \pi_S(t)\sigma(t)\theta(t) + \pi_D(t)\big(\lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - H_t) \\ + \theta(t)\beta(t)\big)\big)dt + \big(\pi_S(t)\sigma(t) + \pi_D(t)\beta(t)\big)dW(t) - \pi_D(t)dH(t), \end{aligned}$$

unde am utilizat formulele $dM(t) = dH_t - \tilde{H}_t\lambda(t)dt$ şi $\tilde{H}_t = 1 - H_t$. Deducem atunci ca procesul valorii portofoliului este dat in mod evident de exponenţială stohastică a procesului (Y_t^{π}), i.e.

(3.19)

$$\begin{aligned}
X_t^{\pi,x} = \mathscr{E}(Y_\cdot^{\pi})_t = x\exp\Big(\int_0^t \big(r(s)+\pi_S(s)\sigma(s)\theta(s)+\pi_D(s)(\lambda(s)\\
&(\gamma(s)L(s)+L(s)-H_s)+\theta(s)\beta(s))\\
&-\frac{1}{2}(\pi_S(s)\sigma(s)+\pi_D(s)\beta(s))^2\big)ds\Big)\\
&\times\exp\Big(\int_0^t \big(\pi_S(s)\sigma(s)+\pi_D(s)\beta(s)\big)dW(s)\Big)\\
&\times\exp\Big(\int_0^t \ln(1-\pi_D(s))dH_s\Big).
\end{aligned}$$

Am utilizat faptul ca, in mod evident, pentru un moment de timp fixat t, marimea saltului procesului (Y^{π}) la momentul τ (avem salt numai dacă $\tau \le t$) este dată de $\Delta Y^{\pi}(\tau) = -\pi_D(\tau)$, iar in continuare am procedat in acelasi mod in care am obţinut formula explicită (3.5) pentru procesul densităţilor Radon Nikodym (Z_t). Atunci

$$\begin{aligned}
\ln\big(X_t^{\pi,x}\big) = \ln(x) + \int_0^t \big[r(s)+\pi_S(s)\sigma(s)\theta(s)+\pi_D(s)(\lambda(s)(\gamma(s)L(s)\\
&+L(s)-H_s)+\theta(s)\beta(s)) - \frac{1}{2}(\pi_S(s)\sigma(s)+\pi_D(s)\beta(s))^2\\
&+\tilde{H}_s\lambda(s)\ln(1-\pi_D(s))\big]ds\\
&+\int_0^t \big(\pi_S(s)\sigma(s)+\pi_D(s)\beta(s)\big)dW(s)\\
&+\int_0^t \ln(1-\pi_D(s))dM(s).
\end{aligned}$$

Sub ipotezele noastre procesele date de integralele stohastice din formula de mai sus sunt martingale adevarate (nu numai locale), de medie 0. Aplicând operatorul de medie, rezultă

$$\begin{aligned}
J^x(\pi) = E(\ln\big(X_t^{\pi,x}\big)) = \ln(x) + E\Big\{ \int_0^T \big[r(t) + \pi_S(t)\sigma(t)\theta(t) \\
+ \pi_D(t)(\lambda(t)(\gamma(t)L(t) \\
+ L(t) - H_t) + \theta(t)\beta(t)) - \frac{1}{2}(\pi_S(t)\sigma(t) + \pi_D(t)\beta(t))^2 \\
+ \tilde{H}_t\lambda(t)\ln(1-\pi_D(t))\big] dt \Big\} \\
= \ln(x) + E\Big(\int_0^T g_t(\pi_S(t), \pi_D(t)) dt \Big),
\end{aligned}$$

unde aplicaţia aleatoare $g_t(y,z)$ este definită in mod corespunzator. Problema de optimizare stohastică se reduce astfel la o problema de optimizare pe traiectorii (pentru fiecare traiectorie ω fixata), pe care o rezolvăm înainte de default şi după default. Pentru problema pre-default, i.e. pentru $t \leq \tau \wedge T$, definim

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_t(y,z) = r(t) + \sigma(t)\theta(t)y + (\lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t)) + \theta(t)\beta(t))z \\
- \frac{1}{2}(\sigma(t)y + \beta(t)z)^2 + \lambda(t)\ln(1-z),
\end{aligned}$$

pentru $y \in \mathbb{R}$ şi $z < 1$, unde am ţinut cont de faptul ca $\tilde{H}_t = 1$, P a.s., pentru $t \leq \tau$. Pentru problema post-default, i.e. pentru $t > \tau \wedge T$, stim ca $\pi_D(t) = 0$ (întrucât ativul supus riscului de contrapartidă nu mai este tranzacţionat) şi de asemenea $\tilde{H}_t = 0$. Vom defini astfel

$$\bar{g}_t(y) = r(t) + \sigma(t)\theta(t)y - \frac{1}{2}\sigma(t)^2 y^2.$$

Suntem astfel conduşi la determinarea punctului de maxim pentru funcţia aleatoare

$$g_t(y,z) = \tilde{g}_t(y,z)1_{(t \leq \tau \wedge T)} + \bar{g}_t(y)1_{(t > \tau \wedge T)}.$$

Pentru problema pre-default, conditiile de optimalitate de ordinul I devin

$$\frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial y}(y,z) = \sigma(t)\theta(t) - (\sigma(t)y + \beta(t)z)\sigma(t) = 0,$$

şi

$$\frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial z}(y,z) = \lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t)) + \theta(t)\beta(t) - (\sigma(t)y + \beta(t)z)\beta(t) - \frac{\lambda(t)}{1-z} = 0.$$

Deducem ca

$$\sigma(t)\tilde{y}^*(t) + \beta(t)\tilde{z}^*(t) = \theta(t),$$

şi inlocuind in cea de a două ecuaţie se obţine

$$\tilde{z}^*(t) = 1 - \frac{1}{L(t)(1+\gamma(t))} < 1.$$

Termenul $(1+\gamma(t))$ reprezintă raportul intensitatilor defaultului in raport cu probabilitatea Q, respectiv P, i.e. $\frac{\tilde{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = 1 + \gamma(t)$. Obţinem de asemenea

$$\tilde{y}^*(t) = \frac{\theta(t)}{\sigma(t)} - \frac{\beta(t)}{\sigma(t)}\Big(1 - \frac{1}{L(t)(1+\gamma(t))}\Big) = \frac{q(t)}{\sigma(t)} + \frac{\beta(t)}{\sigma(t)}\frac{1}{L(t)(1+\gamma(t))}.$$

Scriind matricea Hessiana asociată funcţiei $\tilde{g}_t$, se observă ca punctul stationar $(\tilde{y}^*(t), \tilde{z}^*(t))$ este punct de maxim (global) pentru aplicaţia $\tilde{g}_t$. De asemenea, in mod evident, punctul $\bar{y}^*(t) = \frac{\theta(t)}{\sigma(t)}$ este punct de maxim pentru aplicaţia $\bar{g}_t$. Putem acum formula rezultatul principal al acestei secţiuni.

