Cuprins

Rezumat

Capitolul I

In capitolul I demonstram faptul ca o conditie suficienta de solvabilitate a ecuatiei Black-Scholes - din punctul de vedere al aplicarii metodelor integralelor de drum-asociata unui model de volatilitate locala

$$dx_t = a(x_t, t)\, dt + b(x_t, t)\, dW.$$

este ca ecuatia: $B_t + \frac{1}{2}B^2 B_{xx} = 0$ sa fie satisfacuta de $B(x,t) = b(e^{rt}x, t)\, e^{-rt}$(sect.2.1.1 pag 11 relatia 5). Un exemplu de solutie este dat de procesele stohastice generate de polinoamele Hermite (teorema 2.2.1 pag.11). Solutii quasi-omogene sunt combinatii liniare de functii parabolice cilindrice, exprimabile prin functii hypergeometrice confluente de prima speta.

Ecuatia multidimensionala Black-Scholes este:

$$\partial_t f(x,t) + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = r\,(f - x_i \partial_i f)\,. \tag{1}$$

Atunci $h(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = e^{-rt} f(x_1 e^{rt}, x_2 e^{rt}, \ldots, x_n e^{rt}, t)$ satisface

$$h_t + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0, \tag{2}$$

unde $g^{\alpha\beta}(x,t) = G^{\alpha\beta}(xe^{rt}, t)\, e^{-2rt}$. $h_{\alpha\beta}$ sunt derivatele partiale ale lui h.

Demonstram cu ajutorul exprimarii covariante a ecuatiei Black-Scholes o teorema care afirma ca daca cel putin unul dintre coeficientii “transformati” ai ecuatiei cu derivate partiale Black-Scholes depinde de timp, nu putem reduce aceasta ecuatie la o ecuatie cu coeficienti ce nu depind de timp folosind transformari “de proiectie”, (t, H(t,x)) in terminologia folosita in studiul simetriilor Ito.(pag.15 propozitie 4.1 si ultima teorema de la pag. 17 Teorema)

Prezentam elemente de Teoria fluxurilor geometrice (Ricci si mean curvature flows) si a miscarii Browniene pe varietati cu metrica oscilanta ce contin ecuatiile de evolutie si elementele geometrice care, pe langa ecuatiile implicate contin ca necunoscute si transformarile folosite.

Incheiem capitolul cu modele solvabile si ecuatii diferentiale stohastice de argument matriceal solvabile in cazul a 2 produse financiare, relevante din punctul de vedere al metodelor folosite in gasirea acestor solutii.

Capitolul II

Demonstram Teorema 3.1.1 pag 32, care afirma ca exista un izomorfism de algebre Hopf intre algebra Hopf shuffle $T_{\blacktriangle}(A)$ si algebra Hopf Ito $T(A)$, unde A este algebra diferentialelor Ito clasice: $A = R\langle a_0 a_1 \ldots a_n\rangle$, $a_i a_j = 0$, pentru $i \neq j$, $a_i^2 = a_0$, pentru $j \neq 0$. Deci din punctul de vedere al calculului diferential bi-covariant, calculele Ito si Stratonovici sunt echivalente.

O a doua aplicatie a acestei teoreme este in demonstrarea faptului ca 2 produse , shuffle si Ito, definite de Kreimer pe algebra Hopf Connes-Kreimer sunt izomorfe.

Prezentam elementele clasice ale simetriilor infinitezimale ale ecuatiilor cu derivate partiale. Un subiect recent este definirea corecta a simetriilor Ito asociate ecuatiilor diferentiale stohastice.

Metode parametrixului , a calculului variational (metoda semiclasica) si a formulelor de cubatura reprezinta cele mai puternice metode de aproximare in teoria evaluarii optiunilor Europene.Parametrul ”moneyness” $\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{t}}\right)$, definit ca raportul dintre log (x/strike) si radacina patrata a timpului este folosit ca axa de coordonate, impreuna cu timpul pentru a parametriza suprafata de volatilitate implicita (implied volatility surface); impreuna cu ecuatia Dupire generalizata conduce la o parametrizare similara a volatilitatii locale. Apare insa ca o medie in formula Black-Scholes clasica

Inca nu exista o explicatie economica teoretica si practica a aparitiei acestui parametru in option pricing.
Distributia hiperbolica generalizata a fost folosita recent in studii empirice de stock market, pentru aproximarea volatilitatii istorice. Procesele Levy in care acestea apar nu ofera solutii analitice ale pretului optiunilor.

Concluzia noastra este ca un model de volatilitate locala in care functia de volatilitate locala depinde numai de moneyness are o probabilitate de tranzitie ce poate aproxima folosind metode semi-clasice WKB distributia hyperbolica simetrica generalizata despre care stim ca poate aproxima conform unor standarde statistice folosite de Necula et al.(teste de normalitate Kolmogorov-Smirnov si Anderson-Darling, metoda Maximum Likelihood Estimation (MLE)) cu acuratete distributia empirica a unor indexi bursieri. Aceasta ar fi explicatia empirica bazata pe simulari numerice si fapte stilizate a aparitiei parametrului "moneyness". O explicatie teoretica ar fi ca un model liniar sau tangential pentru cea mai buna dezvoltare Taylor ce porneste de la modelul Black-Scholes Merton trebuie sa il contina, pentru a genera linii drepte ca solutii ale ecuatiei Euler-Lagrange.

Avand ca punct de pornire lucrarile fundamentale [61] si [105], in care se propun metodologii de lucru pentru functii de volatilitate conjecturale, lucrarile [101],[102] si [103] propun 6 modele de volatilitate implicita utile pentru Korea Stock Exchange (KOSPI 200 index) si SP CNX Nifty index, unul dintre ele avand functia de volatilitate implicita un polinom de grad 2 in parametru moneyness, numit Forward moneyness.In industria petroliera a fost folosita aceasta masura de analiza a formei suprafetei de volatilitate [108].

Capitolul III

Demonstram ca produsul shuffle pe arbori definit de Kreimer in [66] este parte a unei structuri de bialgebra generalizata (pag.56 Teorema 3.2.1 si Corolar).
Am vazut ca produsul shuffle clasic si produsul de tip Ito sunt instrumente fundamentale de lucru in calculul stohastic, avand o origine geometrica. A mai fost folosit in teoria functiilor *zeta* ale lui Riemann. Produsele shuffle modulare intalnite in teoria spatiilor de moduli generalizeaza produsul shuffle obisnuit.
Descriem produsul shuffle ciclic, care cuprinde relatiile produsului shuffle obisnuit si care a fost folosit in varianta ciclica a Teoremei Eilenberg-Zilber si in definirea unei structuri de algebra A_∞ .

Abstract

Chapter I
In chapter I we prove that a sufficient condition for the solvability of the Black-Scholes Merton equation - if we would like to apply the path integral approach-associated with a local volatility model

$$dx_t = a(x_t, t)\,dt + b(x_t, t)\,dW.$$

is the following equation: $B_t + \frac{1}{2}B^2 B_{xx} = 0$ to be satisfied by $B(x,t) = b(e^{rt}x, t)\,e^{-rt}$(sect.2.1.1 pag 11 eq. 5). A solution is given by the stochastic processes generated by Hermite polynomials (theorem 2.2.1 pag.11). Quasi-homogenous solutions are linear combinations of parabolic cylinder functions, which are themselves given by confluent hypergeometric functions of first kind.
Black-Scholes multidimensional equation is given by:

$$\partial_t f(x,t) + \frac{1}{2}G^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = r\left(f - x_i \partial_i f\right). \tag{1}$$

Then $h(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = e^{-rt} f(x_1 e^{rt}, x_2 e^{rt}, \ldots, x_n e^{rt}, t)$ satisfies

$$h_t + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0, \tag{2}$$

where $g^{\alpha\beta}(x,t) = G^{\alpha\beta}(xe^{rt}, t)\,e^{-2rt}$. $h_{\alpha\beta}$ partial derivatives.

Using a covariant formulation of this equation, we prove two theorems which say that if at least one transformed coefficient of the Black-Scholes equation depends on time variable, then we cannot transform this equation into a time-independent equation using projectable diffeomorphisms (t, H(t,x)) (pag.15 propozitie 4.1 si pag. 17,last Teorema).
The evolution equations and the geometric framework of the above topics are given by the theory of geometric flows , Ricci and mean curvature flows, which contain as the unknowns the geometric transformations required above.
Several solvable models are available in the literature and we present some of them which are interesting from the point of view of the methods used to obtain them.

