ACADEMIA ROMÂNĂ

Institutul Naţional de Cercetări Economice "Costin C. Kiriţescu"

Lucrare de cercetare postdoctorală

Expert îndrumător:

Prof. Dr. Lucian BEZNEA

Cercetător postdoctorand:

Anca-Iuliana BONCIOCAT

Bucureşti, 2012

Investeşte în oameni!

FONDUL SOCIAL EUROPEAN

Programul Operaţional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 - 2013

Axa prioritară 1 "Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"

Domeniul major de intervenţie 1.5 "Programe doctorale şi post-doctorale în sprijinul cercetării"

Titlul proiectului: **"Cercetarea ştiinţifică economică, suport al bunăstării şi dezvoltării umane în context european"**

Beneficiar: **Institutul Naţional de Cercetări Economice "Costin C. Kiriţescu"**

Numărul de identificare al contractului: POSDRU/89/1.5/S/62988

Inegalităţi funcţionale şi probleme de transport cu aplicaţii în Economie

Expert îndrumător:

Prof. Dr. Lucian BEZNEA

Cercetător postdoctorand:

Anca-Iuliana BONCIOCAT

Bucureşti, 2012

Cuprins

Rezumat

Problema de transport al masei, pusă iniţial de Gaspard Monge în 1781, redescoperită în anii '50 de Leonid Vitaliyevich Kantorovich (medaliat Nobel pentru Economie în 1975), are în prezent numeroşi descendenţi în diverse ramuri ale economiei, meteorologiei, ecuaţiilor de difuzie sau mecanicii fluidelor. Cea mai cuprinzătoare monografie pe acest subiect este lucrarea "Optimal Transport, Old and New", Grundlehren des mathematischen Wissenschaften (2009), elaborată după un lung şir de articole sclipitoare de către Cédric Villani, proaspăt medaliat Fields (2010) pentru lucrările sale în domeniul transportului optimal şi teoriei kinetice a ecuaţiei lui Boltzman. În ultimii ani aceste problematici au suscitat un larg interes în studiul inegalităţilor funcţionale, al curburii pe spaţii metrice sau al unor modele cunoscute din economie. În lucrarea de faţa prezentăm rezultate care pun în lumină interacţiunile transportului optimal cu aceste trei domenii actuale de cercetare.

În primul capitol al lucrării analizăm aspecte legate de curbura Ricci a spaţiilor metrice discrete şi a grafurilor, din perspectiva teoriei transportului optimal. Studiul geometriei spaţiilor discrete este justificat în practică, printre altele, de interesul crescut din ultimii ani în domeniul procesării imaginilor. *Unul dintre obiectivele transversale ale prezentului proiect este societatea informaţională, adică societatea în care producerea şi consumul de informaţie este cel mai important tip de activitate.* Prelucrarea şi recunoaşterea imaginilor medicale de pildă, ca suport al informatizării societătii la nivelul sistemului sanitar, reprezintă o provocare pentru multe colective de cercetători din diverse domenii de activitate. O ramură nouă de cercetare o constituie geometria digitală; imaginile digitale trebuie sa reproducă tot mai fidel obiectele "reale", iar aspectele geometrice ale acestei dualităţi între discret şi continuu joacă un rol determinant.

Urmărind îndeaproape această dualitate, prezentăm minoranţi generalizaţi pentru curbură,

precum şi o condiţie de tip curbură-dimensiune, atât pe spaţii metrice discrete şi grafuri, cât şi pe spaţii continue, având în vedere şi utilizarea unor măsuri de referinţa de alte tipuri decât cele Gaussiene. Aceste noţiuni, în cadrul discret, depind de un parametru real $h > 0$, care trebuie înteles drept ordinul de discretizare sau rezoluţia spaţiului discret în cauză. Demonstrăm stabilitatea acestor noţiuni la convergenţa în metrica L_2 de transport, ca şi stabilitatea la discretizări. Prezentăm exemple concrete, cercetând în detaliu cazul grafurilor planare omogene.

În cazul clasic al varietăţilor Riemanniene, minoranţii pentru curbura Ricci au o gamă largă de aplicaţii, ca de pildă estimări pentru nucleul căldurii şi pentru funcţiile Green, estimări ale valorilor proprii, inegalităţi izoperimetrice, inegalităţi Harnack sau Sobolev-logaritmice, precum şi inegalităti de transport.

În capitolul al doilea, introducem şi analizăm inegalităţile slabe de transport de tip Talagrand, ca şi inegalităţile de tip Brunn-Minkowski, sub ipoteze de curbură mărginită inferior sau sub condiţii de tip curbură-dimensiune. Arătăm că inegalităţile slabe de transport produc fenomenul de concentrarea a masei, pus în evidenţă în ultimele decenii de contribuţiile lui Vitali Milman, Mikhail Gromov, Michel Ledoux şi alţii. Demonstrăm, de asemenea, o generalizare a Teoremei Bonnet-Myers sub o condiţie de tip curbură dimensiune.

Reputat dificilă, problema de transport, formulată fie în context pur teoretic, fie în diverse variante algoritmice, reprezintă un factor cheie în studierea şi optimizarea a numeroase procese din sfera economică, cu aplicaţii dintre cele mai diverse. Plecând de la o problemă formulată de Monge în 1781 şi relansată într-o variantă liniarizată de Kantorovich şi Rubinstein, problema de transport este reprezentativă pentru o întreagă clasă de probleme liniare ce apar în diverse ramuri ale economiei. Teoria transportului optimal are o gamă largă de aplicaţii în econometrie, economie urbană şi "nonlinear pricing".

În capitolul al treilea investigăm o problema de optimizare pentru reţelele de trafic. Modelăm matematic o reţea de transport, modelul fiind aplicabil, de exemplu, în cazul unui oraş, sau a unei regiuni geografice înzestrate cu o reţea de transport în comun. La fel de bine, ne putem gândi la o reţea de furnizare a apei sau a gazului natural, sau la o reţea de comunicaţii.

Modelăm o zonă geografică printr-o submulţime mărginită M a spaţiului tridimensional, mai general ca pe o submulţime mărginită a lui $\mathbb{R}^N$, cu $N \geq 2$. Privim o reţea de transport ca pe un graf finit si conex scufundat în multimea M. Formulăm o problemă de transport care înglobeaza trei categorii de costuri: costul transportului "cu mijloce proprii", costul transportului pe reţelele de transport în comun - altfel spus "preţul biletului" prevăzut de companiile de transport - , ca şi costurile de mentenanţa a reţelelor. Ne punem problema de a gasi cea mai potrivită reţea de transport pentru a transporta populaţia de la "domicilii" la "locurile de muncă", de pildă. Formulăm astfel o problemă de optimizare şi demonstrăm existenţa unei soluţii optimale.

Cuvinte cheie: dezvoltare durabilă, societate informaţională, problema de transport, inegalităţi de transport, reţele de trafic

Summary

Mass transportation problem, initially posed by Gaspard Monge in 1781, and rediscovered 60 years ago by Leonid Vitaliyevich Kantorovich (Nobel Prize winner in 1975 for his contributions to Economics), has nowadays numerous descendants in various fields of economy, meteorology, diffusion equations or fluid mechanics. The most comprehensive monograph on this topic is the book "Optimal Transport, Old and New", Grundlehren des mathematischen Wissenschaften (2009), elaborated after a long series of brilliant articles by Cédric Villani, recently awarded a Fields Medal (2010) for his work in the field of optimal transport and kinetic theory of Boltzman equation. In the last years these topics have been of a wide interest in studying functional inequalities and curvature bounds on metric measure spaces, or well-known models in Economy. In the present work we present results that emphasize the interactions of mass transportation problem with these three fields of research.

In the first chapter of the thesis we analyze geometrical aspects related to Ricci curvature on discrete metric spaces and graphs, approach based on mass transportation techniques. The study of the geometry of discrete spaces is motivated, among others, by its applications to image processing. *One transversal goal of the present project is the information society, a society where the creation, distribution, use, integration and manipulation of information is a significant economic activity.* Processing and recognition of the medical images, for instance, represents a challenge for many research groups from various fields. A new research direction is digital geometry; digital images must reproduce "real objects" as accurately as possible, and the geometrical aspects of this duality between discrete and continuous plays a prominent role.

Following closely this duality, we present generalized Ricci curvature bounds, and also a curvature-dimension type condition, applicable to discrete spaces and graphs, as well as to

continuous spaces, making use of other types of measures than Gaussian. These notions, in the discrete framework, depend on a real parameter $h > 0$, which should be understood as a discretization size or resolution of the underlying discrete space. We prove the stability of these notions under convergence in the L_2-transport metric, as well as the stability under discretizations. Furthermore, we present concrete examples, studying in detail the case of homogeneous planar graphs.

In the classical case of Riemannian geometry, Ricci curvature bounds have a wide spectrum of consequences, like, for instance estimates for heat kernels and Green functions, eigenvalue estimates, Harnack inequalities, isoperimetric inequalities, logarithmic Sobolev inequalities, as well as transportation cost inequalities.

Within the second chapter, we introduce and analyze Talagrand type weak transportation inequalities and Brunn-Minkowski type inequalities, under lower Ricci curvature bounds or curvature-dimension conditions. We prove that weak transportation inequalities produce concentration of measure phenomenon, put forward in the last decades by Vitali Milman, Mikhail Gromov, Michel Ledoux and many other mathematicians. We also prove a generalized Bonnet-Myers theorem under a curvature-dimension condition.

The well-known transport problem, either formulated in a purely theoretical context, or in diverse algorithmical versions, represents a key factor in studying and optimizing various processes in Economy, with numerous applications. Starting with a problem formulated by Monge in 1781, and reinforced in a linearized version by Kantorovich and Rubinstein, the transport problem is representative for a whole class of linear problems which appear in various fields of Economy. Optimal transport theory has many applications to econometry, urban economy and nonlinear pricing.

In the third chapter, we investigate an optimization problem for traffic networks. We give a mathematical model of a transport network which is applicable, for instance, to the case of a city, or of a geographical area, provided with a transport public network, but one can also think of water or gas supply networks or communication networks.

We model a geographical area by a bounded subset M of the 3-dimenional space, or more

general by a bounded subset of $\mathbb{R}^N$, with $N \geq 2$. We regard a transport network as a finite and connected graph embedded in M and formulate a transport problem that combines three types of costs: the transportation cost "by own means", the transportation cost on the network that was assigned by the transport companies - "the price of the ticket" so to say - , and the cost of maintenance for the transport networks. We aim to find the most convenient traffic network in order to transport the population from "domiciles" to "working places", for instance. We formulate an optimization problem that models mathematically such situations and we prove the existence of an optimal transport network.

Keywords and phrases: steady-state development, information society, transport problem, transport inequalities, traffic networks

Introducere

Problema minimizării costurilor de transport al bunurilor a fost pusă pentru prima dată de Gaspard Monge [M1781] în 1781; a fost redescoperită în anii ’40 de către L.V. Kantorovich ([Ka42], [KR57]), care a primit un premiu Nobel pentru Economie pentru contribuţiile sale. În zilele noastre, transportul optimal a devenit o "industrie" prosperă, angrenând o serie întreagă de cercetatori şi de direcţii de cercetare. Domeniile sale de competenţă variază de la economie şi meteorologie până la ecuaţii de difuzie şi mecanica fluidelor, cu consecinţe în biologie. A se vedea [AV01], [RR98], şi excelentele lucrări [Vi03] şi [Vi08] ale lui C. Villani, pentru o largă trecere în revistă a multiplelor aplicaţii ale transportului masei.

În dezvoltarea acestei teorii, în ultimul deceniu, un rol deosebit l-au jucat factorizarea polară, extinsă la varietăţi Riemanniene de către R. McCann în [Mc97], ca şi abordarea spaţiilor Wasserstein în mod heuristic ca varietăţi Riemanniene formale, de către F. Otto şi C. Villani în [OV00]. În această ultimă lucrare se arată că inegalităţile de transport de tip Talagrand pentru măsura Gaussiană se obţin din inegalităţi Sobolev logaritmice, şi reciproc.

Studiul proprietăţilor geometrice ale spaţiilor metrice discrete câştigă un tot mai mare interes în ultimii ani datorită aplicaţiilor sale în informatică. Triangulaţiile varietăţilor Riemanniene şi discretizările de spaţii metrice (continue) sunt extrem de utile în geometria computaţională (sau digitală). Geometria digitală are de a face cu două probleme principale, inverse una alteia: pe de o parte construcţia unor reprezentări digitale ale obiectelor, cu un accent deosebit pe eficienţă şi precizie, iar pe de altă parte reconstrucţia unor obiecte "reale" sau a proprietăţilor lor (în termeni de lungime, arie, volum, curbură, etc.). Un asemenea studiu presupune, desigur, o mai bună întelegere a aspectelor geometrice ale spaţiilor discrete. Studiul geometriei spaţiilor discrete este justificat în practică, printre altele, de interesul crescut din ultimii ani în domeniul procesării imaginilor. Prelucrarea şi recunoaşterea imaginilor medicale de pildă, ca suport al informatizării societătii la nivelul sistemului sanitar, reprezintă o provocare pentru multe colective de cercetători din diverse domenii de activitate.

Ca un prim pas, spaţiile geodezice sunt generalizări naturale ale varietăţilor Riemanniene. O noţiune de margine pentru curbură pe asemenea spaţii a fost introdusă înca din anii '50 de către Alexandrov; în cazul varietăţilor Riemanniene, aceasta revine la o margine inferioară pentru curbura secţională. În ultimii ani s-au facut progrese semnificative în studierea unei margini inferioare pentru curbura Ricci pe spaţii metrice geodezice cu măsură (M, d, m) (vezi [St06a], [St06b], [LV09]), ceea ce aduce cu sine o serie de generalizări ale unor teoreme clasice în geometria diferentială (Teorema Bonnet-Myers, Inegalitatea Bishop-Gromov de creştere a volumelor, etc.).

Aceste abordări se bazează pe proprietăţi de convexitate ale entropiei relative $\mathrm{Ent}(\cdot|m)$, privită ca functională pe spaţiul Wasserstein al probabilităţilor cu momente de ordin doi finite. Această teorie a fost extinsă de către A.-I. Bonciocat şi K.-T. Sturm la cazul spaţiilor metrice discrete în [Bn08] si [BS09], unde a fost introdusă o noţiune de margine inferioară grosieră pentru curbură. În continuarea acestui studiu, ne-am propus să cercetăm şi o condiţie mai generală, de tip curbură-dimensiune, pentru spaţii metrice şi grafuri, introdusă în [Bn12a] si [Bn12b]. De asemenea, am urmărit să studiem diverse tipuri de inegalităţi funcţionale pentru spaţii discrete şi grafuri, înzestrate cu măsuri de referinţă.

Punctul nostru de vedere vine în întâmpinarea geometriei grosiere ("coarse geometry"), care studiază proprietăţile "la scară mare" ale spaţiilor (vezi, spre exemplu, lucrarea [Ro03] pentru o introducere în acest domeniu). În diverse contexte, se poate observa că proprietăţile geometrice relevante pentru un spaţiu metric sunt cele grosiere. Un spaţiu discret poate căpăta o formă geometrică atunci când este privit dintr-un punct îndepartat de el; atunci toate golurile dintre puncte devin din ce în ce mai puţin vizibile, iar spaţiul arată mai degrabă ca unul continuu. Acesta este punctul de vedere care l-a condus pe M. Gromov către noţiunea sa de grup hiperbolic, care este un grup "aproape curbat negativ" (într-un anume înţeles combinatorial).

Dezvoltăm o noţiune de minorant grosier pentru curbură pe spaţii discrete, ca şi o condiţie de tip curbură-dimensiune, ambele bazate pe conceptul de transport optimal al masei. Aceşti

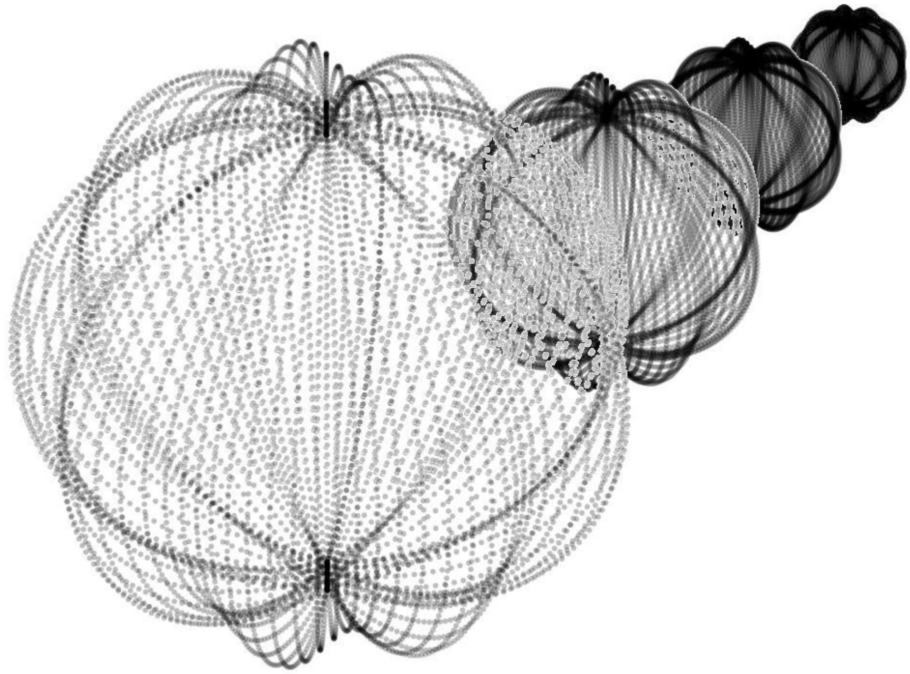

Figura 1

minoranţi grosieri depind de un parametru real $h > 0$, care trebuie înteles ca ordinul sau scara de marime a spaţiului discret subiacent, sau scara la care trebuie sa privim spaţiul în cauză. Pentru un graf metric, de exemplu, acest parametru este egal cu lungimea maximă a muchiilor sale (înmulţită eventual cu o constantă). Abordarea prezentă aici o urmează pe cea a lui [St06a], şi este în mod special preocupată cu îndepărtarea ipotezelor de conectivitate presupuse de structura geodezică cerută acolo. Această dificultate este surmontată în felul următor: transportul masei şi proprietăţile de convexitate sunt studiate de-a lungul h-geodezicelor. De exemplu, în locul mijloacelor dintre doua puncte x_0, x_1 considerăm h-mijloace, care sunt puncte y cu $\mathsf{d}(x_0,y) \leq \frac{1}{2}\mathsf{d}(x_0,x_1)+h$ şi $\mathsf{d}(x_1,y) \leq \frac{1}{2}\mathsf{d}(x_0,x_1)+h$.

Există numeroase aplicaţii ale problemelor de transport în economie. Dualitatea transportului masei este extrem de utilă în formularea unor rezultate de existenţă şi unicitate în modelele hedonice. Lucrări recente ale lui Ekeland [Ek05], [Ek10], Chiappori, McCann şi Nesheim [CM10] au arătat că tehnicile de transport optimal sunt instrumente utile în analiza aşa-numitelor "matching problems" şi a echilibrului hedonic. Lucrările lui Carlier [Ca01] şi Figalli, Kim, McCann [FK11] prezintă aplicaţii ale problemei "principal-agent", un exemplu central în teoria microeconomică, şi care modelează problema deciziei optimale cu care se confruntă un monopolist care trebuie să acţioneze pe baza informaţiilor statistice asupra clienţilor săi. Deşi rezultate de existenţa au fost, în general, stabilite pentru asemenea modele, caracterizarea soluţiilor, incluzând unicitatea şi regularitatea, reprezintă încă probleme deschise.

Rezultate de dualitate, existenţă şi unicitate pentru o clasă de probleme de transport, cu funcţii cost satisfăcând o generalizare a condiţiei Spence-Mirrlees, bine-cunoscute economiştilor în dimensiune 1 (vezi [Mir76] şi [Sp74]), au fost obţinute în lucrarea [Ca03]. Analiza problemei de transport pentru o clasă mai largă de funcţii cost este un domeniu de larg interes. Astfel de studii au aplicaţii în teoria economică a stimularii ("incentive theory") [Ca03], [MM88], [Lev97].

Teoria transportului optimal are o gamă largă de aplicaţii în econometrie, economie urbană şi "nonlinear pricing" (a se vedea, de exemplu, [BC10], [BPS09], [Ca99], [RC98]). În problema Monge-Kantorovich clasică, costul transportului depinde doar de masa trimisă de la surse la destinaţii, nu şi de drumurile pe care masa este transportată. Astfel, problema clasică nu ţine cont de problemele de trafic. Folosind noţiunea de intensitate a traficului, în [CJS08] autorii prezintă o variantă continuă a binecunoscutei probleme de trafic pe reţele, studiate atât în economie, cât şi în cercetări operaţionale. O mai bună întelegere a "geometriei" grafurilor în termeni de transport optimal poate avea consecinţe însemnate în acest domeniu.

În monografia "Optimal Urban Networks via Mass Transportation" [BPS09], autorii G. Buttazzo, A. Pratelli, S. Solimini, şi E. Stepanov tratează o clasă de modele de optimizari de reţele de transport (transport urban sau transport feroviar ori transport auto între localităţi) într-o zonă geografică dată. Se presupune cunoscută distribuţia populaţiei într-un oraş, de pildă, ca şi distribuţia locurilor de muncă spre care locuitorii se deplasează zilnic, folosind, eventual, transportul în comun. Modelele iau în considerare atât costul de transport fără ajutorul reţelei transportatorului, cât şi costul de transport fixat de transportator şi costurile de întreţinere a reţelei. Problemele de optimizare propuse necesită găsirea unor reţele de transport optimale în sensul minimizării costului de transport. Autorii prezintă mai întâi o versiune relaxată a problemei de optimizare şi demonstreaza existenţa unei soluţii relaxate. De asemenea, se arată şi că problema propusă poate să nu aibă soluţii clasice. În final, autorii demonstrează un rezultat de regularitate pe reţele optimale.

Plecând de la unul dintre modelele studiate în [BPS09], demonstrăm în Capitolul 3 existenţa unei soluţii la o problemă de optimizare pe reţele de trafic, folosind o functie cost mai generală, care înglobeaza cele trei tipuri de costuri delimitate în [BPS09]. Pe calea teoriei transportului optimal al masei, prespunând cunoscute distribuţiile domiciliilor locuitorilor unei zone urbane, ca şi distribuţiile locurilor de muncă, arătăm existenţa unei reţele de transport în comun care minimizează o functională ce depinde de geometria reţelei prin intermediul unei funcţii cost. Funcţionala este definită ca distanţa Wasserstein dintre cele două distribuţii, în raport cu o metrică ce depinde de reţeaua de transport. Rezultatele se aplică unor zone geografice modelate matematic prin submulţimi deschise, mărginite şi conexe ale lui $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^N$ mai general). Pe această submulţime a spaţiului euclidian utilizăm convergenţa în distanţa Hausdorff. În cursul demonstraţiei rezultatului de existenţă, folosim intens o generalizare a Teoremei lui Golab, obţinută de Dal Maso şi Toader în [DT02].

Modelul studiat în Capitolul 3 al prezentei lucrări este aplicabil, de exemplu, în cazul unui oraş, sau a unei regiuni geografice înzestrate cu o reţea de transport în comun. La fel de bine, ne putem gândi la o reţea de furnizare a apei sau a gazului natural, sau la o reţea de comunicaţii.

Capitolul 1

Geometria spaţiilor metrice

În ultimii ani s-au facut progrese semnificative în studierea unei margini inferioare pentru curbura Ricci pe spaţii metrice geodezice cu măsură (M, d, m) (vezi [St06a], [St06b], [LV09]), ceea ce aduce cu sine o serie de generalizări ale unor teoreme clasice în geometria diferentială (Teorema Bonnet-Myers, Inegalitatea Bishop-Gromov de creştere a volumelor, etc.).

Aceste abordări se bazează pe proprietăţi de convexitate ale entropiei relative $\mathrm{Ent}(\cdot|m)$, privită ca functională pe spaţiul Wasserstein al probabilităţilor cu momente de ordin doi finite. Această teorie a fost extinsă de către A.-I. Bonciocat şi K.-T. Sturm la cazul spaţiilor metrice discrete în [Bn08] si [BS09], unde a fost introdusă o noţiune de margine inferioară grosieră pentru curbură. În continuarea acestui studiu, ne-am propus să cercetăm şi o condiţie mai generală, de tip curbură-dimensiune, pentru spaţii metrice şi grafuri, introdusă în [Bn12a] si [Bn12b].

1.1 Minoranţi grosieri pentru curbura Ricci

Prezentăm o noţiune de minorant grosier pentru curbura Ricci, aplicabilă spaţiilor metrice cu măsură, în particular spaţiilor metrice discrete şi grafurilor metrice. Acest studiu este bazat pe conceptul de transport al masei. Minoranţii grosieri vor depinde de un parametru real $h > 0$, care trebuie înţeles drept scara naturală de mărime a spaţiului subiacent. Pentru un graf metric, de exemplu, acest parametru este egal cu lungimea maximă a muchiilor sale, înmulţită cu o constantă.

Abordarea prezentată aici a fost introdusă în [BS09] şi o extinde pe cea din lucrarea [St06a], care introduce şi studiază minoranţi pentru curbura Ricci pentru spaţii metrice cu măsură. Studiul din [St06a] presupunea că spaţiul Wasserstein de probabilităţi (şi deci şi spaţiul subiacent) să fie un spaţiu geodezic. De aceea, în forma originală din [St06a], noţiunea de minorant pentru curbură nu se putea aplica spaţiilor discrete. În plus, grafurile metrice nu prezintă minoranţi pentru curbură în sensul din [St06a], deoarece vârfurile grafului sunt puncte de ramificare care distrug K-convexitatea funcţionalei entropie. Lucrarea [BS09] surmontează această dificultate în felul următor: transportul masei şi proprietăţile de convexitate ale entropiei relative sunt studiate de-a lungul h-geodezicelor în locul geodezicelor.

În primul paragraf 1.1.1, prezentăm o vedere sintetică generală asupra materialului existent în literatură, în particular noţiunea de minorant pentru curbura Ricci pentru spaţii metrice "continue" (geodezice) cu măsură, conform [St06a].

Cele două rezultate principale pe care le vom prezenta în această secţiune, teoremele 1.1.13 şi 1.1.14, sunt într-un anumit sens inverse una alteia: pe de o parte se "reconstituie" minorantului pentru curbură al unui spaţiu continuu, din minoranţii grosieri pentru curbură ai spaţiilor discrete aproximante, cu ordinul de discretizare tinzând la zero (Teorema 1.1.13), iar pe de altă parte se deduc minoranţii grosieri pentru curbură ai discretizărilor unui spaţiu continuu din minorantul pentru curbură al acestuia (Teorema 1.1.14).

În paragraful 1.1.4 aplicăm rezultatele noastre unor exemple concrete. Demonstrăm (în Teorema 1.1.20) că orice graf planar omogen are h-curbura $\geq K$, unde K este dat în funcţie de gradul grafului, de gradul grafului dual şi de lungimea muchiilor.

O abordare alternativă, absolut independentă, pentru definirea unor minoranţi generalizaţi pentru curbura Ricci pe spaţii discrete – din nou pe baza transportului optimal – a fost prezentată de Yann Ollivier [Ol09], a se vedea Observaţia 1.1.11.

1.1.1 Preliminarii

În cele ce urmează, un spaţiu metric cu măsură va fi un triplet (M, d, m), unde (M, d) este un spaţiu metric separabil şi complet, iar m este o măsură pe M (echipat cu σ-algebra borelienelor $\mathscr{B}(M)$), măsură ce este local finită în sensul că $m(B_r(x)) < \infty$ pentru orice $x \in M$ şi orice $r > 0$ suficient de mic. Spunem că un spaţiu metric cu măsură (M, d, m) este normalizat dacă m este o măsură de probabilitate pe M (adică $m(M) = 1$).

Doua spatii metrice cu masura (M, d, m) si (M', d', m') se numesc izomorfe daca si numai daca exista o izometrie $\psi : M_0 \to M_0'$ intre suporturile $M_0 := \text{supp}[m] \subset M$ and $M_0' := \text{supp}[m'] \subset M'$ astfel incat $\psi_* m = m'$. Diametrul unui spatiu metric cu masura (M, d, m) este diametrul spatiului metric $(\text{supp}[m], d)$.

Folosim intens in cele ce urmeaza metrica L_2 de transport $\mathbb{D}$, care, pentru doua spatii metrice cu masura (M, d, m) si (M', d', m'), este definita in lucrarea [St06a] astfel:

$$\mathbb{D}((M, \mathsf{d}, m), (M', \mathsf{d}', m')) = \inf \left(\int_{M \sqcup M'} \hat{\mathsf{d}}^2(x,y) dq(x,y) \right)^{1/2},$$

unde $\hat{\mathsf{d}}$ parcurge toate cuplajele metricilor d si d', iar q parcurge toate cuplajele masurilor m si m'. Aici, o masura q pe spatiul produs $M \times M'$ este un cuplaj al masurilor m si m' daca

$$q(A \times M') = m(A) \text{ si } q(M \times A') = m'(A')$$

pentru orice submultimi masurabile $A \subset M, A' \subset M'$; o pseudo-metrica $\hat{\mathsf{d}}$ pe reuniunea disjuncta $M \sqcup M'$ este *un cuplaj al metricilor* d *si* d' daca $\hat{\mathsf{d}}(x,y) = \mathsf{d}(x,y)$ si $\hat{\mathsf{d}}(x',y') = \mathsf{d}'(x',y')$ pentru orice $x, y \in \text{supp}[m] \subset M$ si orice $x', y' \in \text{supp}[m'] \subset M'$.

Metrica L_2 de transport $\mathbb{D}$ defineste o "lenght" metrica separabila si completa pe familia tuturor claselor de izomorfism de spatii metrice cu masuri normalizate (M, d, m) pentru care $\int_M \mathsf{d}^2(z,x) dm(x) < \infty$ pentr un (deci pentru orice) $z \in M$. Notiunea de $\mathbb{D}$-convergenta este strans legata de cea a a convergentei Gromov-Hausdorff masurate, introduse in [Fu87].

Reamintim ca un sir de spatii metrice compacte cu masura normalizate $\{(M_n, \mathsf{d}_n, m_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge in sensul convergentei Gromov-Hausdorff masurate (pe scurt, mGH-converge) la un spatiu metric compact cu masura normalizat (M, d, m) daca si numai daca exista un sir de numere $\varepsilon_n \searrow 0$ si un sir de aplicatii masurabile $f_n : M_n \to M$ astfel incat

(i) pentru orice $x, y \in M_n$, $|\mathsf{d}(f_n(x), f_n(y)) - \mathsf{d}_n(x,y)| \le \varepsilon_n$,

(ii) pentru orice $x \in M$ exista $y \in M_n$ cu $\mathsf{d}(f_n(y), x) \le \varepsilon_n$,

(iii) $(f_n)_* m_n \to m$ slab pe M cand $n \to \infty$.

Conform Lemei 3.17 din [St06a], orice sir mGH-convergent de spatii metrice cu masura normalizate converge si in metrica $\mathbb{D}$; mai mult, pentru orice sir de spatii metrice compacte cu masura si normalizate, suportate peste tot si cu margini uniforme pentru constantele de dublare ("doubling constants") si pentru diametre, mGH-convergenta este echivalenta cu $\mathbb{D}$-convergenta.

Este usor de vazut ca

$$\mathbb{D}((M, \mathsf{d}, m), (M', \mathsf{d}', m')) = \inf \hat{\mathsf{d}}_W(\psi_* m, \psi'_* m')$$

unde infimumul este luat dupa toate spatiile metrice $(\hat{M}, \hat{\mathsf{d}})$ cu scufundari izometrice $\psi : M_0 \hookrightarrow \hat{M}$, $\psi' : M'_0 \hookrightarrow \hat{M}$ ale suporturilor M_0 si M'_0 ale lui m si m', respectiv, si unde $\hat{\mathsf{d}}_W$ noteaza metrica L_2-Wasserstein provenita din metrica $\hat{\mathsf{d}}$.

Reamintim ca pentru orice spatiu metric (M, d), metrica L_2-Wasserstein dintre doua masuri μ si ν pe M este definita ca

$$\mathsf{d}_W(\mu, \nu) = \inf \left\{ \left(\int_{M \times M} \mathsf{d}^2(x,y) dq(x,y) \right)^{1/2} : q \text{ e cuplaj al lui } \mu \text{ si } \nu \right\},$$

cu conventia $\inf \emptyset = \infty$. Pentru mai multe detalii asupra metricii Wasserstein, a se vedea excelentele monografii [Vi03] si [Vi08]. Notam cu $\mathscr{P}_2(M, \mathsf{d})$ spatiul tuturor masurilor de probabilitate ν care au momente de ordin 2 finite: $\int_M \mathsf{d}^2(o,x) d\nu(x) < \infty$ pentru un (deci orice) $o \in M$.