TEOREMA 3.6. *Presupunem ca $U(x) = \ln(x)$. Atunci strategia $\pi_t^* = (\pi_S^*(t), \pi_D^*(t))$ definită prin*

(3.20)

$$\pi_S^*(t) = \Big(\frac{q(t)}{\sigma(t)} + \frac{\beta(t)}{\sigma(t)}\frac{1}{L(t)(1+\gamma(t))}\Big)1_{(t \leq \tau\wedge T)} + \frac{\theta(t)}{\sigma(t)}1_{(t>\tau\wedge T)},$$

şi

$$\pi_D^*(t) = \left(1 - \frac{1}{L(t)(1+\gamma(t))}\right)1_{(t\leq\tau\wedge T)} \tag{3.21}$$

este o strategie optimală pentru problema (3.18).

3.4. Existenţa unei soluţii pentru problema de optimizare în cazul general

Utilizând Teorema 2.2 din referinţa Kramkov, Schachermayer ([**25**]), stim ca problema (3.18) admite o strategie optimală sub ipotezele

(i) Coeficientul de elasticitate asimptotică a funcţiei de utilitate U satisface condiţia

$$AE(U) := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1;$$

(ii) Există cel puţin o măsura martingală echivalentă Q;

(iii) Există un numar real $x > 0$ pentru care funcţia valoare $V(x)$ este finita.

Presupunerea (i) este in mod evident satisfăcută in cazul functiilor de utilitate de tip HARA considerate. De asemenea, am presupus existenţa unei măsuri martingale echivalente in scopul obţinerii preţului activului supus riscului de contrapartidă. Apoi, conform referinţei Kramkov, Schachermayer ([**25**]), $V(x)$ este finita intr-un punct x dacă conjugata funcţiei valoare V^* ia valoare finita in punctul $y = V'(x)$. O condiţie suficienta pentru ca ultima afirmaţie să fie adevarata este

$$E[U^*(yZ_T)] < \infty, \text{ pentru o valoare } y > 0,$$

unde U^* este conjugata convexă a funcţiei de utilitate (concave) U, presupunere pe care o facem in continuare. Rezultatele obţinute in articolul menţionat mai sus ne permit să dam o caracterizare duală a funcţiei valoare şi a strategiei optimale, dar in general nu se pot determina formule explicite.

In continuare urmam argumentele din articolul Jiao, Pham ([**18**]), prin care vom descompune problema de optimizare originală in două subprobleme ce sunt formulate in pieţe financiare complete, şi care pot fi abordate cu ajutorul unor metode clasice de dualitate martingală şi programare dinamică. Dacă π este o strategie admisibilă oarecare putem scrie

$$\begin{aligned} J^x(\pi) &= E[U(X_T^{\pi,x})] = E\Big[E\big(U(X_T^{\pi,x})1_{(\tau>T)} + U(X_T^{\pi,x})1_{(\tau\le T)}|\mathscr{F}_T\big)\Big] \\ &= E\left[U(X_T^{\pi,x})P(\tau>T|\mathscr{F}_T)\right] + E\left[E\left(U(X_T^{\overline{\pi},s,x})1_{(\tau\le T)}|\mathscr{F}_T\right)\right] \\ &= E\left[U(X_T^{\pi,x})G_T\right] + E\left[\int_0^T U(X_T^{\overline{\pi},s,x})\alpha_T(s)ds\right]. \end{aligned}$$

In deducerea formulei de mai sus am utilizat faptul ca orice variabila aleatoare $\mathscr{G}_T$-măsurabilă Y poate fi descompusă sub forma

$$Y = \frac{E\left(Y1_{(\tau>T)}|\mathscr{F}_T\right)}{G_T}1_{(\tau>T)} + Y_\tau 1_{(\tau\le T)},$$

unde Y_τ este $\mathscr{F}_T\otimes\sigma(\tau)$-măsurabilă. Totodată

(3.22)

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T U(X_T^{\overline{\pi},s,x})\alpha_T(s)ds\right] &= \int_0^T E\left[E\left(U(X_T^{\overline{\pi},s,x})\alpha_s|\mathscr{F}_s\right)\right]ds \\ &= E\left[\int_0^T E\left(U(X_T^{\overline{\pi},s,x})\alpha_s|\mathscr{F}_s\right)ds\right]. \end{aligned}$$

Problema de optimizare post-default este definită ca

$$\bar{V}_s(x) = \sup_{\overline{\pi}_S} E\left(U(\bar{X}_T^{\overline{\pi}_S,s,x})\alpha_s\Big|\mathscr{F}_s\right) = \sup_{\overline{\pi}_S} J_s(\overline{\pi}_S,x), \tag{3.23}$$

unde procesul valoare post-default $(\bar{X}^{\overline{\pi},s,x})$ pleaca la momentul s din starea x. Această problemăa nu este o problemă clasică de optimizare de portofolii întrucât funcţia pe care trebuie să o maximizăm este dată de funcţia de utilitate ponderată însă cu o variabila aleatoare.