Chapter II
We prove Teorema 3.1.1 pag 32, - there is a Hopf algebra isomorphism between the shuffle Hopf algebra $T_{\blacktriangle}(A)$ and the Ito Hopf algebra $T(A)$, where A is the algebra of classical Ito differentials: $A = R\langle a_0 a_1 \ldots a_n\rangle$, $a_i a_j = 0$, for $i \neq j$, $a_i^2 = a_0$, if $j \neq 0$. So, from the point of view of the bi-covariant differential calculus, Ito and Stratonovich computations are equivalent. A second application of this theorem is an algebra isomorphism between the shuffle and Ito-type products defined by Kreimer on the decorated version of the Connes-Kreimer Hopf algebra.
The parametrix approach, variational calculus (semi-classical or WKB approximation) and Cubature Formulas are among the strongest approximation methods used in Option Pricing. The "moneyness" parameter $\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{t}}\right)$, is used as coordinate axis, in the implied volatility surface studies; using the generalized Dupire equation , the "moneyness" is also used to parametrize the local volatility function. There is no theoretical or empirical explanation of the appearance of this parameter in option pricing.

Our conclusion is that there are local volatility models whose local volatility function depends only on moneyness such that the probability density function, if it is approximated using a semi-classical

approach, can robust-approximate symmetric generalized hyperbolic distributions. About GHYD, we know from the work of Necula et.al. that MLE,Kolmogorov-Smirnov and Anderson-Darling normality tests show that the empirical distribution of some stock market indexes can be robust approximated by generalized hyperbolic distributions.This could be an empirical explanation based on numerical simulations and stylized facts for the appearance of the "moneyness" parameter. A theoretical explanation could be the existence of an infinitezimal or tangential model for the best Taylor expansion, one of the building blocks being the Black-Scholes Merton model and local volatility functions which depend only on moneyness, in order to generate straight lines as solutions of the Euler-Lagrange equations.

The articles [61] and [105] contain methodological aspects to calibrate several conjectural local volatility models. [101],[102] and [103] contain 6 implied volatility models used in Korea Stock Exchange (KOSPI 200 index) and SP CNX Nifty index. One of these models is given by a second degree polynomial in the moneyness parameter, called Forward moneyness. In oil industry market the moneyness was used to analyze the shape of the implied volatility surface [108].

Chapter III

We prove that the shuffle product defined by Kreimer is one of the operations in a generalized bialgebra structure defined on the decorated version of the Connes-Kreimer Hopf algebra. The shuffle and Ito-shuffle product are fundamental tools in stochastic calculus, having a geometric origin. There were also used in the theory of Riemann *zeta* functions. Modular shuffle products met in the theory of several moduli spaces generalize these products.

We describe the ciclic shuffle product, which contains the regular shuffle product. It was used in the cyclic version of the Eilenberg-Zilber Theorem and also to define an A_∞-algebra structure. It seems that before trying to apply this cyclic shuffle in stochastic calculus (to integrate families of stochastic processes or to apply 1-dimensional transformation groups to them) it is useful to define an Ito version for the cyclic shuffle.

Introducere

Aceasta introducere se doreste a fi completarea unificatoare a sectiunilor de rezumat, concluzii si introducere a fiecarui capitol, continand cateva din problemele deschise , rezultatele asteptate si cele obtinute ale lucrarii de fata. Subiectul economic principal este evaluarea pretului optiunilor Europene (European call option pricing) in linia modelelor de analiza stohastica dezvoltate din anii'70 (modelul Merton Black-Scholes). Derivatele financiare legate de industria turismului (legate de industria petroliera , cursurile de schimb valutar de exemplu) au o istorie indelungata intr-o forma ne-canonica (se pare ca Thales din Milet avea capacitatea de a prevede vremea folosind cunostinte astrologice, si era consultant la semnarea contractelor din agricultura); in 1999 derivatele financiare meteorologice au inceput sa fie tranzactionate la Chicago Mercantile Exchange. In Romania, preturile biletelor de avion pot fi studiate cu metodologia si instrumentele matematice ale preturilor optiunilor Europene.

Econofizica este un domeniu de cercetare multidisciplinar care aplica teorii si metode dezvoltate in fizica pentru a rezolva probleme economice. Marele economist roman Nicholas Georgescu-Roegen se numara printre primii promotori ai termoeconomiei (folosirea conceptului de entropie in economie The Entropy Law and the Economic Process (1971)). Unul din succesele aplicarii econofizicii este explicarea unor elemente ale distributiilor datelor financiare (Y. Liu, P. Gopikrishnan, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng, and H. E. Stanley (1999)*Statistical properties of the volatility of price fluctuations*. Physical Review E 60 (2): 1390. arXiv:cond-mat/9903369. 1999) si [99]. Exista similitudini, analogii intre observabilele cuantice si diverse concepte din stiintele sociale [1](Haven).

Deci o intrebare generala ar fi 'cat de multa matematica' trebuie sa stapanim, ca instrument de lucru, ca limbaj, pentru a fi capabili sa formalizam corect si sa rezolvam problemele actuale ale preturilor optiunilor, legate de exemplu de modele stohastice- de preferinta solvabile- de volatilitate locala, ce odata calibrate pot prevedea evolutia unor indici bursieri, sau a preturilor optiunilor Europene. Ori, raspunsul lucrarii de fata este ca structurile matematice folosite in rezolvarea catorva probleme concrete, matematice, enuntate, sunt deosebit de interesante, avansate si recente. De asemenea, au mai fost folosite in studii de natura inter si trans-disciplinara. Metodologia de lucru poate fi aplicata si in rezolvarea altor probleme matematice similare. La interfata dintre aceste aspecte teoretice si realitatea economica a volatilitatilor istorice, a seriilor financiare stau simularile numerice, metodele Monte Carlo, tehnicile de aproximare folosite de altfel in managementul riscului.

1.Fluxul curburii medii (mean curvature flow) a fost folosit in procesarea imaginilor [140],[141](Batard). Suprafetele minimale sunt puncte critice ale acestui flux. Ecuatiile cu derivate partiale -existenta si unicitatea solutiilor in timp scurt, studiul singularitatilor si ecuatiile de evolutie ale tensorilor geometrici in cazul unor varietati diferentiabile cu metrica depinzand de timp t sunt de asemenea folosite in studiul curentului Ricci, folosit in demonstratia Conjecturii lui Poincare.De exemplu in spatiul 3-dimensional, ecuatia satisfacuta de hipersuprafata de evolutie u(t,x,y) este data de:

$$\frac{du}{dt} = \frac{(1+(\frac{du}{dx})^2)\frac{d^2u}{dy^2} + (1+(\frac{du}{dy})^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{\partial x\partial y}}{(1+(\frac{du}{dx})^2+(\frac{du}{dy})^2)^{3/2}}$$

Studiul suprafetelor minimale a fost inceput de Lagrange in 1762. Plateau in 1832 a realizat experimente cu baloanele de sapun. Computerele folosind ecuatiile fluxului curburii medii sunt capabile sa genereze astfel de suprafete minimale (pe langa natura in care principiile variantionale, "economice" se regasesc), care sunt solutii ale ecuatiei (locale):

$$1+(\frac{du}{dx})^2)\frac{d^2u}{dy^2}+(1+(\frac{du}{dy})^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{\partial x\partial y}=0$$

Exprimarea covarianta a operatorilor de grad 2, aplicabila ecuatiei Black-Scholes, s-a dovedit a fi deosebit de utila. Un Laplacian generalizat pe un fibrat vectorial E peste varietatea Riemann (X,g) este un operator diferential de ordin 2 ce actioneaza pe sectiunile fibratului.O teorema a lui Berline si Getzler afirma ca orice Laplacian generalizat este o suma dintre un Laplacian al unei conexiuni pe E plus un potential.H: $\Gamma(E) \to \Gamma(E)$ =Laplacianul conexiunii: $-\sum_{i,j} g^{ij}(\nabla^E_{\partial i}\nabla^E_{\partial j} - \sum_k \Gamma^k_{ij}\nabla^E_{\partial k})+F \in \Gamma[End(E)]$

2a. In contextul nostru, algebrele Hopf si calculul diferential bicovariant generalizeaza in cazul necomutativ algebra comutativa a functiilor definite pe varietatea M si cateva constructii ale geometriei diferentiale clasice. Hudson, Majid si Dimakis au combinat elementele calculului stohastic cu calculul diferential bicovariant [29],[143].De asemenea teorii ale gravitatiei cuantice folosesc acest instrument algebric [148],[149]. Structura de algebra Hopf si factorizarea algebrica [151],[152],[153] (ce conduce la ne-comutativitatea functiilor date de axele de coordonate) sunt elemente esentiale ale acestor constructii.