Pentru un spatiu metric cu masura (M, d, m) dat, definim $\mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ ca fiind spatiul tuturor masurilor de probabilitate $\nu \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d})$ care sunt absolut continue in raport cu m. Daca $\nu = \rho \cdot m \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$, consideram entropia relativa a lui ν in raport cu m, definita prin

$$\mathrm{Ent}(\nu | m) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\{\rho > \varepsilon\}} \rho \log \rho \, dm.$$

Notam cu $\mathscr{P}_2^*(M, \mathsf{d}, m)$ subspatiul masurilor $\nu \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ de entropie finita $\mathrm{Ent}(\nu | m) < \infty$.

In Geometria Riemanniana clasica, pentru un punct dat x intr-o varietate Riemanniana, curbura Ricci Ric_x este definita pe spatiul tangent $T_x M$ ca

$$\mathrm{Ric}_x(v, v) := \mathrm{trace}\{w \to \mathscr{R}(v, w)v\}, \; v \in T_x M,$$

unde $\mathscr{R}$ este tensorul de curbura. Curbura Ricci $\mathrm{Ric}_x(v,v)$ masoara comportamentul ne-euclidian al varietatii in punctul x si in directia v.

In articolul [RS05], autorii demonstreaza urmatoarea caracterizare a curburii Ricci pentru varietati Riemanniene.

Teorema 1.1.1. *Pentru orice varietate Riemanniana neteda si conexa M cu metrica intrinseca d si cu masura volum m, si pentru orice $K \in \mathbb{R}$ urmatoarele proprietati sunt echivalente:*

(i) $\mathrm{Ric}_x(v,v) \geq K|v|^2$ *pentru $x \in M$ si $v \in T_x(M)$.*

(ii) Functionala entropie $Ent(\cdot|m)$ este displacement K-convexa pe $\mathscr{P}_2(M)$ in sensul ca pentru orice geodezica $\gamma : [0,1] \to \mathscr{P}_2(M)$ si pentru orice $t \in [0,1]$

$$\mathrm{Ent}(\gamma(t)|m) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\gamma(0)|m) + t\mathrm{Ent}(\gamma(1)|m) - \frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^2(\gamma(0),\gamma(1)).$$

Aceasta caracterizare a curburii Ricci minorate nu apeleaza deloc la diferentiabilitate, deoarece conditia (ii) poate fi formulata in orice spatiu metric cu masura care este geodezic. De aceea, conditia (ii) poate fi gandita ca o definitie a curburii Ricci minorate pe astfel de spatii. Intr-adevar, lucrarea [St06a] dovedeste stabilitatea la $\mathbb{D}$-convergenta si pune in evidenta o serie de rezultate care extind teoreme clasice din Geometria Riemanniana, referitoare la curbura Ricci.

Prezentam mai jos definitiile minorantilor pentru curbura Ricci, pentru spatii metrice cu masura, asa cum au fost ele introduse in articolul [St06a]:

Definiţia 1.1.2. (i) Un spatiu metric cu masura (M,d,m) are curbura $\geq K$ pentru un anume $K \in \mathbb{R}$ daca si numai daca entropia relativa $\mathrm{Ent}(\cdot|m)$ este slab K-convexa pe $\mathscr{P}_2^*(M,\mathsf{d},m)$ in sensul ca pentru orice pereche $\nu_0,\nu_1 \in \mathscr{P}_2^*(M,\mathsf{d},m)$ exista o geodezica $\Gamma : [0,1] \to \mathscr{P}_2^*(M,\mathsf{d},m)$ ce uneste ν_0 si ν_1, cu

$$\mathrm{Ent}(\Gamma(t)|m) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\Gamma(0)|m) + t\mathrm{Ent}(\Gamma(1)|m) - \frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^2(\Gamma(0),\Gamma(1)) \quad (1.1.1)$$

pentru orice $t \in [0,1]$.

(ii) Spatiul metric cu masura (M, d, m) are curbura $\geq K$ in sens slab daca pentru fiecare $\varepsilon > 0$ si pentru orice pereche $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2^*(M, \mathsf{d}, m)$ exista un ε-mijloc $\eta \in \mathscr{P}_2^*(M, \mathsf{d}, m)$ intre ν_0 si ν_1, cu

$$\mathrm{Ent}(\eta|m) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu_0|m) + \frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu_1|m) - \frac{K}{8}\,\mathsf{d}_W^2(\nu_0, \nu_1) + \varepsilon. \tag{1.1.2}$$

Pe scurt, vom scrie $\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$, respectiv $\mathbb{C}\mathrm{urv}_{lax}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$.

Reamintim ca intr-un spatiu metric dat (M, d), un punct y este un ε-mijloc ("ε-midpoint") intre x_0 si x_1 daca

$$\mathsf{d}(x_i, y) \leq \frac{1}{2}\,\mathsf{d}(x_0, x_1) + \varepsilon$$

pentru orice $i = 0, 1$. Numim y mijloc intre x_0 si x_1 daca

$$\mathsf{d}(x_i, y) \leq \frac{1}{2}\,\mathsf{d}(x_0, x_1)$$

pentru $i = 0, 1$.

1.1.2 Minoranţi grosieri pentru curbura Ricci. Stabilitatea la convergenţă

Pentru a adapta notiunea de minorant pentru curbura si la altfel de spatii decat spatiile geodezice fara ramificare, ne vom referi in cele ce urmeaza la o clasa mai larga de spatii metrice:

Definiţia 1.1.3. Fie dat $h > 0$. Spunem ca un spatiu metric (M, d) este h-geodezic daca si numai daca pentru orice pereche de puncte $x_0, x_1 \in M$ si orice $t \in [0, 1]$ exista un punct $x_t \in M$ satisfacand

$$\mathsf{d}(x_0, x_t) \leq t\,\mathsf{d}(x_0, x_1) + h, \;\; \mathsf{d}(x_t, x_1) \leq (1-t)\,\mathsf{d}(x_0, x_1) + h. \tag{1.1.3}$$

Vom spune atunci ca x_t este un punct t-intermediar h-grosier intre x_0 si x_1. Punctul $1/2$-intermediar h-grosier este de fapt h-mijlocul dintre x_0 si x_1.

Exemplul 1.1.4. (i) Orice multime nevida X, inzestrata cu metrica discreta $\mathsf{d}(x, y) = 0$ pentru $x = y$, si $\mathsf{d}(x, y) = 1$ pentru $x \neq y$, este h-geodezic pentru orice $h \geq 1/2$. In acest caz, orice punct este un h-mijloc pentru orice pereche de puncte distincte.

(ii) Daca $\varepsilon > 0$, atunci spatiul $(\mathbb{R}^n, \mathsf{d})$ cu metrica $\mathsf{d}(x,y) = |x-y| \wedge \varepsilon$ este h-geodezic pentru $h \geq \varepsilon/2$ (aici $|\cdot|$ este metrica euclidiana).

(iii) Pentru $\varepsilon > 0$, spatiul $(\mathbb{R}^n, \mathsf{d})$ cu metrica $\mathsf{d}(x,y) = \sqrt{\varepsilon|x-y| + |x-y|^2}$ este h-geodezic pentru orice $h \geq \varepsilon/4$.

Exemplele de mai sus sunt intrucatva patologice. Avem insa in vedere exemplele mai "prietenoase" ale spatiilor discrete, precum si unele spatii geodezice cu puncte de rafimicare, ca de exemplu grafurile, care nu admit minoranti finiti pentru curbura conform [St06a].

Pentru un spatiu metric discret h-geodezic (M, d), trebuie sa il gandim pe h drept ordinul de discretizare sau "rezolutia" spatiului M. Intr-un spatiu h-geodezic, o pereche de puncte x si y nu este neaparat unita printr-o geodezica, ci printr-un lant de puncte $x = x_0, x_1, \cdots, x_n = y$ avand distantele intermediare mai mici decat $h/2$.

In continuare, vom folosi doua tipuri de perturbari ale metricii Wasserstein, pe care le definim dupa cum urmeaza:

Definiţia 1.1.5. Fie (M, d) un spatiu metric. Pentru orice $h > 0$ si orice pereche de masuri $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d})$ fie

$$\mathsf{d}_W^{\pm h}(\nu_0, \nu_1) := \inf\left\{ \left(\int [(\mathsf{d}(x_0,x_1) \mp h)_+]^2 \, dq(x_0,x_1) \right)^{1/2} \right\}, \tag{1.1.4}$$

unde q parcurge toate cuplajele lui ν_0 si ν_1, iar $(\cdot)_+$ noteaza partea pozitiva.

Observaţia 1.1.6. Conform Teoremei 4.1 din [Vi08], exista un cuplaj pentru care este atins infimumul in (1.1.4). Il vom numi cuplaj $+h$-optimal (respectiv cuplaj $-h$-optimal) al lui ν_0 si ν_1.

Cele doua perturbari d_W^{+h} si d_W^{-h} sunt in relatie cu metrica Wasserstein d_W, dupa cum urmeaza:

Lema 1.1.7. *Pentru orice $h > 0$ avem*

(i) $\mathsf{d}_W^{+h} \leq \mathsf{d}_W \leq \mathsf{d}_W^{+h} + h$;

(ii) $\mathsf{d}_W \leq \mathsf{d}_W^{-h} \leq \mathsf{d}_W + h$.

Demonstraţie. (i) Fie ν_0 si ν_1 doua probabilitati pe (M, d), iar q un cuplaj optimal si q_{+h} un cuplaj $+h$-optimal al lor. Atunci

$$\begin{aligned} \mathsf{d}_W^{+h}(\nu_0,\nu_1) &= \left(\int [(\mathsf{d}(x_0,x_1)-h)_+]^2\, dq_{+h}(x_0,x_1)\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int [(\mathsf{d}(x_0,x_1)-h)_+]^2\, dq(x_0,x_1)\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int \mathsf{d}(x_0,x_1)^2 dq(x_0,x_1)\right)^{1/2} = \mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1) \end{aligned}$$

si

$$\begin{aligned} \mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1) &= \left(\int \mathsf{d}(x_0,x_1)^2 dq(x_0,x_1)\right)^{1/2} \leq \left(\int \mathsf{d}(x_0,x_1)^2 dq_{+h}(x_0,x_1)\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int [(\mathsf{d}(x_0,x_1)-h)_+ + h]^2\, dq_{+h}(x_0,x_1)\right)^{1/2} \leq \mathsf{d}_W^{+h}(\nu_0,\nu_1)+h. \end{aligned}$$

(ii) Similar cu (i). □

Urmatoarea proprietate de monotonie a lui $\mathsf{d}_W^{\pm h}$ in h are de asemenea o demonstratie elementara:

Lema 1.1.8. *Fie $0 < h_1 < h_2$ arbitrar fixate. Atunci pentru orice pereche de probabilitati ν_0 si ν_1 avem*

(i) $\mathsf{d}_W^{-h_1}(\nu_0,\nu_1) < \mathsf{d}_W^{-h_2}(\nu_0,\nu_1)$;

(ii) $\mathsf{d}_W^{+h_1}(\nu_0,\nu_1) \geq \mathsf{d}_W^{+h_2}(\nu_0,\nu_1)$, *unde are loc inegalitatea stricta daca si numai daca* $\mathsf{d}_W^{+h_1}(\nu_0,\nu_1) > 0$.

Introducem acum notiunea de minorant grosier pentru curbura:

Definiţia 1.1.9. Spunem ca un spatiu metric cu masura (M, d, m) are h-curbura (grosiera) $\geq K$ pentru niste numere $h > 0$ si $K \in \mathbb{R}$ daca si numai daca $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2^*(M, \mathsf{d}, m)$ si pentru orice $t \in [0,1]$ exista un punct t-intermediar h-grosier $\eta_t \in \mathscr{P}_2^*(M, \mathsf{d}, m)$ intre ν_0 si ν_1 ce indeplineste inegalitatea

$$\mathrm{Ent}(\eta_t|m) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0|m) + t\mathrm{Ent}(\nu_1|m) - \frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^{\pm h}(\nu_0,\nu_1)^2, \tag{1.1.5}$$

unde semnul in expresia $\mathsf{d}_W^{\pm h}(\nu_0,\nu_1)$ este ales '$+$' daca $K>0$ si '$-$' daca $K<0$. Pe scurt, scriem in acest caz h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M,\mathsf{d},m)\geq K$.

Observaţia 1.1.10. Am fi putut, de asemenea, ca in definitia de mai sus sa alegem doi parametri in loc de unul, h pentru punctul intermediar si ε pentru inegalitatea (1.1.5). Sa folosim doi parametri in loc de unul nu este prea folositor pentru rezultate ulterioare. Putem oricum reveni la a considera $h\vee\varepsilon$ in definitia minorantului grosier data mai sus, fiind vorba de fapt de o notiune aproximativa.

Observaţia 1.1.11. In cazul continuu, prin calcul formal, urmatoarele doua afirmatii sunt echivalente (a se vedea [RS05] pentru cazul varietatilor Riemanniene):

(i) Functionala entropie $\mathrm{Ent}(\cdot|m)$ este slab K-convexa pe $\mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})$, in sensul inegalitatii (1.1.1);

(ii) Aplicatia "gradient flow" $\Phi:\mathbb{R}_+\times\mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})\to\mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})$ in raport cu $\mathrm{Ent}(\cdot|m)$ satisface

$$\mathsf{d}_W(\Phi(t,\mu),\Phi(t,\nu))\leq e^{-Kt}\,\mathsf{d}_W(\mu,\nu)\qquad\forall\mu,\nu\in\mathscr{P}_2(M,\mathsf{d}),\ \forall t\geq 0. \tag{1.1.6}$$

Notiunea grosiera de minorant pentru curbura, pe care am introdus-o mai sus, este o versiune discreta a lui (1.1.1), pe cand abordarea prezentata in [Ol09] este o forma discreta a lui (1.1.6). Ambele, dupa cum vom vedea, conduc de pilda la fenomenul de concentrare a masurii,desi in general nu exista nicio suprapunere, deoarece in cazul discret nu exista nicio relatie directa intre lanturi Markov si functionala entropie.

Observaţia 1.1.12. (i) Daca (M,d,m) si (M',d',m') sunt doua spatii metrice cu masura care sunt izometrice , iar $K\in\mathbb{R}$, atunci h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M,\mathsf{d},m)\geq K$ daca si numai daca h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M',\mathsf{d}',m')\geq K$.

(ii) Daca (M,d,m) este un spatiu metric cu masura, iar $\alpha,\beta>0$ atunci h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M,\mathsf{d},m)\geq K$ daca si numai daca αh-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M,\alpha\,\mathsf{d},\beta m)\geq\frac{K}{\alpha^2}$, deoarece

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}(\nu|\beta m) &= \mathrm{Ent}(\nu|m)-\log\beta,\\ (\alpha\cdot\mathsf{d})_W^{\pm h}(\nu_0,\nu_1) &= \alpha\cdot\mathsf{d}_W^{\pm h}(\nu_0,\nu_1)\end{aligned}$$

si, pentru $t \in [0,1]$, η_t este un punct t-intermediar h-grosier intre μ, ν, in raport cu d_W, daca si numai daca η_t este un punct t-intermediar αh-grosier intre μ, ν, in raport cu $(\alpha\,\mathsf{d})_W$.

Teorema 1.1.13. *Fie (M, d, m) un spatiu metric cu masura care este normalizat. Sa consideram si o familie $\{(M_h, \mathsf{d}_h, m_h)\}_{h>0}$ de spatii metrice cu masura normalizate, cu diametre uniform marginite si cu h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M_h, \mathsf{d}_h, m_h) \geq K_h$, pentru $K_h \to K$ cand $h \to 0$. Daca*

$$(M_h, \mathsf{d}_h, m_h) \xrightarrow{\mathbb{D}} (M, \mathsf{d}, m)$$

pentru $h \to 0$, atunci

$$\mathbb{C}\mathrm{urv}_{lax}(M, \mathsf{d}, m) \geq K.$$

Daca, in plus, M este compact, atunci

$$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathsf{d}, m) \geq K.$$

Demonstraţie. Fie $\{(M_h, \mathsf{d}_h, m_h)\}_{h>0}$ o familie de spatii metrice cu masura normalizate (posibil discrete). Presupunem ca

$$\sup_{h>0} \mathrm{diam}(M_h, \mathsf{d}_h, m_h),\ \mathrm{diam}(M, \mathsf{d}, m) \leq \Delta$$

si

$$(M_h, \mathsf{d}_h, m_h) \xrightarrow{\mathbb{D}} (M, \mathsf{d}, m) \text{ pentru } h \to 0.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ si $\nu_0 = \rho_0 m$, $\nu_1 = \rho_1 m \in \mathscr{P}_2^*(M, \mathsf{d}, m)$ arbitrar fixate. Alegem R cu

$$\sup_{i=0,1} \mathrm{Ent}(\nu_i|m) + \frac{|K|}{8}\Delta^2 + \frac{\varepsilon}{8}[\Delta^2 + 3|K|(2\Delta + 3\varepsilon)] \leq R. \tag{1.1.7}$$

Trebuie sa dovedim existenta unui ε-mijloc η, care sa verifice inegalitatea (1.1.2). In acest scop, alegem $0 < h < \varepsilon$ cu $|K_h - K| < \varepsilon$ si

$$\mathbb{D}((M_h, \mathsf{d}_h, m_h), (M, \mathsf{d}, m)) \leq \exp\left(-\frac{2 + 4\Delta^2 R}{\varepsilon^2}\right). \tag{1.1.8}$$

Se pot defini aplicatiile canonice

$$\begin{aligned} Q'_h &: \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m) \to \mathscr{P}_2(M_h, \mathsf{d}_h, m_h), \\ Q_h &: \mathscr{P}_2(M_h, \mathsf{d}_h, m_h) \to \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m) \end{aligned}$$

ca in sectiunea 4.5 din [St06a].

Se considera q_h un cuplaj al masurilor m si m_h, si $\hat{\mathsf{d}}_h$ un cuplaj al metricilor d si d_h, astfel incat

$$\int \hat{\mathsf{d}}_h^2(x,y)\,dq_h(x,y) \leq 2\mathbb{D}^2((M,\mathsf{d},m),(M_h,\mathsf{d}_h,m_h)).$$

Fie Q'_h si Q_h dezintegrarile lui q_h in raport cu m_h, respectiv m, adica

$$dq_h(x,y) = Q'_h(y,dx)dm_h(y) = Q_h(x,dy)dm(x),$$

si sa notam cu $\hat{\Delta}$ supremumul m-esential al aplicatiei

$$x \mapsto \left[\int_{M_h} \hat{\mathsf{d}}_h^2(x,y)\,Q_h(x,dy)\right]^{1/2}.$$

In cazul nostru $\hat{\Delta} \leq 2\Delta$.

Pentru $\nu = \rho m \in \mathscr{P}_2(M,\mathsf{d},m)$, definim

$$Q'_h(\nu) \in \mathscr{P}_2(M_h,\mathsf{d}_h,m_h) \text{ prin } Q'_h(\nu) := \rho_h m_h,$$

unde

$$\rho_h(y) := \int_M \rho(x) Q'_h(y,dx).$$

Aplicatia Q_h este definita similar. Lema 4.19 din [St06a] ne da urmatoarele estimari:

$$\mathrm{Ent}(Q'_h(\nu)|m_h) \leq \mathrm{Ent}(\nu|m) \text{ pentru orice } \nu = \rho\, m \tag{1.1.9}$$

si

$$\mathsf{d}_W^2(\nu, Q'_h(\nu)) \leq \frac{2 + \hat{\Delta}^2 \cdot \mathrm{Ent}(\nu|m)}{-\log \mathbb{D}((M,\mathsf{d},m),(M_h,\mathsf{d}_h,m_h))}\ , \tag{1.1.10}$$

daca $\mathbb{D}((M,\mathsf{d},m),(M_h,\mathsf{d}_h,m_h)) < 1$. Estimari analoage au loc si pentru Q_h.

Pentru masurile noastre date $\nu_0 = \rho_0 m$, $\nu_1 = \rho_1 m \in \mathscr{P}_2^*(M,\mathsf{d},m)$ luam

$$\nu_{i,h} := Q'_h(\nu_i) = \rho_{i,h} m_h$$

cu $\rho_{i,h}(y) = \int \rho_i(x) Q'_h(y,dx)$ pentru $i = 0,1$ si fie η_h un h-mijloc al lui $\nu_{0,h}$ si $\nu_{1,h}$ astfel incat

$$\mathrm{Ent}(\eta_h|m_h) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu_{0,h}|m_h) + \frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu_{1,h}|m_h) - \frac{K_h}{8}\,\mathsf{d}_W^{\delta_h h}(\nu_{0,h},\nu_{1,h})^2, \tag{1.1.11}$$

unde δ_h este semnul lui K_h.

Din relatiile (1.1.8) – (1.1.10) conchidem ca

$$\begin{aligned} \mathsf{d}_W^2(\nu_0,\nu_{0,h}) &\leq \frac{2+\hat{\Delta}^2\cdot \mathrm{Ent}(\nu_0|m)}{-\log \mathbb{D}((M,\mathsf{d},m),(M_h,\mathsf{d}_h,m_h))} \\ &\leq \frac{2+4\Delta^2 R}{-\log \mathbb{D}((M,\mathsf{d},m),(M_h,\mathsf{d}_h,m_h))} \leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

si similar $\mathsf{d}_W^2(\nu_1,\nu_{1,h}) \leq \varepsilon^2$.

In cazul in care $K<0$, putem presupune si $K_h<0$. Din Lema 1.1.7 (ii), avem

$$\mathsf{d}_W^{-h}(\nu_{0,h},\nu_{1,h})^2 \leq \big(\mathsf{d}_W(\nu_{0,h},\nu_{1,h})+h\big)^2 \leq (\mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1)+3\varepsilon)^2 \leq \mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1)^2+6\varepsilon\Delta+9\varepsilon^2,$$

deoarece $\mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1)\leq \Delta$.

Pentru $K>0$, se poate alege h suficient de mic pentru a avea $K_h>0$. Atunci Lema 1.1.7 (i) implica

$$\mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1)^2 \leq \big(\mathsf{d}_W(\nu_{0,h},\nu_{1,h})+2\varepsilon\big)^2 \leq \Big(\mathsf{d}_W^{+h}(\nu_{0,h},\nu_{1,h})+3\varepsilon\Big)^2 \leq \mathsf{d}_W^{+h}(\nu_0,\nu_1)^2+6\varepsilon\Delta+9\varepsilon^2.$$

In ambele cazuri, estimarile de mai sus, combinate cu (1.1.9), (1.1.11) si cu alegerea lui h astfel incat $-K_h<\varepsilon-K$, vor conduce la

$$\mathrm{Ent}(\eta_h|m_h) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu_0|m)+\frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu_1|m)-\frac{K}{8}\mathsf{d}_W^2(\nu_0,\nu_1)+\varepsilon', \tag{1.1.12}$$

pentru $\varepsilon'=\varepsilon[\Delta^2+3|K|(2\Delta+3\varepsilon)]/8$.

Cazul $K=0$ rezulta si el din calculele de mai sus, depinzand de semnul lui K_h.

In final, alegem

$$\eta = Q_h(\eta_h).$$

Atunci folosind din nou (1.1.8), estimarile date de Lema 4.19 [St06a] pentru Q_h si estimarea anterioara (1.1.12) pentru $\mathrm{Ent}(\eta_h|m_h)$, obtinem

$$\begin{aligned} \mathsf{d}_W^2(\eta_h,\eta) &\leq \frac{2+\hat{\Delta}^2\cdot \mathrm{Ent}(\eta_h|m_h)}{-\log \mathbb{D}((M,\mathsf{d},m),(M_h,\mathsf{d}_h,m_h))} \\ &\leq \frac{2+4\Delta^2 R}{-\log \mathbb{D}((M,\mathsf{d},m),(M_h,\mathsf{d}_h,m_h))} \leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Pentru $i = 0, 1$, avem

$$\mathsf{d}_W(\eta, \nu_i) \leq 2\varepsilon + \mathsf{d}_W(\eta_h, \nu_{i,h}) \leq 2\varepsilon + \frac{1}{2}\mathsf{d}_W(\nu_{0,h}, \nu_{1,h}) + h \leq \frac{1}{2}\mathsf{d}_W(\nu_0, \nu_1) + 4\varepsilon.$$

Atunci,

$$\sup_{i=0,1} \mathsf{d}_W(\eta, \nu_i) \leq \frac{1}{2}\mathsf{d}_W(\nu_0, \nu_1) + 4\varepsilon,$$

adica η este un (4ε)-mijloc pentru ν_0 si ν_1. In plus, din (1.1.9)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}(\eta|m) &\leq \mathrm{Ent}(\eta_h|m_h) \\ &\leq \frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu_0|m) + \frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu_1|m) - \frac{K}{8}\mathsf{d}_W^2(\nu_0, \nu_1) + \varepsilon' \end{aligned}$$

cu ε' ca mai sus. Aceasta dovedeste ca $\mathbb{C}\mathrm{urv}_{lax}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$ si incheie demonstratia. $\square$

1.1.3 Discretizări de spaţii metrice

Fie (M, d, m) un spatiu metric cu masura. Pentru $h > 0$ fie M_h o submultime discreta a lui M, $M_h = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, cu $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_R(x_i)$, unde $R = R(h) \searrow 0$ cand $h \searrow 0$. Daca (M, d, m) are diametrul finit, atunci M_h poate sa constea intr-un numar finit de puncte. Alegem $A_i \subset B_R(x_i)$ disjuncte doua cate doua $x_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots$ si $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = M$ (de exemplu, se poate alege o teselare de tip Voronoi) si consideram masura m_h pe M_h data de $m_h(\{x_i\}) := m(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Denumim (M_h, d, m_h) o discretizarea a lui (M, d, m).

Teorema 1.1.14. *(i) Daca $m(M) < \infty$, atunci $(M_h, \mathsf{d}, m_h) \xrightarrow{\mathbb{D}} (M, \mathsf{d}, m)$ cand $h \to 0$.*

(ii) Daca $\mathbb{C}\mathrm{urv}_{lax}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$ cu $K \neq 0$, atunci pentru fiecare $h > 0$ si pentru fiecare discretizare (M_h, d, m_h) cu $R(h) < h/4$, avem h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M_h, \mathsf{d}, m_h) \geq K$.

(iii) Daca $\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$ pentru un numar real K, atunci pentru fiecare $h > 0$ si pentru fiecare discretizare (M_h, d, m_h) cu $R(h) \leq h/4$ avem h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M_h, \mathsf{d}, m_h) \geq K$.

Demonstraţie. (i) Masura $q = \sum_{i=1}^{\infty}(m(A_i)\delta_{x_i}) \times (1_{A_i} m)$ este un cuplaj al masurilor m_h si m, deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2((M_h, \mathsf{d}, m_h), (M, \mathsf{d}, m)) &\leq \int_{M_h \times M} \mathsf{d}^2(x,y)\, dq(x,y) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \int_{A_i} \mathsf{d}^2(x_i, y)\, dm(y) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)^2 \right) R(h)^2 \leq R(h)^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \right)^2 \\
&= R(h)^2 m(M)^2 \to 0 \text{ pentru } h \to 0.
\end{aligned}$$

(ii) Fixam $h > 0$ si consideram o discretizare (M_h, d, m_h) a lui (M, d, m), cu $R(h) < h/4$. Fie $\nu_0^h, \nu_1^h \in \mathscr{P}_2^*(M_h, \mathsf{d}, m_h)$ date; este suficient sa realizam demonstratia pentru ν_0^h, ν_1^h masuri cu suport compact. Sa presupunem atunci ca $\nu_i^h = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}^h 1_{\{x_j\}} \right) m_h$, $i = 1, 2$ (unii dintre coeficientii $\alpha_{i,j}^h$ pot fi nuli). Alegem si un $t \in [0,1]$ arbitrar. Consideram

$$\nu_i := \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^h 1_{A_j} \right) m \in \mathscr{P}_2^*(M, \mathsf{d}, m)$$

pentru $i = 1, 2$. Alegem $\varepsilon > 0$ astfel incat

$$4R(h) + \varepsilon \leq h. \tag{1.1.13}$$

Cum $\mathbb{C}\mathrm{urv}_{lax}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$ pentru acel $t \in [0,1]$ ales, exista atunci $\eta_t \in \mathscr{P}_2^*(M, \mathsf{d}, m)$ un "punct" t-intermediar ε-grosier intre ν_0 si ν_1 astfel incat

$$\mathrm{Ent}(\eta_t | m) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0 | m) + t\mathrm{Ent}(\nu_1 | m) - \frac{K}{2} t(1-t)\, \mathsf{d}_W^2(\nu_0, \nu_1) + \varepsilon. \tag{1.1.14}$$

Calculam

$$\mathrm{Ent}(\nu_i | m) = \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} \alpha_{i,j}^h \log \alpha_{i,j}^h\, dm = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^h \log \alpha_{i,j}^h\, m_h(\{x_j\}) = \mathrm{Ent}(\nu_i^h | m_h), \tag{1.1.15}$$

pentru $i = 0, 1$. Notam $\eta_t^h(\{x_j\}) := \eta_t(A_j)$, $j = 1, 2, ..., n$. Sa presupunem $\eta_t = \rho_t \cdot m$. Din inegalitatea lui Jensen obtinem

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(\eta_t^h | m_h) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_{A_j} \rho_t\, dm}{m(A_j)} \log \frac{\int_{A_j} \rho_t\, dm}{m(A_j)} m_h(\{x_j\}) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m(A_j)} \int_{A_j} \rho_t \log \rho_t\, dm \right) m_h(\{x_j\}) = \mathrm{Ent}(\eta_t | m),
\end{aligned}$$

ceea ce, impreuna cu relatiile (1.1.14) si (1.1.15), implica

$$\mathrm{Ent}(\eta_t^h|m_h) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0^h|m_h) + t\mathrm{Ent}(\nu_1^h|m_h) - \frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^2(\nu_0,\nu_1) + \varepsilon. \tag{1.1.16}$$

Sa consideram mai intai cazul $K < 0$. Fie q^h un cuplaj $-2R(h)$-optimal al lui ν_0^h si ν_1^h. Atunci formula

$$\widehat{q} := \sum_{j,k=1}^{n} \left[q^h(\{(x_j,x_k)\})\delta_{(x_j,x_k)} \times \frac{1_{A_j\times A_k}}{m(A_j)m(A_k)}(m\times m) \right]$$

defineste o masura pe $M_h \times M_h \times M \times M$ care are marginile ν_0^h, ν_1^h, ν_0 si ν_1. Mai mult, proiectia lui $\widehat{q}$ pe primii doi factori este egala cu q^h. De aceea avem

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1)^2 &\leq \int \mathsf{d}(x,y)^2 d\widehat{q}(x^h,y^h,x,y) \\
&\leq \int \Big[\mathsf{d}(x,x^h) + \mathsf{d}(x^h,y^h) + \mathsf{d}(y^h,y)\Big]^2 d\widehat{q}(x^h,y^h,x,y) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{q^h(\{(x_j,x_k)\})}{m(A_j)m(A_k)} \int_{A_j\times A_k} \big[\mathsf{d}(x,x_j) + \mathsf{d}(x_j,x_k) \\
&\qquad\qquad + \mathsf{d}(x_k,y)\big]^2 dm(x)dm(y) \\
&\leq \sum_{j,k=1}^{n} q^h(\{(x_j,x_k)\})\big(\mathsf{d}(x_j,x_k) + 2R(h)\big)^2 = \mathsf{d}_W^{-2R(h)}(\nu_0^h,\nu_1^h)^2,
\end{aligned}$$

care, impreuna cu (1.1.16), conduce la

$$\mathrm{Ent}(\eta_t^h|m_h) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0^h|m_h) + t\mathrm{Ent}(\nu_1^h|m_h) - \frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^{-2R(h)}(\nu_0^h,\nu_1^h)^2 + \varepsilon. \tag{1.1.17}$$

In cazul $K > 0$ incepem cu un cuplaj optimal q al masurilor ν_0 si ν_1 si aratam ca masura

$$\widetilde{q}^h := \sum_{j,k=1}^{n} q(A_j\times A_k)\delta_{(x_j,x_k)}$$

este un cuplaj pentru ν_0^h si ν_1^h. Intr-adevar, daca $A \subset M_h$, atunci avem, pe rand,

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{n} q(A_j\times A_k)\delta_{(x_j,x_k)}(A\times M_h) &= \sum_{j,k=1}^{n} q(A_j\times A_k)\delta_{x_j}(A) = \sum_{j=1}^{n} q(A_j\times M)\delta_{x_j}(A) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \nu_0(A_j)\delta_{x_j}(A) = \sum_{j=1}^{n} \nu_0^h(\{x_j\})\delta_{x_j}(A) \\
&= \nu_0^h(A).
\end{aligned}$$

Cum pentru orice $j,k=1,2,\ldots .n$ si pentru $x\in A_j$ si $y\in A_k$ arbitrare avem

$$\big(\mathsf{d}(x_j,x_k)-2R(h)\big)_+\le\big(\mathsf{d}(x_j,x_k)-\mathsf{d}(x,x_j)-\mathsf{d}(y,x_k)\big)_+\le\mathsf{d}(x,y),$$

putem estima ca:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}_W^{+2R(h)}(\nu_0^h,\nu_1^h)^2 &\le \sum_{j,k=1}^n q(A_j\times A_k)\left[(\mathsf{d}(x_j,x_k)-2R(h))_+\right]^2\\
&= \sum_{j,k=1}^n \int_{A_j\times A_k}\left[(\mathsf{d}(x_j,x_k)-2R(h))_+\right]^2 dq(x,y)\\
&\le \sum_{j,k=1}^n \int_{A_j\times A_k}\left[(\mathsf{d}(x_j,x_k)-\mathsf{d}(x,x_j)-\mathsf{d}(y,x_k))_+\right]^2 dq(x,y)\\
&\le \sum_{j,k=1}^n \int_{A_j\times A_k}\mathsf{d}(x,y)^2dq(x,y)=\int_{M\times M}\mathsf{d}(x,y)^2dq(x,y)\\
&= \mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1)^2.
\end{aligned}$$

De aceea, din (1.1.16) obtinem

$$\mathrm{Ent}(\eta_t^h|m_h)\le(1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0^h|m_h)+t\mathrm{Ent}(\nu_1^h|m_h)-\frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^{+2R(h)}(\nu_0^h,\nu_1^h)^2+\varepsilon. \quad (1.1.18)$$

Pentru ε suficient de mic obtinem

$$-\frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^{\pm 2R(h)}(\nu_0^h,\nu_1^h)^2+\varepsilon\le-\frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^{\pm h}(\nu_0^h,\nu_1^h)^2 \quad (1.1.19)$$

si atunci (1.1.17), (1.1.18) implica

$$\mathrm{Ent}(\eta_t^h|m_h)\le(1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0^h|m_h)+t\mathrm{Ent}(\nu_1^h|m_h)-\frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^{\pm h}(\nu_0^h,\nu_1^h)^2, \quad (1.1.20)$$

depinzand de semnul lui K. Inegalitatea (1.1.19) este falsa numai cand $K>0$ si $\mathsf{d}_W^{+h}(\nu_0^h,\nu_1^h)=0$, dar in acest caz

$$\mathsf{d}_W(\nu_0^h,\nu_1^h)\le h$$

si fie $\eta=\nu_0^h$, fie $\eta=\nu_1^h$ verifica direct conditia (1.1.5) din definitia minorantului h-grosier pentru curbura pentru discretizare.