Conform cu referinţa articolul Jiao, Pham ([**18**]), Teorema 3.1, obţinem urmatoarea formulă de programare dinamică asociată problemei noastre de control optimal

$$V(x) = \sup_{\underline{\pi}_S, \pi_D} E\left[U(X_T^{\pi})G_T + \int_0^T \bar{V}_s(X_s^{\pi}(1-\pi_D(s)))ds\right] \tag{3.24}$$

OBSERVAŢIA 3.7. *Această ecuaţie ne spune ca pentru a rezolva problema de optimizare* (3.18)*, este suficient să rezolvăm două sub-probleme de optimizare: problema pre-default (înainte de default) şi problema post-default (după default), probleme ce sunt formulate in pieţe financiare complete şi pentru care pot fi utilizate argumente clasice de dualitate convexă. Cu ajutorul formulei* (3.24) *se observă usor ca va trebui să rezolvăm mai întâi problema post-default* (3.23)*, după care vom utiliza funcţia valoare obţinuta $\bar{V}$ in rezolvarea problemei* (3.24)*. Rezolvarea problemei post-default se bazează pe principiul programării dinamice şi utilizează tehnici specifice EDSR, fiind deosebit de complexa din punct de vedere tehnic, motiv pentru care ne vom restrange doar la rezolvarea problemei pre-default.*

3.4.1. Problema de optimizare post-default. Dinamică procesului valoare pentru problema posterioara defaultului (ce satisface ecuaţia (3.17)) se poate rescrie sub forma

$$d\bar{X}_t^{\overline{\pi},s} = \bar{X}_t^{\overline{\pi},s}\left[r(t) + \overline{\pi}_S(t)\sigma(t)\theta(t)\right]dt + \overline{\pi}_S(t)\sigma(t)dW(t);\ \bar{X}_t^{\overline{\pi},s} = x.$$

Reamintim formula densităţilor Radon-Nikodym

$$Z^{\mathscr{F}}(t) = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)du - \int_0^t \theta(u)dW(u)\big).$$

Fie $Z_s^t := \frac{Z^{\mathscr{F}}(t)}{Z^{\mathscr{F}}(s)}$, pentru $t \geq s$. Pentru s fixat definim pe $\mathscr{F}_T$ probabilitatea Q^s prin intermediul densităţii RN $\frac{dQ^s}{dP}|_{\mathscr{F}_T} := Z_s^T$. In mod evident $\frac{dQ^s}{dP}|_{\mathscr{F}_t} = Z_s^t$. Fie de asemenea

$$H_s^t = e^{-\int_s^t r(u)du} Z_s^t = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_s^t (r(u) + \theta^2(u))du - \int_s^t \theta(u)dW(u)\big),$$

pentru $t \geq s$. Se poate observă cu uşurinţă ca procesul valorii actualizate a portofoliului $(e^{-\int_s^t r(u)du}\bar{X}_t^{\overline{\pi},s}; s \leq t \leq T)$ este un $\mathscr{G}$-martingal local (sub Q^s) ce ia valori pozitive (este deci marginit inferior), şi este atunci un supermartingal. Rezultă

$$
\begin{aligned}
E^{Q^s}(e^{-\int_s^T r(u)du}\bar{X}_T^{\overline{\pi},s}|\mathscr{F}_s) &= E(H_s^T\bar{X}_T^{\overline{\pi},s}|\mathscr{F}_s) \\
&\leq E^{Q^s}(e^{-\int_s^s r(u)du}\bar{X}_s^{\overline{\pi},s}) = x.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Fie U^* conjugata convexă a funcţiei concave U (transformata Legendre-Fenchel a aplicaţiei $-U(-x)$), care este definită prin

$$U^*(y) := \sup_{x>0}(U(x) - xy),\ y > 0.$$

In mod evident, supremumul in formula de mai sus este atins in punctul $I(y) := (U')^{-1}(y)$, ceea ce ne conduce la

$$U^*(y) = U(I(y)) - yI(y).$$

Funcţia I este definită pe $(0,\infty)$ cu valori in $(0,\infty)$ şi este strict descrescatoare.

Întrucât am considerat cazul funcţiei logaritmice in secţiunea precedenta, vom trata numai cazul utilităţii de tip putere $U(x) = \frac{x^p}{p}$, cu $p \in (0,1)$. Un calcul elementar arata ca $I(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ şi deci $U^*(y) = \frac{1-p}{p}y^{\frac{p}{p-1}}$. Putem scrie de asemenea $U^*(y) = -\frac{y^q}{q}$, unde q este conjugatul lui p (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Ţinând contul de faptul ca ne situăm într-o piaţă financiară completă, vom transforma problema într-o problema statică de optimizare pe care o vom rezolva cu ajutorul metodei multiplicatorilor lui Lagrange, luând in considerare restricţia (3.25). In acest sens definim Lagrangianul

$$L(X,\lambda) := \alpha_s U(X) + \lambda(x - H_s^T X).$$

"Derivand" in raport cu X se obţine

$$\alpha_s U'(X) - \lambda H_s^T = 0,$$

de unde deducem
$$X = I\Big(\frac{\lambda H_s^T}{\alpha_s}\Big).$$
Impunem acum ca X găsit mai sus să satisfaca restricţia (3.25) ca o egalitate. Deducem

$$E\big(H_s^T I\big(\frac{\lambda H_s^T}{\alpha_s}\big)|\mathscr{F}_s\big) = x, \tag{3.26}$$

şi privim această ecuaţie ca o ecuaţie cu necunoscuta λ. Definim aplicaţia

$$g(\lambda) := E\big(H_s^T I\big(\frac{\lambda H_s^T}{\alpha_s}\big)\big|\mathscr{F}_s\big) = \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}}{\alpha_s^{\frac{1}{p-1}}} E\big((H_s^T)^q\big|\mathscr{F}_s\big),$$

pentru valori strict pozitive ale lui λ. Se poate arata printr-un procedeu standard ca funcţia g este strict descrescatoare şi continuă pe $(0,\infty)$, $\lim_{\lambda\searrow 0} g(\lambda) = \infty$, $\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) = 0$. Deducem atunci ca ecuaţia (3.26) admite o soluţie unică dată de $\lambda^* = g^{-1}(x)$. Definim

$$X^* = I\Big(\frac{\lambda^* H_s^T}{\alpha_s}\Big). \tag{3.27}$$

Presupunem acum ca X^π este un proces admisibil pentru valoarea portofoliului, ce satsiface restricţia (3.25). Aplicând inegalitatea $h(y) - h(x) \le (y-x)h'(x)$ (ce este satisfăcută de orice funcţie concavă şi diferentiabila h) funcţiei de utilitate U şi punctelor $x = X^*$, $y = X^\pi$, considerand apoi operatorul de medie şi ţinând cont de restricţia (3.25) deducem ca procesul X^* este optimal. Formulăm acum rezultatul principal al acestei secţiuni.

TEOREMA 3.8. *Valoarea finală a unui portofoliu optimal pentru problema post-default* (3.23) *are expresia*

$$X^* = I\Big(\frac{g^{-1}(x) H_s^T}{\alpha_s}\Big) = \frac{(g^{-1}(x))^{\frac{1}{p-1}}}{\alpha_s^{\frac{1}{p-1}}} (H_s^T)^{\frac{1}{p-1}}.$$

In plus, o strategie optimală $\overline{\pi}_S^*$ este definită prin

$$\overline{\pi}_S^*(t) = \frac{\theta(t)}{\sigma(t)} + \frac{\eta^*(t)}{\sigma(t)}, \text{ for } t \geq s, \tag{3.28}$$

unde (η^*) este un proces $\mathscr{F}$-adaptat convenabil ales.