2b. Kreimer defineste doua produse asemanatoare produsului shuffle dintre integralele iterate Stratonovich sau Ito pe un spatiu vectorial generat de arbori- pe algebra Hopf Connes-Kreimer, folosita de Gubinelli in rezolvarea ecuatiilor diferentiale stohastice in cazul unor teorii de integrare in care nu avem integrarea prin parti. Gubinelli aplica aceste calcule in cazul celebrelor ecuatii cu derivate partiale Navier-Stokes si Korteweg-deVries. Ex.:

$\partial_t u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x) + \frac{1}{2}[\partial_x u(t,x)]^2 = 0$, u(0,x) data, (t,x) $\in$ R $\times$ T(torus)
In cadrul studiului algebrico-combinatorial al primului produs-care poate fi de altfel aplicat si celui de-al doilea produs- am demonstrat ca interactiunea dintre produsul shuffle si coprodus nu este legata de structura de algebra Hopf, ci este descrisa de conceptele de operad si de structura de bialgebra generalizata. Structurile algebrice de Operad si Bialgebra generalizata au fost definite in monografiile lui Loday, Valette,Markl:[75],[77],[87]. Teoria Yukawa foloseste integrale iterate de forme de volum (in loc de integrarea in raport cu miscarea Browniana), generalizand integrale de forma: $\int_{\mathrm{R}^6} \frac{d^6k}{(2\pi)^6|k|^{2a+z}(k+p)^{2b}}$

2c. Geometria spatiilor de moduli generalizeaza integralele folosite in functia zeta a lui Riemann. Apar produse shuffle modulare, in sensul ca notiunea de shuffle se pastreaza, dar grafurile inzestrate cu diferentiale nu mai sunt arbori, ci devin grafuri cu un singur ciclu de lungime maxima. In [125] si [126] se continua studiile lui Goncharov [158] si se enunta conjectura ca oricare 2 egalitati dintre anumite integrale multidimensionale se poate demonstra folosind Stokes, schimbarea variabilelor si un set finit de relatii de tip shuffle generalizat. O problema similara este gasirea identitatilor algebrice din calculul integral Ito, similare identitatilor satisfacute de polinoamele Hermite in raport cu miscarea Browniana.

2d. Deformari si quantizari ale produsului shuffle si al structurii de algebra asociativa apar in teorii algebrice de index , teoreme de formalitate si geometrie ne-comutativa. O problema deschisa este generalizarea produselor modulare shuffle si a produselor ciclice in cazul stohastic (Ito). Teorema de Formalitate a lui Kontsevich (1997) foloseste idei din teoria stringurilor. Dandu-se o varietate diferentiabila Poisson- algebra A a functiilor definite pe M este inzestrata cu o paranteza Poisson- adica o structura de algebra Lie astfel incat [x,...] este derivare in raport cu structura de algebra asociativa, se pune problema gasirii unei deformari a multiplicarii algebrei asociative A[[t]], astfel incat O(1) este dat de paranteza Poisson iar componentele sunt date de operatori bidiferentiali. Exemplu [157](Kontsevich):

$a = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \Lambda \partial_j$ paranteza Poisson cu coeficienti variabili pe un domeniu din R^d
Atunci urmatoarea formula genereaza un produs asociativ pana la ordinul h^3 :
$f * g = fg + h \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i(f) \partial_j(g) + \frac{h^2}{2} \sum_{i,j,k,l} a_{ij} a_{kl} \partial^2_{ik}(f) \partial^2_{jl}(g) + \frac{h^2}{3} \sum_{i,j,k,l} [a_{ij} \partial_j(a_{kl})][\partial^2_{ik}(f) \partial_l(g) - \partial^2_{il}(g) \partial_k(f)]$

3. Simularile numerice realizate cu ajutorul supercomputerelor pentru diverse scenarii economice se fac in managementul riscului, in cazul indexilor bursieri, al cursului de schimb valutar. Modelele stohastice folosite se bazeaza pe o multime impresionanta de date economice ce dateazea din secolul 18. Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (1870 1946) este considerat primul ce discuta in teza sa folosirea miscarii Browniene in studiul derivatelor financiare. Integralele de drum s-au folosit in mecanica cuantica, fizica statistica, polimeri ,precum si in studiul pietelor financiare. Simularile numerice au ca baza teoretica aproximarea Wentzel-Kramers-Brillouin folosita initial in stiudiul ecuatiei Schrodinger cu coeficienti ce depind de timp. Urmatoarele distributii au fost identificate ca fiind aplicabile domeniului financiar si studiate cu ajutorul integralelor de drum.

Distributii Levy truncate: $L(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipz} \exp[-H(p)]$, unde Hamiltonianul H(p) este dat de

$$\mathrm{H(p)} = \sigma^2 \frac{(\alpha^2 + p^2)^{\lambda/2} \cos(\lambda \arctan(p/\alpha)) - \alpha^\lambda}{\alpha^{\lambda-2} \lambda (1-\lambda)}$$

Distributii Levy: $L(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipz} \exp[-(\sigma^2 p^2)^{\lambda/2}/2]$
Distributii Meixner: $M(z) = \frac{[2\cos(b/2)]^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} |\Gamma((d+iz)/a)|^2 \exp(bz/a)$

Distributiile hiperbolice simetrice generalizate au fost aplicate in studiul empiric al unor indici bursieri europeni (Germania), Brazilia, China si India. Concluzia noastra este ca in aplicarea modelelor 1-dimensionale de volatilitate locala (aproximarea suprafetei de volatilitate implicita si a nucleului caldurii), folosirea dezvoltarilor asimptotice de ordin 2 folosite in teoria integralelor de drum, trebuie precedata de parametrizarea (timp, forward moneyness) in cazul in care studiile empirice ale suprafetei de volatilitate locala implicita duc la concluzia ca distributia hiperbolica generalizata aproximeaza suficient de bine anumite serii de active financiare.

Doresc sa aduc pe aceasta cale multumiri managerilor proiectului Cerbun-POSDRU, urmatorilor profesori: Prof. Dr. Ciutacu, prof. L.Ornea, Prof. Victor Nistor,Prof. Emil Lungu, colegilor din cadrul studiilor postdoctorale POSDRU- Cerbun, regretatului Prof. Constantin Tudor, precum si profesorilor:Vasile Brinzanescu, Radu Purice, Lucian Beznea, Cezar Joita, Gabriel Turinici, profesorilor indrumatori de la stagiile europene din centrele: SISSA Trieste, Universite Paris Dauphine si Humboldt University- Berlin, multumiri deosebite pentru ospitalitate, indrumare si colaborare.

Capitolul I

Abstract

S-a constat empiric si argumentat teoretic ca modelul stohastic clasic Black-Scholes de evaluare a preturilor optiunilor Europene are o putere de predictie scazuta. Diverse modele de volatilitate locala si metode din Quantum Field Theory (introduse in [1]Haven (2008) folosind termenul de Econofizica) au fost propuse. Procesele de difuzie au condus la solutiile unor ecuatii cu derivate partiale pentru probability density functions si pentru pretul optiunilor ce nu au o formula inchisa , concreta, similara modelului clasic Black-Scholes. Ne propunem sa explicam de-a lungul primelor 2 capitole ne-prezenta in cadrul economic a unor modele solvabile. Deducem o ecuatie cu derivate partiale ce caracterizeaza anumite modele solvabile date de o functie de volatilitate locala si o clasa de solutii hypergeometrice. Demonstram o teorema ce afirma ca pretul basket-optiunilor, ce depind de mai multe produse financiare, nu poate fi exprimabil printr-o functie/formula a unui model omogen standard fixat(de exemplu o ecuatie de caldura n-dimensionala euclidiana), in cazul in care coeficientii ecuatiei diferentiala stohastice depind de timp. Aceasta problematica s-a dovedit a fi conexa cu existenta miscarii Browniene pe o varietate cu metrica dependenta de timp si cu studiul unor operatori hypoeliptici, pentru care avem formule explicite, chiar si de aproximare, in putine cazuri.

1 1.Introducere

Cautarea de modele stohastice solvabile, de calibrare sau predictie, aplicabile in option pricing a avut ca punct initial de comparatie modelul Black-Scholes, asociat ecuatiei caldurii- caz particular al unor modele asociate unei varietati diferentiabile Riemannene.

1. Integralele de drum, folosite in Mecanica Quantica au fost aplicate in option pricing de [5] Linetzky (1998) si [6] Taddei (1999). Ei au asociat la orice ecuatie diferentiala stohastica un Lagrangian si un Morette-Van Vleck determinant necesar calcularii integralei de drum, calculabil in putine cazuri: in modelele Gaussiene si in modele ce pot fi reduse la cele Gaussiene printr-o schimbare de variabile, reparametrizari de timp si proiectii (Ex: the Black-Scholes model, Ornstein-Uhlenbeck, Cox-Ingersoll-Ross model, procese Bessel. Linetsky (1998 p.146). Nu am gasit situatii in care pretul teoretic al optiunilor sa fie calculabil prin path-integrals, si necalculabil folosind tehnici de PDE.