Masura $\pi=\sum_{j=1}^n\left(\eta_t^h(\{x_j\})\delta_{x_j}\times 1_{A_j}\eta_t\right)$ este un cuplaj al masurilor η_t^h si η_t, atunci

$$\mathsf{d}_W^2(\eta_t^h,\eta_t)\le\int_{M_h\times M}\mathsf{d}^2(x,y)\,d\pi(x,y)\le R^2(h),$$

si similar $\mathsf{d}_W^2(\nu_i^h,\nu_i) \le R^2(h)$ pentru $i=1,2$. Deoarece η_t este un punct t-intermediar ε-grosier intre ν_0 si ν_1, deducem ca

$$\begin{aligned}\mathsf{d}_W(\eta_t^h,\nu_0^h) &\le \mathsf{d}_W(\eta_t,\nu_0)+2R(h) \le t\,\mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1)+2R(h)+\varepsilon\\ &\le t\,\mathsf{d}_W(\nu_0^h,\nu_1^h)+2R(h)(1+t)+\varepsilon\end{aligned}$$

si, cu un argument similar,

$$\mathsf{d}_W(\eta_t^h,\nu_1^h) \le (1-t)\,\mathsf{d}_W(\nu_0^h,\nu_1^h)+2R(h)(2-t)+\varepsilon.$$

Din (1.1.13), conchidem ca η^h este un punct t-intermediar h-grosier intre ν_0^h si ν_1^h, ceea ce, impreuna cu (1.1.20), demonstreaza ca h-$\mathbb{C}$urv$(M_h,\mathsf{d},m_h) \ge K$.

(iii) se demonstreaza asemanator cu (ii). □

Exemplul 1.1.15. (i) Consideram pe $\mathbb{Z}^n$ metrica d_1, provenita din norma $|\cdot|_1$ pe $\mathbb{R}^n$ definita prin $|x|_1=\sum_{i=1}^n |x_i|$, si masura $\overline{m}_n=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n}\delta_x$. Atunci h-$\mathbb{C}urv(\mathbb{Z}^n,\mathsf{d}_1,\overline{m}_n) \ge 0$ pentru orice $h \ge 2n$.

(ii) Gridul n-dimensional $\mathbb{E}^n$ avand $\mathbb{Z}^n$ ca multime de varfuri, echipat cu metrica de graf si cu masura m_n, definita masura Lebesgue 1-dimensionala pe muchii, are h-$\mathbb{C}$urv$(\mathbb{E}^n,\mathsf{d}_1,m_n) \ge 0$ pentru orice $h \ge 2(n+1)$.

Demonstraţie. Folosim urmatorul rezultat:

Lema 1.1.16. [Vi08] *Orice spatiu Banach finit dimensional, echipat cu masura Lebesgue, are curbura* ≥ 0.

Teselam $\mathbb{R}^n$ cu cuburi n-dimensionale de latura 1 si centrate in varfurile grafului. Atunci $|\cdot|_1$-raza celulelor teselarii cu astfel de cuburi este $n/2$. Astfel, afirmatia (i) este o consecinta a Teoremei 1.1.14(iii), aplicate spatiului $(\mathbb{R}^n,|\cdot|_1,dx)$, si a Lemei 1.1.16.

Pentru demonstratia lui (ii) urmam un argument similar celui folosit in demonstratia Teoremei 1.1.14. In acest caz, trecem de la o probabilitate pe grid la o probabilitate pe spatiul $\mathbb{R}^n$, mediind pe fiecare cub al teselarii si scaland. Aici, trebuie tinut cont ca pentru un cub C din teselare

$$\sup\{|x-y|_1 : x\in C\cap\mathbb{E}^n, y\in C\} = \frac{n+1}{2},$$

care produce minimul $h = 2(n+1)$, incepand de la care h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(\mathbb{E}^n, \mathsf{d}_1, m_n) \geq 0$.

$\square$

Exemplul 1.1.17. (i) Fie G graful care teseleaza planul euclidian cu triunghiuri echilaterale de raza r. Il inzestram pe G cu metrica de graf d_G indusa de metrica euclidiana si cu masura Lebesgue 1-dimensionala m pe muchii. Atunci G are h-curbura ≥ 0 pentru orice $h \geq 8r\sqrt{3}/3$.

(ii) Graful G', care teseleaza planul euclidian cu hexagoane regulate de muchie r, equipat ca de obicei cu metrica de graf $\mathsf{d}_{G'}$ si cu masura 1-dimensionala m' pe muchii, are h-curbura ≥ 0 pentru orice $h \geq 34r/3$.

Demonstraţie. Consideram un sistem cartezian de coordonate in placul euclidian cu originea O si axele Ox si Oy. Echipam $\mathbb{R}^2$ cu norma Banach $\|\cdot\|$, care are ca bila unitate hexagonul regulat centrat in O, avand doua varfuri opuse pe Ox si lungimea muchiei (masurate in metrica euclidiana) egala cu 1. Explicit,

$$\|(x,y)\| = \max\{\frac{2\sqrt{3}}{3}|y|, |x| + \frac{\sqrt{3}}{3}|y|\}$$

pentru orice (x,y) in $\mathbb{R}^2$. Notam cu d metrica determinata de aceasta norma.

(i) Pentru teselarea triunghiulara, alegem originea O sa fie unul dintre varfurile grafului, iar doua dintre cele 6 muchii ce pleaca din O sa fie de-a lungul axei Ox. Muhciile grafului au lungimea r in metrica euclidiana. Vedem ca

$$\mathsf{d}_G(v_1, v_2) = \mathsf{d}(v_1, v_2)$$

pentru orice doua varfuri v_1 si v_2 ale grafului. In general, pentru $x, y \in G$, avem

$$|\,\mathsf{d}_G(x,y) - \mathsf{d}(x,y)| \leq r.$$

Atunci se poate construi un cuplaj $\widehat{\mathsf{d}}$ al metricilor d_G si d prin definitie

$$\widehat{\mathsf{d}}(v,x) := \mathsf{d}(v,x)$$

daca v este varf al lui G si $x \in \mathbb{R}^2$, si

$$\widehat{\mathsf{d}}(y,x) := \inf_{i=1,2}\{\,\mathsf{d}_G(y, v_i) + \mathsf{d}(v_i, x))\}$$

daca $y \in G$ apartine unei muchii cu capetele v_1, v_2 si $x \in \mathbb{R}^2$.

Conform Lemei 1.1.16, $\mathbb{C}\mathrm{urv}(\mathbb{R}^2, \mathsf{d}, \lambda) \geq 0$, unde λ este masura Lebesgue 2-dimensionala. Daca teselam planul cu hexagoane regulate A_j, $j \in \mathbb{N}$, care au varfurile in centrele triunghiurilor grafului G, avem

$$\widehat{\mathsf{d}}(y,x) \leq 2r\sqrt{3}/3$$

pentru orice $y \in A_j \cap G$ si $x \in A_j$. Demonstratia minorantului pentru h-curvature este similara celei a Teoremei 1.1.14. Pornim cu $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2^*(G, \mathsf{d}_G, m)$ cu $\nu_i = \rho_i m$, $i = 0, 1$ si definim

$$\widetilde{\nu}_i := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(A_j)} \left(\int_{G \cap A_j} \rho_i \, dm \right) 1_{A_j} \cdot \lambda \in \mathscr{P}_2^*(\mathbb{R}^2, \mathsf{d}, \lambda) \text{ pentru } i = 0, 1.$$

Avem atunci

$$\widehat{\mathsf{d}}_W(\nu_i, \widetilde{\nu}_i) \leq 2r\sqrt{3}/3.$$

Consideram $\widetilde{\eta}_t = \widetilde{\rho}_t \cdot \lambda$ geodezica ce uneste $\widetilde{\nu}_0$ si $\widetilde{\nu}_1$, de-a lungul careia conditia de convexitate pentru entropie este indeplinita pe $\mathscr{P}_2^*(\mathbb{R}^2, \mathsf{d}, \lambda)$ si notam

$$\eta_t := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m(G \cap A_j)} \left(\int_{A_j} \widetilde{\rho}_t \, d\lambda \right) 1_{G \cap A_j} \cdot m.$$

Atunci η_t este punctul t-intermediar $8r\sqrt{3}/3$-grosier intre ν_0 si ν_1. Din inegalitatea lui Jensen obtinem

$$\mathrm{Ent}(\eta_t|m) \leq \mathrm{Ent}(\widetilde{\eta}_t|\lambda) - \log m(G \cap A) + \log \lambda(A)$$

si

$$\mathrm{Ent}(\widetilde{\nu}_i|\lambda) \leq \mathrm{Ent}(\nu_i|m) + \log m(G \cap A) - \log \lambda(A)$$

(sa observam ca toate multimile A_j au aceeasi masura Lebesgue $\lambda(A)$ si toate multimile $G \cap A_j$ au aceeasi masura $m(G \cap A)$). Deci η_t satisface

$$\mathrm{Ent}(\eta_t|m) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0|m) + t\mathrm{Ent}(\nu_1|m),$$

si astfel am demonstrat h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(G, \mathsf{d}_G, m) \geq 0$ pentru orice $h \geq 8r\sqrt{3}/3$.

(ii) Pentru teselarea hexagonala, fie din nou O unul dintre varfurile grafului, iar una dintre cele 3 muchii emergente din O sa fie de-a lungul axei Oy. In acest caz, folosim norma Banach

$\|\cdot\|' := \frac{3}{4}\|\cdot\|$ pe $\mathbb{R}^2$ si notam cu d' metrica asociata. Lngimea muchhiilor grafului in metrica d' este egala cu $4r/3$. Vedem ca

$$\mathsf{d}_{G'}(v_1,v_2) = \mathsf{d}'(v_1,v_2)$$

pentru orice doua varfuri v_1, v_2 cu $\mathsf{d}_{G'}(v_1,v_2) = 2kr$, $k \in \mathbb{N}$. In general, $|\mathsf{d}_{G'} - \mathsf{d}'| \leq r/3$ pe multimea varfurilor si $|\mathsf{d}_{G'} - \mathsf{d}'| \leq r$ peste tot pe G'.

Se poate atunci construi un cuplaj $\widehat{\mathsf{d}'}$ al metricilor $\mathsf{d}_{G'}$ si d' in felul urmator: Fixam $v_0 = O$. Daca v este un varf al grafului cu

$$\mathsf{d}_{G'}(v_0,v) = 2kr,\ k \in \mathbb{N},$$

atunci luam

$$\widehat{\mathsf{d}'}(v,x) := \mathsf{d}'(v,x),\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Pentru $y \in G'$ cu $\mathsf{d}_{G'}(v_0,y) \neq 2kr$, $k \in \mathbb{N}$ definim

$$\widehat{\mathsf{d}'}(y,x) := \inf\{\mathsf{d}_{G'}(y,v) + \mathsf{d}'(v,x) : v \in G',\ \mathsf{d}_{G'}(v_0,v) = 2kr\}.$$

Teselam planul cu triunghiuri echilaterale B_i, $i \in \mathbb{N}$, cu varfurile in centrele hexagoanelor grafului. Atunci $\widehat{\mathsf{d}'}(y,x) \leq 17r/6$ pentru $y \in B_i \cap G'$, $x \in B_i$. Cu acelasi argument ca pentru teselarea triunghiulara, obtinem h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(G', \mathsf{d}_{G'}, m') \geq 0$ pentru orice $h \geq 4 \cdot 17r/6 = 34r/3$. $\square$

1.1.4 Asupra grafurilor planare omogene

Ne referim in cele ce urmeaza la o clasa speciala de grafuri. In general, un graf G este determinat de multimea varfurilor $V(G)$ si de multimea muchiilor $E(G)$. Pentru a privi grafurile ca analoage discrete ale varietatilor 2-dimensionale, trebuie sa specificam de asemenea si multimea fetelor $F(G)$ si sa impunem grafului sa fie planar. Un graf este planar daca poate fi desenat intr-un plan fara ca muchiile grafului sa se intersecteze (adica numarul de incrucisare - "the crossing number" - sa fie zero). Numai grafurile planare au grafuri duale. Grafurile care ne vor preocupa in continuare sunt conexe si simple (fara bucle si fara muchii multiple) si astfel incat dualele lor sunt tot grafuri simple, de aceea orice doua fete au cel mult o muchie comuna si orice fata este marginita de un ciclu.

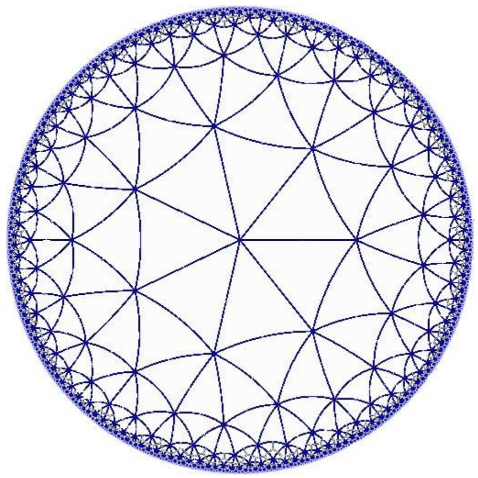

Figura 1.1: $\mathbb{G}(7,3,r)$

Sa consideram graful omogen (posibil infinit) $\mathbb{G}(l,n,r)$ cu varfurile de grad constant $l \geq 3$, cu fetele marginite de poligoane cu $n \geq 3$ muchii (astfel n este gradul tuturor varfurilor grafului dual) si astfel incat toate muchiile au aceeasi lungime $r > 0$.

Urmatorul rezultat este probabil bine-cunoscut, dar, cum nu am gasit nicio referinta bibliografica, prezentam aici o demonstratie.

Lema 1.1.18. *(i) Daca $\frac{1}{l} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$, atunci $\mathbb{G}(l,n,r)$ poate fi scufundat in spatiul hiperbolic 2-dimensional de curbura sectionala constanta*

$$K = -\frac{1}{r^2}\left[\operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1\right)\right]^2. \tag{1.1.21}$$

Exista infinit de multe astfel de alegeri pentru l si n. In oricare idn cazuri, graful este nemarginit.

(ii) Daca $\frac{1}{l} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$, atunci $\mathbb{G}(l,n,r)$ este unul dintre cele cinci poliedre regulate (tetraedru, octaedru, cub, icosaedru, dodecaedru) si poate fi scufundat in sfera 2-dimensionala de curbura sectionala constanta

$$K = \frac{1}{r^2}\left[\arccos\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1\right)\right]^2. \tag{1.1.22}$$

(iii) Daca $\frac{1}{l}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$, atunci $\mathbb{G}(l,n,r)$ poate fi scufundat in planul euclidian ($K=0$). Exista exact 3 cazuri, corespunzatoare celor 3 teselari regulate ale planului euclidian: teselarea cu triunghiuri ($l=6$, $n=3$), cu patrate ($l=n=4$), si cu hexagoane ($l=3$, $n=6$).

Demonstraţie. Vedem mai intai ca

$$2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}-1>1 \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)>\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{l}+\frac{1}{n}<\frac{1}{2}$$

deci in fiecare caz expresia care defineste curbura K are sens.

(i) Pentru l, n, r date, construim scufundarea in felul urmator: incepem cu un punct arbitrar O al spatiului 2-hiperbolic de curbura K, notat cu $\mathbb{H}^{K,2}$. Pornind din acest punct, construim n linii geodezice $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$ de lungime

$$R := \frac{1}{\sqrt{-K}}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sinh(\sqrt{-K}r)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{l}\right)\right), \tag{1.1.23}$$

astfel incat unghiul interior dintre doua geodezice consecutive OA_k, OA_{k+1} este $2\pi/n$. Demonstram ca $A_1, A_2, \cdots, A_n$ corespund varfurilor grafului dat, si ca geodezicele $A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$, A_nA_1 corespund izometric la muchii consecutive in $\mathbb{G}(l,n,r)$ care marginesc un un n-poligon regulat cu lungimea muchiilor egala cu r si toate unghiurile de masuri egale cu $2\pi/l$. Sa notam cu d metrica intrinseca pe $\mathbb{H}^{K,2}$.

Din Teorema Cosinusului in geometria hiperbolica, aplicata pentru triunghiul ΔOA_1A_2, si din (1.1.21) si (1.1.23), avem:

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\sqrt{-K}\,\mathsf{d}(A_1,A_2)\right) &= \cosh^2(\sqrt{-K}R)-\sinh^2(\sqrt{-K}R)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\\
&= 1+\sinh^2(\sqrt{-K}R)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\\
&= 1+\frac{\sinh^2(\sqrt{-K}r)}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\\
&= 1+\frac{\cosh^2(\sqrt{-K}r)-1}{1+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)\\
&= 1+\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left[\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}-1\right)^2-1\right]\\
&= 2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}-1=\cosh(\sqrt{-K}r),
\end{aligned}$$

deci $\mathsf{d}(A_1,A_2) = r$ si la fel celelalte muchii ale poligonului. Aplicam acum Teorema Sinusului in triunghiul hiperbolic ΔOA_1A_2 si (1.1.23) pentru a calcula:

$$\sin\sphericalangle(A_1;O,A_2) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\sinh(\sqrt{-K}r)}\sinh(\sqrt{-K}R) = \sin\left(\frac{\pi}{l}\right), \tag{1.1.24}$$

unde $\sphericalangle(A_1;O,A_2)$ noteaza unghiul din A_1 in triunghiul ΔOA_1A_2. Acest unghi este mai mic decat $\pi/2$, deoarece este egal cu $\sphericalangle(A_2;O,A_1)$, iar intr-un triunghi hiperbolic suma unghiurilor unui triunghi este mai mica decat π. De aceea, (1.1.24) arata ca toate unghiurile poligonului au masurile egale cu $2\pi/l$, deci in jurul fiecarui unghi se pot construi alte $l-1$ poligoane cu n muchii, congruente cu primul. Repetam procedura cu fiecare dintre varfurile noilor poligoane. In acest mod intreg spatiul $\mathbb{H}^{K,2}$ poate fi teselat cu poligoane regulate, care constituie fete ale grafului $\mathbb{G}(l,n,r)$.

(ii), (iii) Cum exista doar un numar finit de exemple in aceste doua cazuri, exemple destul de cunoscute, demonstratia se poate face prin verificare directa in fiecare caz in parte. Alternativ, se poate realiza o demonstratie ca in cazul (i), cu interpretari adecvate ale sinusului si cosinusului pentru curbura pozitiva, respectiv ca lungimi in planul euclidian.

□

Observaţia 1.1.19. Graful dual

$$\mathbb{G}(l,n,r)^* = \mathbb{G}(n,l,r')$$

este scufundat in 2-varietatea de aceeasi curbura constanta ca si $\mathbb{G}(l,n,r)$, lungimea muchiilor in graful dual este

$$r' := r\cdot\operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}-1\right)\Bigg/\operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}-1\right)\ \text{ for } K<0$$

si cu modificari adecvate in celelalte doua cazuri.

In fiecare dintre cele trei cazuri din Lema 1.1.18, 2-varietatea va fi echipata cu metrica intrinseca d si cu volumul Riemannian vol. Inzestram $\mathbb{G}(l,n,r)$ cu metrica d indusa de metroca Riemanniana corespunzatoare si cu masura m uniforma oe muchii. Notam in continuare cu

$\mathbb{V}(l,n,r)$ multimea varfurior grafului $\mathbb{G}(l,n,r)$ echipat cu aceeasi metrica d mostenita de la varietatea Riemanniana si cu masura de numarare

$$\widetilde{m} := \sum_{v\in\mathbb{V}} \delta_v.$$

Teorema 1.1.20. *Pentru orice numere naturale $l,n \geq 3$ si pentru orice $r > 0$, atat spatiul metric cu masura $(\mathbb{V}(l,n,r), \mathsf{d}, \widetilde{m})$, cat si $(\mathbb{G}(l,n,r), \mathsf{d}, m)$ au h-curbura $\geq K$ pentru $h \geq r \cdot C(l,n)$, unde*

$$K = \begin{cases} -\frac{1}{r^2}\left[\operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1\right)\right]^2 & \textit{pentru } \frac{1}{l}+\frac{1}{n} > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{r^2}\left[\arccos\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1\right)\right]^2 & \textit{pentru } \frac{1}{l}+\frac{1}{n} < \frac{1}{2} \\ 0 & \textit{pentru } \frac{1}{l}+\frac{1}{n} = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1.1.25}$$

si

$$C(l,n) = 4\cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1}\right) \Bigg/ \operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1\right).$$

Demonstraţie. Privim $\mathbb{V}(l,n,r)$ si $\mathbb{G}(l,n,r)$ ca submultimi ale varietatii 2-dimensionale cu curbura constanta K (data de Lema 1.1.18). Teselam varietatea cu fetele grafului dual $\mathbb{G}(n,l,r')$ ce are varfurile in centrele fetelor lui $\mathbb{G}(l,n,r)$ (centrul O al poligonului cu n muchii in demonstratia Lemei 1.1.18 devine varf al dualului).

Calculam explicit numai in cazul hiperbolic, celelalte doua cazuri fiind similare. Se poate partitiona spatiul hiperbolic ca

$$\mathbb{H}^{K,2} = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j,$$

unde $\{F_j\}_j$ sunt fetele grafului dual, dupa cum am descris mai sus. Minorantul pentru curbura pentru spatiu discret $\mathbb{V}(l,n,r)$ este atunci o consecinta a Teoremei 1.1.14. Pentru $\mathbb{G} := \mathbb{G}(l,n,r)$ demonstratia minorantului pentru curbura parcurge pasi similari celor din demonstratia Teoremei 1.1.14. Pornim cu $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2^*(\mathbb{G}(l,n,r), \mathsf{d}, m)$ cu $\nu_i = \rho_i \cdot m$, $i = 0,1$ si definim

$$\widetilde{\nu}_i := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{vol}(F_j)}\left(\int_{\mathbb{G}\cap F_j} \rho_i \, dm\right) 1_{F_j}\cdot \operatorname{vol} \in \mathscr{P}_2^*(\mathbb{H}^{K,2}, \mathsf{d}, \operatorname{vol}) \text{ pentru } i = 0,1.$$

Acum, locul lui $R(h)$ din Teorema 1.1.14 este jucat de R din Lema 1.1.18(i), deci $\mathsf{d}_W(\nu_i, \widetilde{\nu}_i) \leq R$. Se poate exprima R numai in functie de datele initiale l, n si r, ca $R = rC(l,n)/4$, cu $C(l,n)$ dat in enuntul teoremei. Consideram $\widetilde{\eta}_t = \widetilde{\rho}_t \cdot \mathrm{vol}$ geodezica ce uneste $\widetilde{\nu}_0$ si $\widetilde{\nu}_1$, de-a lungul careia avem K-convexity functionalei entropie pe $\mathbb{H}^{K,2}$ (Teorema 4.9 din [St06a]) si notam

$$\eta_t := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m(\mathbb{G} \cap F_j)} \left(\int_{F_j} \widetilde{\rho}_t \, d\mathrm{vol} \right) 1_{\mathbb{G} \cap F_j} \cdot m.$$

Atunci η_t este un punct t-intermediar $4R$-grosier intre ν_0 si ν_1. Din inegalitatea lui Jensen obtinem

$$\mathrm{Ent}(\eta_t | m) \leq \mathrm{Ent}(\widetilde{\eta}_t | \mathrm{vol}) - \log m(\mathbb{G} \cap F) + \log \mathrm{vol}(F)$$

si

$$\mathrm{Ent}(\widetilde{\nu}_i | \mathrm{vol}) \leq \mathrm{Ent}(\nu_i | m) + \log m(\mathbb{G} \cap F) - \log \mathrm{vol}(F)$$

(observam ca toate fetele F_j au acelasi volum $\mathrm{vol}(F)$ si toate multimile $\mathbb{G} \cap F_j$ au aceeasi masura $m(\mathbb{G} \cap F)$). Deci, ca in demonstratia Teoremei 1.1.14, η_t verifica

$$\mathrm{Ent}(\eta_t | m) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0 | m) + t\mathrm{Ent}(\nu_1 | m) - \frac{K}{2} t(1-t) \, \mathsf{d}_W^{-2R}(\nu_0, \nu_1)^2,$$

ceea ce demonstreaza h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(\mathbb{G}(l,n,r), \mathsf{d}, m) \geq K$ pentru orice $h \geq 4R$ in cazul hiperbolic ($K < 0$).

□

Observaţia 1.1.21. Exista in literatura diverse notiuni de curbura combinatoriala pentru grafuri, a se vedea de exemplu [Gro87], [Hi01], [Fo03]. Notiunea de curbura introdusa de Gromov in [Gro87] a fost folosita pentru studiul grupurilor hiprbolice. A fost modificata apoi si investigata de catre Higuchi [Hi01] si alti autori. Forman a introdus in [Fo03] o notiune diferita de curbura Ricci combinatoriala pentru complexe de celule ("cell complexes"). Grafurile considerate in lucrarile citate anterior nu presupun nici existenta vreunei metrici, nici cea a unei masuri atasate.

In [Hi01] curbura combinatoriala a unui graf G este o aplicatie $\Phi_G : V(G) \to \mathbb{R}$ care asociaza fiecarui varf $x \in V(G)$ numarul

$$\Phi_G(x) = 1 - \frac{m(x)}{2} + \sum_{i=1}^{m(x)} \frac{1}{d(F_i)},$$

unde $m(x)$ este gradul varfului x, $d(F)$ este numarul muchiilor care marginesc o fata F, si $F_1, F_2, \ldots, F_{m(x)}$ sunt fetele din jurul varfului x. Curbura combinatoriala introdusa in [Gro87] este o aplicatie $\Phi^*_G : F(G) \to \mathbb{R}$, unde curbura $\Phi^*_G(F)$ unei fete F este data de curbura Φ_G a varfului corespunzator in graful dual. Pentru grafuri omogene $\mathbb{G}(l,n,r)$, curbura fiecarui varf x este

$$\Phi_G(x) = l(\frac{1}{l} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}),$$

iar curbura in sensul lui Gromov [Gro87] a oricarei fete F este

$$\Phi^*_G(F) = n(\frac{1}{l} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}).$$

Observam ca semnul curburii combinatoriale in ambele abordari de mai sus se schimba dupa cum $\frac{1}{l} + \frac{1}{n}$ este mai mare sau mica decat $\frac{1}{2}$. In Teorema noastra 1.1.20, semnul minorantului grosier pentru curbura se schimba in acelasi mod, desi notiunea noastra de curbura se aplica grafurilor care au atat o masura de referinta, cat si o structura metrica. Pe moment nu putem descrie alte legaturi cu notiunile de curbura combinatoriala mentionate mai sus.

1.2 Condiţia grosieră curbură-dimensiune pentru spaţii metrice

Introducem in cele ce urmeaza o conditie mai tare decat minorantul grosier pentru curbura. Exemplele studiate in sectiunea precedenta au prezentat spatii discrete analoage varietatilor Riemanniene finit dimensionale. Aceste spatii au, intuitiv, nu doar o "curbura" care mimeaza varietatea, dar si un anumit aspect "finit-dimensional". Un graf planar are intuitiv dimensiunea 2, deoarece poate fi desenat in plan. In acest subcapitol vom ingloba aceasta constrangere dimensionala intr-o conditie de tip curbura-dimensiune, cu scopul de a obtine mai multe consecinte geometrice.

Definim si studiem in aceasta sectiune o conditie grosiera de tip curba-dimensiune h-$\mathsf{CD}(K,N)$ pentru spatii metrice cu masura, unde K joaca rolul minorantului grosier pentru curbura, iar N pe cel de majorant grosier pentru dimensiune. Vom demonstra ca un spatiu metric cu masura (continuu) (M, d, m), care poate fi aproximat de o familie $\{(M_h, \mathsf{d}_h, m_h)\}_{h>0}$ de spatii metrice cu masura (discrete), ce indeplinesc o conditie grosiera curbura-dimensiune h-$\mathsf{CD}(K,N)$, cu ordinul de discretizare h tinzand la zero, satisface o conditie curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K,N)$. Aratam de asemenea ca aceasta conditie grosiera de tip curbura-dimensiune se pastreaza prin procedura inversa: o discretizare a unui spatiu metric cu masura ce indeplineste proprietatea $\mathsf{CD}(K,N)$, satisface conditia h-$\mathsf{CD}(K,N)$ daca ordinul de discretizare este suficient de mic.

Rezultatele prezentate in aceasta sectiune, cu exceptia celor citate individual si apartinand altor autori, fac parte din lucrarile autoarei [Bn08], [Bn12a] si [Bn12b].

1.2.1 Preliminarii

Fie, ca in sectiunea precedenta, (M,d,m) un spatiu metric cu masura, unde (M,d) este un spatiu metric separabil si complet, iar m este o masura local finita pe σ-algebra borelienelor $\mathscr{B}(M)$ a lui M.

Un punct z in M este un punct t-intermediar intre x si y pentru un $t\in[0,1]$ daca

$$\mathsf{d}(x,z)=t\cdot\mathsf{d}(x,y) \text{ si } \mathsf{d}(z,y)=(1-t)\cdot\mathsf{d}(x,y).$$

In locul entropiei relative $\mathrm{Ent}(\cdot|m)$, vom folosi functionala entropie Rényi, care depinde de un parametru $N\geq 1$, care va juca rolul dimensiunii in materialul care urmeaza. Functionala entropie Rényi in raport cu masura noastra de referinta m este definita ca

$$S_N(\cdot|m):\mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})\to\mathbb{R}$$

cu

$$S_N(\nu|m):=-\int_M\rho^{-1/N}d\nu,$$

unde ρ este densitatea partii absolut continue ν^c in raport cu m in descompunerea Lebesgue $\nu=\nu^c+\nu^s=\rho m+\nu^s$ a masurii $\nu\in\mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})$.