Demonstraţia acestei teoreme este completă dacă arătăm ca variabila aleatoare X^* definită prin relatia (3.27) este *replicabila*, i.e. dacă există o strategie admisibilă π_S^* a.i. procesul valoare asociat $\bar{X}^{\overline{\pi}_S^*,s,x}$ satisface $\bar{X}_T^{\overline{\pi}_S^*,s,x} = X^*$. Aşa cum am precizat procesul valorii actualizate a portofoliului este un $\mathscr{F}$-martingal sub orice măsura martingală echivalentă, deci şi sub Q^s. Obţinem

$$e^{-\int_s^t r(u)du}\bar{X}_t^{\overline{\pi}_S^*,s,x} = E^{Q^s}\left(e^{-\int_s^T r(u)du}X^*\Big|\mathscr{F}_t\right) = \frac{1}{Z_s^t}M_s^*(t),$$

unde procesul $M_s^*(t) := E\left(e^{-\int_s^T r(u)du}X^*Z_s^T\Big|\mathscr{F}_t\right)$, definit pentru $t \in [s,T]$ este in mod evident un $\mathscr{F}$-martingal sub probabilitatea P. Aplicând propozitia 6.1.1. din referinţa Lamberton, Lapeyre ([**27**]) şi ţinând cont de faptul ca $\mathscr{F}$ este o filtraţie Browniana, deducem existenţa unui proces $\mathscr{F}$-adaptat η^* a.i.

$$M_s^*(t) = \mathscr{E}\Big(\int_0^{\cdot} \eta^*(s)dW(s)\Big)_t,$$

sau echivalent, $M_s^*(t)$ este soluţia EDS

$$dM_s^*(t) = M_s^*(t)\ \eta^*(t)dW(t).$$

Pe de alta parte, conform formulei de integrare prin părţi a lui Itô, deducem

$$\begin{aligned} dM_s^*(t) &= d\big(Z_s(t)e^{-\int_s^t r(u)du}\bar{X}_s^{\overline{\pi}_S^*,x}(t)\big) \\ &= Z_s(t)e^{-\int_s^t r(u)du}\bar{X}_s^{\overline{\pi}_S^*,x}(t)(\overline{\pi}_S^*(t)\sigma(t) - \theta(t))dW(t). \end{aligned}$$

Ţinând apoi cont de ultimele trei formule şi identificand termenii de difuzie $...dW(t)$ se obţine formula (3.28) pentru strategia optimală, care se poate verifica cu uşurinţă ca este admisibilă.

3.5. O formulă explicită într-un caz particular

In cadrul acestei secţiuni vom presupune ca toţi coeficienţii activelor tranzacţionate sunt funcţii deterministe marginite, funcţia de utilitate este de tip putere. Presupunem de asemenea ca densitatea condiţională $\alpha(t)$ este o funcţie determinista şi ca defaultul se va produce aproape sigur (cu probabilitatea 1) pana la maturitatea T, i.e.

$$P(0 \leq \tau \leq T) = 1. \tag{3.29}$$

Ultima condiţie este echivalentă cu

$$\begin{aligned} P(0 \leq \tau \leq T) &= E\left[E\left(1_{(0 \leq \tau \leq T)} | \mathscr{F}_T\right)\right] \\ &= E\Big(\int_0^T \alpha_T(u)du\Big) = \int_0^T \alpha(u)du = 1. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dacă $\pi = (\underline{\pi}, \overline{\pi})$ este o strategie admisibilă, valoarea finală a portofoliului asociat este dată de

(3.31)

$$\begin{aligned} X_T^\pi = \bar{X}_T^{\overline{\pi}} = X^\pi(\tau) \exp\Big(\int_\tau^T \big(r(s) + \overline{\pi}_S(s)\sigma(s)\theta(s) - \frac{1}{2}\overline{\pi}_S^2(s)\sigma^2(s)\big)ds\Big) \\ \times \exp\Big(\int_\tau^T \overline{\pi}_S(s)\sigma(s)dW(s)\Big), \end{aligned}$$

unde

$$X^\pi(\tau) = X^{\underline{\pi}}(\tau)(1 - \underline{\pi}_D(\tau)).$$

3.5.1. Problema de optimizare post-default. Problema de optimizare post-default are forma

$$\overline{V}(t,x) = \sup_{\overline{\pi} \in \overline{\mathscr{A}}(t,x)} E\left[(\bar{X}_T^{\overline{\pi}})^p | \bar{X}_t^{\overline{\pi}} = x\right].$$

Întrucât suntem interesati in rezolvarea acestei probleme cu *condiţii iniţiale aleatoare* (pentru $t = \tau$ şi $x = X^\pi(\tau)$), vom considera problema de optimizare

$$\overline{V}(\tau,\eta) = \sup_{\overline{\pi}\in\overline{\mathscr{A}}(\tau,\eta)} E\left[(\bar{X}_T^{\overline{\pi},\tau,\eta})^p\right], \tag{3.32}$$

unde η este o variabila pozitivă $\mathscr{G}_\tau$-măsurabilă. Reamintim ca $X^{\overline{\pi},\tau,\eta}$ reprezintă soluţia ecuaţiei (3.17), ce pleaca la momentul iniţial τ din starea η. De asemenea, pentru o strategie admisibilă $\overline{\pi}$ oarecare, notăm

$$\bar{J}(\tau,\eta,\overline{\pi}) = E\left[(\bar{X}_T^{\overline{\pi},\tau,\eta})^p\right].$$

In mod evident

$$\begin{aligned}(\bar{X}_T^{\overline{\pi}})^p = \eta^p \exp\Big(p\int_\tau^T \big(r(s)+\overline{\pi}_S(s)\sigma(s)\theta(s)-\frac{1-p}{2}\overline{\pi}_S^2(s)\sigma^2(s)\big)ds\Big)\\ \times\mathscr{E}\Big(\int_\tau^\cdot p\overline{\pi}_S(s)\sigma(s)dW(s)\Big)_T.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Fie $\overline{\pi}_t^*$ punctul de maxim al funcţiei (aleatoare) de gradul al doilea

$$h_t(y) = -\frac{1-p}{2}\sigma^2(t)y^2+\sigma(t)\theta(t)y+r(t),$$

punct care este dat de

$$\overline{\pi}_t^* = \frac{1}{1-p}\frac{\theta(t)}{\sigma(t)}.$$

PROPOZIŢIA 3.9. *Strategia determinista* $\overline{\pi}_t^* = \frac{\theta(t)}{(1-p)\sigma(t)}$ *este optimală pentru problema* (3.32).