Pentru inceput studiem anumite intrebari ridicate de modele de volatilitate locala multi-dimensionale Black-Scholes, legate de solvabilitate si schimbarea variabilelor (asociate in economie unor schimbari de numerar si evolutii temporale a punctului de referinta) folosind tehnici din geometria diferentiala si algebrele Hopf traditional legate de conceptele de independenta fata de sistemul de referinta si de simetrie Lie sau quantica.Hudson si Parthasarathy sunt considerati creatorii primului calcul stohastic quantic; o quantum Black-Scholes formula a fost obtinuta de [2]Boukas si Accardi (2007). [3]Hudson(2009) a generalizat calculul Ito introducand conceptul de algebra Hopf Ito a unei algebre asociative si a analizat structurile quasitriangulare si o formula pentru antipod. Structura de algebra Hopf a integralelor stohastice multiple a fost folosita de [4]Henry-Labordere (2009, p. 353), ce a studiat modelele abeliene si nilpotente de volatilitate locala pentru option pricing .

2 Simetrii clasice. Modele de volatilitate locala

2.1.0. Consideram un activ financiar condus de o miscare Browniana; dinamica pretului sau e descris de urmatorul proces Ito:

$$dx_t = a\left(x_t, t\right) dt + b\left(x_t, t\right) dW.$$

W este o miscare Browniana. Pretul bond-ului este un proces deterministic:

$$dx^0 = rx^0 dt \Rightarrow x^0(t) = e^{r(t-T)}.$$

Ecuatia Black-Scholes este urmatoarea ecuatie cu derivate partiale cu functie necunoscuta $f(x,t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf. \tag{3}$$

In cazul unor ipoteze rezonabile pentru functiile de drift si volatilitate $a(x,t)$ si $b(x,t)$, exista o unica solutie pe $[0,T]$ pentru procesul stohastic si pentru f, unde $f(x,T) = h(x)$ o functie data. De obicei $h(x) = \max(x-K,0)$; K este pretul de exercitare. $f(x,0)$ este pretului unei European call option cu maturitate T si strike price K, pentru un pret dat al activului, x la momentul $t=0$.

In general nu exista o formula explicita pentru $f(x,t)$, una din exceptii fiind cazul $a =$ constant si $b(x,t) =$xconstant. *ceea ce ar implica o distributie normala contrazisa de evidentele empirice.*

Cand putem face o schimbare de variabile pentru a transforma ecuatia (3) in ecuatia caldurii

$$h_t + \frac{1}{2}h_{xx} = 0 \tag{4}$$

(indicii sunt derivate partiale in raport cu x sau t)? Prin schimbare de variabile intelegem existenta functiilor $c(t)$ si $H(x,t)$, astfel incat pentru orice f care este solutie a ecuatiei (3), $c(t)f(H(x,t),t)$ va fi solutie pentru ecuatia (4). Aceeasi problema poate fi pusa in cazul multi-dimensional, cand pretul optiunilor depinde de cel putin doua produse financiare. Avem o relatie de echivalenta pe multimea PDE's definite de (a,b,r), daca impunem ca aplicatia $(x,t) \to (H(x,t),t)$ sa fie difeomorfism.

2.1.1. Daca f satisface (3) si

$$f(x,t) = e^{rt}g\left(e^{-rt}x,t\right) \Rightarrow f_t = rf + e^{rt}g_t - rg_x,$$

$$f_x = g_x f_x = e^{-rt}g_{xx} \Rightarrow g$$

satisface $g_t + \frac{1}{2}B^2 g_{xx} = 0$, unde $B(x,t) = b\left(e^{rt}x,t\right)e^{-rt}$.

daca $g(x,t) = u\left(H(x,t),t\right)$, unde

$$u_t + \frac{1}{2}u_{xx} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g_t = u_t + u_x H_t \\ g_x = u_x H_x \\ g_{xx} = u_{xx}\left(H_x\right)^2 + u_x H_{xx} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_t + \frac{1}{2}B^2 g_{xx} = u_t\left[1 - B^2 H_x^2\right] + u_x\left[H_t + \frac{1}{2}B^2 H_{xx}\right] = 0.$$

In cazul particular $u(y,t) = y \Rightarrow H$ e solutie pentru

$$H_t + \frac{1}{2}B^2 H_{xx} = 0 \Rightarrow 1 - B^2 H_x^2 = 0 \Rightarrow H_x = \pm\frac{1}{B}$$

$$H_t = -\frac{1}{2}\frac{H_{xx}}{H_x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H_x}\right) = \pm\frac{1}{2}B_x\frac{\partial}{\partial t}H_x = \frac{\partial}{\partial x}H_t \Leftrightarrow \pm\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{B}\right) = \pm\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}B_x \Leftrightarrow B_t + \frac{1}{2}B^2 B_{xx} = 0. \tag{5}$$

$$H = \int_a^x \frac{1}{B}(y,t)dy + C. \tag{8}$$

Solutia generala pentru u este $u(x,t) = V\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, T-t\right)$ unde

$$V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} f(y)dy.$$

[7] Jost (2002, p.87, Section 4.2 multidim. heat equation).

Daca $B = \frac{1}{f}$, unde $B_t + \frac{1}{2}B^2 B_{xx} = 0$, atunci

$$f_t + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{f^2} f_x\right] = 0. \tag{5}$$

Aceasta este conditia necesara si suficienta, (5) care trebuie satisfacuta de volatilitatea locala b, sau echivalent de B , pentru existenta unei functii H care transforma orice solutie a ecuatiei caldurii intr-o solutie a ecuatiei (3). $c(t)$ este in acest caz o functie exponentiala. Ecuatia (5) ne spune ca volatilitatea B este ea insasi un option price pentru propria ecuatie Black-Scholes.

2.1.2. Rezultate standard din PDE ne asigura de existenta si unicitatea unei solutii pentru (5) cu conditii de frontiera date. Simetriile Lie a acestei ecuatii de caldura neliniare au fost studiate in [8] Vaneeva 2008. In [9] Nadjafikhah (2010) e considerata un caz particular al unei ecuatii generale Burgers. Ambele lucrari furnizeaza generatorii infinitezimali ale unor grupuri de simetrie 1-dimensionale. Urmatoarele solutii ale ecuatiei (5) se gasesc in [10] Polyanin (2004, pag 43; versiune web), avand in acest fel o clasa de modele stohastice cu PDE solvabil ce depinde de parametrii ce pot fi calibrati conform datelor empirice:

$$w(x,t) = \left[\frac{-2(x+A)^2}{\varphi(t)} + B\,|x+A|^2\,|\varphi(t)|\right]^{-\frac{1}{2}},\ \varphi(t) = C - 2a(2+2)t,$$

2.2. Demonstram ca teoria polinoamelor Hermite in 2 variabile furnizeaza solutii ale ecuatiei (5) in mod automat.

Teorema 2.2.1. Fie $y_t = H_n(B_t, t)$ procesul stohastic definit de al n^{lea} Hermite polynomial in 2 variabile. Atunci el satisface o ecuatie diferentiala stohastica Ito fara drift a carei functie de volatilitate satisface ecuatia (5).

Demonstratie. Sunt cateva posibilitati de a defini polinoamele Hermite in una si doua variabile:

$H_0 = 1$, $H_1 = x$, $H_2 = x^2 - t$, $H_3(x,t) = x^3 - 3xt$, $H_4(x,t) = x^4 - 6x^2t + 3t^2$,

$H_n^{\#}(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,t)\frac{y^n}{n!} = e^{xy - \frac{y^2 t}{2}}$; $H_n(x,t) = t^{\frac{n}{2}} H_n^{\#}(x)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$,

unde $H_n^{\#}$ sunt Hermite polinomials de o variabila definite mai sus. Sunt polinoame monice ce satisfac

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m^{\#}(x) H_n^{\#}(x) e^{\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} n! \gamma_{mn}$$

si $H_t + \frac{1}{2}H_{xx} = 0$ [11] Widder (1975) p. 9. In teoria integrarii stohastice Ito, satisfac relatia fundamentala:

$$\int_0^t H_n\left(B_S, S\right) dB_S = \frac{H_{n+1}\left(B_t, t\right)}{n+1}$$

B miscare Browniana.

$$dy_n = dH_n\left(B_t, t\right) = \left(H_n\right)_x dB_t + \left(\frac{1}{2}H_{xx} + H_t\right) dt = \left(H_n\right)_x dB_t.$$

Am folosit mai sus regula Ito si eq. 9. Fie $f_n(\cdot, t)$ inversa functiei de variabila x $H_n(\cdot, t)$. t vazut ca parametru.

$$H_n(f_n(x,t),t) = x \Rightarrow B_t = f_n(y_t, t) \Rightarrow dy_n = \left(H_n\right)_x \left(f_n\left(y_t, t\right), t\right) dB_t H_n\left(f_n\left(x, t\right), t\right) = x$$

derivam in raport cu $x \Rightarrow \left(H_n\right)_x \cdot f_n' = 1 \Rightarrow dy_{n;t} = \dfrac{1}{f_n'}\left(y_{n;t}, t\right) dB_n$. f_n' este x-derivata lui f.