Lema 1.1 din [St06b] afirma ca

Lema 1.2.1. *Sa presupunem ca $m(M)<\infty$.*

(i) Pentru orice $N>1$, functionala entropie Rényi $S_N(\cdot|m)$ este inferior semicontinua si indeplineste

$$-m(M)^{1/N} \leq S_N(\cdot|m) \leq 0 \textit{ pe } \mathscr{P}_2(M,\mathsf{d}).$$

(ii) Pentru orice $\nu \in \mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})$

$$\mathrm{Ent}(\cdot|m) = \lim_{N\to\infty} N(1+S_N(\nu|m)).$$

Pentru $K,N \in \mathbb{R}$ date cu $N \geq 1$ si $(t,\theta) \in [0,1]\times\mathbb{R}_+$ folosim notatia

$$\tau_{K,N}^{(t)}(\theta) = \begin{cases} \infty\,, & \text{daca } K\theta^2 \geq (N-1)\pi^2 \\ t^{\frac{1}{N}}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{K}{N-1}}t\theta\right)\Big/\sin\left(\sqrt{\frac{K}{N-1}}\theta\right)\right)^{1-\frac{1}{N}}, & \text{daca } 0 < K\theta^2 < (N-1)\pi^2 \\ t\,, & \text{daca } K\theta^2 = 0 \text{ sau} \\ & \text{daca } K\theta^2 < 0 \text{ si } N=1 \\ t^{\frac{1}{N}}\left(\sinh\left(\sqrt{\frac{-K}{N-1}}t\theta\right)\Big/\sinh\left(\sqrt{\frac{-K}{N-1}}\theta\right)\right)^{1-\frac{1}{N}}, & \text{daca } K\theta^2 < 0 \text{ si } N>1. \end{cases}$$

Observaţia 1.2.2. Pentru un $t \in (0,1)$ arbitrar fixat si $\theta \in (0,\infty)$, functia $(K,N) \to \tau_{K,N}^{(t)}(\theta)$ este continua, monoton crescatoare in K si monoton descrescatoare in N.

Conditia curbura-dimensiune pentru spatiile geodezice (M,d,m) a fost introdusa in [St06b] in modul urmator:

Definiţia 1.2.3. Fiind date doua numere $K, N \in \mathbb{R}$ cu $N \geq 1$, spunem ca un spatiu metric cu masura (M,d,m) satisface conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K,N)$ daca si numai daca pentru orice pereche $\nu_0,\nu_1 \in \mathscr{P}_2(M,\mathsf{d},m)$ exista un cuplaj optimal q al masurilor ν_0,ν_1 si o geodezica $\Gamma : [0,1] \to \mathscr{P}_2(M,\mathsf{d},m)$ conectand ν_0,ν_1 si cu

$$\begin{aligned} S_{N'}(\eta_t|m) \;\; \leq \;\; -\int \Big[& \tau_{K,N'}^{(1-t)}(\mathsf{d}(x_0,x_1))\cdot\rho_0^{-1/N'}(x_0) \\ & + \tau_{K,N'}^{(t)}(\mathsf{d}(x_0,x_1))\cdot\rho_1^{-1/N'}(x_1)\Big]\,dq(x_0,x_1) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

pentru orice $t \in [0,1]$ si orice $N' \geq N$. Aici ρ_i noteaza functiile densitate ale partilor absolut continue ale masurilor ν_i in raport cu m, $i=1,2$.

Daca (M, d, m) are masa finita si indeplineste conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K,N)$ pentru niste numere K si N, atunci are curbura $\geq K$ in sensul Definitiei 1.1.2. Cu alte cuvinte, conditia $\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$ poate fi interpretata drept conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K,\infty)$ pentru spatiul (M, d, m).

Pentru varietati Riemanniene, conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K,N)$ revine la conditia: "curbura Ricci minorata de K, iar dimensiunea majorata de N", dupa cum se arata in Teorema 1.7 din lucrarea [St06b]:

Teorema 1.2.4. *Fie M o varietate Riemanniana completa, cu distanta Riemanniana d si cu volumul Riemannian m, si fie date numerele K, $N \in \mathbb{R}$ cu $N \geq 1$.*

(i) Spatiul metric cu masura (M, d, m) satisface conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K,N)$ daca si numai daca varietatea Riemanniana are curbura Ricci $\geq K$ si dimensiunea $\leq N$.

(ii) In plus, in acest caz, pentru orice functie masurabila $V : M \to \mathbb{R}$, spatiul $(M, \mathsf{d}, V \cdot m)$ satisface conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K+K', N+N')$ daca

$$\mathrm{Hess}\, V^{1/N'} \leq -\frac{K'}{N'} \cdot V^{1/N'}$$

pentru niste numere $K' \in \mathbb{R}$, $N' > 0$, in sensul ca

$$V(\gamma_t)^{1/N'} \geq \sigma_{K',N'}^{(1-t)}(\mathsf{d}(\gamma_0,\gamma_1))V(\gamma_0)^{1/N'} + \sigma_{K',N'}^{(t)}(\mathsf{d}(\gamma_0,\gamma_1))V(\gamma_1)^{1/N'}$$

pentru fiecare geodezica $\gamma : [0,1] \to M$ si fiecare $t \in [0,1]$. Aici

$$\sigma_{K,N}^{(t)}(\theta) := sin\left(\sqrt{\frac{K}{N}}t\theta\right) \Big/ sin\left(\sqrt{\frac{K}{N}}\theta\right)$$

daca $0 < K\theta^2 < N\pi^2$ (cu modificari adecvate in celelalte cazuri).

1.2.2 Condiţia grosieră de tip curbură-dimensiune. Definiţie şi proprietăţi

Introducem in cele ce urmeaza conditia grosiera curbura-dimensiune pentru spatii metrice cu masura, care nu sunt neaparat geodezice, si demonstram cateva proprietati de baza ale sale.

Exista mai multe moduri de a extinde Definitia 1.2.3, pentru a obtine o conditie aplicabila unor spatii mai generale decat cele geodezice. Conteaza in mod esential modul in care apare ordinul de discretizare "h". Exista doua abordari care par mai naturale, fiecare dintre ele cu avantajele sale. Pentru moment, reamintim si rafinam definitia punctului t-intermediar h-grosier dintre doua puncte date:

Definiţia 1.2.5. (i) Daca (M, d) este un spatiu metric, $h \geq 0$, $t \in [0,1]$ sunt numere reale date, spunem ca x_t este un punct t-intermediar h-grosier intre x_0 si x_1 in M, daca

$$\begin{cases} \mathsf{d}(x_0,x_t) & \leq & t\,\mathsf{d}(x_0,x_1)+h \\ \mathsf{d}(x_t,x_1) & \leq & (1-t)\,\mathsf{d}(x_0,x_1)+h \end{cases}$$

(ii) Spunem ca x_t este un punct t-intermediar h-grosier intre x_0 si x_1 in sens tare daca

$$(1-t)\,\mathsf{d}(x_0,x_t)^2+t\,\mathsf{d}(x_t,x_1)^2 \leq t(1-t)\,\mathsf{d}(x_0,x_1)^2+h^2. \tag{1.2.2}$$

Observaţia 1.2.6. Daca x_t este un punct t-intermediar h-grosier intre x_0 si x_1 in sens tare, atunci x_t este un punct t-intermediar h-grosier intre x_0 si x_1. Intr-adevar, inegalitatea triunghiului $|\,\mathsf{d}(x_0,x_1)-\,\mathsf{d}(x_0,x_t)| \leq \,\mathsf{d}(x_t,x_1)$, impreuna cu (1.2.2) implica

$$(1-t)\,\mathsf{d}(x_0,x_t)^2+t|\,\mathsf{d}(x_0,x_1)-\,\mathsf{d}(x_0,x_t)|^2 \leq t(1-t)\,\mathsf{d}(x_0,x_1)^2+h^2$$

sau echivalent

$$(1-t)\,\mathsf{d}(x_0,x_t)^2+t\,\mathsf{d}(x_0,x_1)^2+t\,\mathsf{d}(x_0,x_t)^2-2t\,\mathsf{d}(x_0,x_t)\,\mathsf{d}(x_0,x_1) \leq t(1-t)\,\mathsf{d}(x_0,x_1)^2+h^2,$$

ceea ce conduce la

$$\mathsf{d}(x_0,x_t)^2-2t\,\mathsf{d}(x_0,x_t)\,\mathsf{d}(x_0,x_1) \leq -t^2\,\mathsf{d}(x_0,x_1)^2+h^2 \;\Leftrightarrow\; [\,\mathsf{d}(x_0,x_t)-t\,\mathsf{d}(x_0,x_1)]^2 \leq h^2.$$

Similar se obtine inegalitatea corespunzatoare lui $\mathsf{d}(x_t,x_1)$.

Observaţia 1.2.7. Cu ipoteza suplimentara ca M are diametru finit L, punctele slab t-intermediare h-grosiere sunt puncte t-intermediare h'-grosiere pentru $h' = (2Lh)^{1/2}$.

Obtinem, in acest fel, doua posibile definitii pentru conditia grosiera de tip curbura-dimensiune.

Definiţia 1.2.8. (i) Fiind date trei numere $K, N, h \in \mathbb{R}$, cu $N \geq 1$ si $h \geq 0$, spunem ca spatiul metric cu masura (M, d, m) satisface conditia grosiera curbura-dimensiune h-$\mathsf{CD}(K,N)$ daca si numai daca pentru fiecare pereche de masuri $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ exista un cuplaj δh-optimal q al lui ν_0, ν_1, astfel incat pentru orice $t \in [0,1]$ exista un punct t-intermediar h-grosier $\eta_t \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ intre ν_0, ν_1, cu

$$\begin{aligned} S_{N'}(\eta_t|m) \quad \leq \quad & -\int \Big[\tau_{K,N'}^{(1-t)}((\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+) \cdot \rho_0^{-1/N'}(x_0) \\ & + \tau_{K,N'}^{(t)}((\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+) \cdot \rho_1^{-1/N'}(x_1) \Big] \, dq(x_0,x_1) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

pentru orice $N' \geq N$. Aici ρ_i noteaza densitatea partii absolut continue a lui ν_i in raport cu m, $i = 0,1$, iar $\delta = -1$ pentru $K < 0$ si $\delta = 1$ pentru $K \geq 0$, unde $(\cdot)_+$ noteaza partea pozitiva.

(ii) Spunem ca (M, d, m) satisface conditia grosiera curbura-dimensiune in sens tare h-$\mathsf{CD}^s(K,N)$ daca pentru fiecare pereche $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ exista un cuplaj δh-optimal q al lui ν_0, ν_1, astfel incat pentru orice $t \in [0,1]$ exista un punct t-intermediar h-grosier $\eta_t \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ intre ν_0, ν_1 in sens tare, indeplinind (1.2.3) pentru orice $N' \geq N$.

Dupa cum vom vedea, prima definitie este mai potrivita pentru a obtine rezultate de stabilitate la discretizari, pe cand a doua este mai adecvata pentru obtinerea unor consecinte de natura geometrica.

Observaţia 1.2.9. Conform Observatiei 1.2.7, pe spatii marginite conditia grosiera (slaba) de tip curbura-dimensiune si conditia grosiera curbura-dimensiune in sens tare sunt echivalente, modulo o schimbare a ordinului de discretizare h.

Observaţia 1.2.10. Pentru $K = 0$, inegalitatea (1.2.3) se scrie ca

$$S_{N'}(\eta_t|m) \leq (1-t) \cdot S_{N'}(\nu_0|m) + t \cdot S_{N'}(\nu_1|m),$$

deci conditia grosiera curbura-dimensiune h-$\mathsf{CD}(0,N)$ cere functionalelor entropie Rényi $S_{N'}(\cdot|m)$ sa fie slab convexe pe $\mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ de-a lungul "h-geodezicelor" pentru orice $N' \geq N$.

Propoziţia 1.2.11. *Sa presupunem ca (M, d, m) este un spatiu metric cu masura care indeplineste conditia h-$\mathsf{CD}(K,N)$ pentru niste numere $h \geq 0$, $K,N \in \mathbb{R}$. Atunci urmatoarele proprietati au loc:*

(i) (M, d, m) *indeplineste si conditiile* h-$\mathsf{CD}(K',N')$ *pentru orice* $K' \leq K$ *si* $N' \geq N$. *Daca* $K \leq 0$, *atunci* (M, d, m) *satisface si conditia* h'-$\mathsf{CD}(K,N)$ *pentru orice* $h' \geq h$.

(ii) Orice spatiu metric cu masura (M', d', m') *care este izomorf cu* (M, d, m) *satisface aceeasi conditie* h-$\mathsf{CD}(K,N)$.

(iii) Pentru orice $\alpha, \beta > 0$, *spatiul metric cu masura* $(M, \alpha\,\mathsf{d}, \beta m)$ *indeplineste conditia* αh-$\mathsf{CD}(\alpha^{-2}K,N)$.

(iv) Daca (M, d, m) *are masa totala finita, atunci* h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$.

Demonstraţie. (i), (ii) Sunt evidente.

(iii) Consideram $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2(M, \alpha\,\mathsf{d}, \beta m)$. Atunci $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ si notam cu ρ_i densitatea lui ν_i in raport cu m, pentru $i = 0,1$. Notam cu δ semnul lui K. Fie q un cuplaj δh-optimal si $\eta = \rho m$ un punct t-intermediar h-grosier intre ν_0, ν_1, in raport cu metrica d, indeplinind conditia (1.2.1) pentru orice $N' \geq N$. Atunci q este un cuplaj $\delta(\alpha h)$-optimal si η este un punct t-intermedia αh-grosier intre ν_0, ν_1 in raport cu metrica $\alpha\,\mathsf{d}$ si avem

$$\begin{aligned}
S_{N'}(\eta|\beta m) &= -\int_M (\rho/\beta)^{1-1/N'}\, d(\beta m) = \beta^{1/N'} S_{N'}(\eta|m) \\
&\leq -\beta^{1/N'} \int \Big[\tau_{K,N'}^{(1-t)}((\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+) \cdot \rho_0^{-1/N'}(x_0) \\
&\qquad + \tau_{K,N'}^{(t)}((\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+) \cdot \rho_1^{-1/N'}(x_0)\Big]\, dq(x_0,x_1) \\
&= \int \Big[\tau_{\alpha^{-2}K,N'}^{(1-t)}((\alpha\,\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta(\alpha h))_+)(\rho_0/\beta)^{-1/N'}(x_0) \\
&\qquad + \tau_{\alpha^{-2}K,N'}^{(t)}((\alpha\,\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta(\alpha h))_+)(\rho_1/\beta)^{-1/N'}(x_0)\Big]\, dq(x_0,x_1)
\end{aligned}$$

pentru orice $N' \geq N$, ceea ce conduce la conditia αh-$\mathsf{CD}(\alpha^{-2}K,N)$ pentru spatiul metric cu masura $(M, \alpha\,\mathsf{d}, \beta m)$.

(iv) Pentru a demonstra minorantul pentru h-curbura in sensul Definitiei 1.1.9, consineram $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2^*(M, \mathsf{d}, m)$. Cum spatiul (M, d, m) satisface conditia h-$\mathsf{CD}(K,N)$, se poate gasi un cuplaj δh-optimal q si pentru orice $t \in [0,1]$ exista un punct t-intermediar h-grosier $\eta_t \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ intre ν_0 si ν_1 care indeplinesc conditia (1.2.1) pentru orice $N' \geq N$. Cu presupunerea noastra $m(M) < \infty$, Lema 1.2.1 ne da entropia relativa a lui η_t in raport cu m, ca

$$\mathrm{Ent}(\eta_t|m) = \lim_{N' \to \infty} N'(1 + S'_N(\eta_t|m)).$$

De aceea,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(\eta_t|m) \quad &- \quad (1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0|m) - t\mathrm{Ent}(\nu_1|m) \\
&= \quad \lim_{N' \to \infty} N'(S'_N(\eta_t|m) - (1-t)S'_N(\nu_0|m) - tS'_N(\nu_0|m)) \\
&\leq \quad \lim_{N' \to \infty} \int \Big\{ N' \Big[(1-t) - \tau_{K,N'}^{(1-t)}\left((\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+ \right) \Big] \rho_0^{-1/N'}(x_0) \\
&\qquad + N' \Big[t - \tau_{K,N'}^{(t)}\left((\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+ \right) \Big] \rho_1^{-1/N'}(x_1) \Big\} dq(x_0,x_1) \\
&\leq \quad \lim_{N' \to \infty} \int \Big\{ N' \Big[(1-t) - \tau_{K,N'}^{(1-t)}\left((\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+ \right) \Big] \\
&\qquad\qquad + N' \Big[t - \tau_{K,N'}^{(t)}\left((\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+ \right) \Big] \Big\} dq(x_0,x_1).
\end{aligned}$$

Daca $0 < K\theta^2 < (N-1)\pi^2$, atunci

$$\lim_{N' \to \infty} N' \Big[t - \tau_{K,N'}^{(t)}(\theta) \Big] = \lim_{N' \to \infty} N' \left[t - t^{\frac{1}{N}} \left(\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{K}{N-1}} t\theta \right)}{\sin\left(\sqrt{\frac{K}{N-1}} \theta \right)} \right)^{1-\frac{1}{N}} \right] = \frac{K\theta^2}{6}(t^3 - t).$$

Obtinem aceeasi limita $K\theta^2(t^3 - t)/6$ pentru celelalte trei interpretari ale lui $\tau_{K,N'}^{(t)}(\theta)$, deci putem conchide ca

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(\eta_t|m) \quad &\leq \quad \int \frac{K\left(\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+ \right)^2}{6} \{ [(1-t)^3 - (1-t)] + (t^3 - t) \} dq(x_0,x_1) \\
&= \quad -\frac{K}{2} t(1-t) \int [(\mathsf{d}(x_0,x_1) - \delta h)_+]^2 \, dq(x_0,x_1) = \mathsf{d}_W^{\delta h}(\nu_0,\nu_1)^2.
\end{aligned}$$

□

Observaţia 1.2.12. Propozitia 1.2.11 ramane adevarata daca inlocuim peste tot h-$\mathsf{CD}(K,N)$ cu h-$\mathsf{CD}^s(K,N)$.

Observaţia 1.2.13. Punctul (iv) din Propozitia 1.2.11 arata ca pentru un spatiu metric cu masura cu masa totala finita, conditia h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$ poate fi privita ca o conditie grosiera curbura-dimensiune h-$\mathsf{CD}(K,\infty)$.

1.2.3 Stabilitatea la convergență

Ca si in cazul minorantilor pentru curbura, putem stabili un rezulta de stabilitate, care arata ca putem trece de la spatii discrete la spatii limita continue.

Teorema 1.2.14. *Fie (M,d,m) un spatiu metric cu masura normalizat si consideram o familie $\{(M_h,\mathsf{d}_h,m_h)\}_{h>0}$ de spatii metrice cu masura normalizate astfel incat pentru fiecare $h>0$ spatiul (M_h,d_h,m_h) satisface conditia grosiera curbura-dimensiune h-$\mathsf{CD}(K_h,N_h)$ si are diametrul L_h pentru niste numere reale K_h,N_h si L_h cu $N_h\geq 1$ si $L_h>0$. Presupunem ca pentru $h\to 0$ avem*

$$(M_h,\mathsf{d}_h,m_h)\xrightarrow{\mathbb{D}}(M,\mathsf{d},m)$$

si

$$(K_h,N_h,L_h)\to(K,N,L),$$

unde $(K,N,L)\in\mathbb{R}^3$ cu

$$K\cdot L^2<(N-1)\pi^2.$$

Atunci spatiul (M,d,m) satisface conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K,N)$ in sensul Definitiei 1.2.3 si are diametrul $\leq L$.

Pentru $h\geq 0$, $t\in[0,1]$, $K\in\mathbb{R}$ si $N\geq 1$ folosim notatiile

$$\begin{aligned} T^{(t)}_{h,K,N}(q|m) \;:=\; -\int\Big[&\tau^{(1-t)}_{K,N'}((\mathsf{d}(x_0,x_1)-\delta_K h)_+)\cdot\rho_0^{-1/N'}(x_0)\\ &+\tau^{(t)}_{K,N'}((\mathsf{d}(x_0,x_1)-\delta_K h)_+)\cdot\rho_1^{-1/N'}(x_1)\Big]\,dq(x_0,x_1)\end{aligned}$$

si

$$T^{(t)}_{K,N}(q|m):=T^{(t)}_{0,K,N}(q|m),$$

atunci cand q este un cuplaj δh-optimal al masurilor

$$\nu_0=\rho_0\cdot m,\ \nu_1=\rho_1\cdot m.$$

Reamintim ca $\delta=1$ pentru $K\geq 0$, si $\delta=-1$ pentru $K<0$.

Lema 3.3 din lucrarea [St06b] arata ca $T^{(t)}_{K,N}(\cdot|m)$ este superior semicontinua. Urmatorul rezultat furnizeaza superior semicontinuitatea lui $T^{(t)}_{h,K,N}(\cdot|m)$ pentru orice $h\geq 0$.

Lema 1.2.15. *Fie $h>0$, $t\in[0,1]$, $K\in\mathbb{R}$ si $N\geq 1$ date. Pentru orice sir $\{q^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de cuplaje cu aceleasi margini ν_0 si ν_1, convergand slab la un cuplaj $q^{(\infty)}$, avem*

$$\limsup_{k\to\infty} T^{(t)}_{h,K,N}(q^{(k)}|m)\leq T^{(t)}_{h,K,N}(q^{(\infty)}|m) \tag{1.2.4}$$

Demonstraţie. Consideram $\{q^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ si $q^{(\infty)}$ ca in enunt. Este suficient sa demonstram ca

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} \quad &\int \tau^{(1-t)}_{K,N'}((\mathsf{d}(x_0,x_1)-\delta_K h)_+)\cdot\rho_0^{-1/N'}(x_0)dq^{(k)}(x_0,x_1)\\ &\geq\int \tau^{(1-t)}_{K,N'}((\mathsf{d}(x_0,x_1)-\delta_K h)_+)\cdot\rho_0^{-1/N'}(x_0)dq^{(\infty)}(x_0,x_1),\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

deoarece atunci o inegalitate similara va avea loc cu ρ_1 in locul lui ρ_0 si t in locul lui $1-t$, iar prin insumarea celor doua inegalitati obtinem (1.2.4).

Pentru $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, notam cu $Q^{(k)}(x_0,dx_1)$ dezintegrarea lui $dq^{(k)}(x_0,x_1)$ in raport cu $d\nu_0(x_0)$. Daca $C\in\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$, definim

$$\vartheta^{(k)}_C(x_0)=\int\left[\tau^{(1-t)}_{K,N'}((\mathsf{d}(x_0,x_1)-\delta_K h)_+)\wedge C\right]Q^{(k)}(x_0,dx_1).$$

Consideram acum $C\in\mathbb{R}_+$ fixat. Spatiul $\mathscr{C}_b(M)$ de functii continue si marginite este desn in $L_1(M,\nu_0)$ se de aceea pentru orice $\varepsilon>0$ se poate gasi o functie $\varphi\in\mathscr{C}_b(M)$ astfel incat

$$\int C\cdot\left|\left[\rho_0^{-1/N}\wedge C\right]-\varphi\right|d\nu_0\leq\varepsilon.$$

Aceasta, impreuna cu faptul ca

$$0\leq\vartheta^{(k)}_C\leq C,$$

dovedeste ca pentru orice $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ avem

$$\int\vartheta^{(k)}_C\cdot\left|\left[\rho_0^{-1/N}\wedge C\right]-\varphi\right|d\nu_0\leq\varepsilon. \tag{1.2.6}$$

Sirul $\{q^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge slab la $q^{(\infty)}$ pe $M\times M$, si cum functia

$$(x_0,x_1)\mapsto\tau^{(1-t)}_{K,N'}((\mathsf{d}(x_0,x_1)-\delta_K h)_+)\wedge C$$

se afla in $\mathscr{C}_b(M\times M)$, exista un $k(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $k\geq k(\varepsilon)$

$$\int\vartheta^{(\infty)}_C\varphi\,d\nu_0\leq\int\vartheta^{(k)}_C\varphi\,d\nu_0+\varepsilon. \tag{1.2.7}$$

Astfel, pentru fiecare $k \geq k(\varepsilon)$ obtinem

$$\begin{aligned}
\int \vartheta_C^{(\infty)} \cdot \left[\rho_0^{-1/N} \wedge C\right] d\nu_0 &\leq \int \vartheta_C^{(\infty)} \cdot \left|\left[\rho_0^{-1/N} \wedge C\right] - \varphi\right| d\nu_0 + \int \vartheta_C^{(\infty)} \cdot \varphi\, d\nu_0 \\
&\overset{(1.2.6)}{\leq} \int \vartheta_C^{(\infty)} \cdot \varphi\, d\nu_0 + \varepsilon \overset{(1.2.7)}{\leq} \int \vartheta_C^{(k)} \cdot \varphi\, d\nu_0 + 2\varepsilon \\
&\overset{(1.2.6)}{\leq} \int \vartheta_C^{(k)} \cdot \left[\rho_0^{-1/N} \wedge C\right] d\nu_0 + 3\varepsilon \\
&\leq \int \vartheta_\infty^{(k)} \cdot \rho_0^{-1/N} d\nu_0 + 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Aceasta conduce la

$$\int \vartheta_C^{(\infty)} \cdot \left[\rho_0^{-1/N} \wedge C\right] d\nu_0 \leq \liminf_{k\to\infty} \int \vartheta_\infty^{(k)} \cdot \rho_0^{-1/N} d\nu_0$$

pentru orice $C \in \mathbb{R}_+$. Acum, daca il facem pe C sa tinda la ∞, din convergenta monotona obtinem

$$\int \vartheta_\infty^{(\infty)} \cdot \rho_0^{-1/N} d\nu_0 \leq \liminf_{k\to\infty} \int \vartheta_\infty^{(k)} \cdot \rho_0^{-1/N} d\nu_0,$$

ceea ce demonstreaza (1.2.5). □

Demonstraţia Teoremei 1.2.14. Fie $\{(M_h, \mathsf{d}_h, m_h)\}_{h>0}$ o familie de spatii metrice cu masura normalizate, fiecare (M_h, d_h, m_h) satisfacand o conditie grosiera h-$\mathsf{CD}(K_h, N_h)$ si avand diametrul $\leq L_h$. Sa presupunem ca $\{(M_h, \mathsf{d}_h, m_h)\}_{h>0}$ converge la un spatiu metric cu masura (M, d, m) in metrica $\mathbb{D}$ pentru $h \to 0$. Atunci spatiul limita (M, d, m) trebuie sa aiba diametrul $\leq L$. Fara pierderea generalitatii, putem presupune ca $N_h > 1$ si ca exista un triplet (K_0, N_0, L_0) cu $K_h \leq K_0$, $N_h \geq N_0$, $L_h \leq L_0$ pentru orice $h > 0$, si cu

$$K_0 \cdot L_0^2 < (N_0 - 1)\pi^2.$$

Pentru a demonstra conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K, N)$, fie $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ o pereche arbitrara de masuri cu $\nu_i = \rho_i \cdot m$, $i = 0, 1$. Fie si $\varepsilon > 0$ dat. Fixam un cuplaj optimal arbitrar $\hat{q}$ al lui ν_0 si ν_1, si pentru $r \in \mathbb{R}_+$ notam

$$\begin{aligned}
D_r &:= \{(x_0, x_1) \in M \times M : \rho_0(x_0) < r, \rho_1(x_1) < r\} \\
\alpha_r &:= \hat{q}(D_r) \\
\hat{q}^{(r)}(\cdot) &:= \frac{1}{\alpha_r} \hat{q}^{(r)}(\cdot \cap D_r).
\end{aligned}$$

Masura $\hat{q}^{(r)}$ are marginile

$$\hat{\nu}_0^{(r)}(\cdot) := \hat{q}^{(r)}(\cdot \times M), \qquad \hat{\nu}_1^{(r)}(\cdot) := \hat{q}^{(r)}(M \times \cdot)$$

cu densitati marginite. Pentru $r = r(\varepsilon)$ suficient de mare avem si

$$\mathsf{d}_W(\nu_0, \hat{\nu}_0^{(r)}) \leq \varepsilon, \qquad \mathsf{d}_W(\nu_1, \hat{\nu}_1^{(r)}) \leq \varepsilon. \tag{1.2.8}$$

Cum spatiul (M, d, m) are diametrul finit, iar densitatile lui $\hat{\nu}_0^{(r)}$ si $\hat{\nu}_1^{(r)}$ sunt marginite, putem gasi un numar $R \in \mathbb{R}$ astfel incat

$$\sup_{i=0,1} \operatorname{Ent}(\hat{\nu}_i^{(r)}|m) + \frac{\sup_{h>0}|K_h|}{8}\left[\mathsf{d}_W(\hat{\nu}_0^{(r)}, \hat{\nu}_1^{(r)}) + 3\varepsilon\right]^2 \leq R. \tag{1.2.9}$$

Conform ipotezei noastre,

$$(M_h, \mathsf{d}_h, m_h) \xrightarrow{\mathbb{D}} (M, \mathsf{d}, m) \text{ cand } h \to 0,$$

de aceea se pot alege $h = h(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ si un cuplaj $\hat{\mathsf{d}}$ al metricilor d si d_h astfel incat

$$\frac{1}{2}\hat{\mathsf{d}}_W(m_h, m) \leq \mathbb{D}((M_h, \mathsf{d}_h, m_h), (M, \mathsf{d}, m)) \leq \left(\frac{\varepsilon}{4C}\right) \wedge \exp\left(-\frac{2 + 4L_0^2 R}{\varepsilon^2}\right), \tag{1.2.10}$$

unde constanta C va fi specificata mai tarziu. Fixam acum un cuplaj p al masurilor m si m_h, care sa fie optimal in raport cu metrica $\hat{\mathsf{d}}$, si consideram P si P' dezintegrarile lui p in raport cu m si m_h respectiv. Ca in Lema 4.19 din [St06a], P' induce o aplicatie canonica

$$P' : \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m) \to \mathscr{P}_2(M_h, \mathsf{d}_h, m_h).$$

Definim

$$\nu_{i,h} := P'(\hat{\nu}_i^{(r)}) = \rho_{i,h} \cdot m_h$$

cu

$$\rho_{i,h}(y) = \int_M \hat{\rho}_i^{(r)}(x) P'(y, dx) \text{ pentru} i = 0, 1.$$

Aplicand Lema 4.19 din [St06a] obtinem succesiv:

$$\hat{\mathsf{d}}_W(\hat{\nu}_i^{(r)}, \nu_{i,h})^2 \overset{(1.2.8)}{\leq} \frac{2 + 4L_0^2 R}{-\log \mathbb{D}((M_h, \mathsf{d}_h, m_h), (M, \mathsf{d}, m))} \overset{(1.2.9)}{\leq} \varepsilon^2 \tag{1.2.11}$$

si

$$\mathrm{Ent}(\nu_{i,h}|m_h) \leq \mathrm{Ent}(\hat{\nu}_i^{(r)}|m) \tag{1.2.12}$$

pentru $i = 0, 1$.