Demonstraţie. Pentru o strategie admisibilă oarecare $\overline{\pi}$ definim procesul

$$M_t^{\overline{\pi}} = \mathscr{E}\big(\int_\tau^\cdot p\overline{\pi}_S(s)\sigma(s)dW(s)\big)_t,\ t\geq\tau.$$

Întrucât procesul integralei stohastice $\left(\int_\tau^\cdot p\overline{\pi}_S(s)\sigma(s)dW(s)\right)$ este un $\mathscr{G}$-martingal (coeficienţii modelului sunt funcţii mărginite) rezultă ca şi procesul exponenţialei stohastice $(M_t^{\overline{\pi}}; t \geq \tau)$ este de asemenea un martingal, cu $M_\tau^{\overline{\pi}} = 1$. Atunci

(3.34)

$$
\begin{aligned}
\overline{J}(\tau,\eta,\overline{\pi}) &= E\Big[\eta^p \exp\Big(p\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s)ds\Big)M_T^{\overline{\pi}}\Big] \\
&\leq E\Big[\eta^p \exp\Big(p\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\Big)M_T^{\overline{\pi}}\Big] \\
&= E\Big\{E\Big[\eta^p \exp\Big(p\big(\int_0^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds - \int_0^\tau h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)\Big)M_T^{\overline{\pi}}|\mathscr{G}_\tau\Big]\Big\} \\
&= E\Big\{\eta^p \exp\Big(p\big(\int_0^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds - \int_0^\tau h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)\Big)E\Big[M_T^{\overline{\pi}}|\mathscr{G}_\tau\Big]\Big\} \\
&= E\Big[\eta^p \exp\Big(p\big(\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)\Big)M_\tau^{\overline{\pi}}\Big] \\
&= E\Big[\eta^p \exp\Big(p\big(\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)E\Big(M_T^{\overline{\pi}^*}|\mathscr{G}_\tau\Big)\Big)\Big] \\
&= E\Big[\eta^p \exp\Big(p\big(\int_\tau^T h_s(\overline{\pi}_s^*)ds\big)\Big)M_T^{\overline{\pi}^*}\Big] = \overline{J}(\tau,\eta,\overline{\pi}^*).
\end{aligned}
$$

In deducerea relatiei de mai sus am utilizat teorema de stopare a lui Doob, faptul ca strategia $\overline{\pi}^*$ şi aplicaţiile h_t sunt deterministe şi in plus $M_\tau^{\overline{\pi}} = 1 = M_\tau^{\overline{\pi}^*}$.

OBSERVAŢIA 3.10. *Observam ca in rezolvarea problemei de optimizare* (3.32) *nu este necesara presupunerea privind existenţa densităţii conditionale a momentului aleator* τ.

Pentru o strategie admisibilă $\pi \in \mathscr{A}(x)$ definim

$$J(x,\pi) := E\left[(X_T^{\pi,x})^p\right].$$

Procesul (π) poate fi reprezentat ca $\pi_t = \underline{\pi}_t 1_{(t<\tau)} + \overline{\pi}_t 1_{(t\geq\tau)}$. Se observă ca

$$J(x,\pi) = \overline{J}(\tau, X_\tau^{\pi}(1-\underline{\pi}_D(\tau)), \overline{\pi}) \leq \overline{J}(\tau, X_\tau^{\pi}(1-\underline{\pi}_D(\tau)), \overline{\pi}^*).$$

Remarcam ca in formula (3.34) am obţinut formula (ţinând cont de faptul ca $M_\tau^{\overline{\pi}^*} = 1$)

$$\overline{J}(\tau,\eta,\overline{\pi}^*) = E\left[\eta^p \exp\left(p(G_T^* - G_\tau^*)\right)\right],$$

unde $G_t^* := \int_0^t h_s(\overline{\pi}_s^*)ds$.

3.5.2. Problema de optimizare pre-default. Pentru a rezolva problema (3.18) este suficient să determinăm funcţia valoare a problemei de optimizare *pre-default*

$$\underline{V}(x) = \sup_{\underline{\pi}} \overline{J}(\tau, X_\tau^{\pi}(1-\underline{\pi}_D(\tau)), \overline{\pi}^*), \tag{3.35}$$

unde am notat $\underline{\pi}(t) = (\underline{\pi}_S(t), \underline{\pi}_D(t))$.

Această problemă este o problemă de optimizare a portofoliilor financiare *in orizont aleator*. In literatura de specialitate am găsit (prin cautari in baze de date internationale) un numar restrans de referinte (semnificative din punct de vedere al rezultatelor obţinute) ce trateaza acest subiect. Mentionam două dintre acestea: Blanchet-Scalliet, El Karoui, Jeanblanc şi Martellini [**3**] şi lucrarea nepublicata El Karoui, Jeanblanc şi Huang [**9**]. In cea de a două lucrare autorii utilizează tehnici specifice ecuaţiilor diferentiale stohastice retrograde, o presupunere cruciala fiind $P(\tau \leq T) < 1$, care este însă in neconcordanta cu contextul nostru. In primul articol citat autorii studiaza o problema de optimizare a portofoliilor in cazul unei pieţe financiare definite de mai multe active (nesupuse riscului de credit) modelate cu ajutorul unor mişcăre Browniene geometrice, având coeficienţii funcţii deterministe şi sub ipoteza existenţei densităţii conditionale α_t ca o funcţie determinista. Este formulata o teorema de verificare pentru funcţia valoare care satisface o ecuaţie cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman.

Abordarea pe care o urmam in continuare este inspirata de acest rezultat.