Indexul n pentru procesul stohastic y_t arata dependenta de al n^{lea} Hermite polynomial.

Vrem sa demonstram ca $b = \dfrac{1}{f_n'}$ satisface ecuatia 5).

$$f\left(H\left(x,t\right), t\right) = x \Rightarrow f_x H_x = 1 \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f_{xx}\left(H_x\right)^2 + f_x H_{xx} = 0 \tag{1}$$

$$f\left(H\left(x,t\right), t\right) = x \Rightarrow \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} f_t\left(H, t\right) + f_x H_t = 0 \Rightarrow f_t - \frac{1}{2} f_x H_{xx} = 0. \tag{2}$$

Relatiile (1) and (2) implica

$$\Rightarrow f_t\left(H(x,t), t\right) + \frac{1}{2}\left(H_x\right)^2 f_{xx}\left(H(x,t), t\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_t(H,t) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f_x\left(H(x,t), t\right)}\right]^2 f_{xx}\left(H(x,t), t\right) = 0.$$

Egalitatea este adevarata oricare $y = H(x,t)$ si t, deci

$$f_t(y,t) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f_x\left(y,t\right)}\right]^2 f_{xx} = 0$$

$$f_t = -\frac{f_{xx}}{2\left(f_x\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{f_{xx}}{2\left(f_x\right)^2}\right).$$

$$\Rightarrow f_{xt} = \frac{2\left(f_{xx}\right)^2 - f_x f_{xxx}}{2\left(f_x\right)^3}.$$

Pentru functia $b = \dfrac{1}{f_x}$,

$$b_t = \frac{-f_{xt}}{\left(f_x\right)^2} = \frac{f_x f_{xxx} - 2\left(f_{xx}\right)^2}{2\left(f_x\right)^5} = -\frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{2\left(f_{xx}\right)^2 - f_x f_{xxx}}{\left(f_x\right)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{2\left(f_{xx}\right)^2 f_x - \left(f_x\right)^2 f_{xxx}}{\left(f_x\right)^4} = -\frac{1}{2} b^2 b_{xx}$$

q.e.d. unde am folosit ca $b = \dfrac{1}{f_x}$, $b_x = \dfrac{f_{xx}}{\left(f_x\right)^2}$, $b_{xx} = \dfrac{-f_{xxx}\left(f_x\right)^2 + 2\left(f_{xx}\right)^2 f_x}{\left(f_x\right)^4}$; si ca operatorii diferentiali $\dfrac{\partial}{\partial t}$ si $\dfrac{\partial}{\partial x}$ comuta.

2.2.4 Quasi-omogenitate. Ecuatii cu derivate partiale

Am vazut ca daca $B_t + \frac{1}{2}B^2 B_{xx} = 0 \Rightarrow$ atunci exista W, solutie a ecuatiei caldurii $W_t + \frac{1}{2}W_{xx} = 0$ astfel incat $B(x,t) = W\left(\int\limits_x \frac{1}{B}, t\right)$. In cazul special al polinoamelor Hermite, $B = \frac{1}{f_n'}$ unde $H_n(f_n, t) = x \Rightarrow B = W(f_n, t)$.

Pentru $x = H_n(y,t) \Rightarrow B(H_n(y,t),t) = W(y,t)$. Deci B este determinata de o solutie W a ecuatiei caldurii. $B\left(t^{n/2}h_n(x), t\right) = W\left(x\sqrt{t}, t\right)$, unde h este polin. Hermite de o variabila. Din definitia lui H_n rezulta ca $B(x,t) = t^{\alpha} q\left(xt^{\beta}\right)$, ce forteaza $W(x,t) = \sqrt{t}a\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. Un calcul simplu ne arata ca $a'' - xa' + a = 0$.

Pentru $a = e^f \Rightarrow e^f\left(f'' + (f')^2\right) - xe^f f' + e^f = 0 \Rightarrow f'' + (f')^2 - xf' + 1 = 0 \Leftrightarrow f'' + (f' - x/2)^2 = (x/2)^2 - 1$. Daca

$$g = f' - (x/2) \Rightarrow g' = f'' - (1/2) \Rightarrow g' + g^2 = (x/2)^2 - (3/2). \tag{2}$$

Daca

$$g = h' \Rightarrow h'' + (h')^2 = (x/2)^2 - (3/2) \Rightarrow \left(e^h\right)'' = \left((x/2)^2 - (3/2)\right)e^h \Rightarrow A'' = \left((x/2)^2 - (3/2)\right)A. \tag{1}$$

Ecuatiile equivalente 1 si 2 sunt ecuatiile diferentiale ordinare ce genereaza solutii quasi-homogene ale ecuatiei 5. Solutia generala pentru eq. 1 este $y(x) = c_1 D_1(x) + c_2 D_{-2}(ix)$ ([12] Wolfram mathematica 2011), unde D_V este “the parabolic cylinder function”.

$D_V(z) = 2^{\frac{V}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} U\left(-\frac{1}{2}V, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z^2\right)$, U este functia hypergeometrica confluenta de prima speta. Eq.(2) este o ecuatie Riccati, a carei solutie generala se scrie de asemenea in functie de D_V. $U(a,b,z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int\limits_0^1 e^{zt} t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\mathrm{d}t$, unde $\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

2.3. Intr-un context total diferit, ecuatia 5) si una din solutii ce genereaza modelul hiperbolic este mentionata in cartea lui Henry-Labordere [4]p.367 eq B.7. Modelul hiperbolic este dat de $\sigma(t,f) = \sqrt{a(t)f^2 + b(t)f + c(t)}$, , $a(t) = a_0$, $b(t) = b_0$. El demonstreaza ca daca $y_t = \sigma(y_t, t)\mathrm{dW}$ si σ satisface ecuatia 5), atunci y_t poate fi simulata exact folosind metode Monte Carlo.

3 Procese de difuzie multidimensionale. Reducerea la ecuatia caldurii

O problema similara este: dandu-se o ecuatie diferentiala stohastica n-dimensionala care descrie evolutia unui index format din n asset prices, cand ecuatia Black-Scholes de evaluare a optiunilor poate fi transformata, intr-un mod specific ce va fi definit mai jos, la ecuatia caldurii in $\mathbb{R}^n$? W_i sunt n miscari Browniene independente standard. Dinamica celor n preturi este data de:

$$dX_t^{\mu} = rX_t^{\mu} + \sum_i \sigma_i^{\mu}(X(t),t)dW_i.$$

r este dobanda constanta. Definim $G^{\alpha\beta}(x,t) = \sum_i \sigma_i^{\alpha}\sigma_i^{\beta}$. Urmand Henry-Labordere ([4], p. 32), presupunand a fi indeplinite conditii suficiente pentru existenta si unicitatea unei solutii puternice pentru ecuatia diferentiala stohastica (e.g.Kunita-Watanabe) si folosind echivalenta dintre

2 forme ale SDE descrise de correlated sau uncorrelated Brownian motions, via descompunerea Choleski a matricei $G^{\alpha\beta}(x,t)$), ecuatia multidimensionala Black-Scholes este:

$$\partial_t f(x,t) + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = r\left(f - x_i \partial_i f\right). \tag{1}$$

Atunci $h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, t\right) = e^{-rt} f\left(x_1 e^{rt}, x_2 e^{rt}, \ldots, x_n e^{rt}, t\right)$ satisface

$$h_t + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0, \tag{2}$$

unde $g^{\alpha\beta}(x,t) = G^{\alpha\beta}\left(xe^{rt}, t\right) e^{-2rt}$. $h_{\alpha\beta}$ sunt derivatele partiale ale lui h.

Definitie Spunem ca ecuatia 2 este echivalenta cu ecuatia caldurii daca exista n functii $H_1(x,t), \ldots, H_n(x,t)$, t (timp) si $xin\mathbb{R}^n$ astfel incat pentru orice W, solutie a ecuatiei

$$W_t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0, \tag{6}$$

$W\left(H_1(x,t), \ldots, H_n(x,t), t\right) = h(x,t)$ este solutie pentru ecuatia (2). Si pentru orice h solutie a ecuatiei (2), exista W ca mai sus. Pentru a raspunde la aceasta intrebare am folosit o abordare econofizica, legata de transcrierea covarianta a ecuatiilor implicate. Contextul se poate generaliza inlocuind ecuatia caldurii,clasice, cu ecuatia caldurii asociata unui operator eliptic ai carui coeficienti nu depind de timp.