Spatiul aproximant (M_h, d_h, m_h) satisface conditia grosiera curbura-dimensiune h-$\mathsf{CD}(K_h, N_h)$, ceea ce asigura existenta unui cuplaj $\delta_h h$-optimal q_h pentru $\nu_{0,h}$ si $\nu_{1,h}$, iar pentru fiecare $t \in [0,1]$ existenta unui punct t-intermediar h-grosier $\eta_{t,h} \in \mathscr{P}_2(M_h, \mathsf{d}_h, m_h)$ intre $\nu_{0,h}$ si $\nu_{1,h}$, ce indeplinesc inegalitatea

$$S_{N'}(\eta_{t,h}|m_h) \leq T^{(t)}_{h,K',N'}(q_h|m_h) \tag{1.2.13}$$

pentru orice $K' \leq K_h$ si $N' \geq N_h$. Lema 4.19 din [St06a] furnizeaza si o aplicatie canonica

$$P : \mathscr{P}_2(M_h, \mathsf{d}_h, m_h) \to \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m).$$

Consideram acum

$$\Gamma_t^\varepsilon := P(\eta_{t,h}) \tag{1.2.14}$$

cu $h = h(\varepsilon)$ ca mai sus. Reamintim ca P este definit astfel incat densitatea lui Γ_t^ε in raport cu m este data de

$$\rho_t^\varepsilon(x) = \int_{M_h} \rho_{t,h}(y) P(dy, x),$$

unde $\rho_{t,h}$ este densitatea lui $\eta_{t,h}$ in raport cu m_h. Aplicand acum inegalitatea lui Jensen functiei convexe $r \mapsto -r^{1-1/N}$, avem

$$\begin{aligned} S_{N'}(\Gamma_t^\varepsilon|m) &= -\int_M (\rho_t^\varepsilon)^{1-1/N'} dm = -\int_M \left[\int_{M_h} \rho_{t,h}(y) P(dy,x)\right]^{1-1/N'} dm(x) \\ &\leq -\int_M \int_{M_h} \rho_{t,h}(y)^{1-1/N'} P(dy,x) dm(x) = \int_{M_h} \rho_{t,h}(y)^{1-1/N'} dm_h(y) \\ &= S_{N'}(\eta_{t,h}|m_h), \end{aligned}$$

deci am obtinut ca

$$S_{N'}(\Gamma_t^\varepsilon|m) \leq S_{N'}(\eta_{t,h}|m_h) \tag{1.2.15}$$

pentru orice $N' \geq N_h$ si orice $t \in [0,1]$. Propozita 1.2.11 (iv) arata ca proprietatea grosiera h-$\mathsf{CD}(K_h, N_h)$ pentru spatiul (M_h, d_h, m_h) implica minorantul grosier pentru curbura h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M_h, \mathsf{d}_h, m_h) \geq$

K_h. Acesta conduce la

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(\Gamma_t^\varepsilon|m) &\leq \mathrm{Ent}(\eta_{t,h}|m_h) \\
&\leq (1-t)\mathrm{Ent}(\nu_{0,h}|m_h) + t\mathrm{Ent}(\nu_{1,h}|m_h) \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{K_h}{2}t(1-t)\,\hat{\mathsf{d}}_W^{\delta_h h}(\nu_{0,h},\nu_{1,h})^2 \\
&\stackrel{\text{Lemma 1.1.7}}{\leq} \sup_{i=0,1}\mathrm{Ent}(\nu_{i,h}|m_h) + \frac{\sup_{h>0}|K_h|}{8}\left[\hat{\mathsf{d}}_W(\nu_{0,h},\nu_{1,h})+h\right]^2 \\
&\stackrel{(1.2.11),(1.2.12)}{\leq} \sup_{i=0,1}\mathrm{Ent}(\hat{\nu}_i^{(r)}|m) + \frac{\sup_{h>0}|K_h|}{8}\left[\hat{\mathsf{d}}_W(\hat{\nu}_0^{(r)},\hat{\nu}_1^{(r)})+2\varepsilon+h\right]^2 \\
&\leq \sup_{i=0,1}\mathrm{Ent}(\hat{\nu}_i^{(r)}|m) + \frac{\sup_{h>0}|K_h|}{8}\left[\hat{\mathsf{d}}_W(\hat{\nu}_0^{(r)},\hat{\nu}_1^{(r)})+3\varepsilon\right]^2 \\
&\stackrel{(1.2.9)}{\leq} R.
\end{aligned}$$

Impreuna cu (1.2.10), aceasta implica din nou din Lema 4.19 din [St06a] ca

$$\hat{\mathsf{d}}_W(\Gamma_t^\varepsilon,\eta_{t,h}) \leq \varepsilon. \tag{1.2.16}$$

Fie Q_h si Q'_h dezintegrarile lui q_h in raport cu $\nu_{0,h}$ si respectiv $\nu_{1,h}$. Pentru $h = h(\varepsilon)$ ca mai sus si pentru K', N' si $t \in [0,1]$ fixate, definim

$$v_0(y_0) := \int_{M_h} \tau_{K',N'}^{(1-t)}((\mathsf{d}_h(y_0,y_1)-\delta_{K'}h)_+)\;Q_h(y_0,dy_1)$$

si

$$v_1(y_1) := \int_{M_h} \tau_{K',N'}^{(t)}((\mathsf{d}_h(y_0,y_1)-\delta_{K'}h)_+)\;Q'_h(dy_0,y_1).$$

Atunci, din inegalitatea lui Jensen, avem

$$\begin{aligned}
-T_{h,K',N'}^{(t)}(q_h|m_h) &= \sum_{i=0}^{1}\int_{M_h}\rho_{i,h}(y)^{1-1/N'}\cdot v_i(y)\;dm_h(y) \\
&= \sum_{i=0}^{1}\int_{M_h}\left[\int_M \hat{\rho}_i^{(r)}(x)\;P'(y,dx)\right]^{1-1/N'}\cdot v_i(y)\;dm_h(y) \\
&\geq \sum_{i=0}^{1}\int_{M_h}\int_M\left[\hat{\rho}_i^{(r)}(x)\right]^{1-1/N'}\cdot v_i(y)\;P'(y,dx)\;dm_h(y) \\
&= \sum_{i=0}^{1}\int_{M_h}\left[\hat{\rho}_i^{(r)}(x)\right]^{1-1/N'}\left[\int_{M_h} v_i(y)\;P(x,dy)\right]dm(y).
\end{aligned}$$

Acum,

$$\int_{M_h} v_0(y_0)P(x_0,dy_0) = \int_{M_h}\int_{M_h} \tau^{(1-t)}_{K',N'}((\mathsf{d}_h(y_0,y_1)-\delta_{K'}h)_+)Q_h(y_0,dy_1)P(x_0,dy_0)$$

$$\geq \int_{M_h}\int_{M_h}\int_M \left[\tau^{(1-t)}_{K',N'}(\mathsf{d}(x_0,x_1)) - C\cdot\left((\mathsf{d}_h(y_0,y_1)-\delta_{K'}h)_+ - \mathsf{d}(x_0,x_1)\right)\right]$$

$$\cdot\frac{\hat{\rho}^{(r)}_1(x_1)}{\rho_{1,h}(y_1)}P'(y_1,dx_1)\;Q_h(y_0,dy_1)\;P(x_0,dy_0)$$

$$\geq \int_{M_h}\int_{M_h}\int_M \left[\tau^{(1-t)}_{K',N'}(\mathsf{d}(x_0,x_1)) - C\cdot\left(\mathsf{d}_h(y_0,y_1) - \mathsf{d}(x_0,x_1)+h\right)\right]$$

$$\cdot\frac{\hat{\rho}^{(r)}_1(x_1)}{\rho_{1,h}(y_1)}P'(y_1,dx_1)\;Q_h(y_0,dy_1)\;P(x_0,dy_0)$$

$$\geq \int_{M_h}\int_{M_h}\int_M \left[\tau^{(1-t)}_{K',N'}(\mathsf{d}(x_0,x_1)) - C\cdot\left(\hat{\mathsf{d}}(x_0,y_0) + \hat{\mathsf{d}}(x_1,y_1)+h\right)\right]$$

$$\cdot\frac{\hat{\rho}^{(r)}_1(x_1)}{\rho_{1,h}(y_1)}P'(y_1,dx_1)\;Q_h(y_0,dy_1)\;P(x_0,dy_0)$$

unde

$$C := \max\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\tau^{(s)}_{K',N'}(\theta) : s\in[0,1],\ K'\leq K_0,\ N'\geq N_0,\ \theta\leq L_0\right\}.$$

In mod similar, obtinem estimarea

$$\int_{M_h} v_1(y_1)P(x_1,dy_1)$$
$$\geq \int_{M_h}\int_{M_h}\int_M \left[\tau^{(t)}_{K',N'}(\mathsf{d}(x_0,x_1)) - C\left(\hat{\mathsf{d}}(x_0,y_0) + \hat{\mathsf{d}}(x_1,y_1)+h\right)\right]$$
$$\cdot\frac{\hat{\rho}^{(r)}_0(x_0)}{\rho_{0,h}(y_0)}P'(y_0,dx_0)\;Q'_h(y_1,dy_0)\;P(x_1,dy_1).$$

Consideram masura

$$\begin{aligned} d\overline{q}^{(r)}(x_0,x_1) &:= \int_{M_h\times M_h}\frac{\hat{\rho}^{(r)}_0(x_0)\hat{\rho}^{(r)}_1(x_1)}{\rho_{0,h}(y_0)\rho_{1,h}(y_1)}P'(y_1,dx_1)P'(y_0,dx_0)dq_h(y_o,y_1) \\ &= \int_{M_h\times M_h}\frac{\hat{\rho}^{(r)}_0(x_0)\hat{\rho}^{(r)}_1(x_1)}{\rho_{1,h}(y_1)}P'(y_1,dx_1)Q_h(y_0,dy_1)P(x_0,dy_0)m(dx_0). \end{aligned}$$

Atunci $\overline{q}^{(r)}$ este un cuplaj (nu neaparat optimal) al lui $\hat{q}_0^{(r)}$ si $\hat{q}_0^{(r)}$. Consideram de asemenea un cuplaj q^ε pentru ν_0 si ν_1 dat de

$$q^\varepsilon(A) := \alpha_r \overline{q}^{(r)} + \hat{q}(A \cap (M \times M \setminus E_r))$$

pentru orice $A \subset M \times M$ masurabila si pentru $r = r(\varepsilon)$. Din estimarile de mai sus obtinem

$$\begin{aligned} T^{(t)}_{h,K',N'}(q_h|m_h) &\leq T^{(t)}_{K',N'}(\overline{q}^{(r)}|m) \\ &\qquad + C\int_M \left[\hat{\rho}_0^{(r)}(x)^{1-1/N'} + \hat{\rho}_1^{(r)}(x)^{1-1/N'}\right](\hat{\mathsf{d}}(x,y)+h)dp(x,y) \\ &\leq T^{(t)}_{K',N'}(\overline{q}^{(r)}|m) + 2C\hat{\mathsf{d}}_W(m,m_h) + h \leq T^{(t)}_{K',N'}(\overline{q}^{(r)}|m) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

utilizand (1.2.10). Avem si

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|T^{(t)}_{K',N'}(q^\varepsilon|m) - T^{(t)}_{K',N'}(\overline{q}^{(r(\varepsilon))}|m)\right| = 0. \tag{1.2.17}$$

In acest mod, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ am gasit o masura de probabilitate q^ε pe $M \times M$ si o familie de masuri de probabilitate $\{\Gamma_t^\varepsilon\}_{t\in[0,1]}$ pe M astfel incat

$$S_{N'}(\Gamma_t^\varepsilon|m) \overset{(1.2.15)}{\leq} S_{N'}(\eta_{t,h}|m_h) \overset{(1.2.13)}{\leq} T^{(t)}_{h,K',N'}(q_h|m_h) \overset{(1.2.17)}{\leq} T^{(t)}_{K',N'}(\overline{q}^{(r(\varepsilon))}|m) + 2\varepsilon. \tag{1.2.18}$$

Faptul ca M este compact implica existenta unui sir $(\varepsilon(k))_{k\in\mathbb{N}}$ convergand la 0, astfel incat masurile $q^{\varepsilon(k)}$ tind la o masura q si pentru orice $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ probabilitatile $\Gamma_t^{\varepsilon(k)}$ converg la un Γ_t. Cum toate masurile q^ε sunt cuplaje ale lui ν_0 si ν_1, masura q este si ea un cuplaj al lui ν_0 si ν_1. Mai mult, (1.2.8), (1.2.11) si (1.2.16) conduc la faptul ca masura q este de fapt un cuplaj optimal.

Pentru orice $h > 0$ si $t \in [0,1]$, masura $\eta_{t,h}$ este un punct t-intermediar h-grosier intre $\nu_{0,h}$ si $\nu_{1,h}$ in $\mathscr{P}_2(M_h, \mathsf{d}_h, m_h)$. Dar $\nu_{0,h}$ si $\nu_{1,h}$ converg la ν_0 si respectiv ν_1, cand $h \to 0$. Impreuna cu (1.2.16), aceasta conduce la

$$\begin{aligned} \mathsf{d}_W(\nu_0, \Gamma_t) &\leq t\,\mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1) \\ \mathsf{d}_W(\Gamma_t, \nu_1) &\leq (1-t)\,\mathsf{d}_W(\nu_0,\nu_1) \end{aligned}$$

pentru orice $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. De aceea, familia $\{\Gamma_t\}_t$ se extinde la o geodezica in $\mathscr{P}_2(M, \mathsf{d}, m)$ ce uneste ν_0 si ν_1. Cum $S_{N'}(\cdot|m)$ este inferior semicontinua (Lema 1.2.1) si $T^{(t)}_{K',N'}(\cdot|m)$ este superior semicontinua, estimarea (1.2.17) implica

$$S_{N'}(\Gamma_t|m) \le \liminf_{k\to\infty} S_{N'}(\Gamma_t^{\varepsilon(k)}|m) \le \liminf_{k\to\infty} T^{(t)}_{K',N'}(q^{\varepsilon(k)}|m) \le T^{(t)}_{K',N'}(q|m)$$

pentru orice $t \in [0,1]$, orice $N' > N = \lim_{h\to 0} N_h$ si orice $K' > K = \lim_{h\to 0} K_h$. Inegalitatea

$$S_{N'}(\Gamma_t|m) \le T^{(t)}_{K',N'}(q|m)$$

are loc si pentru $K' = K$ si $N' = N$, din continuitatea lui $S_{N'}$ si $T^{(t)}_{K',N'}$ in (K',N'). Aceasta incheie demonstratia teoremei.

□

1.2.4 Stabilitatea la discretizare

In aceasta sectiune vom arata cum conditia grosiera curbura-dimensiune se pastreaza prin discretizarea unui spatiu geodezic cu masura, care satisface conditia curbura-dimensiune in sensul Definitiei 1.2.3.

Teorema 1.2.16. *Fie (M, d, m) un spatiu metric cu masura ce satisface conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K,N)$ pentru niste numere reale K si $N \ge 1$. Atunci pentru orice $h > 0$, orice discretizare (M_h, d, m_h) cu $R(h) \le h/4$ satisface conditia grosiera curbura-dimensiune h-$\mathsf{CD}(K,N)$.*

Demonstraţie. Presupunem ca (M, d, m) indeplineste conditia curbura-dimensiune $\mathsf{CD}(K,N)$ si consideram o discretizare (M_h, d, m_h) cu $M_h = \{x_j : j \ge 1\} \subset M$. Presupunem ca $\{A_j\}_{j\ge 1}$ este o acoperire corespunzatoare a lui M submultimi disjuncte doua cate doua astfel incat $x_j \in A_j$, $m_h(\{x_j\}) = m(A_j)$ si $\mathrm{diam}(A_j) \le R(h)$ pentru fiecare $j \ge 1$. Pentru a verifica proprietatea grosiera h-$\mathsf{CD}(K,N)$ pentru spatiul discret (M_h, d, m_h), fie ν_1^h, ν_2^h o pereche arbitrara de masuri din $\mathscr{P}_2(M_h, \mathsf{d}, m_h)$, sa zicem

$$\nu_i^h = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}^h 1_{\{x_j\}}\right) \cdot m_h, \qquad i = 1,2.$$

Luam

$$\nu_i := \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}^h 1_{A_j}\right) \cdot m, \qquad i = 1,2.$$

Aplicand proprietatea $\mathsf{CD}(K,N)$, presupusa adevarata pentru (M,d,m), se poate obtine un cuplaj q al lui ν_1 si ν_2, si pentru fiecare $t\in[0,1]$ un punct t-intermediar η_t intre ν_1 si ν_2, astfel incat (1.2.1) are loc pentru orice $N'\geq N$. Presupunem ca $\eta_t=\rho_t m$.

Formula

$$\eta_t^h(\{x_j\}):=\eta_t(A_j),\qquad j=1,2,\ldots$$

defineste pentru fiecare $t\in[0,1]$ o masura de probabilitate pe M_h, care este absolut continua in raport cu m_h, de densitate

$$\rho_t^h=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\eta_t(A_j)}{m(A_j)}1_{A_j}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\int_{A_j}\rho_t\,dm}{m(A_j)}1_{A_j}.$$

Deci pentru $N'\geq N$ avem, conform inegalitatii lui Jensen,

$$\begin{aligned}S_{N'}(\eta_t^h|m_h) &= -\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m(A_j)}\int_{A_j}\rho_t\,dm\right)^{-1/N'}m_h(\{x_j\})\\ &\leq -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{m(A_j)}\left(\int_{A_j}\rho_t^{-1/N'}\,dm\right)m_h(\{x_j\})\\ &= -\sum_{j=1}^{\infty}\int_{A_j}\rho_t^{-1/N'}\,dm=S_{N'}(\eta_t|m).\end{aligned}$$

De aceea obtinem

$$\begin{aligned}S_{N'}(\eta_t^h|m_h) \;\leq\; -\int\Big[&\tau_{K,N'}^{(1-t)}(\mathsf{d}(x_0,x_1))\cdot\rho_0^{-1/N'}(x_0)\\ &+\tau_{K,N'}^{(t)}(\mathsf{d}(x_0,x_1))\cdot\rho_1^{-1/N'}(x_1)\Big]\,dq(x_0,x_1).\end{aligned}\tag{1.2.19}$$

Presupunem ca suntem in cazul $K<0$. Fie q^h un cuplaj $-2R(h)$-optimal al lui ν_0^h si ν_1^h. Notam

$$\widehat{q}:=\sum_{j,k=1}^{n}\left[q^h(\{(x_j,x_k)\})\delta_{(x_j,x_k)}\times\frac{1_{A_j\times A_k}}{m(A_j)m(A_k)}(m\times m)\right].$$

Atunci $\widehat{q}$ este o masura pe $M_h\times M_h\times M\times M$, care are marginile ν_0^h, ν_1^h, ν_0 si ν_1. Mai mult, proiectia lui $\widehat{q}$ pe primii doi factori este egala cu q^h.

Pentru $K<0$, $N>1$ si $t\in(0,1)$ arbitrar fixat, functia $\tau_{K,N}^{(1-t)}(\cdot)$ este monoton descrescatoare pe $[0,\infty)$, si astfel avem

$$
\begin{aligned}
&- \int_{M\times M} \tau_{K,N'}^{(1-t)}(\mathsf{d}(x_0,x_1))\cdot \rho_0^{-1/N'}(x_0)dq(x_0,x_1)\\
&= -\int_{M_h\times M_h\times M\times M} \tau_{K,N'}^{(1-t)}(\mathsf{d}(x_0,x_1))\cdot \rho_0^{-1/N'}(x_0)d\widehat{q}(x_0^h,x_1^h,x_0,x_1)\\
&\leq -\int_{M_h\times M_h\times M\times M} \tau_{K,N'}^{(1-t)}(\mathsf{d}(x_0,x_0^h)+\mathsf{d}(x_0^h,x_1^h)+\mathsf{d}(x_1^h,x_1))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\rho_0^{-1/N'}(x_0)d\widehat{q}(x_0^h,x_1^h,x_0,x_1)\\
&= \sum_{j,k}\frac{q^h(\{(x_j,x_k)\})}{m(A_j)m(A_k)}\int_{A_j\times A_k} \tau_{K,N'}^{(1-t)}(\mathsf{d}(x,x_j)+\mathsf{d}(x_j,x_k)+\mathsf{d}(x_k,y))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\left(a_{0,j}^h\right)^{-1/N'}dm(x)dm(y)\\
&\leq \sum_{j,k}\tau_{K,N'}^{(1-t)}(\mathsf{d}(x_j,x_k)+2R(h))\cdot\left(a_{0,j}^h\right)^{-1/N'}q^h(\{(x_j,x_k)\}).
\end{aligned}
$$

In mod similar putem majora al doilea termen al integralei din (1.2.19) pentru a obtine inegalitatea dorita pentru cuplajul $-2R(h)$-optimal $\widehat{q}$ al lui ν_0^h si ν_1^h, si pentru η_t^h.

Daca $K=0$, atunci este usor de vazut ca

$$S_{N'}(\nu_i^h|m_h) = S_{N'}(\nu_i|m),\ i=1,2,$$

ceea ce conduce direct la

$$S_{N'}(\eta_t^h|m_h)\leq(1-t)\cdot S_{N'}(\nu_0^h|m_h)+t\cdot S_{N'}(\nu_1^h|m_h)$$

pentru orice $N'\geq N$.

Pentru $K>0$, $N>1$ si pentru $t\in(0,1)$ arbitrar fixat, cum Teorema 2.2.5 ne da un majorant pentru diametru, pentru care functia $\tau_{K,N}^{(t)}(\cdot)$ este de fapt monotom crescatoare, deci $\tau_{K,N}^{(t)}((\mathsf{d}(x_0,x_1)-\alpha)_+)$ monoton crescatoare in α, si deci demonstratia continua ca in cazul $K<0$.

Precum in demonstratia Teoremei 1.1.14, se poate arata ca η_t^h este cel putin un punct t-intermediar $4R(h)$-grosier intre ν_1^h, ν_2^h. De aceea, daca $h\geq 4R(h)$, discretizarea (M_h,d,m_h) satisface conditia grosiera curbura-dimensiune h-$CD(K,N)$.

□

Rezultatul de mai sus furnizeaza o serie intreaga de exemple, cu care suntem deja familiarizati din subcapitolul 1.1, paragrafele 1.1.3 si 1.1.4.

Exemplul 1.2.17. Spatiul $\mathbb{Z}^n$, cu metrica d_1, care este restrictia metricii provenite din norma euclidiana $|\cdot|_1$ de pe $\mathbb{R}^n$, si cu masura $\overline{m}_n = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n}\delta_x$, satisface h-$\mathsf{CD}(0,n)$ pentru orice $h \geq 2n$.

Exemplul 1.2.18. Gridul n-dimensional $\mathbb{E}^n$, avand pe $\mathbb{Z}^n$ ca multime a varfurilor, echipat cu metrica uzuala de graf si cu masura m_n, care este definita ca masura Lebesgue 1-dimensionala pe muchii, indeplineste conditia grosiera curbura-dimensiune ordin de discretizare h-$\mathsf{CD}(0,n)$ pentru orice $h \geq 2(n+1)$.

Exemplul 1.2.19. Fie G graful care acopera planul euclidian cu triunghiuri echilaterale de muchie de lungime r, cu metrica de graf d_G si cu masura Lebesgue 1-dimensionala m pe muchii. Atunci spatiul metric cu masura G indeplineste conditia grosiera h-$\mathsf{CD}(0,2)$ pentru orice $h \geq 8r\sqrt{3}/3$.

Exemplul 1.2.20. Graful G', ce acopera planul euclidian cu hexagoane regulate de muchie r, echipat cu metrica de graf $\mathsf{d}_{G'}$ si cu masura Lebesgue 1-dimensionala m', satisface conditia grosiera curbura-dmimensiune h-$\mathsf{CD}(0,2)$ pentru orice ordin de discretizare $h \geq 34r/3$.

Exemplul 1.2.21. (Grafurile planare omogene). Pentru orice numere naturale $l,n \geq 3$ si pentru orice $r > 0$, ambele spatii metrice $(\mathbb{V}(l,n,r),\mathsf{d},\widetilde{m})$ si $(\mathbb{G}(l,n,r),\mathsf{d},m)$ definite in paragraful 1.1.4, satisfac conditia grosiera curbura-dimensiune h-$\mathsf{CD}(K,2)$ pentru orice ordin de discretizare $h \geq r\cdot C(l,n)$, unde

$$K = \begin{cases} -\frac{1}{r^2}\left[\operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}-1\right)\right]^2 & \text{for } \frac{1}{l}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2} \\[2ex] \frac{1}{r^2}\left[\arccos\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}-1\right)\right]^2 & \text{for } \frac{1}{l}+\frac{1}{n}<\frac{1}{2} \\[2ex] 0 & \text{for } \frac{1}{l}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

si

$$C(l,n) = 4 \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1}\right) \Big/ \operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1\right).$$

Capitolul 2

Inegalităţi de transport şi inegalităţi geometrice

In capitolul acesta prezentam cateva consecinte ale proprietatilor geometrice grosiere formulate in termeni de curbura Ricci, la nivelul inegalitatilor Talagrand de transport cu cost patratic, precum si in ceea ce priveste inegalitatile geometrice de tip Brunn-Minkowski. De asemenea, demonstram o teorema de tip Bonnet-Myers.

2.1 Inegalităţi de transport şi fenomenul de concentrare a măsurii

In aceasta sectiune introducem si analizam inegalitati slabe de transport. Astfel de inegalitati au loc pe spatii metrice cu masura (posibil dicrete) care au minoranti grosieri pozitivi pentru curbura Ricci. De asemenea, demonstram ca inegalitatile slabe de transport sunt totusi suficient de puternice pentru a implica fenomenul de concentrare normala a masurii, precum si integrabilitatea exponentiala a functiilor Lipschitz. Cu exceptia rezultatelor introductive, pentru care citarile s-au facut individual, materialul prezentat in continuare face parte din articolul [BS09].

2.1.1 Inegalitatea Talagrand clasică de transport

O inegalitate clasica – inegalitatea Pinsker-Csizsar-Kullback (vezi [Pi64] sau [RR98]) – afirma ca pentru orice doua masuri de probabilitate μ si ν avem

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu|\mu)},$$

unde cu $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ am notat variatia totala.

Inegalitati de tipul celei de mai sus au fost adesea utilizate in Teoria Informatiei.

Mai general:

Definiţia 2.1.1. *Fie (M,d) un spatiu metric, iar $m \in \mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})$ o masura de probabilitate data. Spunem ca masura m satisface o inegalitate Talagrand (sau o inegalitate de transport cu cost patratic) de constanta K, daca pentru orice $\nu \in \mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})$*

$$\mathsf{d}_W(\nu,m) \le \sqrt{\frac{2\,\mathrm{Ent}(\nu|m)}{K}}. \tag{2.1.1}$$

O astfel de inegalitate a fost demonstrata pentru prima data de catre Michel Talagrand in [Ta96], pentru masura canonica Gaussiana pe $\mathbb{R}^n$ si $K=2$.

Asemenea inegalitati se comporta bine la trecerea la produs (a se vedea [Le01] pentru o demonstratie):

Propoziţia 2.1.2. *Fie $P=\mu_1\otimes\mu_2\otimes\ldots\otimes\mu_n$ un produs de masuri de probabilitate, pe borelienele lui $\mathbb{R}^n$. sa prespunem ca pentru fiecare μ_i, $i=1,2,\ldots,n$ are loc o inegalitate de transport (cu cost patratic)*

$$\mathsf{d}_W(\mu_i,\nu_i) \le \sqrt{\frac{2}{K_i}\mathrm{Ent}(\nu_i|\mu_i)}$$

pentru orice probabilitate ν_i pe $\mathbb{R}$. Atunci

$$\mathsf{d}_W(P,R) \le \sqrt{\frac{2}{\min_{1\le i\le n} K_i}\mathrm{Ent}(R|P)}$$

pentru orice masura de probabilitate R pe $\mathbb{R}^n$.

O inegalitate de tip Talagrand pentru masura m implica o inegalitate de concentrare a masurii pentru m (a se vedea de exemplu [Ma97]).

Pentru o multime boreliana $A\subset M$ notam r-vecinatatea (deschisa) a lui A prin $B_r(A) := \{x\in M : \mathsf{d}(x,A)<r\}$, pentru $r>0$. Functia de concentrare a spatiului (M,d,m) este definita ca

$$\alpha_{(M,\mathsf{d},m)}(r) := \sup\left\{1-m(B_r(A)) : A\in\mathscr{B}(M), m(A)\ge\frac{1}{2}\right\}, \quad r>0.$$

Mai multe detalii despre fenomenul concentrarii masurii se pot gasi in [Le01].

Extinderi ale inegalitatilor de tip Talagrand la varietati Riemanniene au fost studiate in [OV00], [BGL01]. Pe spatii metrice compacte cu masura, care sunt si "length spaces", J. Lott si C. Villani au demonstrat in [LV09] ca o inegalitate de tip Talagrand de constanta K are loc in conditiile unei curburi Ricci generalizate minorate de $K > 0$.

2.1.2 Inegalităţi slabe de transport

Aratam in cele ce urmeaza ca pe un spatiu metric cu masura, cu curbura grosiera strict pozitiva, are loc o inegalitate mai slaba decat inegalitatea Talagrand de transport. Aceasta inegalitate estimeaza perturbarea d_W^{+h} a metricii Wasserstein:

Propoziţia 2.1.3. *Presupunem ca* (M, d, m) *este un spatiu metric cu masura, care are*

$$h\text{-}\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$$

pentru niste numere $h > 0$ *si* $K > 0$*. Atunci pentru fiecare* $\nu \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d})$ *avem*

$$\mathsf{d}_W^{+h}(\nu, m) \leq \sqrt{\frac{2\,\mathrm{Ent}(\nu|m)}{K}}. \tag{2.1.2}$$

Demonstraţie. Deoarece am presupus ca m este o masura de probabilitate, pentru orice $\nu \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d})$ functionala entropie este nenegativa:

$$\mathrm{Ent}(\nu|m) \geq -\log m(M) = 0,$$

din inegalitatea lui Jensen. minorantul pentru curbura $h\text{-}\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathsf{d}, m) \geq K$ implica faptul ca pentru perechea de masuri ν si m, si pentru fiecare $t \in [0,1]$ exista un punct t-intermediar h-grosier $\eta_t \in \mathscr{P}_2(M, \mathsf{d})$, astfel incat

$$\mathrm{Ent}(\eta_t|m) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\nu|m) - \frac{K}{2}t(1-t)\,\mathsf{d}_W^{+h}(\nu, m)^2. \tag{2.1.3}$$

Daca $\mathrm{Ent}(\nu|m) < \frac{K}{2}\,\mathsf{d}_W^{+h}(\nu, m)^2$, atunci exista un $\varepsilon > 0$ astfel incat

$$\mathrm{Ent}(\nu|m) + \varepsilon < \frac{K}{2}\,\mathsf{d}_W^{+h}(\nu, m)^2.$$

Aceasta, impreuna cu (2.1.3) va implica

$$\mathrm{Ent}(\eta_t|m) < \frac{K}{2}(1-t)^2 \, \mathsf{d}_W^{+h}(\nu,m)^2 - \varepsilon(1-t)$$

pentru fiecare $t \in [0,1]$. Alegem acum t foarte aproape de 1, astfel incat $0 < 1-t < \varepsilon$ si $K(1-t)^2 \, \mathsf{d}_W^{+h}(\nu,m)^2 < \varepsilon^2$. Aceast alegere conduce la $\mathrm{Ent}(\eta_t|m) < -\varepsilon^2/2 < 0$, in contradictie cu faptul ca functionala entropie este nenegativa. De aceea,

$$\mathrm{Ent}(\nu|m) \geq \frac{K}{2} \, \mathsf{d}_W^{+h}(\nu,m)^2,$$

adica exact ceea ce doream sa demonstram. □

Definiţia 2.1.4. *Daca (M,d) este un spatiu metric si $m \in \mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})$ o masura de probabilitate data, spunem ca m satisface o inegalitate (slaba) h-Talagrand de transport de constanta $K > 0$ daca si numai daca pentru orice $\nu \in \mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})$*

$$\mathsf{d}_W^{+h}(\nu,m) \leq \sqrt{\frac{2 \, \mathrm{Ent}(\nu|m)}{K}}.$$

Rezultatul urmator arata ca, desi inegalitatea h-Talagrand de transport este mai slaba decat inegalitatea Talagrand, este totusi suficient de puternica pentru a produce concentrarea normala a masurii.