Scriem

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left((X^{\pi}_{\tau}(1-\underline{\pi}_D(\tau))\right)^p \exp\left(p(G^*_T-G^*_\tau)\right)\right]\\
&\quad = E\left\{E\left[\left((X^{\pi}_{\tau}(1-\underline{\pi}_D(\tau))\right)^p \exp\left(p(G^*_T-G^*_\tau)\right)\Big|\mathscr{F}_T\right]\right\}\\
&\quad = E\int_0^T \left(X^{\pi}_t\right)^p (1-\underline{\pi}_D(t))^p \exp\left(p(G^*_T-G^*_t)\right)\alpha_t dt.
\end{aligned}
$$

Vom defini acum o versiune dinamică a funcţiei valoare $\underline{V}(x)$ (care este formulata la momentul $t=0$), prin

$$
\underline{V}(t,x) = \sup_{\underline{\pi}\in\underline{\mathscr{A}}(t,x)} E\int_t^T (X^{\pi}_s)^p (1-\underline{\pi}_D(s))^p \exp\left(p(G^*_T-G^*_s)\right)\alpha_s ds,
$$

unde (X^{π}_s) reprezintă soluţia ecuaţiei (3.16) ce pleaca la momentul t din starea x, controlata de strategia $(\underline{\pi}(s))$, definită pentru $s\in[t,T]$. Mulţimea strategiilor admisibile $\underline{\mathscr{A}}(t,x)$ este definită in mod asemanator cu $\mathscr{A}(x)$ (cu t luand locul momentului 0).

Procesul $(X^{\pi}_s; t\le s\le T)$ este soluţia EDS

$$
dX_t = \underline{f}(t,X_t,\underline{\pi}_t)dt + \underline{\sigma}(t,X_t,\underline{\pi}_t)dW(t),\ \underline{\pi}_t = (\underline{\pi}_S(t),\pi_D(t)),
$$

cu coeficienţii aleatori $\underline{f}(t,x,\pi)$ şi $\underline{\sigma}(t,x,\pi)$, unde $\pi=(\pi_1,\pi_2)$, definiţi prin

$$
\begin{aligned}
\underline{f}(t,x,\pi) = x\big[&r(t)+\sigma(t)\theta(t)\pi_1 + \big(\lambda(t)(\gamma(t)L(t)+L(t)-1)\\
&+\theta(t)\beta(t)\big)\pi_2\big],
\end{aligned}
$$

şi

$$
\underline{\sigma}(t,x,\pi) = x\big(\sigma(t)\pi_1+\beta(t)\pi_2\big).
$$

Problema de optimizare se poate scrie sub forma

$$
\underline{V}(t,x) = \sup_{\underline{\pi}\in\underline{\mathscr{A}}(t,x)} E\int_t^T F(s,X^{\pi}_s,\underline{\pi}_s)ds,
$$

unde funcţionala tip cost este definită prin

$$F(t,x,\pi) = x^p(1-\pi_2)^p \exp\left(p(G_T^* - G_t^*)\right)\alpha_t$$

(in referinţa [**3**] funcţionala de cost are o forma mai simpla, nedepinzand de controlul u). Regiunea admisibilă pentru variabila de control π este dată de $\mathscr{U} = \mathbb{R} \times (-\infty, 1)$. Se observă cu uşurinţă ca $|F(t,x,\pi)| \leq K(1+|x|)$ (întrucât $p \in (0,1)$). Notăm $\delta(t) := \exp\left(p(G_T^* - G_t^*)\right)\alpha_t$ şi $\rho(t) := \lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - 1)$.

Formulăm acum o teorema de verificare, care se bazează pe un rezultat general (a se vedea referinţa Fleming, Soner [**13**], Teorema 3.1, Capitolul IV). Toate ipotezele necesare aplicarii rezultatului menţionat sunt in mod evident verificate.

TEOREMA 3.11. *Considerăm ecuaţia cu derivate partiale neliniare de tipul Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial W}{\partial t}(t,x) + \sup_{\pi\in\mathscr{U}} H(t,x,\pi) & = & 0; \\ W(T,x) & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.36}$$

unde Hamiltonianul H este definit prin

(3.37)

$$\begin{aligned} H(t,x,\pi) &:= \underline{f}(t,x,\pi)\,\frac{\partial W}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2(t,x,\pi)\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,x) + F(t,x,\pi) \\ &= \Big[x\big(r(t) + \sigma(t)\theta(t)\pi_1 + \big(\lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - 1) \\ &\quad + \theta(t)\beta(t)\big)\pi_2\big)\Big]\,\frac{\partial W}{\partial x}(t,x) \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2\big(\sigma(t)\pi_1 + \beta(t)\pi_2\big)^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,x) \\ &\quad + x^p(1-\pi_2)^p \exp\left(p(G_T^* - G_t^*)\right)\alpha_t. \end{aligned}$$

Fie de asemenea $K(t)$ soluţia (unică) a ecuaţiei diferentiale ordinare de ordinul I de tip Bernoulli

(3.38)

$$K'(t)+p\big(r(t)+\rho(t)-\frac{\theta^2(t)}{2(p-1)}\big)K(t)+(1-p)\frac{\rho(t)^{\frac{p}{p-1}}}{\delta(t)^{\frac{1}{p-1}}}K(t)^{\frac{p}{p-1}}=0,$$

$t\in[0,T)$, cu condiţia finală Cauchy $K(T)=0$. Soluţia $K(t)$ are forma explicită dată de

(3.39)

$$\begin{aligned}K(t)&=\exp\big(-\frac{p}{1-p}\int_0^t(r(s)+\rho(s)-\frac{\theta^2(s)}{2(p-1)}ds)\big)\\&\quad\times\int_t^T\Big[\frac{\rho(s)^{\frac{p}{p-1}}}{\delta(s)^{\frac{1}{p-1}}}\exp\big(\frac{p}{1-p}\int_0^s(r(u)+\rho(u)-\frac{\theta^2(u)}{2(p-1)})du\big)\Big]ds\\&=\int_t^T\Big[\frac{\rho(s)^{\frac{p}{p-1}}}{\delta(s)^{\frac{1}{p-1}}}\exp\big(\frac{p}{1-p}\int_t^s(r(u)+\rho(u)-\frac{\theta^2(u)}{2(p-1)})du\big)\Big]ds.\end{aligned}$$

Atunci

(a) *Funcţia $W(t,x):=x^pK(t)\in\mathscr{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$, satisface ecuaţia* (3.36) *şi*

$$\underline{V}(t,x)=W(t,x),\forall t\in[0,T],x\in\mathbb{R}. \tag{3.40}$$

(b) *Presupunem in plus ca $L(t)>\frac{1}{1+\gamma(t)}$, pentru orice $t\in[0,T]$. Atunci strategiile optimale pre-default sunt date prin*

$$\underline{\pi}_S^*(t)=\frac{1}{1-p}\frac{\theta(t)}{\sigma(t)}-\frac{\beta(t)}{\sigma(t)}+\frac{\beta(t)}{\sigma(t)}\big(\frac{\rho(t)}{\delta(t)}K(t)\big)^{\frac{1}{p-1}} \tag{3.41}$$