3.1 Econofizica. Exista o abordare bazata pe integralele de drum in calculul anumitor observabile din mecanica quantica si matematica financiara. Formula Feynman -Kac conecteaza solutiile ecuatiei Black-Scholes cu teoria probabilitatilor. Probabilitatea de tranzitie sau nucleul caldurii sunt calculate ca o integrala peste spatiul tuturor drumurilor, fiecare avand o anumita probabilitate si in raport cu o anumita masura.

$$f(t,x) = E^{t,x}\left[e^{-r(T-t)} h(X(T))\right] = \int dX(T) e^{-r(T-t)} h(X(T)) p(X(T), T | x(T), t)$$

$$O(S(t), t) = E^{t,S(t)}\left[e^{-r\tau} \mathcal{F}\left(e^{X(T)}\right)\right], \qquad \tau = T - t$$

[5] Taddei si [6] Linetzki au propus un Lagrangian care poate fi folosit in aproximarea heat kernel-ului. Instantonii sunt solutii ale ecuatiei Euler-Lagrange

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'()}\right) - \frac{\partial}{\partial x()}\right] L(\dot{x}(t), x(t), t) = 0,$$

privite ca drumuri de maxima probabilitate , ce pot aproxima $p(a, b|x, y)$. [13] Batard si Henry-Labordere, printre altii, au scris o formulare covarianta a ecuatiei Black-Scholes si a Lagrangian-ului asociat. Prin formulare covarianta se intelege in general formule ce folosesc cantitati ce se comporta tensorial la schimbari de variabila, asemanator schimbarilor de variabile integrale multidimensionale.

Revenim la ecuatia 2 din acest capitol: $\left(g_{\alpha\beta}\right) = \left(g^{ij}\right)^{-1}$ este inversa matricei data de $g^{\alpha\beta}(x,t)$. Taddei(1999) defineste un Lagrangian, care pentru un SDE fara drift este egal cu $L\left[x, \dot{x}, t\right] = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{1}{12} R$, unde R este definit astfel:

$$R = \sum_{i,j,k} g^{ij} R^k_{ikj} \; R^a_{bcd} = \frac{\partial P^a_{bc}}{\partial X_d} - \frac{\partial P^a_{ad}}{\partial X_c} + \sum_k P^k_{bc} P^a_{dk} - P^k_{bd} P^a_{ck},$$

unde P se defineste mai jos:

$$P^a_{bc} = \frac{1}{2}\sum_k g^{ka}\left(\frac{\partial g_{ck}}{\partial X_b} + \frac{\partial g_{bk}}{\partial X_c} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial X_k}\right).$$

Apare urmatorul corolar al abordarii covariante a lui Taddei:

Propozitie. Daca ecuatia (2) este echivalenta cu ecuatia caldurii, atunci $R \equiv 0$.

Proof. Consideram Langrangian-ul $L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{12}R$, asociat cu SDE $dX^\mu_t = \sum_i f^\mu_i(x,t)dW_i$, unde $g^{ij} = \sum_k f^i_k f^j_k$ Deoarece SDE este fara drift, ambii termeni ai lui L se schimba covariant la schimbari de coordonate. Daca $R \equiv 0$ intr-un sistem de coordonate si anume cel al ecuatiei caldurii, $\Rightarrow R \equiv 0$ in orice coordonate $\Rightarrow$ si astfel avem un test usor de verificare daca ecuatia (2) ar putea fi echivalenta cu (6).

Observatie Dandu-se g's, existenta volatilitatilor locale f's sunt consecinta a Choleski decomposition ([4] Henri-Labordere, pag.76, Remark 4.1). Pentru $n = 2$, conditia $R = 0$ nu e numai necesara, dar e si suficienta (Teorema lui Gauss), in cazul in care coeficientii g nu depind de timp. Pentru $n \geq 3$ Eqs. (2) $\Leftrightarrow$ (6) daca si numai daca toti $R^a_{bcd} = 0$ (consecinta a Theorem 2.10 pag 57, Ex.5 pag 60, [14]Rosenberg (1997)) si a urmatoarei **propozitii esentiale**.

Propozitie 4.1. Daca ecuatia $(\Delta_t + d_t)f = 0$ este echivalenta cu ecuatia caldurii in $\mathbb{R}^n$, atunci H_i si (g^{ij}) nu depind de timp.

Demonstratie. Ecuatia (2) poate fi scrisa $(\Delta_t + d_t)f = 0$ unde Δ_t si d_t sunt urmatorii operatori diferentiali $d_t = \partial_t + B$, where $B = \sum_{j=1}^n g_{ij}(A_iA_j - \partial_iA_j)\Delta_t$ este operatorul Laplace-Beltrami asociat metricii data de inversa lui $(g^{\alpha\beta})$, care ar putea depinde de t, de aici folosirea indexului t. (Rosenberg 1997, pag.18, defn. of Laplace-Beltrami operator.)

$$g = \det(g_{ij}) \quad \Delta = \mathrm{g}^{-1/2}\sum_{i,j=1}^n \partial_i(\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{g}^{ij}\partial_j)$$
$$A_i = -\tfrac{1}{2}\mathrm{g}^{-1/2}\sum_{j=1}^n(g_{ij}\sum_{k=1}^n \partial_k(\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{g}^{kj}))$$

Pentru $W = x_i \Rightarrow \Delta_t H_i + d_t H_i = 0$. Axele de coordonate nu depind de timp, deci pentru orice t fixat, ecuatia caldurii satisfacuta evident de o coordonata x este transformata folosind H in ecuatia $\Delta^{(t)}H_i = 0$, deoarece operatorul Laplace-Beltrami operator se transforma covariant la schimbari de coordonate. Aplicam existenta functiilor H's ce dau echivalenta dintre multimile solutiilor ecuatiilor 2 si 6 pentru cazuri particulare ale lui w.

$$\Delta_{^n}(W = x_i) = 0 \Rightarrow \Delta_t H_i = 0 \Rightarrow \partial_t H_i = -BH_i$$

. Folosim aceasta relatie mai jos:

Fie W o solutie independenta de timp a ecuatiei caldurii multidimensionale euclidiene.

$$\Rightarrow \Delta_{R^n}W = 0 \Rightarrow \Delta_t W(H_1,\ldots,H_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_i \partial_i W H^i_t = -BW \Leftrightarrow -B\left(W - \sum \partial_i W * H_i\right) = 0.$$

Relatia de mai sus este adevarata pentru orice variabile $y_i = H_i(X,t) \Rightarrow B = 0$ sau $\sum X_i \frac{\partial W}{\partial X_i} = W$. Alegand o solutie particulara W ne-omogena, $\Rightarrow B = 0 \Rightarrow \partial_t H_i = 0 \Rightarrow H = (H_1,\ldots,H_n)$ nu depind de timp $\Rightarrow (g^{ij})$ este time-independent deoarece pentru orice t, metrica in coordonatele (x)- este pullback-ul metricii standard data de transformarea H. Matricea metricii g-este JJ^t, unde J este Jacobianul lui H, care nu depinde de timp (q.e.d).

Observatie Rationamentul de mai sus se poate aplica pentru orice model fixat (in loc de ecuatia caldurii in spatiul euclidian) in care coordonatele (x(t)) sunt armonice: solutii ale ecuatiei Laplace. Coordonatele armonice au fost studiate de Einstein (1916) in contextul teoriei relativitatii si studiate pe varietati Riemann de [89] DeTurck si Kazdan (1981), care au demonstrat ca ele exista pe orice varietate Riemann cu metrica suficient de smooth. In concluzie, daca coeficientii (g) asociati unei ecuatii diferentiale stohastice depind de timp, solutiile ecuatiei Black-Scholes asociate nu pot fi in corespondenta bijectiva data de o transformare (H) ca mai sus, cu solutiile ecuatiei caldurii asociate unei metrici fixate, ce nu depinde de timp.

Non-equivalenta (care de cele mai multe ori, datorita lipsei solutiilor concrete implica non-solvabilitate) in cazul unei metrici dependente de timp se poate aplica si in cazul unei metrici degenerate, avand o dezvoltare in serie Taylor pornind de la ecuatia diferentiala stohastica asociata; se bazeaza pe teoria operatorilor hipoeliptici, folosita in Matematicile Financiare in conextul formulelor de cubatura pe spatiul Wiener dezvoltate de Lyons si Victoir, ce vor fi amintite in capitolul urmator.