Propoziţia 2.1.5. *Fie (M,d) un spatiu metric, iar m o masura pe acest spatiu care sa verifice inegalitatea h-Talagrand de constanta K, pentru niste numere $K > 0$ si $h > 0$. Atunci exista un $r_0 > 0$ astfel incat pentru orice $r \geq r_0$*

$$\alpha_{(M,\mathsf{d},m)}(r) \leq e^{-Kr^2/8}.$$

Demonstraţie. Parcurgem un argument asemanator celui utilizat de K. Marton in [Ma97], unde se demonstra concentrarea masurii in ipoteza unei inegalitati Talagrand de transport pentru metrica Wasserstein de ordin 1. Fie $A, B \in \mathscr{B}(M)$ date, cu $m(A), m(B) > 0$. Consideram probabilitatile conditionate $m_A = m(\cdot|A)$ si $m_B = m(\cdot|B)$. Pentru aceste masuri, inegalitatea h-Talagrand are loc:

$$\mathsf{d}_W^{+h}(m_A,m) \leq \sqrt{\frac{2 \, \mathrm{Ent}(m_A|m)}{K}}, \quad \mathsf{d}_W^{+h}(m_B,m) \leq \sqrt{\frac{2 \, \mathrm{Ent}(m_B|m)}{K}}. \tag{2.1.4}$$

Fie q_A si q_B cuplaje $+h$-optimale ale lui m_A, m si respectiv m_B, m. Conform sectiunii 11.8 din [Du89], exista o masura de probabilitate $\hat{q}$ pe $M \times M \times M$ astfel incat proiectia ei pe primii doi factori sa fie q_A, iar proiectia pe ultimii doi factori sa fie q_B. Atunci avem, succesiv,

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}_W^{+h}(m_A,m) \quad + \quad \mathsf{d}_W^{+h}(m,m_B) &= \left\{\int_{M\times M\times M} \left[(\mathsf{d}(x_1,x_2)-h)_+\right]^2 d\hat{q}(x_1,x_2,x_2)\right\}^{1/2} \\
&+ \left\{\int_{M\times M\times M} \left[(\mathsf{d}(x_2,x_3)-h)_+\right]^2 d\hat{q}(x_1,x_2,x_2)\right\}^{1/2} \\
&\geq \left\{\int_{M\times M\times M} \left[(\mathsf{d}(x_1,x_2)-h)_+ + (\mathsf{d}(x_2,x_3)-h)_+\right]^2 d\hat{q}(x_1,x_2,x_2)\right\}^{1/2} \\
&\geq \left\{\int_{M\times M\times M} \left[(\mathsf{d}(x_1,x_2)+\mathsf{d}(x_2,x_3)-2h)_+\right]^2 d\hat{q}(x_1,x_2,x_2)\right\}^{1/2} \\
&\geq \left\{\int_{M\times M\times M} \left[(\mathsf{d}(x_1,x_3)-2h)_+\right]^2 d\hat{q}(x_1,x_2,x_2)\right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Sa prespunem acum ca $\mathsf{d}(A,B) \geq 2h$. Cum proiectia lui $\hat{q}$ pe primul factor este m_A, iar proiectia pe ultimul factor este m_B, suportul lui $\hat{q}$ trebuie sa fie o submultime a lui $A \times M \times B$, deci

$$\left\{\int_{M\times M\times M} \left[(\mathsf{d}(x_1,x_3)-2h)_+\right]^2 d\hat{q}(x_1,x_2,x_2)\right\}^{1/2} \geq \mathsf{d}(A,B)-2h.$$

Estimarile de mai sus, impreuna cu (2.1.4), implica

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}(A,B)-2h &\leq \sqrt{\frac{2\ \mathrm{Ent}(m_A|m)}{K}} + \sqrt{\frac{2\ \mathrm{Ent}(m_B|m)}{K}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{K}\log\frac{1}{m(A)}} + \sqrt{\frac{2}{K}\log\frac{1}{m(B)}}\ .
\end{aligned}$$

Daca alegem acum $2h \leq r$ si pentru un $A \in \mathscr{B}(M)$ dat inlocuim B cu $\complement B_r(A)$, obtinem

$$r-2h \leq \sqrt{\frac{2}{K}\log\frac{1}{m(A)}} + \sqrt{\frac{2}{K}\log\frac{1}{1-m(B_r(A))}}\ .$$

Deci, pentru $m(A) \geq \frac{1}{2}$

$$r-2h \leq \sqrt{\frac{2}{K}\log 2} + \sqrt{\frac{2}{K}\log\frac{1}{1-m(B_r(A))}}\ .$$

De aceea, pentru orice $r \geq 2\sqrt{\frac{2}{K}\log 2}+4h$, de exemplu, avem

$$\frac{r}{2} \leq \sqrt{\frac{2}{K}\log\frac{1}{1-m(B_r(A))}}\ ,$$

sau echivalent

$$1 - m(B_r(A)) \leq e^{-Kr^2/8},$$

ceea ce incheie demonstratia.

$\square$

Urmatoarele doua rezultate prezinta comportamentul inegalitatilor slabe de transport cu cost patratic la convergenta in metrica $\mathbb{D}$, precum si la tensorizare.

Teorema 2.1.6 (Stabilitatea la convergenta). *Fie (M, d, m) un spatiu metric cu masura compact si normalizat si sa consideram $\{(M_h, \mathsf{d}_h, m_h)\}_{h>0}$ o familie de spatii metrice cu masura normalizate, cu diametre uniform marginite si astfel incat (M_h, d_h, m_h) sa satisfaca o inegalitate slaba h-Talagrand de transport de constanta K_h, cu $K_h \to K$ pentru $h \to 0$. Daca*

$$(M_h, \mathsf{d}_h, m_h) \xrightarrow{\mathbb{D}} (M, \mathsf{d}, m)$$

cand $h \to 0$, atunci (M, d, m) verifica inegalitatea (tare) Talagrand de transport de constanta K.

Teorema 2.1.7 (Stabilitatea la tensorizare). *Fie $\{(M_i, \mathsf{d}_i, m_i)\}_{i=1,\dots,n}$ n spatii metrice cu masura normalizate, care verifica fiecare cate o inegalitate slaba h-Talagrand de transport de constanta K. Atunci spatiul $M = M_1 \times \dots \times M_n$, inzestrat cu metrica*

$$\mathsf{d}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}_i(x_i, y_i)}, \quad x, y \in M$$

si cu masura $m = m_1 \otimes \dots \otimes m_n$, verifica de asemenea o inegalitate slaba h-Talagrand de transport de constanta K.

2.1.3 Integrabilitatea exponenţială a funcţiilor Lipschitz

In lucrarea [BG99] se arata ca o inegalitatea Talagrand de transport implica integrabilitatea exponentiala a functiilor Lipshitz. Demonstram in cele ce urmeaza ca o inegalitate slaba h-Talagrand conduce la aceeasi concluzie.

Teorema 2.1.8. *Presupunem ca (M,d) este un spatiu metric si fie $h>0$ dat. Daca m este o masura de probabilitate (M,d), ce satisface o inegalitate h-Talagrand de transport de constanta $K>0$, atunci toate functiile Lipschitz sunt exponential integrabile. Mai precis, pentru orice functie Lipschitz φ cu $\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}\le 1$ si $\int \varphi\, dm=0$, avem*

$$\forall t>0 \qquad \int_M e^{t\varphi} dm \le e^{\frac{t^2}{2K}+ht}, \tag{2.1.5}$$

sau echivalent, pentru orice functie Lipschitz φ,

$$\forall t>0 \quad \int_M e^{t\varphi} dm \le \exp\left(t\int_M \varphi\, dm\right)\exp\left(\frac{t^2}{2K}\|\varphi\|^2_{\mathrm{Lip}}+ht\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}\right). \tag{2.1.6}$$

Demonstraţie. Demonstratia pe care o prezentam aici o extinde pe cea data in [BG99]. Fie f o densitate de probabilitate cu $f\log f$, integrabila in raport cu m. Inegalitatea h-Talagrand implica

$$\mathsf{d}_W^{+h}(fm,m)\le\sqrt{\frac{2}{K}\int_M f\log f\, dm}\le\frac{t}{2K}+\frac{1}{t}\int_M f\log f\, dm$$

pentru fiecare $t>0$. Consideram acum metrica Wasserstein de ordin 1 a doua masuri de probabilitate μ si ν

$$\mathsf{d}_W^1(\mu,\nu):=\inf\int_{M\times M}\mathsf{d}(x_0,x_1)\, dq(x_0,x_1),$$

unde q parcurge toate cuplajele lui μ si ν. Daca $\widetilde{q}$ este un cuplaj $+h$-optimal al lui fm si m, atunci, din inegalitatea Cauchy-Schwartz, obtinem

$$\begin{aligned}\mathsf{d}_W^{+h}(fm,m) &= \left\{\int_{M\times M}\left[(\mathsf{d}(x_0,x_1)-h)_+\right]^2 d\widetilde{q}(x_0,x_1)\right\}^{1/2}\\ &\ge \int_{M\times M}(\mathsf{d}(x_0,x_1)-h)_+\, d\widetilde{q}(x_0,x_1)\ge \mathsf{d}_W^1(fm,m)-h.\end{aligned}$$

Teorema Kantorovich-Rubinstein ne da urmatoarea formula de dualitate

$$\mathsf{d}_W^1(fm,m)=\sup_{\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}\le 1}\left\{\int_M \varphi f\, dm-\int_M\varphi\, dm\right\}.$$

Daca φ este o functie Lipschitz ce satisface ipotezele teoremei ($\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}\le 1$ si $\int\varphi\, dm=0$), atunci

$$\int_M \varphi f\, dm\le \mathsf{d}_W^{+h}(fm,m)+h\le\frac{t}{2K}+\frac{1}{t}\int_M f\log f\, dm+h,$$

care se poate rescrie ca

$$\int_M \left(t\varphi - \frac{t^2}{2K}\right) f\, dm \le \int_M f \log f\, dm + ht. \tag{2.1.7}$$

Aceasta estimare trebuie sa aiba loc pentru orice densitatea de probabilitate f. De aceea, putem lua

$$f = e^{t\varphi - \frac{t^2}{2K}} \left(\int_M e^{t\varphi - \frac{t^2}{2K}} dm\right)^{-1}$$

in formula (2.1.7) si obtinem

$$\left\{\int_M \left(t\varphi - \frac{t^2}{2K}\right) e^{t\varphi - \frac{t^2}{2K}} dm\right\} \left(\int_M e^{t\varphi - \frac{t^2}{2K}} dm\right)^{-1} \le \int_M e^{t\varphi - \frac{t^2}{2K}} \left(\int_M e^{t\varphi - \frac{t^2}{2K}} dm\right)^{-1}$$

$$\cdot \left\{t\varphi - \frac{t^2}{2K} - \log\left(\int_M e^{t\varphi - \frac{t^2}{2K}} dm\right)\right\} dm + ht.$$

Aceasta conduce la

$$\log\left(\int_M e^{t\varphi - \frac{t^2}{2K}} dm\right) dm \le ht,$$

ce demonstreaza (2.1.5). Estimarea generala (2.1.6) este o consecinta a lui (2.1.5) aplicata functiei $\psi = \frac{1}{\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}}\left[\varphi - \int \varphi\, dm\right]$. □

2.2 Inegalităţi geometrice

Prezentam in aceasta sectiune cateva consecinte geometrice ale conditiei grosiere curbura-dimensiune. Demonstram o inegalitate Brunn-Minkowski generalizata, aplicabila si spatiilor metrice discrete si grafurilor, si care are loc sub o conditie grosiera de tip curbura-dimensiune. Demonstram de asemenea o teorema de tip Bonnet-Myers, care afirma ca un spatiu metric cu masura, care indeplineste o conditie grosiera de tip curbura-dimensiune cu curbura pozitiva, are diametrul marginit. Rezultatele prezentate in aceasta sectiune fac parte din articolul [Bn12b].

2.2.1 Geometria transportului masei pe spaţii h-geodezice

In cazul spatiilor geodezice, pentru fiecare geodezica Γ din spatiul Wasserstein, masa este transportata de-a lungul geodezicelor spatiului subiacent, ce au capetele aflate in suporturile lui

$\Gamma(0)$ si respectiv $\Gamma(1)$ (a se vedea [St06a] Lema 2.11). In cadrul nostru de lucru mai general, pentru un spatiu arbitrar h-geodezic Γ in $\mathscr{P}_2(M,\mathsf{d})$, masa nu se mai transporta in mod necesar de-a lungul h-geodezicelor din M. Totusi, urmatorul rezultat arata ca daca Γ este o h-geodezica tare, atunci masa este transportata "predominant" de-a lungul h'-geodezicelor din M ce unesc puncte din supp $\Gamma(0)$ si supp $\Gamma(1)$, si cu $h' > h$ suficient de mic.

Lema 2.2.1. *Fie (M,d,m) un spatiu metric cu masura si μ_0, μ_1 doua masuri de probabilitate pe acest spatiu; notam $A_i := \mathrm{supp}[\mu_i]$, $i=0,1$. Sa presupunem ca η este un punct t-intermediar h-grosier in sens tare intre μ_0 si μ_1 in $\mathscr{P}_2(M,\mathsf{d},m)$, pentru niste numere $h\geq 0$ si $t\in[0,1]$. Pentru $\lambda\geq 0$, notam*

$$\begin{aligned} A_t^{\lambda} := \{y\in M : \exists(x_0,x_1)\in A_0\times A_1 \quad : \quad & (1-t)\,\mathsf{d}(x_0,y)^2 + t\,\mathsf{d}(y,x_1)^2 \\ & \leq t(1-t)\big(\mathsf{d}(x_0,x_1)^2+\lambda^2\big)\}. \end{aligned}$$

Atunci are loc urmatoarea estimare:

$$\eta(\complement A_t^{\lambda}) \leq h^2/\lambda^2 \text{ pentru orice } \lambda > 0. \tag{2.2.1}$$

In plus, daca $0=\lambda_0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots\leq\lambda_i\leq\ldots$ atunci

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2\cdot\eta(A_t^{\lambda_{i+1}}\setminus A_t^{\lambda_i})\leq h^2$$

sau, echivalent,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\eta(\complement A_t^{\lambda_i})(\lambda_i^2-\lambda_{i-1}^2)\leq h^2.$$

Demonstraţie. Fie q_0 un cuplaj optimal al lui μ_0 si η, si fie q_1 un cuplaj optimal la lui η si μ_1. Se poate construi atunci o masura de probabilitate $\widehat{q}$ on $M\times M\times M$ astfel incat proiectia pe primii doi factori sa fie q_0, iar proiectia pe ultimii doi factori sa fie q_1 (cf. [Du89], sectiunea 11.8). De aceea,

$$\mathsf{d}_W(\mu_0,\eta)^2 = \int_{M^3}\mathsf{d}(x_0,y)^2 d\widehat{q}(x_0,y,x_1),\ \mathsf{d}_W(\eta,\mu_1)^2 = \int_{M^3}\mathsf{d}(y,x_1)^2 d\widehat{q}(x_0,y,x_1).$$

Cum inegalitatea

$$t(1-t)\,\mathsf{d}(x_0,x_1)^2 \leq (1-t)\,\mathsf{d}(x_0,y)^2 + t\,\mathsf{d}(y,x_1)^2$$

are loc intotdeauna, pentru $\lambda > 0$ avem

$$\begin{aligned}
\eta(\complement A_t^{\lambda}) &= \widehat{q}(A_0 \times \complement A_t^{\lambda} \times A_1) \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2} \int_{A_0 \times \complement A_t^{\lambda} \times A_1} \left[(1-t)\, \mathsf{d}(x_0,y)^2 + t\, \mathsf{d}(y,x_1)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. -t(1-t)\, \mathsf{d}(x_0,x_1)^2 \right] d\widehat{q}(x_0,y,x_1) \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2} \int_{M^3} \left[(1-t)\, \mathsf{d}(x_0,y)^2 + t\, \mathsf{d}(y,x_1)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. -t(1-t)\, \mathsf{d}(x_0,x_1)^2 \right] d\widehat{q}(x_0,y,x_1) \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2} \left[(1-t)\, \mathsf{d}_W(\mu_0,\eta)^2 + t\, \mathsf{d}_W(\eta,\mu_1)^2 - t(1-t)\, \mathsf{d}_W(\mu_0,\mu_1)^2 \right] \\
&\leq \frac{h^2}{\lambda^2},
\end{aligned}$$

ceea ce demonstreaza prima parte a lemei.

Consideram acum un sir nedescrescator $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_i \leq \ldots$. Cum

$$M = A_t^0 \dot\cup \left(\dot{\bigcup}_{i=0}^{\infty} \left(A_t^{\lambda_{i+1}} - A_t^{\lambda_i} \right) \right),$$

avem succesiv:

$$\begin{aligned}
& t(1-t)\, \mathsf{d}_W(\mu_0,\mu_1)^2 + h^2 \geq (1-t)\, \mathsf{d}_W(\mu_0,\eta)^2 + t\, \mathsf{d}_W(\eta,\mu_1)^2 = \\
& = \int_{M^3} \left[(1-t)\, \mathsf{d}(x_0,y)^2 + t\, \mathsf{d}(y,x_1)^2 \right] d\widehat{q}(x_0,y,x_1) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \int_{A_0 \times A_t^0 \times A_1} \left[(1-t)\, \mathsf{d}(x_0,y)^2 + t\, \mathsf{d}(y,x_1)^2 \right] d\widehat{q}(x_0,y,x_1) + \\
& + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_0 \times (A_t^{\lambda_{i+1}} - A_t^{\lambda_i}) \times A_1} \left[(1-t)\, \mathsf{d}(x_0,y)^2 + t\, \mathsf{d}(y,x_1)^2 \right] d\widehat{q}(x_0,y,x_1) \geq \\
& \geq t(1-t) \int_{A_0 \times A_t^0 \times A_1} \mathsf{d}(x_0,x_1)^2 d\widehat{q}(x_0,y,x_1) + \\
& + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_0 \times (A_t^{\lambda_{i+1}} - A_t^{\lambda_i}) \times A_1} \left[t(1-t)\, \mathsf{d}(x_0,x_1)^2 + \lambda_i^2 \right] d\widehat{q}(x_0,y,x_1) = \\
& = t(1-t) \int_{M^3} \mathsf{d}(x_0,x_1)^2 d\widehat{q}(x_0,y,x_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \cdot \eta(A_t^{\lambda_{i+1}} \setminus A_t^{\lambda_i})
\end{aligned}$$

Aceasta conduce la $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \cdot \eta(A_t^{\lambda_{i+1}} \setminus A_t^{\lambda_i}) \leq h^2$. $\square$

2.2.2 Inegalitatea Brunn-Minkowski clasică

Inegalitatea Brunn-Minkowski clasica pe $\mathbb{R}^n$ afirma ca pentru orice submultimi marginite masurabile Borel A si B ale lui $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(A+B)^{1/n} \geq \mathrm{vol}_n(A)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(B)^{1/n}, \tag{2.2.2}$$

unde $A+B := \{x+y : x \in A, y \in B\}$ este suma Minkowski a lui A si B si unde $\mathrm{vol}_n(\cdot)$ noteaza elementul de volum in $\mathbb{R}^n$. Inegalitatea (2.2.2) poate fi rescrisa echivalent ca

$$\mathrm{vol}_n\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/n} \geq \frac{1}{2}\mathrm{vol}_n(A)^{1/n} + \frac{1}{2}\mathrm{vol}_n(B)^{1/n},$$

estimand volumul multimii $(A+B)/2$ a mijloacelor perechilor de puncte din A respectiv B, sau mai general ca

$$\mathrm{vol}_n(\theta A + (1-\theta)B)^{1/n} \geq \theta\ \mathrm{vol}_n(A)^{1/n} + (1-\theta)\mathrm{vol}_n(B)^{1/n}$$

pentru orice $\theta \in [0,1]$.

2.2.3 Inegalitatea Brunn-Minkowski si Teorema Bonnet-Myers pe spaţii metrice cu măsură

Avand la dispozitie descrierea h-geodezicelor din spatiul Wasserstein, data de Lema 2.2.1, vom stabili in cele ce urmeaza o inegalitate Brunn-Minkowski grosiera pentru spatii metrice cu masura, ce satisfac o conditie grosiera curbura-dimensiune in sens tare.

Urmatorul rezultat extinde asadar inegalitatea Brunn-Minkowski la cadrul general al spatiilor metrice cu masura ce indeplinesc o conditie h-$\mathsf{CD}^s(K,N)$.

Propoziţia 2.2.2. *Fie (M, d, m) un spatiu metric cu masura de masa finita si care satisface conditia h-$\mathsf{CD}^s(K,N)$ pentru niste numere $h \geq 0$, $K, N \in \mathbb{R}$, $N \geq 1$. Atunci pentru orice multimi masurabile A_0, $A_1 \subset M$, cu $m(A_0)\cdot m(A_1) > 0$, pentry orice $t \in [0,1]$, $N' \geq N$ si orice $\lambda > 0$*

$$m(A_t^\lambda)^{1/N'} + (h^2/\lambda^2)^{1-1/N'} m(\complement A_t^\lambda)^{1/N'} \geq \tau_{K,N'}^{(1-t)}(\Theta_h) m(A_0)^{1/N'} + \tau_{K,N'}^{(t)}(\Theta_h) m(A_1)^{1/N'}, \tag{2.2.3}$$

unde A_t^λ este cel dat in Lema 2.2.1, iar Θ_h este definit prin

$$\Theta_h := \begin{cases} \inf_{x_0\in A_0, a_1\in A_1}(\mathsf{d}(x_0,x_1)-h)_+, & daca\ K\geq 0 \\ \sup_{x_0\in A_0, a_1\in A_1}(\mathsf{d}(x_0,x_1)+h), & daca\ K<0. \end{cases}$$

Corolarul 2.2.3. ('Inegalitatea Brunn-Minkowski generalizată'). *Sa presupunem ca (M,d,m) este un spatiu metric cu masura normalizat, ce satisface h-$\mathsf{CD}^s(K,N)$ pentru niste numere $h\geq 0$, $K,N\in\mathbb{R}$, $N\geq 1$. Atunci pentru orice submultimi masurabile A_0, $A_1\subset M$ cu $m(A_0)\cdot m(A_1)>0$, pentru orice $t\in[0,1]$ si $N'\geq N$, avem*

$$m(A_t^{\sqrt{h}})^{1/N'}+h^{1-1/N'}\geq \tau_{K,N'}^{(1-t)}(\Theta_h)m(A_0)^{1/N'}+\tau_{K,N'}^{(t)}(\Theta_h)m(A_1)^{1/N'}, \tag{2.2.4}$$

cu Θ_h dat mai sus.

In particular, daca $K\geq 0$ atunci

$$m(A_t^{\sqrt{h}})^{1/N'}+h^{1-1/N'}\geq (1-t)\cdot m(A_0)^{1/N'}+t\cdot m(A_1)^{1/N'}. \tag{2.2.5}$$

Demonstraţia Corolarului 2.2.3. Luam $\lambda=\sqrt{h}$ in formula (2.2.3) si folosim faptul ca m este o masura de probabilitate. □

Demonstraţia Propoziţiei 2.2.2. Aplicam comditia h-$\mathsf{CD}^s(K,N)$ masurilor $\nu_0 := \frac{1}{m(A_0)}1_{A_0}m$ si $\nu_1 := \frac{1}{m(A_1)}1_{A_1}m$. Atunci pentru orice $t\in[0,1]$ exista un punct t-intermediar h-grosier $\eta_t\in\mathscr{P}_2(M,\mathsf{d},m)$ in sens tare intre ν_0 si ν_1 cu

$$S_{N'}(\eta_t|m)\leq -\left[\tau_{K,N'}^{(1-t)}(\Theta_h)m(A_0)^{1/N'}+\tau_{K,N'}^{(t)}(\Theta_h)m(A_1)^{1/N'}\right]$$

pentru orice $N'\geq N$. Daca notam cu ρ_t densitatea lui η_t in raport cu m, avem atunci, conform inegalitatii lui Jensen si inegalitatii lui Hölder,

$$\begin{aligned} \tau_{K,N'}^{(1-t)}(\Theta_h)m(A_0)^{1/N'} &+ \tau_{K,N'}^{(t)}(\Theta_h)m(A_1)^{1/N'}\leq \int \rho_t(y)^{1-1/N'}dm(y) \\ &= \int_{A_t^\lambda}\rho_t(y)^{1-1/N'}dm(y)+\int_{\complement A_t^\lambda}\rho_t(y)^{1-1/N'}dm(y) \\ &\leq m(A_t^\lambda)^{1/N'}+\left(\int_{\complement A_t^\lambda}\rho_t(y)dm(y)\right)^{1-1/N'}\left(\int_{\complement A_t^\lambda}dm(y)\right)^{1/N'} \\ &= m(A_t^\lambda)^{1/N'}+\eta(\complement A_t^\lambda)^{1-1/N'}m(\complement A_t^\lambda)^{1/N'} \\ &\leq m(A_t^\lambda)^{1/N'}+(h^2/\lambda^2)^{1-1/N'}m(\complement A_t^\lambda)^{1/N'}, \end{aligned}$$

unde pentru ultima inegalitate am folosit Lema 2.2.1.

□

Observaţia 2.2.4. O alta versiune discreta (mai tare) a inegalitatii Brunn-Minkowski a fost introdusa in [Bo07]. In aceasta lucrare se demonstreaza un rezultat de stabilitate la $\mathbb{D}$-convergenta si un rezultat de stabilitate la discretizari.

Urmatorul rezultat stabileste o extindere a Teoremei Bonnet-Myers clasice, de la varietati Riemanniene la spatii metrice cu masura ce indeplinesc o conditie curbura-dimensiune in sens tare h-$\mathsf{CD}^s(K,N)$ pentru un K pozitiv.

Corolarul 2.2.5. ('Teorema Bonnet-Myers generalizata'). *Pentru orice spatiu metric cu masura normalizat* (M,d,m)*, ce indeplineste conditia grosiera curbura-dimensiune h-*$\mathsf{CD}^s(K,N)$ *pentru niste numere reale* $h>0$*,* $K>0$ *si* $N\geq 1$*, suportul masurii m are diametrul*

$$L \leq \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi + h.$$

In particular, pentru $K>0$ *si* $N=1$*, multimea* $\mathrm{supp}[m]$ *consta intr-o bila de raza h.*

Demonstraţie. Sa presupunem ca x_0 si x_1 sunt doua puncte $\mathrm{supp}[m]$ cu $\mathsf{d}(x_0,x_1)\geq\sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi+h+4\varepsilon$ si $m(B_\varepsilon(x_i))>0$ for $i=0,1$. Notam $A_i:=B_\varepsilon(x_i)$, $i=0,1$. Putem aplica atunci Corolarul 2.2.3 pentru multimile A_0 si A_1 si, de exemplu, pentru $t=1/2$. Conform alegerii facute de noi pentru x_0 si x_1, avem

$$\Theta_h = \inf_{x_0\in A_0, a_1\in A_1}(\mathsf{d}(x_0,x_1)-h)_+ \geq \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi + 2\varepsilon$$

si de aceea $\tau^{1/2}_{K,N'}(\Theta_h)=+\infty$, ceea ce este in contradictie cu inegalitatea 2.2.4 in ipoteza noastra ca m este o masura de probabilitate. □

Urmatoarea teorema, de tip Bonnet-Myers, vine in completarea Propozitiei 1.2.11 (i):

Corolarul 2.2.6. *Sa presupunem ca* (M,d,m) *este un spatiu metric cu masura ce satisface conditia h-*$\mathsf{CD}(K,N)$ *pentru niste numere* $h\geq 0$*,* $K,N\in\mathbb{R}$*. Atunci* (M,d,m) *satisface si conditia* h'-$\mathsf{CD}(K',N')$*, pentru orice* $h'\geq h$*,* $K'\leq K$ *si* $N'\geq N$*.*

Demonstraţie. Singurul caz care nu a fost inclus in Propozitia 1.2.11 a fost cel pentru $K > 0$, deoarece in general $\tau_{K,N}^{(t)}(\cdot)$ nu este monoton crescator. Acum, cand stim ca $\sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi + h$ majoreaza diametrul lui M, evident ca $(\,\mathsf{d}(x_0,x_1) - h)_+$ se afla in intervalul $\left[0, \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi\right]$, unde $\tau_{K,N}^{(t)}(\cdot)$ este monoton crescator. $\square$

Capitolul 3

Probleme de transport pe reţele de trafic

Problema de transport, reprezintă un factor cheie în studierea şi optimizarea a numeroase procese din sfera economică, cu aplicaţii dintre cele mai diverse. Plecând de la o problemă formulată de Monge în anul 1781, problema de transport este reprezentativă pentru o întreagă clasă de probleme liniare ce apar în diverse ramuri ale economiei. Teoria transportului optimal are o gamă largă de aplicaţii în econometrie, economie urbană şi "nonlinear pricing".

În acest capitolul investigăm o problema de optimizare pentru reţelele de trafic. Modelăm matematic o reţea de transport, modelul fiind aplicabil, de exemplu, în cazul unui oraş, sau a unei regiuni geografice înzestrate cu o reţea de transport în comun. La fel de bine, ne putem gândi la o reţea de furnizare a apei sau a gazului natural, sau la o reţea de comunicaţii. Modelăm o zonă geografică printr-o submulţime mărginită M a spaţiului tridimensional, mai general ca pe o submulţime mărginită a lui $\mathbb{R}^N$, cu $N \geq 2$. Privim o reţea de transport ca pe un graf finit si conex scufundat în multimea M. Formulăm o problemă de transport care înglobeaza trei tipuri de costuri: costul transportului "cu mijloce proprii", costul transportului pe reţelele de transport în comun - altfel spus "preţul biletului" prevăzut de companiile de transport - , ca şi costurile de mentenanţa a reţelelor. In cele ce urmeaza ne punem problema de a gasi cea mai potrivită reţea de transport pentru a transporta populaţia de la "domicilii" la "locurile de muncă", de exemplu. Formulăm astfel o problemă de optimizare şi demonstrăm existenţa unei soluţii optimale.

3.1 Notaţii şi noţiuni preliminare

In aceasta sectiune realizam un scurt istoric al problemei de transport, prezentand in linii mari problema clasica. Introducem si notatiile si notiunile de baza necesare formularii problemei de transport pe retele de trafic.

3.1.1 Un scurt istoric. Problema clasică

In 1781, Gaspard Monge a publicat una dintre celebrele sale lucrari, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* [M1781] (unde "déblai" reprezinta cantitatea de material care este extrasa din pamant, de pilda, pe cand "remblai" constituie materialul utilizat in ridicarea unei constructii noi). Problema pe care a considerat-o Monge este urmatoarea: sa presupunem ca avem o anumita cantitate de pietris/nisip/etc., ce trebuie extrasa din pamant din mai multe locatii si transportata in diverse locuri, unde este folosita in constructii. Presupunem cunoscute atat locurile de unde se extrage materialul, cat si a celor catre care acest material trebuie transportat. Este necesar sa se determine modul in care sa se faca transportul: unde anume trebuie transportat materialul extras dintr-un anumit loc? Raspunsul trebuie bine gandit, deoarece transportul este costisitor si se doreste sa se minimizeze costul total. Monge a presupus costul de transport al unei unitati de masa pe o anumita distanta ca fiind dat de produsul dintre masa si distanta.

La fel de bine putem exprima problema in modul urmator: sa prespunem ca avem un numar mare de brutarii, care produc paine, ce trebuie transportata zilnic catre niste puncte de desfacere. Cantitatea de paine produsa este cunoscuta si egala cu cea de paine distribuita (exista o "densitate de productie", ca si o "densitate de consum"). In mod natural, consideram ca distanta dintre doua puncte este lungimea celui mai scurt drum dintre acele puncte. Problema este de a determina in practica unde trebuie sa mearga fiecare "unitate de paine", astfel incat sa se minimizeze costul total de transport. Problema lui Monge este deci de a determina un cuplaj optimal; mai precis, Monge cauta un cuplaj optimal deterministic, adica un cuplaj in care o "unitate de paine" sa nu fie transportata in locatii diferite" (nu se admite splitarea masei).

Monge a studiat la vremea sa problema in trei dimensiuni, pentru o distributie continua a masei. El a facut o observatie extrem de importanta din punctul de vedere al "geometriei" transportului optimal: transportul trebuie sa urmeze linii drepte, ortogonale pe o familie de suprafete. Aceasta observatie l-a condus la studiul liniilor de curbura, un concept important in sine in domeniul geometriei suprafetelor. Ideile sale au fost dezvoltate mai tarziu de Charles Dupin si apoi de Paul Appell, dar in aceasta directie nu mai sunt de actualitate in ziua de azi.

Mult mai tarziu, problema lui Monge a fost redescoperita de matematicianul rus Leonid Vitaliyevich Kantorovich. Acesta a lucrat in diverse ramuri ale matematicii, cu o predispozitie deosebita pentru aplicatii in economie, iar mai tarziu in informatica teoretica. In 1938, un laborator l-a consultat intr-o anumita problema de optimizare. Kantorovich a observat ca acea problema de optimizare este reprezentativa pentru o intreaga clasa de probleme liniare ce apar in diverse ramuri ale economiei. Motivat de aceste observatii, el a dezvoltat instrumente de programare liniara, ce ulterior au devenit esentiale in economie. Desi incepute in anii '40, cercetarile sale au fost incununate de succes mult mai tarziu, din cauza strictetii autoritatilor sovietice in divulgarea cercetarilor economice. Asa se face ca abia in 1975 Kantorovich a primit Premiul Nobel pentru Economie, impreuna cu Tjalling Koopmans, Şpentru contributia lor la teoria alocarii optimale a resurselor".

In cazul problemei de cuplaj optimal, Kantorovich a enuntat si demonstrat o teorema de dualitate, folosind mijloace de analiza functionala. Tot el a introdus o notiune de distanta, extrem de folositoare si convenabila, intre masuri de probabilitate: distanta dintre doua masuri este costul optimal de transport al uneia dintre masuri in cealalata, functia cost fiind aleasa functia distanta pe spatiul subiacent. Aceasta metrica pe spatiul probabilitatilor este numita astazi distanta Kantorovich-Rubinstein.

Problema de transport clasica este adesea numita astazi problema Monge-Kantorovich, iar in ultima jumatate a secolului XX tehnicile de transport optimal si diverse variante ale metricii Kantorovich-Rubinstein – astazi numite si metrici Wasserstein – au fost folosite de statisticieni, probabilisti, economisti, meteorologi, etc. Numele "metrici Wasserstein/Vasershtein" a fost introdus de catre R.L. Dobrushin in 1970, dupa ce matematicianul rus Leonid Nasonovich Vasershtein a introdus, intr-un articol de teoria informatiei din 1969 (vezi [Wa69]), o familie de metrici inrudite cu distanta Kantorovich-Rubinstein.