şi

$$\pi_D^*(t)=1-\big(\frac{\rho(t)}{\delta(t)}K(t)\big)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.42}$$

Demonstraţie. Pentru a determina strategia optimală $\underline{\pi}^*$ scriem conditiile de ordinul I,

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_1} = x\sigma(t)\theta(t)\frac{\partial W}{\partial x}(t,x) + x^2\big(\sigma(t)\pi_1 + \beta(t)\pi_2\big) \\ \times \sigma(t)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,x) = 0,$$

şi

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_2} = x\big(\lambda(t)(\gamma(t)L(t) + L(t) - 1) + \theta(t)\beta(t)\big)\frac{\partial W}{\partial x}(t,x) \\ + x^2\big(\sigma(t)\pi_1 + \beta(t)\pi_2\big)\beta(t)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,x) \\ - px^p(1-\pi_2)^{p-1}\delta(t) = 0.$$

Presupunem pentru moment ca aplicaţia $W(\cdot,t)$ este strict crescătoare şi strict concavă, pentru orice $t \in [0,T]$. O serie de calcule elementare ne conduc la următorii candidaţi pentru strategiile optime (care sunt admisibile)

$$\pi_D^*(t) = 1 - \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{p}\frac{\rho(t)}{\delta(t)}\frac{\partial W}{\partial x}(t,x)\Big)^{\frac{1}{p-1}},$$

şi

$$\underline{\pi}_S^*(t) = -\frac{\theta(t)}{\sigma(t)}\frac{\frac{\partial W}{\partial x}(t,x)}{x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,x)} - \frac{\beta(t)}{\sigma(t)} + \frac{1}{x}\frac{\beta(t)}{\sigma(t)}\Big(\frac{1}{p}\frac{\rho(t)}{\delta(t)}\frac{\partial W}{\partial x}(t,x)\Big)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Sub ipotezele făcute asupra lui W rezultă ca Hamiltonianul H este o funcţie strict concavă in raport cu π, de unde deducem ca punctul $\pi^*(t) := (\underline{\pi}_S^*(t), \underline{\pi}_D^*(t))$ este punct de maxim absolut pentru aplicaţia $\pi \to H(t,x,\pi)$, cu t,x fixate.

Vom arata acum ca ecuaţia (3.36) admite o soluţie $W(t,x)$ ce poseda proprietatea de separare a variabilelor, i.e. este de forma $W(t,x) = x^p K(t)$. Inlocuind in ecuaţia (3.36) pe π_1, respectiv π_2 cu $\underline{\pi}_S^*(t)$, respectiv $\pi_D^*(t)$ obţinem, in urma unor calcule elementare ecuaţia (3.38) care admite soluţia unică $K(t)$, a carei formula explicită este dată in ecuaţia (3.39). Remarcam ca $K(t)$ ia valori strict pozitive pe intervalul $[0,T)$. Deducem atunci ca aplicaţia W este strict crescătoare şi strict concavă in raport cu x şi are proprietatile de regularitate cerute. Afirmatiile (a) şi (b) rezultă acum ca o consecinţă directă a teoremei 3.1, referinţa [**13**].

Concluzii finale

În cadrul acestei lucrări postdoctorale am obţinut rezultate pentru unele probleme de optimizare de portofolii financiare, în cadrul a două tipuri de pieţe financiare incomplete (pentru care mulţimea măsurilor martingale echivalente poate conţine mai mult de un element), şi în care s-a urmărit găsirea strategiei optimale şi a funcţiei valoare pentru un investitor ce urmăreşte să-şi maximizeze utilitatea aşteptată a valorii finale a portofoliului de investiţii, după toate strategiile admisibile de investiţie autofinanţate. Funcţiile de utilitate considerate sunt date de funcţia de utilitate logaritmică şi funcţia de utilitate putere, acestea constituind principalele tipuri de funcţii de utilitate din clasa HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*).

Am considerat mai întâi cazul unei pieţe financiare *incomplete* în cadrul căreia oportunităţile de investiţii sunt date de un activ fără risc cu o rată a dobânzii *r stohastică şi care poate avea un salt la un moment aleator de timp* τ, şi un activ cu risc care se modelează ca un proces adaptat unei filtraţii continue (Browniene). Am lucrat sub aşa-numită ipoteză **(H)** (sau ipoteza de imersie), sub care orice martingal în raport cu *filtraţia de referinţă* (filtraţia generată de piaţă) este de asemenea un martingal şi în raport cu *filtraţia lărgită* (care este dată de cea mai mică filtraţie ce conţine filtraţia de referinţa şi în raport cu care momentul aleator τ devine un timp de stopare). Am presupus de asemenea că momentul de default admite o intensitate stohastică, i.e. admite un compensator absolut continuu în raport cu măsura Lebesgue. In cazul utilităţii de tip logaritmic problema de optimizare a fost rezolvata in mod explicit printr-un calcul direct. În cazul utilităţii tip putere, am rezolvat problema atât cu ajutorul problemei duale asociate (conform teoriei clasice a dualitatii convexe) cat şi prîntr-o abordare directă a problemei originale. Tehnicile principale utilizate au constat in tehnici clasice şi mai puţin standard din teoria ecuaţiilor diferentiale stohastice retrograde (EDSR) Browniene şi cu salturi. Au fost utilizate de asemenea unele rezultate din teoria martingalelor de tipul BMO. Am obţinut formule explicite pentru strategia optimală şi funcţia valoare.

Am studiat apoi problema de optimizare a portofoliului financiar pentru un investitor cu oportunităţi de investiţii într-o piaţă financiară de asemenea incompleta formată dintr-un activ cu risc (a carui rata a dobânzii este adaptata unei filtratii Browniene), un activ cu risc (supus riscului de piaţă) şi un activ supus atât riscului de piaţă cat şi riscului de contrapartidă (există posibilitatea ca la un moment aleator de risc emitatorul activului să nu-şi indeplineasca obligaţiile contractuale vis-a-vis de investitor). Am lucrat sub aceleasi ipoteze principale, şi anume cea de invarianţă martingală in raport cu filtraţia de referinţă şi filtraţia lărgită, precum şi cea de existenţa a intensităţii stohastice a momentului de default τ. În cazul utilităţii de tip logaritmic au fost obţinute formule explicite printr-un calcul direct. În cazul funcţiei de utilitate putere, am descompus problema in două subprobleme, pre-default (înainte de default) şi post-default (după default) (utilizând procedeul lui Jiao şi Pham [**18**]), subprobleme ce sunt formulate in pieţe complete. Am rezolvat problema post default utilizând o metodă clasică de dualitate martingală, in concordanţă cu [**18**]. În cazul în care coeficienţii modelului şi densitatea condiţională a momentului aleator τ sunt funcţii deterministe, iar defaultul apare cu probabilitatea 1 până la orizontul investiţional T, am rezolvat direct problema post default şi am formulat şi demonstrat apoi o teoremă de verificare (în concordanţă cu principiul programării dinamice) pentru funcţia valoare şi strategia optimală asociată problemei pre-default, obţinând in plus şi formule explicite.