Fie L un operator pe M. L=$V_0 + \sum_{i=1}^{d} V_i^2$, V campuri vectoriale
Definitie: L satisface conditia Hormander daca dim span $\{\mathrm{V}_I(\mathrm{x}_0),\ |\mathrm{I}| \leq \ \mathrm{N}\} \ = $ dim M in orice punct x_0
$\mathrm{V}_I = [\mathrm{V}_a, [\mathrm{V}_b, [\mathrm{V}_c....]]]$
In cazul unui proces stohastic cu metrica asociata degenerata, daca L este sub-eliptic si dependent de timp, atunci ecuatia Black-Scholes asociata nu se poate reduce la o ecuatie cu coeficienti ce nu depind de timp printr-o transformare de tipul (H).

3.1 Fluxuri geometrice

Metricile ce depind de timp si ecuatiile de camp asociate au fost studiate in contextul diferitelor modele ale Teoriei Relativitatii (metricile Robertson-Walker, de Sitter). Recent , Conjecturile lui Poincare si de Geometrizare au fost demonstrate folosind Ricci flow, concept introdus de Richard Hamilton. Urmatoarele ecuatii de evolutie au fost extrase din [90] si au fost folosite in cazul particular al curentului Ricci pentru a descrie ecuatii de evolutie geometrice.
Teoria fluxului curburii medii (mean curvature flow) contine elemente de invarianta la transformarile de tipul $(t, x) - - > (t,\ H(t, x))$ si anume teoreme de existenta a unor transformari ce anuleaza drift-ul unor ecuatii cu derivate partiale, conexiuni cu miscarea Browniana pe varietati cu metrica oscilanta. Prezentam dupa lucrarile [94], [95], [96] cadrul teoretic si cateva rezultate relevante. Cu exceptia ultimei teoreme de la pagina 17, care constituie corolarul nostru la Lemma-DeTurck si a propozitia 4.1 (pag 15) cu aplicatie la ecuatia Black-Scholes Merton, toate rezultatele se regasesc in lucrarile [94], [95], [96] ca instrumente de lucru in cazul fluxurilor Ricci si mean curvature flow.

Evolutia functiilor geometrice la variatii ale metricii. g_t metrica variabila. $\frac{\partial}{\partial_t} g_{ij} = v_{ij}$

$$\frac{\partial}{\partial_t}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\nabla_i v_{jl} + \nabla_j v_{il} - \nabla_l v_{ij})$$

$$\frac{\partial}{\partial_s}\Delta_{g(s)} = -v_{ij}\nabla_i\nabla_j - g^{ij}(\frac{\partial}{\partial_t}\Gamma_{ij}^k)\nabla_k$$

$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} v_{kl}$
$\frac{\partial}{\partial t} R^l_{ijk} = \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^l_{jk} - \nabla_j \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^l_{ik}$, unde R_{ij}=R^p_{pij}, $R^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^l_{ip} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{jp}$, $R_{ijkl} = g_{lp} R^p_{ijk}$

Consideram

$F_0 : M^n \longrightarrow (N^{n+1}, \overline{g})$ imersie
$F : M^n x[0,T] \longrightarrow (N^{n+1}, \overline{g})$ familie de hipersuprafete satisfacand :
$\frac{\partial F}{\partial t}(p,t) = -fv(p,t)$, p $\in$ M, v vector normal unitar, f functie simetrica omogena in *curburile principale la suprafata* $F(p,t)$

Forma a II-a fundamentala (h_{ij})=<$\nabla_{e\_i} v, e_j$> se mai poate defini cu relatiile Weingarten $h_{ij} g^{jl} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^l} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{bc} \frac{\partial F^b}{\partial x^i} v^c$. In coordonate normale in p, in care $g_{ij} = \delta_{ij}$si $\nabla^T_{e\_i} e_j = 0$, atunci (h_{ij})=diag(λ_j).Teoreme de existenta si unicitate ale fluxului pentru mean curvature flow au fost demonstrate de Hamilton si DeTurck. -H=-$\sum \lambda_i$=f.

Teorema : $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = 2fh_{ij}$, unde g este metrica indusa de F(t,) pe M
$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -2fh^{ij}$, $\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta_{g_t} F$ Ecuatia satisfacuta de F in cazul fluxului curburii medii (mean curvature flow) este un sistem de ecuatii parabolice F= $F^A(x^1, x^2 ... x^n, t)$, A=1,2...n+1

$$\frac{\partial}{\partial t} F^a = \sum_{i,j,b} g^{ij} P^a_b \frac{\partial^2 F^b}{\partial x_i \partial x_j}, \text{ unde } (\mathrm{g}^{ij})^{-1} = (\frac{\partial F^a}{\partial x_i} \frac{\partial F^a}{\partial x_j}) \text{ si } P^a_b = \delta^a_b - g^{kl} \frac{\partial F^a}{\partial x_k} \frac{\partial F^b}{\partial x_l}$$

Pe M x R definim metrica
$g_f = g(x,t)dx + \mathrm{f(x,t)dt}$, X(t) : M $\longrightarrow$ M x R, X(t)(x) = (x, t)
Atunci $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2fh_{ij}$. Daca f(x, t) = R(x, g(t))suprafetele evolueaza dupa mean curvature flow
$\phi(t) \in Diff(M^n_0)$ X(t) =$\partial_t \phi(t)$ $\in$ TM$_t$, G(x, t) = F($\phi(x,t)$, t)

$\partial_t G = \overrightarrow{H}(G(x,t)) + DF(t).X$ O schimbare de parametrizare a suprafetelor schimba ecuatia $\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta_{g_t} F$. Totusi si in cazul lui G se verifica relatia $< \frac{\partial F}{\partial t}, N >= H(F(t))$

Teorema: oricare F ce verifica $< \frac{\partial F}{\partial t}, N >= H(F(t))$, exista unic $\phi(t) \in Diff(M^n_0)$ astfel incatG(x, t) = F($\phi(x,t)$, t)este mean curvature flow.

In acest caz $\phi(x,t)$ este solutia ecuatiei $\partial_t \phi(t) = -[DF(\phi(x,t)\ ,t)]^{-1} (\partial_t F(\phi, t)^{TM(t)}$. Generalizarea acestei teoreme pe varietatea target izomorfa cu N x [0,T] implica ca difeomorfismul (t,H(t,) nu depinde de timp deoarece transforma un mean curvature flow dat intr-unul generat de o varietate fixata.

Propozitie (DeTurck) Printr-un astfel de difeomeorfism ecuatia $\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta_{g_t} F + v^k \nabla_k F$ se transforma in ecuatia $\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta_{g_t} F + (v^k + \frac{dy^k}{dt}) \nabla_k F$, satisfacuta de F(t, y(t,x)). Alegand $v^k = -\frac{dy^k}{dt}$ si $v^k = g^{ij}(\Gamma^k_{ij} - \overline{\Gamma^k_{ij}})$ ecuatia de definitie a mean curvature flow devine o ecuatie strict parabolica pentru care se pot aplica rezultate standard de existenta locala.

Teorema Se considera ecuatia multi-dimensionala Black-Scholes in cazul unei matrici nedegenerate.

$$h_t + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0 \tag{2}$$

Se calculeaza coeficientii Γ^k_{ij} si se aplica transformarea (t,y(t,x)) care verifica $\sum g^{ij} \Gamma^k_{ij} = \frac{dy^k}{dt}$. Daca cel putin unul din coeficientii matricei $Jacobian(y) G Jacobian(y)^T$ depinde de timp, atunci nu mai putem face o schimbare de variabile (t,H(t,x)) care transforma ecuatia intr-una cu coeficienti ce nu depind de timp.

Propozitie: Fluxul curburii medii are urmatoarele ecuatii de evolutie:

$$\frac{\partial}{\partial_t} g_{ij} = -2Hh_{ij} \frac{\partial}{\partial_t} \overrightarrow{n} = -\nabla^i H \frac{dF}{dx^i}$$

Problema valorilor proprii pentru Laplacian pe (M,g) consta in gasirea perechilor (u,k) , k numar real su u functie nenula pe M astfel incat Δu=ku. Pentru M cu frontiera, problema Dirichlet stabileste ca restrictia lui u pe frontiera este functia nula.

Teorema. Fie (M,g) compacta Atunci exista o secventa , numita spectrul varietatii

$k_1 < k_2 \le ... \le k_m \le ...$de numere reale nenegative cu multiplicitati finite si o baza ortonormala $de\ functii\ reale\ pentru$ L^2(M, dVol(g)), formata din vectori proprii pentru Laplacian .
O solutie fundamentala pentru ecuatia caldurii este o functie

$k : \mathrm{R}_+^*$ x M x M $\rightarrow$ R ce satisface ecuatia $\frac{dk}{dt} + \Delta_y k = 0$
Oricare f continua pe M, $\lim_{t\to 0} \int_M k(t,x,y) f(y) dVol(g)(y) = f(x)$

Teorema: k(t,x,y)=k(t,y,x)= $\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-k_j t)\varphi_j(x)\varphi_j(y)$,
unde $\varphi_j(x)$ este k_j-valoare proprie a Laplacianului
Functia de partitie Z(t)= $\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-k_j t) = \int_M k(t,x,x,)dvol(g)$ ce e caracterizata de formule asimptotice (Minakshisundaram-Pleijel , Poisson, Weyl).