In limbaj matematic, problema lui Monge se pune astfel: Fiind dat un spatiu metric (M, d) si doua masuri μ si ν pe borelienele lui M, cu aceeasi masa totala, sa se determine printre toate aplicatiile de transport $T : M \to M$ masurabile cu $T_*\mu = \nu$, pe acelea care minimizeaza costul de transport

$$\int_M c(x, T(x))d\mu(x),$$

unde $c : M \times M \to \mathbb{R}_+$ este o functie inferior semicontinua data (in problema clasica a lui Monge $c = \mathsf{d}$). Existenta aplicatiilor de transport a fost investigata in numeroase lucrari (ca de exemplu [Am03], [AP03], [CFM02], [EG99], [Pr03]). In multe situatii, de exemplu atunci cand masura μ are parti singulare, aplicatiile de transport pot sa nu existe, si atunci problema trebuie considerata in versiunea relaxata, liniarizata, a lui Kantorovich, care cauta plane optimale de transport, sau cuplaje optimale, π ale lui μ si ν, ce minimizeaza costul de transport

$$\int_{M\times M} c(x, y)d\pi(x, y),$$

dintre toate cuplajele lui μ si ν.

3.1.2 Preliminarii

Consideram o submultime convexa si marginita M a lui $\mathbb{R}^N$, pentru $N \geq 2$, inzestrata cu metrica euclidiana d. Consideram, ca in [BPS09], distanta dintre doua drumuri Lipschitziene $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to M$ din M

$$\tilde{\mathsf{d}}(\gamma_1, \gamma_2) = \inf_{\varphi} \max_{t\in[0,1]} |\gamma_1(t) - \gamma_2(\varphi(t))|, \tag{3.1.1}$$

unde infimumul este luat dupa toate functiile $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ crescatoare si bijective, iar $|\cdot|$ este norma euclidiana. Definim atunci Γ ca multimea tuturor claselor de echivalenta de drumuri Lipschitziene din M, parametrizate peste $[0, 1]$, unde doua drumuri γ_1 si γ_2 se numesc echivalente daca $\tilde{\mathsf{d}}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$. Atunci, evident, Γ este un spatiu metric echipat cu distanta $\tilde{\mathsf{d}}$. Exista exemple care arata ca infimumul din (3.1.1) poate sa nu fie atins. Remarcam ca daca $\gamma_n \xrightarrow{\tilde{\mathsf{d}}} \gamma$

si daca notam cu $\mathscr{H}^1$ masura Hausdorff 1-dimensionala, atunci

$$\mathscr{H}^1(\gamma([0,1])) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n([0,1])).$$

Reamintim ca, pentru un spatiu metric (X,d), masura Hausdorff 1-dimensionala a unei submultimi boreliene $B \subseteq X$ se defineste ca

$$\mathscr{H}^1(B) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathscr{H}^{1,\delta}(B),$$

unde

$$\mathscr{H}^{1,\delta}(B) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{diam} B_n : \mathrm{diam} B_n < \delta, B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right\}$$

Pentru doua drumuri date γ_1 si γ_2 cu $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, compozitia $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ este definita de formula:

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{pentru } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{pentru } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Fie A si B doua functii monoton crescatoare de la $\mathbb{R}_+$ la $\mathbb{R}_+$ cu $A(0) = B(0) = 0$, A fiind continua, iar B inferior semicontinua. Interpretam $A(s)$ ca fiind costul de transport pe o distanta s cu mijloace proprii, care inglobeaza costul combustibilului, al taxelor de autostrada, consumul de timp, oboseala, mersul pe jos daca e cazul, si asa mai departe. Interpretam $B(s)$ ca fiind costul de transport pe distanta s folosind transportul in comun ("pretul biletului"). Ipotezele de monotonie impuse functiilor A si B sunt naturale in acest context, la fel continuitatea lui A. Nu avem motive sa cerem ca B sa fie si ea continua, in realitatea fiind vorba fie de un pret fixat pe calatorie, indiferent de lungimea drumului (ca la metrou de exemplu), fie de o functie constanta pe portiuni.

Pentru o retea de transport urbana $G \subset M$, vizualizata ca un graf metric finit, costul total de transport pe un drum $\gamma \in \Gamma$ este dat de

$$C_G(\gamma) = A(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \setminus G)) + B(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \cap G)) \tag{3.1.2}$$

Definim acum o "distanta" pe M, ce depinde de G si este data de costul cel mai mic de transport al drumurilor ce unesc doua puncte:

$$D_G(x,y) = \inf\{C_G(\gamma) : \gamma \in \Gamma, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} \tag{3.1.3}$$

Exista exemple care arata ca infimumul in aceasta definite nu este neaparat atins. Mai mult, trebuie spus ca functia D_G nu este intotdeauna o metrica. De exemplu, daca $A(s) = B(s) = s^2$, atunci inegalitatea triunghiului nu are loc pentru D_G. Totusi, atunci cand A si B sunt functii subaditive, adica

$$A(s_1 + s_2) \leq A(s_1) + A(s_2), B(s_1 + s_2) \leq B(s_1) + B(s_2)$$

pentru orice $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+$, si daca A si B sunt si strict pozitive pe $\mathbb{R}^+$, atunci D_G este chiar o metrica. Printr-un abuz de limbaj, vom numi D_G distanta.

Propozitia 1.3 din [BPS09] afirma ca:

Propoziţia 3.1.1. *Functia $D_G : M \times M \to \mathbb{R}^+$ este continua.*

Se pune desigur problema de a gasi cea mai potrivita retea de transport G pentru a transporta populatia de la "domicilii" la "locurile de munca", de pilda. Pentru a formula problema, sa consideram doua masuri de probabilitate μ si ν pe M; μ da o distributie a domiciliilor, pe cand ν da o distributie a locurilor de munca. Daca π este un cuplaj al lui μ si ν, atunci putem gandi $\pi(x, y)$ ca numarul de persoane care calatoresc de la x la y; $\pi(U \times V)$ reprezinta numarul de persoane care locuiesc in $U \subseteq M$ si lucreaza in zona $V \subseteq M$. Fiecarui cuplaj π ii putem asocia costul de transport dat de formula

$$I_G(\pi) = \int_{M \times M} D_G(x, y) d\pi(x, y) \tag{3.1.4}$$

Problema Monge-Kantorovich de transport optimal asociata acestui cost este de a gasi un cuplaj, numit optimal, care minimizeaza pe $I_G(\pi)$.

Trebuie observat ca un cuplaj π nu da absolut nicio informatie precisa asupra modului in care este transportata masa, adica nu precizeaza care sunt traiectoriile alese pentru transport. Pentru a putea recupera o asfel de informatie, folosim urmatoarea definitie, preluata din [Pr05]:

Definiţia 3.1.2. *Se numeste masura de traseu ("transport path measure") o masura Φ pe Γ astfel incat $(p_0)_* \Phi = \mu$ si $(p_1)_* \Phi = \nu$, unde pentru $t \in \{0, 1\}$ am notat $p_t : \Gamma \to M$, $p_t(\gamma) = \gamma(t)$.*

In linii mari, daca Φ este o masura de traseu, atunci $\Phi(\gamma)$ reprezinta cantitatea de masa care trebuie mutata de-a lungul drumului γ. Mai precis, $\Phi(\Upsilon)$ este masa care urmeaza drumurile din $\Upsilon \subseteq \Gamma$.

Definim acum costul total de transport asociat unei masuri de traseu:

$$T_G(\Phi) = \int_\Gamma C_G(\gamma) d\Phi(\gamma) \tag{3.1.5}$$

Notam acum, pentru o retea urbana G,

$$\mathscr{K}(G) = \inf\{T_G(\Phi) : \Phi \text{ masura de traseu}\}$$

Se pune problema de a determina cea mai avantajoasa retea, adica reteaua de transport cu cost minim, in sensul celor ce urmeaza. Consideram, in acest scop, si o functie $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, astfel incat sa interpretam $L(l)$ ca fiind costul de mentenanta al unei retele de transport G de lungime $\mathscr{H}^1(G) = l$. Presupunem ca functia L indeplineste urmatoarele conditii, naturale in contextul nostru:

(i) L monoton crescatoare si inferior semicontinua;

(ii) $L(0) = 0$;

(iii) $\lim_{l\to\infty} L(l) = \infty$.

Costul total de folosire a retelei G il definim ca

$$\mathscr{T}(G) = \mathscr{K}(G) + L(\mathscr{H}^1(G)) \tag{3.1.6}$$

3.2 Reţele optimale de transport

Demonstram in aceasta sectiune un rezultat de existenta a unei retele de trafic cu cost minim, pentru o functie cost generala, restrangandu-ne insa doar la clasa retelelor conexe. Acest rezultat face parte dintr-un articol al autoarei, aflat inca in lucru.

3.2.1 Formularea problemei de optimizare

In cele ce urmeaza, vom considera numai retele G conexe. Pe de alta parte, insa, lucram cu o functie cost mai generala decat in problema prezentata in sectiunea precedenta. Mai precis, in locul functiilor A, B si L, vom utiliza o functie $f : (\mathbb{R}_+)^3 \to [0, +\infty]$, cu urmatoarele proprietati:

(i) f inferior semicontinua;

(ii) f continua in prima variabila;

(iii) f monoton crescatoare in fiecare dintre cele trei variabile, adica $f(s,t,u) \le f(s',t',u')$ pentru orice $s \le s'$, $t \le t'$, $u \le u'$;

(iv) Pentru orice $s,t \in \mathbb{R}_+$ fixate, $\lim_{u\to\infty} f(s,t,u) = \infty$.

Pentru cazul particular cu variabile separate $f(s,t,u) = A(s) + B(t) + L(u)$ reobtinem problema din paragraful 3.1.2.

Redefinim in acest context "distanta" D_G de pe M, introdusa in (3.1.3):

$$D_G(x,y) = \inf\{f(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \setminus G), \mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \cap G), \mathscr{H}^1(G)) : \gamma \in \Gamma, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} \tag{3.2.1}$$

Ne ocupam in continuare cu demonstrarea urmatorului rezultat:

Teorema 3.2.1. *Fie μ si ν doua masuri de probabilitate pe M. Atunci, cu notatiile precedente, problema de optimizare*

$$\min\{\mathscr{K}(G) : G \subseteq M, G \text{ conexa}\}$$

admite o solutie G_{opt}.

3.2.2 Demonstrarea existenţei soluţiei pentru problema de optimizare

Consideram pe multimea $\{G \subseteq M : G \text{ conexa}\}$ topologia Hausdorff data de distanta

$$\mathscr{D}_H(G_1, G_2) = \sup\{\mathsf{d}(x_1, G_2) + \mathsf{d}(x_2, G_1) : x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\},$$

unde $\mathsf{d}(x,G)$ reprezinta distanta minima de la punctul x la punctele multimii inchise G, in metrica euclidiana. Se stie faptul ca topologia Hausdorff este compacta si ca limita Hausdorff a unui sir de multimi conexe este tot o multime conexa. Un rezultat al lui S. Golab afirma, in plus, urmatorul lucru:

Teorema 3.2.2 (Teorema lui Golab - vezi, de exemplu, [Fa85])**.** *Fie X un spatiu metric si $\{G_n\}_n$ un sir de submultimi conexe si compacte ale lui X, care converge Hausdorff la o multime compacta si conexa G. Atunci*

$$\mathscr{H}^1(G) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathscr{H}^1(G_n)$$

Presupunerea ca multimile G_n sunt conexe este esentiala, si nu poate fi evitata, in enuntul Teoremei lui Golab.

In vederea demonstrarii Teoremei 3.2.1, utilizam un rezultat mai general decat Teorema lui Golab, demonstrat de catre Dal Maso si Toader in [DT02]:

Teorema 3.2.3. *Fie X un spatiu metric, iar $\{G_n\}_n$ si $\{K_n\}_n$ doua siruri de submultimi compacte, astfel incat $G_n \longrightarrow G$ si $K_n \longrightarrow K$ cu G si K compacte. Presupunem, de asemenea, ca G_n conexa pentru orice n. Atunci:*

$$\mathscr{H}^1(G \setminus K) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathscr{H}^1(G_n \setminus K_n)$$

Nu prezentam aici demonstratia detaliata a acestei teoreme. In linii mari, ea se bazeaza pe doua rezultate de rectificabilitate, a caror demonstratie se poate gasi in [AT00], si pe care le reunim in urmatoarea:

Teorema 3.2.4. *(i) Fie X un spatiu metric, iar Y o submultime conexa si inchisa cu $\mathscr{H}^1(Y) < +\infty$. Atunci Y este compacta si conexa prin curbe rectificabile injective.*

(ii) Fie Y o submultime conexa si inchisa intr-un spatiu metric X, cu $\mathscr{H}^1(Y) < +\infty$. Atunci exista un sir de curbe Lipschitz $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ din Y astfel incat

$$\mathscr{H}^1\left(Y \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n([0,1])\right) = 0.$$

Notama acum cu $\mathscr{C}^{x,y}$ multimea submultimilor inchise si conexe ale lui $\overline{M}$, care contin pe x si y, iar cu $\mathscr{C}$ multimea submultimilor inchise si conexe ale lui $\overline{M}$. Daca $G \in \mathscr{C}$, consideram si $\overline{C}_G^{x,y}$ infasuratoarea inferior semicontinua a lui C_G in raport cu convergenta Hausdorff de pe $\mathscr{C}^{x,y}$. Mai exact, pentru orice $\gamma \in \mathscr{C}^{x,y}$, definim

$$\overline{C}_G^{x,y}(\gamma) = \begin{cases} \min\{\liminf_n C_G(\gamma_n) : \gamma_n \to \gamma, \gamma_n \in \mathscr{C}^{x,y}\} & \text{daca } \gamma \in \mathscr{C}^{x,y} \\ +\infty & \text{daca } \gamma \notin \mathscr{C}^{x,y} \end{cases}$$

De asemenea, definim si infasuratoarea inferior semincontinua $\overline{C}_G$ a lui C_G ca

$$\overline{C}_G(\gamma) = \min\{\liminf_n C_G(\gamma_n) : \gamma_n \to \gamma, \gamma_n \in \mathscr{C}\}.$$

Ca o consecinta a rezultatelor de rectificabilitate din Teorema 3.2.4, avem:

Lema 3.2.5. *Fie γ si G doua submultimi inchise si conexe ale lui $\overline{M}$, cu $\mathscr{H}^1(G) < +\infty$. Atunci pentru orice $t \in [0, \mathscr{H}^1(\gamma \cap G)]$ se poate gasi un sir $\{\gamma_n\}_n$ in $\mathscr{C}$ astfel incat*

(i) $\gamma_n \to \gamma$;

(ii) $\lim_n \mathscr{H}^1(\gamma_n) = \mathscr{H}^1(\gamma)$;

(iii) $\mathscr{H}^1(\gamma_n \cap G) \nearrow \mathscr{H}^1(\gamma \cap G) - t$.

In plus, daca $x, y \in \gamma$, atunci sirul $\{\gamma_n\}_n$ poate fi ales in $\mathscr{C}^{x,y}$.

Introducem urmatoarea notatie:

$$\widehat{f}(s,t,u) := \inf_{0 \le \varepsilon \le t} f(s+\varepsilon, t-\varepsilon, u)$$

Demonstram acum ca:

Propoziţia 3.2.6. *Pentru orice $\gamma \in \mathscr{C}^{x,y}$, avem $\overline{C}_G^{x,y} = \widehat{f}(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \setminus G), \mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \cap G), \mathscr{H}^1(G))$. Mai mult, daca $\gamma \in \mathscr{C}^{x,y}$, atunci $\overline{C}_G^{x,y}(\gamma) = \overline{C}_G(\gamma)$.*

Demonstraţie. Consideram γ in $\mathscr{C}^{x,y}$ si aratam, pentru inceput, ca

$$\overline{C}_G^{x,y} \ge \widehat{f}(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \setminus G), \mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \cap G), \mathscr{H}^1(G)).$$

Ar fi suficient sa demonstram ca pentru orice sir $\{\gamma_n\}_n$ din $\mathscr{C}^{x,y}$, ce converge la γ in raport cu metrica Hausdorff, exista $t \in [0, \mathscr{H}^1(\gamma \cap G)$ astfel incat

$$f(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \setminus G) + t, \mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \cap G) - t, \mathscr{H}^1(G)) \le \liminf_{n \to +\infty} C_G(\gamma_n).$$

Extragand eventual un subsir, putem presupune ca au loc urmatoarele egalitati:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \to +\infty} C_G(\gamma_n) &= \lim_{n \to +\infty} C_G(\gamma_n), \\
\liminf_{n \to +\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n) &= \lim_{n \to +\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n), \\
\liminf_{n \to +\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n \setminus G) &= \lim_{n \to +\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n \setminus G).
\end{aligned}$$

Folosind Teorema lui Golab 3.2.2 si generalizata sa, Teorema 3.2.3, stim ca

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^1(\gamma) &\leq \lim_{n\to+\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n),\\ \mathscr{H}^1(\gamma\setminus G) &\leq \lim_{n\to+\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n\setminus G).\end{aligned}$$

Facand acum alegerea $t=\lim_{n\to+\infty}\mathscr{H}^1(\gamma_n\setminus G)-\mathscr{H}^1(\gamma\setminus G)$, avem $\mathscr{H}^1(\gamma\setminus G)+t=\lim_{n\to+\infty}\mathscr{H}^1(\gamma_n\setminus G)$ si

$$\mathscr{H}^1(\gamma_N)=\mathscr{H}^1(\gamma_N\setminus G)+\mathscr{H}^1(\gamma_n\cap G)=[\mathscr{H}^1(\gamma_n\setminus G)-t]+[\mathscr{H}^1(\gamma_n\cap G)+t].$$

Trecand la limita pentru $n\to+\infty$, obtinem

$$\mathscr{H}^1(\gamma)\leq \lim_{n\to+\infty}\mathscr{H}^1(\gamma_n)=[\mathscr{H}^1(\gamma\setminus G)-t]+\lim_{n\to+\infty}\mathscr{H}^1(\gamma_n\cap G),$$

astfel incat

$$\mathscr{H}^1(\gamma\cap G)-t\leq \lim_{n\to+\infty}\mathscr{H}^1(\gamma_n\cap G).$$

Din proprietatile de inferior semicontinuitate si monotonie ale lui f in primele doua variabile, rezulta ca

$$f(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1])\setminus G)+t,\mathscr{H}^1(\gamma([0,1])\cap G)-t,\mathscr{H}^1(G))\leq$$

$$\leq \liminf_{n\to+\infty} f(\mathscr{H}^1(\gamma_n([0,1])\setminus G),\mathscr{H}^1(\gamma_n([0,1])\cap G),\mathscr{H}^1(G)).$$

Aratam in cele ce urmeaza ca are loc si inegalitatea opusa:

$$\overline{C}_G^{x,y}\leq \widehat{f}(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1])\setminus G),\mathscr{H}^1(\gamma([0,1])\cap G),\mathscr{H}^1(G)).$$

Asa cum am procedat si mai sus, este suficient sa aratam ca pentru orice $t\in[0,\mathscr{H}^1(\gamma\cap G)]$ putem gasi un sir $\{\gamma_n\}_n$ in $\mathscr{C}^{x,y}$, care converge la γ, astfel incat

$$\liminf_{n\to+\infty} C_G(\gamma_n)\leq f(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1])\setminus G)+t,\mathscr{H}^1(\gamma([0,1])\cap G)-t,\mathscr{H}^1(G)).$$

Pentru t arbitrar fixat, fie $\{\gamma_n\}_n$ dat de Lema 3.2.5. Obtinem atunci

$$\lim_{n\to+\infty}\mathscr{H}^1(\gamma_n\setminus G)=\mathscr{H}^1(\gamma)-\mathscr{H}^1(\gamma\cap G)+t=\mathscr{H}^1(\gamma\setminus G)+t.$$

Deoarece $\mathscr{H}^1(\gamma_n \cap G) \leq \mathscr{H}^1(\gamma \cap G) - t$, avem

$$f(\mathscr{H}^1(\gamma_n([0,1]) \setminus G), \mathscr{H}^1(\gamma_n([0,1]) \cap G), \mathscr{H}^1(G)) \leq$$

$$\leq f(\mathscr{H}^1(\gamma_n([0,1]) \setminus G), \mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \cap G) - t, \mathscr{H}^1(G)).$$

Folosind acum continuitatea lui f in prima variabila, deducem ca

$$\liminf_{n \to +\infty} f(\mathscr{H}^1(\gamma_n([0,1]) \setminus G), \mathscr{H}^1(\gamma_n([0,1]) \cap G), \mathscr{H}^1(G)) \leq$$

$$\leq f(\mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \setminus G) + t, \mathscr{H}^1(\gamma([0,1]) \cap G) - t, \mathscr{H}^1(G)),$$

ceea ce implica inegalitatea dorita. Demonstratia celei de-a doua afirmatii din enunt se face analog.

$\square$

Propoziţia 3.2.7. *Pentru orice $x, y \in M$ avem $D_G(x,y) = \inf\{\overline{C}_G(\gamma) : \gamma \in \mathscr{C}^{x,y}\}$.*

Demonstraţie. Se cunoaste faptul ca infimumul unei functii este egal cu infimumul infasuratoarei sale inferior semicontinue. Astfel,

$$D_G(x,y) = \inf\{\overline{C}_G^{x,y}(\gamma) : \gamma \in \mathscr{C}^{x,y}\}.$$

Din Propozitia 3.2.6, rezulta atunci ca

$$\inf\{\overline{C}_G^{x,y}(\gamma) : \gamma \in \mathscr{C}^{x,y}\} = \inf\{\overline{C}_G(\gamma) : \gamma \in \mathscr{C}^{x,y}\},$$

ceea ce incheie demonstratia acestei Propozitii. $\square$

In acest context, este mai convenabil sa "reformulam" functia f, astfel incat sa lucram cu o functie ale carei trei variabile sa reprezinte lungimea $\mathscr{H}^1(\gamma \setminus G)$ parcursa "cu mijloace proprii", lungimea drumului $\mathscr{H}^1(\gamma)$ si lungimea retelei $\mathscr{H}^1(G)$:

$$g(a,b,c) := \widehat{f}(a, b-a, c).$$

Functia nou-introdusa g satisface

$$g(\mathscr{H}^1(y \setminus G), \mathscr{H}^1(\gamma), \mathscr{H}^1(G)) = \widehat{f}(\mathscr{H}^1(y \setminus G), \mathscr{H}^1(y \cap G), \mathscr{H}^1(G)).$$

Propozitia urmatoare da cateva proprietati ale functiei g:

Propoziţia 3.2.8. *(i) g este monoton crescatoare in fiecare variabila;*

(ii) g este inferior semicontinua.

Demonstraţie. (i) Monotonia in cea de a treia variabila este evidenta. Monotonia in prima variabila rezulta din egalitatea

$$g(a,b,c) = \inf_{a \leq s \leq b} f(s, b-s, c), \tag{3.2.2}$$

deoarece membrul drept al egalitatii este o functie monoton crescatoare in a. Monotonia in cea de a doua variabila se argumenteaza asemanator, folosind egalitatea (3.2.2) si urmarind multimile pe care este luat infimumul.

(ii) Pentru orice siruri $a_n \to a$, $b_n \to b$ si $c_n \to c$, dorim sa aratam ca

$$g(a,b,c) \leq \liminf_{n \to +\infty} g(a_n, b_n, c_n).$$

Fie ε un numar real pozitiv arbitrar fixat si n natural oarecare. Sa consideram s_n un numar real astfel incat

$$a_n \leq s_n \leq b_n \text{ si } f(s_n, b_n - s_n, c_n) \leq g(a_n, b_n, c_n) + \varepsilon$$

Extragand eventual un subsir, putem presupune ca

$$\liminf_{n \to +\infty} g(a_n, b_n, c_n) = \lim_{n \to +\infty} g(a_n, b_n, c_n).$$

Putem face si presupunerea ca $s_n \to s$, cu $a \leq s \leq b$. Din proprietatea de inferior semicontinuitate a lui f, deducem

$$g(a,b,c) \leq f(s, b-s, c) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(s_n, b_n - s_n, c_n) \leq \liminf_{n \to +\infty} g(a_n, b_n, c_n) + \varepsilon$$

Lasand acum pe ε sa tinda la 0, obtinem inegalitatea dorita. □

In vederea demonstrarii Teoremei 3.2.1, enuntam si demonstram urmatorul rezultat:

Propoziţia 3.2.9. *Fie $\{x_n\}_n$ si $\{y_n\}_n$ doua siruri din M, astfel incat $x_n \to x$ si $y_n \to y$. Daca $\{G_n\}_n$ este un sir de submultimi conexe si inchise ale lui M astfel incat $G_n \to G$, atunci*

$$D_G(x,y) \leq \liminf_{n \to +\infty} D_{G_n}(x_n, y_n). \tag{3.2.3}$$

Demonstrație. Extragand eventual un subsir, putem presupune ca

$$\liminf_{n\to+\infty} D_{G_n}(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty} D_{G_n}(x_n,y_n).$$

Sa ne dam si un $\varepsilon > 0$; alegem un sir $\{\gamma_n\}_n$ astfel incat $\gamma_n \in \mathscr{C}^{x_n,y_n}$ si

$$g(\mathscr{H}^1(\gamma_n \setminus G_n), \mathscr{H}^1(\gamma_n), \mathscr{H}^1(G_n)) \leq D_{G_n}(x_n,y_n) + \varepsilon.$$

Recurgand eventual la un subsir, putem face presupunerea ca $\gamma_n \to \gamma$, caci este usor de vazut ca $x_n \to x$ si $y_n \to y$ implica $\gamma \in \mathscr{C}^{x,y}$, iar

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^1(\gamma \setminus G) &\leq \lim_{n\to+\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n \setminus G_n), \\
\mathscr{H}^1(\gamma) &\leq \lim_{n\to+\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n), \\
\mathscr{H}^1(G) &\leq lim_{n\to+\infty} \mathscr{H}^1(G_n).
\end{aligned}$$

Folosind proprietatile lui g date de Propozitia 3.2.8, obtinem:

$$\begin{aligned}
D_G(x,y) &\leq g(\mathscr{H}^1(\gamma \setminus G), \mathscr{H}^1(\gamma), \mathscr{H}^1(G)) \\
&\leq g(\lim_{n\to+\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n \setminus G_n), \lim_{n\to+\infty} \mathscr{H}^1(\gamma_n), \lim_{n\to+\infty} \mathscr{H}^1(G_n)) \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} g(\mathscr{H}^1(\gamma_n \setminus G_n), \mathscr{H}^1(\gamma_n), \mathscr{H}^1(G_n)) \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} D_{G_n}(x_n,y_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Lasand acum ε sa tinda la 0, deducem inegalitatea dorita. □

Ca o consecinta a propozitiei anterioare, avem:

Corolarul 3.2.10. *Fie $\{x_n\}_n$ si $\{y_n\}_n$ doua siruri din M, astfel incat $x_n \to x$ si $y_n \to y$. Daca G este o submultime conexa si inchisa ale lui M, atunci*

$$D_G(x,y) \leq \liminf_{n\to+\infty} D_G(x_n,y_n),$$

adica D_G este inferior semicontinua.

Lema 3.2.11. *Consideram (X,d) un spatiu metric compact si $\{\phi_n\}_n$ un sir de functii reale pozitive pe X. Fie ψ o functie continua, reala si pozitiva pe spatiul X. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

(i) Pentru orice $\varepsilon > 0$, exista $N \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \geq N$ si orice $x \in X$ sa avem $\psi(x) \leq \phi_n(x) + \varepsilon$;

(ii) Pentru orice $x \in X$, si orice $x_n \to x$, sa aiba loc inegalitatea $\psi(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi_n(x_n)$.

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie $x_n \to x$. Atunci, utilizand afirmatia (i), deducem ca pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$\psi(x_n) = \phi_n(x_n) + (\psi(x_n) - \phi_n(x_n)) \leq \phi_n(x_n) + \varepsilon$$

pentru n suficient de mare. Stim insa ca ψ este continua, din ipoteza, deci trecand la limita inferioara gasim ca

$$\psi(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi_n(x_n) + \varepsilon,$$

si lasand acum ε sa tinda la zero obtinem

$$\psi(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi_n(x_n).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Procedam prin reducere la absurd. Prespunem asadar ca exista $\varepsilon > 0$ si un sir crescator de numere naturale $\{n_k\}_k$ astfel incat

$$\psi(x_{n_k}) \geq \phi_{n_k}(x_{n_k}) + \varepsilon \tag{3.2.4}$$

pentru x_{n_k} adecvat. Folosim compacitatea lui X pentru a extrage, eventual, un subsir astfel incat

$$x_{n_k} \to x.$$

Introducem acum

$$z_n := \begin{cases} x_{n_k} & \text{daca } n = n_k, \text{ pentru vreun } k \\ x & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

Avem atunci $z_n \to X$, iar

$$\psi(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi_n(z_n).$$

Pe de alta parte, inegalitatea (3.2.4) conduce la

$$\psi(x) \geq \liminf_{n\to+\infty} \phi_{n_k}(x_{n_k}) + \varepsilon \geq \liminf_{n\to+\infty} \phi_n(z_n) + \varepsilon \geq \psi(x) + \varepsilon,$$

care nu este adevarata. Contradictia provine din presupunerea noastra falsa ca afirmatia (i) nu are loc. Rezulta deci ca (ii) implica (i), ceea ce incheie demonstratia. $\square$

In plus, Lema 1.3.1 din [AT00] afirma urmatoarele:

Lema 3.2.12. *Fie ϕ o functie inferior semicontinua definita pe un spatiu metric (X,d), cu valori in $[0,+\infty]$. Atunci functiile ψ_t definite prin*

$$\psi_t(x) = \inf\{\phi(y) + td(x,y) : y \in X\},\ t \geq 0,$$

au urmatoarele proprietati:

(i) $\psi_t \geq 0$*;*

(ii) ψ_t *este t-Lipschitz continua;*

(iii) $\psi_t(x) \nearrow \phi(x)$ *cand $t \to +\infty$, pentru orice x.*

Aceste leme ne permit sa demonstram ca:

Propoziţia 3.2.13. *Fie $\{\phi_n\}_n$ un sir de functii inferior semicontinue, si ϕ de asemenea o functie inferior semicontinua, toate definite pe un spatiu metric compact (X,d) si cu valori in $[0,+\infty]$. Consideram si $\{\mu_n\}_n$ un sir de masuri pozitive pe X, ce converge slab la o masura μ. Presupunem ca pentru orice $x \in X$ si orice sir $x_n \to x$ avem*

$$\phi(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi_n(x_n).$$

Atunci

$$\int_X \phi d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X \phi_n d\mu_n.$$

Demonstraţie. Sa consideram ϑ o functie continua cu suport compact astfel incat $0 \leq \vartheta \leq 1$. Pentru $t \geq 0$, fie ψ_t functia data de Lema 3.2.12. Cum ψ_t indeplineste ipotezele Lemei 3.2.11 cu $\psi = \psi_t$, rezulta ca avem $\psi_t \leq \phi_n + \varepsilon$ pentru n suficient de mare. Atunci:

$$\int_X \psi_t \vartheta d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \psi_t \vartheta d\mu_n \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X \phi_n d\mu_n.$$

Trecand acum la supremum dupa t si dupa ϑ, obtinem

$$\int_X \phi d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X \phi_n d\mu_n.$$

□

Dupa aceste indelungi preparative, suntem pregatiti sa demonstram existenta solutiei pentru problema de optimizare.

Demonstraţia Teoremei 3.2.1. Fie deci μ si ν doua masuri de probabilitate pe M. Trebuie sa aratam ca problema de optimizare

$$\min\{\mathscr{K}(G) : G \subseteq M, G \text{ conexa}\}$$

are o solutie.

Pentru $h > 0$ folosim notatia

$$\mathscr{G}_l := \{G \in \mathscr{C} : \mathscr{H}^1(G) \leq h\}.$$

Demonstram in cele ce urmeaza ca $\mathscr{G}_h$ este compacta in spatiul sumbmultimilor inchise ale lui $\overline{M}$, echipat cu metrica Hausdorff $\mathscr{D}_H$, pentru orice $h > 0$. Cum acest spatiu este compact, e suficient sa demonstram ca $\mathscr{G}_h$ este inchisa. Cunoastem faptul ca limita Hausdorff a unui sir de multimi inchise si conexe este tot o multime inchisa si conexa. Daca $\{G_n\}_n$ este un sir de multimi inchise si conexe astfel incat $\mathscr{H}^1(G_n) \leq h$, atunci pentru $G_n \to G$ avem

$$\mathscr{H}^1(G) \leq \liminf_{n \to +\infty} \mathscr{H}^1(G_n) \leq h,$$

conform Teoremei lui Golab 3.2.2.