Rezultatele obţinute s-au concretizat prin elaborarea a două articole ştiinţifice:

- *A Portfolio Optimization Problem with a Corporate Bond* (referinţa [**16**]), acceptat spre publicare la revista cotată ISI *Mathematical Reports*;
- *Optimization problem under change of regime interest rate* (referinţa [**17**]), având drept coautori pe Monique Jeanblanc, Thomas Lim şi Hai-Nam Nguyen (de la Universitatea din Evry), lucrare ce a fost finalizată şi va fi trimisă spre publicare.

Bibliografie

[1] T. R. Bielecki, I. Jang (2007) *Portfolio optimization with a defaultable security*, *Asia-Pacific Financial Markets* **13**, 113–127.

[2] T. R. Bielecki, M. Rutkowski (2002) *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer Finance.

[3] C. Blanchet-Scaillet, N. El Karoui, M. Jeanblanc, L. Martellini (2008) Optimal investment decisions when time-horizon is uncertain, *Journal of Mathematical Economics* **44**, 1100–1113.

[4] G. Callegaro, T. Vargiolu (2009) Optimal portfolio for HARA utility functions in a pure jump multidimensional incomplete market, *Int. J. Risk Assessment and Management* **11**, Nos. 1/2, 180–200.

[5] N. El Karoui, M. Jeanblanc, Y. Jiao (2010) What happens after a default: the conditional density approach, *Stoch. Process. Appl.* **120**, 1011–1032.

[6] A. Capponi, J. E. Figueroa-Lopez (2011) Dynamic portfolio optimization with a defaultable security and regime switching, submitted, arXiv:1105.0042v2[q-fin.PM], 40 pagini.

[7] D. Duffie, K. Singleton (1999) Modeling term structures of default risky bonds, *Review of Financial Studies* **12**, 687–720.

[8] N. El Karoui, S. Hamadene, A. Matoussi (1997) Backward Stochastic Differential Equations and Applications, 1–51.

[9] N. El Karoui, S. Huang, M. Jeanblanc (2004) Random horizon, Draft.

[10] N. El Karoui, M. Jeanblanc, Y. Jiao, B. Zargari (2010) Conditional default probability and density, 18 pagini, preprint.

[11] N. El Karoui, M.-C. Quenez (1995) Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market, SIAM J. Control Optim. **33**, 29–66.

[12] N. El Karoui, R. Rouge (2000) Pricing via utility maximization and entropy, *Mathematical Finance* **10**, 259–276.

[13] W. H. Fleming, M. Soner (2006) *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Second Edition, Stochastic Modelling and Applied Probability Series, Springer.

[14] Y. Hou, X. Jin (2002) Optimal investment with default risk, Draft.

[15] Y. Hu, P. Imkeller, M. Müller (2004) Utility maximization in incomplete markets, *Annals of Applied Probability* **15**, 1691–1712.

[16] **B. Iftimie**, *A Portfolio Optimization Problem with a Corporate Bond*, acceptata spre publicare la revista cotată ISI *Mathematical Reports*, ISSN 0039-4068, 25 de pagini, va aparea in Vol. **15**(65), Nr. 4, 2013.

[17] **B. Iftimie**, M. Jeanblanc, T. Lim, H.-N. Nguyen, *Optimization problem under change of regime interest rate*, lucrare finalizată.

[18] Y. Jiao, H. Pham (2010) Optimal investment with counterparty risk: a default density model approach, *Finance and Stochastics*.

[19] I. Karatzas (1989) Optimization problems in the theory of continuous trading, *SIAM J. Control and Optimization* **27**, 1221-1259.

[20] I. Karatzas, S. Shreve (1999) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2^{nd} edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag.

[21] N. Kazamaki (1994) *Continuous exponential martingales and BMO*, *Lecture Notes in Mathematics* **1579**, Springer, Berlin.

[22] I. Kharroubi, T. Lim (2011) Progressive enlargement of filtrations and BSDEs with jumps, publicat online in *Journal of Theoretical Probability*, 41 pagini.

[23] M. Kobylanski (2000) Backward Stochastic Differential Equations and Partial Differential Equations with Quadratic Growth, *Annals of Applied Probability* **28**, 552–602.

[24] R. Korn, H. Kraft (2001) A stochastic control approach to portfolio problems with stochastic interest rates, *SIAM J. Control Optim.* **40**, No. 4, 1250–1269.

[25] D. Kramkov, W. Schachermayer (1999) The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets, *Annals of Applied Probability* **9**, No. 3, 904–950.

[26] S. Kusuoka (1999) A remark on default risk models, *Adv. Math. Econom.* **1**, 69–82.

[27] D. Lamberton, B. Lapeyre (2008) *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC.

[28] J.-P. Lepeltier, J. San Martin (1997) Backward stochastic differential equations with continuous coefficient, *Statistics & Probability Letters* **32**, 425–430.

[29] D. Lepingle, J. Mémin (1978) Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebeite* **42**, 175–203.

[30] T. Lim, M.-C. Quenez (2011) Exponential utility maximization in an incomplete market with defaults, *Electronic Journal of Probability* **16**, 1434–1464.

[31] D. G. Luenberger (1969) *Optimization by Vector Space Methods*, New York Wiley.

[32] R. C. Merton (1971) Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory* **3**, 373-413.

[33] M. A. Morlais (2009) Utility maximization in a jump market model, *Stochastics and Stochastics Reports* **81**, 1–27.

[34] L. C. G. Rogers (2001) Duality in constrained optimal investment and consumption problems: a synthesis, University of Cambridge.

[35] M. Royer (2006) Backward stochastic differential equations with jumps and related non-linear expectations, *Stochastic Processes and their Applications* **116**, 1358–1376.