Ipotezele noastre asupra lui f conduc la faptul ca, daca $\{G_n\}_n$ este un sir minimizant, atunci sirul de numere $\{\mathscr{H}^1(G_n)\}_n$ este marginit, adica $\mathscr{H}^1(G_n) \leq h$, pentru un anume $h > 0$.

Daca aratam ca functionala $G \longrightarrow \mathscr{K}(G)$ este secvential inferior semicontinua pe clasa $\mathscr{G}_l$, atunci existenta unui G optimal ar fi o consecinta a rezultatului care spune ca o functie secvential inferior semicontinua are un minimum pe un spatiu metric compact.

Fie asadar un sir $\{G_n\}_n$ un sir in $\mathscr{G}_l$ astfel incat $G_n \to G$.

Fie π_n un cuplaj optimal pentru problema de transport

$$\min\left\{\int_{M\times M} D_{G_n}(x,y)\,d\pi(x,y) : \pi \text{ cuplaj pentru } \mu \text{ si } \nu\right\}.$$

Extragand eventual un subsir, putem presupune ca sirul $\{\pi_n\}_n$ este slab convergent la o masura π pe $M \times M$. Evident, π este un cuplaj intre μ si ν.

Conform Propozitiei 3.2.9, avem

$$D_G(x,y) \leq \liminf_{n\to+\infty} D_{G_n}(x_n, y_n)$$

$\square$

pentru orice $x_n \to x$ si $y_n \to y$. Aplicand acum Propozitia 3.2.13, obtinem ca:

$$\int_{M\times M} D_G(x,y)d\pi(x,y) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{M\times M} D_{G_n}(x,y)d\pi_n(x,y).$$

Rezulta atunci:

$$\mathscr{K}(G) \leq \int_{M\times M} D_G(x,y)d\pi(x,y) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{M\times M} D_{G_n}(x,y)d\pi_n(x,y) = \liminf_{n\to+\infty} \mathscr{K}(G_n),$$

ceea ce incheie demonstratia.

Concluzii finale

C.1 Importanţa şi relevanţa ştiinţifică a domeniului de studiu, precum şi a rezultatelor obţinute

Gaspard Monge ridica, în faimoasa sa lucrare din 1781 *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* [M1781], problema minimizării costurilor de transport al bunurilor; această problemă a fost redescoperită în anii '40 de către matematicianul rus L.V. Kantorovich ([Ka42], [KR57]), care a primit un premiu Nobel pentru Economie în anul 1975, împreună cu Tjalling Koopmans, "pentru contribuţia lor la teoria alocării optimale a resurselor". În zilele noastre, transportul optimal a devenit o "industrie" prosperă, angrenând o serie întreagă de cercetatori şi de direcţii de cercetare. Domeniile de competenţă ale acestei probleme variază de la economie şi meteorologie până la ecuaţii de difuzie şi mecanica fluidelor, cu consecinţe în biologie. O extensivă trecere în revistă a multiplelor aplicaţii ale transportului masei a fost realizata de catre C. Villani, in excelentele sale lucrări [Vi03] şi [Vi08] ale lui C. Villani.

În ultimul deceniu, un rol deosebit în dezvoltarea acestei teorii l-au jucat factorizarea polară, extinsă la varietăţi Riemanniene de către R. McCann în [Mc97], ca şi abordarea spaţiilor Wasserstein în mod heuristic ca varietăţi Riemanniene formale, de către F. Otto şi C. Villani în [OV00]. În lucrarea [OV00] se dovedeşte că inegalităţile de transport de tip Talagrand pentru măsura Gaussiană se obţin din inegalităţi Sobolev logaritmice, şi reciproc.

Proprietăţilor geometrice ale spaţiilor metrice discrete se bucură de un tot mai larg interes în ultimul deceniu, datorită multiplelor aplicaţii în diverse domenii actuale. Sunt de remarcat, de pildă, aplicaţiile geometriei discrete în informatică. Triangulaţiile varietăţilor Riemanniene, ca şi discretizările de spaţii metrice continue sunt foarte utile în geometria computaţională (sau digitală). Geometria digitală se confruntă cu două probleme principale, complementare: pe de o parte cu construcţia unor reprezentări digitale ale obiectelor, punându-se un accent deosebit pe eficienţă şi precizie, iar pe de altă parte cu reconstrucţia unor obiecte "reale" sau reconstrucţia unor proprietăţi ale acestora (în termeni de lungime, arie, volum, curbură, etc.). O mai bună întelegere a aspectelor geometrice ale spaţiilor discrete devine astfel o provocare. Studiul geometriei spaţiilor discrete este justificat în practică, printre altele, de interesul crescut din ultimii ani în domeniul procesării imaginilor, de pildă în domeniul medical.

Spaţiile geodezice sunt, într-o primă etapă, generalizări naturale ale varietăţilor Riemanniene. O noţiune de margine pentru curbură pe asemenea spaţii a fost introdusă înca din anii ’50 de către Alexandrov (vezi [Al57], [Al51]), pe baza comparării triunghiurilor geodezice din spaţiul metric în cauză cu triunghiurile geodezice din spaţiul euclidian (de curbura 0); în cazul varietăţilor Riemanniene, aceasta revine la o margine inferioară pentru curbura secţională. În ultimii ani s-au facut progrese semnificative în studierea unei margini inferioare pentru curbura Ricci pe spaţii metrice geodezice cu măsură (M, d, m), prin lucrările matematicienilor Karl-Theodor Sturm, John Lott şi Cédric Villani (vezi [St06a], [St06b], [LV09]). Acest nou concept care condus la o serie întreagă de generalizări ale unor teoreme clasice cuoscute din geometria Riemanniană (precum Teorema Bonnet-Myers, Inegalitatea Bishop-Gromov de creştere a volumelor, s.a.m.d.).

Abordările privind curbura Ricci pe spaţii metrice (geodezice) cu măsură din lucrările citate mai sus [St06a], [St06b], [LV09] se bazează pe proprietăţile de convexitate ale entropiei relative $\mathrm{Ent}(\cdot|m)$, privită ca functională pe spaţiul Wasserstein al probabilităţilor cu momente de ordin doi finite, înzestrat cu metrica Wasserstein. Această teorie a fost extinsă de către A.-I. Bonciocat şi K.-T. Sturm la cazul spaţiilor metrice discrete în [Bn08] si [BS09], unde a fost introdusă o noţiune de margine inferioară grosieră pentru curbură. În continuarea acestor lucrări, am studiat în cadrul programului post-doctoral o condiţie mai generală, de tip curbură-dimensiune, pentru spaţii metrice şi grafuri, introdusă în [Bn08] şi continuată în articolele [Bn12a] si [Bn12b].

Am aplicat rezultatele obţinute unor exemple concrete de spaţii metrice discrete şi grafuri. Ne-am ocupat în mod special de cazul grafurilor planare omogene, pentru care am realizat şi o analogie cu studiul combinatorial efectuat de alţi autori, printre care M. Gromov.

De asemenea, am urmărit să studiem diverse tipuri de inegalităţi funcţionale pentru spaţii discrete şi grafuri, înzestrate cu măsuri de referinţă. Ne-am ocupat cu studiul inegalităţilor Talagrand slabe de transport cu cost pătratic. Am arătat că, sub o condiţie de curbură Ricci pozitivă, o asemenea inegalitate are loc pe orice spaţiu metric cu măsură - posibil discret sau de tip graf metric. Am demonstrat că inegalităţile slabe de transport produc fenomenul de concentrare a măsurii şi au drept consecinţă proprietatea de integrabilitate exponenţială a funcţiilor Lipschitz. Am analizat de asemenea consecinţele geometrice ale condiţiei grosiere de tip curbură-dimensiune, demonstrând un rezultat ce constituie o generalizare a inegalităţii Brunn-Minkowski, cunoscută din cazul clasic, precum şi o generalizare a Teoremei Bonnet-Myers.

În abordarea de faţă, studiul proprietăţilor geometrice ale spaţiilor discrete şi grafurilor se face din perspectiva geometriei grosiere (aşa-numita "coarse geometry"), care studiază proprietăţile "la scară mare" ale spaţiilor (a se vedea, de pildă, lucrarea [Ro03], pentru o introducere în acest domeniu). Ideea de bază a acestei teorii este urmatoarea: în diferite contexte, se poate observa că proprietăţile geometrice relevante ale unui un spaţiu metric sunt, de fapt, cele grosiere. Un spaţiu discret poate căpăta o formă geometrică atunci când este privit dintr-un punct de observaţie îndepartat de el; atunci toate golurile dintre puncte devin din ce în ce mai puţin vizibile, iar spaţiul arată mai degrabă ca unul continuu. Acesta este punctul de vedere care l-a condus pe M. Gromov către noţiunea sa de grup hiperbolic, care este un grup "aproape curbat negativ" (într-un anume înţeles combinatorial). Am dezvoltat aşadar o noţiune de minorant grosier pentru curbură pe spaţii discrete, ca şi o condiţie de tip curbură-dimensiune, ambele bazate pe conceptul de transport optimal al masei. Aceşti minoranţi grosieri depind de un parametru real $h > 0$, care trebuie înteles ca ordinul de discretizare sau scara de marime a spaţiului discret subiacent, sau scara la care trebuie privit spaţiul în cauză pentru a produce efecte geometrice. In cazul unui graf metric, de pilda, acest ordin de discretizare este egal cu lungimea maximă a muchiilor sale (înmulţită eventual cu o constantă). Abordarea prezentă aici o urmează pe cea a lui [St06a], şi este în mod special preocupată cu îndepărtarea ipotezelor de conectivitate presupuse de structura geodezică cerută în cazul continuu. Această dificultate este înlăturată âstfel: transportul masei şi proprietăţile de convexitate sunt studiate nu de-a lungul geodezicelor, ci de-a lungul h-geodezicelor. De exemplu, în locul mijloacelor dintre doua puncte x_0, x_1 se consideră h-mijloacele, care sunt puncte y cu $\mathsf{d}(x_0,y) \leq \frac{1}{2}\,\mathsf{d}(x_0,x_1)+h$ şi $\mathsf{d}(x_1,y) \leq \frac{1}{2}\,\mathsf{d}(x_0,x_1)+h$. În plus, în locul metricii Wasserstein se utilizează în lucrarea de faţă două perturbari ale acesteia, care înglobează parametrul h.

Problema de transport clasică este adesea numită astăzi problema Monge-Kantorovich, iar în ultima jumătate a secolului XX tehnicile de transport optimal şi diverse variante ale metricii Kantorovich-Rubinstein – astăzi numite şi metrici Wasserstein – au fost folosite de statisticieni, probabilişti, economişti, meteorologi, etc. Numele "metrici Wasserstein/Vasershtein" a fost introdus de catre R.L. Dobrushin în 1970, după ce matematicianul rus Leonid Nasonovich Vasershtein a introdus, într-un articol de teoria informaţiei din 1969 (vezi [Wa69]), o familie de metrici înrudite cu distanţa Kantorovich-Rubinstein. Există astăzi numeroase aplicaţii ale problemelor de transport în economie. Printre altele, dualitatea transportului masei este foarte utilă în formularea unor rezultate de existenţă şi unicitate în modelele hedonice. Mai mult, lucrările lui Carlier [Ca01] şi Figalli, Kim, McCann [FK11] prezintă aplicaţii ale problemei "principal-agent", un exemplu central în teoria microeconomică, şi care modelează problema deciziei optimale, cu care are de a face un monopolist care trebuie să acţioneze pe baza informaţiilor statistice asupra clienţilor săi. Deşi rezultate de existenţa au fost, în general, stabilite pentru asemenea modele, caracterizarea soluţiilor, incluzând unicitatea şi regularitatea, reprezintă încă probleme deschise. Rezultate de dualitate, existenţă şi unicitate pentru o clasă de probleme de transport, cu funcţii cost satisfăcând o generalizare a condiţiei Spence-Mirrlees, bine-cunoscute economiştilor în dimensiune 1 (vezi [Mir76] şi [Sp74]), au fost obţinute în lucrarea [Ca03]. Analiza problemei de transport pentru o clasă mai largă de funcţii cost este un domeniu de larg interes. Astfel de studii au aplicaţii în teoria economică a stimularii ("incentive theory") [Ca03], [MM88], [Lev97].

Teoria transportului optimal prezintă o gamă foarte largă de aplicaţii în econometrie, economie urbană şi "nonlinear pricing" (dupa cum se poate vedea, de exemplu, din lucrarile [BC10], [BPS09], [Ca99], [RC98]). În problema Monge-Kantorovich clasică, costul transportului depinde doar de masa trimisă de la surse la destinaţii, nu şi de drumurile pe care masa este transportată. Astfel, problema clasică nu ţine cont de problemele de trafic ce pot apărea.

Folosind o noţiune de intensitate a traficului, în [CJS08] autorii prezintă o variantă continuă a binecunoscutei probleme de trafic pe reţele, studiate atât în economie, cât şi în cercetări operaţionale. O mai bună întelegere a "geometriei" grafurilor în termeni de transport optimal are consecinţe însemnate în acest domeniu actual de cercetare.

În monografia "Optimal Urban Networks via Mass Transportation" [BPS09], autorii G. Buttazzo, A. Pratelli, S. Solimini, şi E. Stepanov tratează o clasă de modele de optimizari de reţele de transport (fie că este vorba de transport urban sau transport feroviar, ori transport auto între localităţi) într-o zonă geografică dată. Modelele prezente in carte iau în considerare atât costul de transport fără ajutorul reţelei transportatorului, cât şi costul de transport fixat de transportator şi costurile de întreţinere a reţelei. Problemele de optimizare propuse necesită găsirea unor reţele de transport optimale în sensul minimizării costului de transport. Autorii prezintă mai întâi o versiune relaxată a problemei de optimizare şi demonstreaza existenţa unei soluţii relaxate. De asemenea, se arată şi că problema propusă poate să nu aibă soluţii clasice. În final, autorii demonstrează un rezultat de regularitate pe reţele optimale.

Pornind de la unul dintre modelele studiate în [BPS09], am demonstrat în ultimul capitol al prezentei lucrări existenţa unei soluţii la o problemă de optimizare pe reţele de trafic, folosind o functie cost mai generală, care înglobeaza cele trei tipuri de costuri delimitate în [BPS09].

Pe calea teoriei transportului optimal al masei, prespunând cunoscute distribuţiile domiciliilor locuitorilor unei zone urbane, ca şi distribuţiile locurilor de muncă ale populaţiei, arătăm existenţa unei reţele de transport în comun care minimizează o functională ce depinde de geometria reţelei prin intermediul unei funcţii cost. Funcţionala este definită ca distanţa Wasserstein dintre cele două distribuţii, în raport cu o metrică ce depinde de reţeaua de transport. Rezultatele se aplică unor zone geografice modelate matematic prin submulţimi deschise, mărginite şi conexe ale lui $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^N$ mai general). Pe această submulţime a spaţiului euclidian utilizăm convergenţa în distanţa Hausdorff. În cursul demonstraţiei rezultatului de existenţă, am folosit intens o generalizare a Teoremei lui Golab, obţinută de Dal Maso şi Toader în [DT02].

Plecând de la problemele concrete ale transportului urban din zilele noastre, modelul studiat în Capitolul 3 al lucrării de faţă este aplicabil nu doar în cazul unui oraş sau al unei regiuni geografice înzestrate cu o reţea de transport în comun, dar şi altor tipuri de reţele. De pilda, ne putem gandi la o reţea de furnizare a apei sau a gazului natural, sau la o reţea de comunicaţii.

C.2 Metodologia utilizată în realizarea lucrării

În cursul celor doi ani de desfăşurare a proiectului, activitatea de informare-documentare s-a bazat pe studiul a numeroase lucrări ştiinţifice de specialitate, cărţi, monografii, din domeniul matematic, economic sau inginieresc. Bibliografia selectivă cu care se încheie lucrarea de faţă, şi care cuprinde peste 60 de titluri, strânge laolalta doar cele mai importante lucrări studiate de autoare în timpul şcolii post-doctorale. Aceste lucrări au fost consultate fie folosind bazele date internaţionale la care autoarea a avut acces, fie la bibliotecile şi sălile de lectură ale Institutului de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române şi ale Laboratorului Paul Painlevé de la Universitatea din Lille, Franţa, unde a fost efectuat stagiul de mobilitate. Menţionam că lucrările sunt citate în cadrul textului dizertaţiei de faţă, conform normelor deontologice în vigoare.

Cercetarea ştiinţifică a autoarei s-a desfăşurat în principal în mod individual, sub îndrumarea atentă a expertului îndrumator din cadrul proiectului, Prof. Dr. Lucian Beznea. Progresele realizate au fost consemnate periodic în rapoartele lunare şi trimestriale întocmite pe parcursul ceor doi ani de şcoală post-doctorală. Principalele direcţii de cercetare, planul detaliat de lucru, precum şi elaborarea articolelor şi a lucrării finale de faţă au fost subiectele permanente de discutie cu expertul îndrumator şi au condus la atingerea obiectivelor prevăzute în propunerea de proiect.

Progresul realizat în munca de cercetare se datorează însa şi colaborării cu alţi cercetători. În cursul seminariilor şi conferinţelor naţionale şi internaţionale la care autoarea a participat, au existat numeroase schimburi de idei cu participanţii la aceste manifestări ştiinţifice, pe baza temelor de lucru comune. În cursul muncii de cercetare, un rol deosebit l-a jucat efectuarea unui stagiu de cercetare post-doctorală la Laboratorul de Statistică şi Probabilităţi Paul Painlevé, de la Universitatea din Lille 1, Franţa. Autoarea a beneficiat de excelenta conducerea ştiinţifică a Prof. Dr. Ciprian Tudor, din partea instituţiei gazdă.

Cele cinci conferinţe internaţionale organizate în cadrul proiectului POSDRU ID 62988 au fost nişte prilejuri extraordinare de a cunoaşte alţi cercetători, precum şi subiecte de cercetare înrudite. De asemenea, în cadrul sesiunilor paralele organizate de instituţiile partenere am avut ocazia să ne facem cunoscute rezultatele.

C.3 Impactul preconizat al rezultatelor obţinute

Proiectul post-doctoral al autoarei abordează o tematică de mare actualitate în cercetarea matematică, cu aplicaţii din cele mai diverse în ştiinţele economice.

Autoarea a avut ocazia, pe parcursul acestui program post-doctoral, sa-şi continue cercetările întreprinse în cursul stagiului de doctorat efectuat la Universitatea din Bonn, Germania, sub conducerea ştiinţifică a Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm.

Studiul geometriei spaţiilor discrete este justificat în practică, printre altele, de interesul crescut din ultimii ani în domeniul procesării imaginilor. *Unul dintre obiectivele transversale ale prezentului proiect este societatea informaţională, adică societatea în care producerea şi consumul de informaţie este cel mai important tip de activitate.* Prelucrarea şi recunoaşterea imaginilor medicale de pildă, ca suport al informatizării societătii la nivelul sistemului sanitar, reprezintă o provocare pentru multe colective de cercetători din diverse domenii de activitate. O ramură nouă de cercetare o constituie geometria digitală; imaginile digitale trebuie sa reproducă tot mai fidel obiectele "reale", iar aspectele geometrice ale acestei dualităţi între discret şi continuu joacă un rol determinant.

Problema de transport formulată fie în context pur teoretic, fie în diverse variante algoritmice, reprezintă un factor cheie în studierea şi optimizarea a numeroase procese din sfera economică, cu aplicaţii din cele mai diverse. Potenţialii beneficiari ai rezultatelor proiectului sunt, pe de o parte, comunitatea ştiinţifică implicată în acest domeniu de cercetare, formată din economişti, matematicieni, ingineri, s.a., precum şi instituţiile din mediul economic ce pot asigura implementarea rezultatelor cercetării, prin adaptarea acestora la situaţiile concrete avute în vedere.

Nu în ultimul rând, beneficiari ai rezultatelor proiectului sunt şi studenţii în ani terminali şi tinerii cercetători a caror specializare necesită cunoştinţe aprofundate în domeniul ştiinţific-economic studiat. Cunoştinţele ce au fost dobândite şi aprofundate pe parcursul stagiului de cercetare în strainatate au avut un rol important în finalizarea în bune condiţii a obiectivelor proiectului. Transferul acestor cunoştinţe către comunitatea ştiinţifică şi economică românească a asigurat informarea şi documentarea corespunzătoare în tematica multi- şi interdisciplinară propusă, în conformitate cu exigenţele la nivel european, precum şi diseminarea pe scară cât mai largă a rezultatelor ştiinţifice avute în vedere. Transferul acestor cunoştinţe se efectuează prin intermediul articolelor ştiinţifice elaborate, prin conferinţe şi comunicări ştiinţifice, precum şi printr-o serie de cursuri ştiinţifice organizate pe tema "Credit Risk Models", sustinut de Prof. Dr. Pasquale Cirillo, Delft University of Technology. Cele cinci conferinţe internaţionale organizate pe parcursul proiectului s-au bucurat de participarea unui număr însemnat de studenţi, tineri cercetători, şi specialişti in ştiinţe matematice, economice, sau ingineresti.

Este de asteptat ca transferul cunoştinţelor acumulate pe parcursul proiectului să contribuie la crearea cadrului teoretic necesar unor aplicaţii specifice din sfera economică, ce vizează *dezvoltarea economică stabilă şi atingerea unui nivel corespunzator al bunăstării şi dezvoltării umane, la largirea patrimoniului ştiinţifico-economic, precum şi la atragerea tinerei generaţii de cercetători în acest domeniu ştiinţific de mare actualitate*.

Efectuarea stagiului de cercetare la Universitatea Lille 1, Franţa, cât şi participarea la conferinţele internaţionale şi la seminariile ştiinţifice, au contribuit la întărirea colaborării ştiinţifice cu specialişti de renume de la centre europene de prestigiu, şi la integrarea cercetării ştiinţifice economice româneşti în circuitul european.

Bibliografie

[Al51] ALEXANDROV, A. D.(1951): A theorem on triangles in a metric space and some applications, *Trudy Math. Inst. Steklov* **38**, 5–23. (Russian; translated into German and combined with more material in [Al57])

[Al57] ALEXANDROV, A. D. (1957): Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie, *Schr. Forschungsinst. Math. Berlin* **1**, 33–84.

[AV01] AMBROSIO, L., BRENIER, Y., BUTAZZO, G., CAFARELLI, L. A., VILLANI, C. (2001): *Optimal Transportation and Applications*, Lecture Notes in Mathematics.

[Am03] AMBROSIO, L. (2003): Lecture Notes on Optimal Transport Problems, in *Mathematical Aspects of Evolving Interfaces*, Lecture Notes in Mathematics, LNM 1812, Springer, 1–52.

[AP03] AMBROSIO, L, PRATELLI, A. (2003): Existence and stability results in the L^1 theory of optimal transportation, in *Optimal Transportation and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, LNM 1813, Springer, 123–160.

[AT00] AMBROSIO, L., TILLI, P. (2000): *Selected Topics on ŞAnalysis on Metric SpacesŤ*, Appunti dei Corsi Tenuti da Docenti della Scuola, Scuola Normale Superiore, Pisa.

[BE85] BAKRY, D., ÉMERY, M. (1985): Diffusions hypercontractives(French). [Hypercontractive diffusions], Séminaire de probabilités, XIX, 1983/1984, 177–206, *Lecture Notes in Math.*, 1123, Springer, Berlin.

[BG99] BOBKOV, S., GÖTZE, F. (1999): Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities, *J. Funct. Anal.* **163**, 1–28.

[BGL01] BOBKOV, S., GENTIL, I., LEDOUX, M. (2001): Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations, *J. Math. Pures Appl.* **80**, 669-Ű696.

[Bo07] BONNEFONT, M. (2009): A discrete version and stability of Brunn-Minkowski inequality, *Annales mathématiques Blaise Pascal*, **16** no. 2, 245–257.

[Bre92] BREZIS, H. (1992): *Analyse fonctionnelle*, Masson Paris.

[Bn08] BONCIOCAT, A.-I. (2008): *Curvature bounds and heat kernels: discrete versus continuous spaces*, PhD Thesis, Universität Bonn.

[BS09] BONCIOCAT A.-I., STURM, K.-T. (2009): Mass transportation and rough curvature bounds for discrete spaces, *J. Funct. Anal.* **256** no. 9, 2944–2966.

[Bn12a] BONCIOCAT, A.-I. (2012): Lower Ricci curvature bounds for metric measure spaces, *Math. Rep.* **14**, no. 3, 253–278.

[Bn12b] BONCIOCAT, A.-I. (2012): *A rough curvature-dimension condition for metric measure spaces*, trimisă spre publicare la Central Eur. J. in Math. (va apărea).

[BC10] BUTTAZZO, G., CARLIER, G. (2010): Optimal spatial pricing strategies with transportation costs, *AMS Series Contemporary Mathematics* **514**, 105–121.

[BPS09] BUTAZZO, G., PRATELLI, A., SOLIMINI, S., STEPANOV, E. (2009): *Optimal urban networks via mass transportation*, Lecture Notes in Mathematics 1961, Springer-Verlag, Berlin, x+150 pp.

[CFM02] CAFARELLI, L., FELDMAN, M., MCCANN, R. J. (2002): Constructing optimal maps for Monge's transport problem as a limit of strictly convex costs, *J. Amer. Math. Soc.* **15**, 1–26.

[Ca99] CARLIER, G. (1999): *On an optimal control problem with h-convexity constraint on the state variable and its economic motivation*, cahier du CEREMADE.

[Ca01] CARLIER, G. (2001): A general existence result for the principal-agent problem with adverse selection, *J. Math. Econom.* **35**, 129–150.

[Ca03] CARLIER G. (2003): Duality and existence for a class of mass transportation problems and economic applications, *Adv. In Mathematical Economics*, **5**, 1–21.

[CJS08] CARLIER, G., JIMENEZ, C., SANTAMBROGIO, F. (2008): Optimal transportation with traffic congestion and Wardrop equilibria, *SIAM J. on Control and Optimization* **47**, no. 3, 1330–1350.

[CM10] CHIAPPORI, P.-A., MCCANN, R. J., NESHEIM, L. (2010): Hedonic price equilibria, stable matching, and optimal transport: equivalence, topology, and uniqueness, *Econom. Theory* **42**, 317–354.

[DM93] DAL MASO, G. (1993): *An Introduction to* Γ *-convergence*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.

[DT02] DAL MASO, G., TOADER, R. (2002): A Model for the Quasi-Static Growth of Brittle Fractures: Existence and Approximation Results, *Arch. Rational Mech. Anal.* **162**, 101–135.

[Du89] DUDLEY, R. M. (1989): *Real analysis and probability*, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA.

[Ek05] EKELAND, I. (2005): An optimal matching problem, *Control Optim Calc Var* **11** no. 1, 57–71.

[Ek10] EKELAND, I. (2010): Existence, uniqueness and efficiency of equilibrium in hedonic markets with multidimensional types, *Econ Theory* **42**, 275–315.

[EM12] ERBAR, M., MAAS, J. (2012): *Ricci curvature of finite Markov chains via convexity of the entropy*, preprint.

[EG99] EVANS, L. C., GANGBO, W. (1999): Diferential Equations Methods for the Monge-Kantorovich Mass Transfer Problem, *Memoirs of the A.M.S.*, Vol. 137, Number 653.

[Fa85] FALCONER, K. J. (1985): *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press.

[FK11] FIGALLI, A., KIM, Y. H., MCCANN, R. (2011): When is multidimensional screening a convex program? Uniqueness and stability of optimal strategies in the principal-agent problem, *Journal of Economic Theory* **146**, 454–478.

[Fo03] FORMAN, R. (2003): Bochner's method for cell complexes and combinatorial Ricci curvature, *Discrete Comput. Geom.* **29** no. 3, 323–374.

[Fu87] FUKAYA, K. (1987): Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator, *Invent. Math.* **87**, 517–547.

[Gro87] GROMOV, M. (1987): Hyperbolic groups. Essays in group theory, 75–263, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 8, Springer, New York.

[Gro99] GROMOV, M. (1999): *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, Based on the 1981 French original [MR 85e:53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from French by Sean Michael Bates.

[Hi01] HIGUCHI, Y. (2001): Combinatorial curvature for planar graphs, *J. Graph Theory* **38** no. 4, 220–229.

[Is90] ISHIDA, M. (1990): *Pseudo-curvature of a graph*, lecture at "Workshop on topological graph theory", Yokohama national University.

[Ka42] KANTOROVICH, L. V. (1942): On the translocation of masses, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* **37**, 199–201.

[KR57] KANTOROVICH, L. V., RUBINSTEIN, G. S. (1957): On a functional space and certain extremum problems (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **115**, 1058–1061.

[Le01] LEDOUX, M. (2001): *The concentration of measure phenomenon*. Mathematical Surveys and Monographs **89**, American Mathematical Society.

[Lev97] LEVIN, V. (1997): Reduced cost functions and their applications, JOURNAL OF MATHEMATICAL ECONOMICS **28**, no. 2, 155–186.

[LY10] LIN, Y., YAU, S.-T. (2010): Ricci curvature and eigenvalue estimate on locally finite graphs. *Math. Res. Lett.*, **17**, no. 2, 343–356.

[LV09] LOTT, J., VILLANI, C. (2009): Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, *Ann. of Math.* **169**, no. 3, 903–991.

[Ma97] MARTON, K. (1997): A measure concentration inequality for contracting markov chains, *Geom. Funct. Anal.* **6**, 556–571.

[Mas11] MAAS, J. (2011): Gradient flows of the entropy for finite Markov chains. *J. Funct. Anal.*, **261**, no. 8, 2250–2292.

[Mi12] MIELKE, A. (2012): Geodesic convexity of the relative entropy in reversible Markov chains. To appear in *Calc. Var. Part. Diff. Equ.*.

[Mir76] MIRRLEES, J. (1976): Optimal Tax Theory: a synthesis, *Journal of Public Economics* **6**, no. 4, 327–358.

[MM88] MC AFEE, R. P., MC MILLAN, J. (1988): Multidimensional Incentive Compatibility and Mechanism Design, *Journal of Economic Theory* **46**, no. 2, 335–354.

[Mc97] MCCANN, R. (1997): A convexity principle for interacting gases, *Adv. Math.* **128**, no. 1, 153–179.

[M1781] MONGE, G. (1781): *Memoire sur la theorie des deblais et des remblais*, Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Paris.

[Ol09] OLLIVIER, Y. (2009): Ricci curvature of Markov chains on metric spaces. *J. Funct. Anal.*, **256**, no. 3, 810–864.

[OV00] OTTO, F., VILLANI, C. (2000): Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, *J. Funct. Anal.* **173**, no. 2, 361–400.

[Pi64] PINSKER, M. S. (1964): *Information and information stability of random variables and processes*, Holden-Day, San Franscico.

[Pr03] PRATELLI, A. (2003): *Existence of optimal transport maps and regularity of the transport density in mass transportation problems*, Ph.D. Thesis, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy (2003).

[Pr05] PRATELLI, A. (2005): Equivalence between some definitions for the optimal mass transport problem and for the transport density on manifolds, *Ann. Mat. Pura Appl.* **184**, no. 2, 215–238.

[RR98] RACHEV, S. T., RÜSCHENDORF, L. (1998): *Mass Transportation Problems. Vol. I: Theory; Vol. II: Applications*, Springer-Verlag.

[Ro03] ROE, J. (2003): *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31, American Mathematical Society, Providence.

[RC98] ROCHET, J. C., CHONÉ, P. (1998): Ironing, sweeping and multidimensional screening, *Econometrica* **66**, 783–826.

[RS05] VON RENESSE, M.-K., STURM, K.-T. (2005): Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* **68**, 923–940.

[Sp74] SPENCE, M. (1974): Competitive and optimal responses to signals, *Journal of Economic Theory* **7**, no. 3, 296–332.

[St06a] STURM, K.-T. (2006): On the geometry of metric measure spaces. I. *Acta Math.* **196** no. 1, 65–131.

[St06b] STURM, K.-T. (2006): On the geometry of metric measure spaces. II, *Acta Math.* **196** no. 1, 133–177.

[Ta96] TALAGRAND, M. (1996): Transportation cost for Gaussian and other product measures, *Geom. Funct. Anal.* **6** no. 3, 587–600.

[Vi03] VILLANI, C. (2003): *Topics in Mass Transportation*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society.

[Vi08] VILLANI, C. (2009): Optimal transport, old and new, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 338, Springer.

[Wa69] L. N. WASSERSTEIN [OR VASERSHTEIN] (1969): Markov processes over denumerable products of spaces describing large system of automata, *Problems of Information Transmission*, **5** no. 3, 47–52 (tradus din *Problemy Peredači Informacii* **5** (1969), no. 3, 64–72 (in rusa))