Definitie: Un parametrix p pentru ecuatia caldurii este o functie ce verifica:
$p : \mathrm{R}_+^*$ x M x M $\rightarrow$ R
Oricare f continua pe M, $\lim_{t\to 0} \int_M p(t,x,y) f(y) dVol(g)(y) = f(x)$
In acest caz, notand cu $q = \frac{dp}{dt} + \Delta_y p$, avem $\lim_{t\to 0} p(t,x,.) = \delta_x$
k= $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{*j} * p$, unde $a * b(t,x,y) = \int_0^t \int_M a(s,x,z) b(t-s,z,y) dvol(g(z)) ds$

Oricare f continua pe M, $\int_M k(t,x,y) f(y) dVol(g)(y) = u(t,x)$ rezolva problema Cauchy
u(0, x) = f(x) si $0 = \frac{df}{dt} + \Delta f$ v(t, x) = $\int_0^t u(s,x) ds$ rezolva ecuatia $f = \frac{dv}{dt} + \Delta v$

Fie (M, g(t)) varietate Riemann cu metrica dependenta de timp.
Fie u(x,y,t)= $(4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{d^2_{g(0)}(x,y)}{4t})$. Oricare N natural se defineste
h(N,x,y,t)= u(x,y,t) $\sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x,y) t^k$, unde $d_{g(0)}(x,y) <$ inj(M, g(0))
Presupunem ca metrica are urmatoarea dezvoltare g(t)=g(0)+$\sum_{m=1}^{N} h_m t^m$+ O(t^{N+1}), unde $h_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m g}{\partial t^m}(0) \quad h_m = (w_m^{ij})$;
Campurile vectoriale v(m) se definesc prin egalitatea:

$$\Delta_{g(t)} = \Delta_{g(0)} + \sum_{m=1}^{N} t^m (w_1^{ij} \nabla_i \nabla_j + v(m)^k \nabla_k) + O(t^{N+1})$$

(2,1)-tensorii $A_{ij}^k(p)$, p=1,2,...N se definesc prin egalitatea:

$$\Gamma_{g(t)} = \Gamma_{g(0)} + \sum_{p=1}^{N} t^p (A_{ij}^k(p)) + O(t^{N+1})$$

$\varphi_0(x,y)$ depinde numai de r = dist(g(0)(x, y)) si e solutie a ecuatiei diferentiale ordinare :
$\frac{d\varphi_0}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d\log(f)}{dr} \varphi_0 - \frac{1}{16r} w_1^{ij} \frac{d(r^2)}{dx^i} \frac{d(r^2)}{dx^j} \varphi_0 = 0$, unde f =$\sqrt{\det(g(0))}/r^{n-1}$ si $\varphi_0(x,x) = 1$

Analog, $\varphi_1(x,y)$ depinde numai de r, $\varphi_1(x,x)=0$ si rezolva o ecuatie diferentiala ordinara de forma $\frac{d\varphi_1}{dr}$ + F(r)$\varphi_1 = \Delta\varphi_0 + G(\varphi_0, w^{ij}_{k=1 \text{ sau } 2}, v^l_1)$.

Pentru k intre 2 si N, $\varphi_k(x,-)$ depinde numai de r, $\varphi_k(x,x)=0$ si verifica

$$r\frac{d\varphi_k}{dr} + (k+\frac{r}{2}\frac{d\log(f)}{dr})\varphi_k - \frac{1}{16}w^{ij}_1\frac{d(r^2)}{dx^i}\frac{d(r^2)}{dx^j}\varphi_k = \Delta\varphi_{k-1} + \frac{1}{16}w^{ij}_{k+1}\frac{d(r^2)}{dx^i}\frac{d(r^2)}{dx^j}\varphi_0 -$$
$$-\frac{1}{4}w^{ij}_k(\frac{d^2(r^2)}{dx^idx^j} - \Gamma^l_{ij}\frac{d(r^2)}{dx^l})\varphi_0 - \frac{1}{4}v^l_k\frac{d(r^2)}{dx^l}\varphi_0 - \frac{1}{2}w^{ij}_k\frac{d(r^2)}{dx^i}\frac{d(\varphi_0)}{dx^j} + \mathrm{G}(\varphi_p, \text{p de la 0 la k} - 1, w^{ij}_p, v^l_p)$$

o functionala ce depinde de functiile din paranteza.

3.2 g(t)-miscare Browniana

Recent au aparut lucrari dedicate ecuatiilor diferentiale stohastice pe varietati cu metrica oscilanta ce variaza conform curentului Ricci. Cel putin in stadiul actual, cantitatile si tensorii covarianti folositi nu conduc explicit la rezultatul de non-echivalenta de mai sus. Vom vedea in capitolul urmator ca exista structuri algebrice specifice integrarii iterate Stratonovich a *familiilor* de procese stohastice ce depind de un parametru si care au fost definite in contextul teoriilor spectaculare de Formalitate si Quantizare. Urmatoarele definitii si teoreme apar in lucrarile [91], [92] ce studiaza g(t)-miscare Browniana.

Propozitie ([91], [92]) Fie $x \in M$,$(x^1,\ldots,x^n)$ coordonate locale. Miscarea Browniana in raport cu o metrica ce variaza in timp g(t) se defineste ca solutia $X_i(x)$ a urmatoarei ecuatii diferentiale stohastice:

$$dX_i(x) = \sqrt{g^{-1}\left(t, X_t(x)\right)_{ij}}\,dB^j - \frac{1}{2}g^{k,l}\Gamma^i_{kl}\left(t, X_t(x)\right)dt$$

unde $\sqrt{g^{-1}\left(t, X_t(x)\right)_{ij}}$ este unica radacina patrata pozitiva a inversei matricei $\left(g\left(t, \partial_{x^i}, \partial_{x^j}\right)\right)_{i,j}$; $\Gamma^i_{k,l}\left(t, X_t(x)\right)$ sunt simbolurile Christoffel asociate $\nabla^{g(t)}$ si B^i sunt n miscari Browniene independente.

Fie $d\mu_t$ masura Lebesgue peste $(M, g(t))$. $X_t(x)$ este difuzie cu generator Δ_t. Fie $h^x(t,y) \in C^\infty(]0,T[\times M)$ astfel incat:

$$\begin{cases} X_t(x) \overset{\mathcal{L}}{=} h^x(t,y)d\mu_t(y),\ t>0 \\ X_0(x) \overset{\mathcal{L}}{=} \delta_x. \end{cases}$$

$$\overset{\mathcal{L}}{\lim_{t\to 0}} X_t(x) = \delta_x.$$

In coordonate locale:

$$d\mu_t = \frac{\sqrt{\det\left(g_{i,j}(t)\right)}}{\sqrt{\det\left(g_{i,j}(0)\right)}}\sqrt{\det\left(g_{i,j}(0)\right)}\mid dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$\mu_t(dy) = \psi(t,y)\mu_0(dy).$$

Propozitie 2.2. [91], [92]

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(h^x(t,y)\right) + h^x(t,y)\mathrm{Tr}\left(\dfrac{1}{2}\left(g^{-1}(t,y)\right)\dfrac{d}{dt}g(t,y)\right) = \dfrac{1}{2}\Delta_g h^x(t,y) \\ \lim\limits_{t\to 0} h^x(t,y)d\mu_t = \delta_x. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int\limits_M h^x(t.y)f(y)\mu_t(dy) &= \frac{1}{2}\int\limits_M \Delta_{g(t)}f(y)h^x(t,y)\mu_t(dy) \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_M f(y)\Delta_{g(t)}h^x(t,y)\mu_t(dy). \end{aligned}$$

Folosind $\mu_t(dy) = \psi(t,y)\mu_0(dy)$ avem:

$$\int\limits_M f(y)\frac{d}{dt}\left(h^x(t,x)\psi(t,y)\right)\mu_0(dy) = \frac{1}{2}\int\limits_M f(y)\left(\Delta_{g(t)}h^x(t,y)\right)\psi(t,y)\mu_0(dy)$$

$$\frac{d}{dt}\left(h^x(t,y)\psi(t,y)\right) = \frac{1}{2}\left(\Delta_{g(t)}h^x(t,y)\right)\psi(t,y).$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(t,y) &= \frac{1}{2\sqrt{\det\left(g_{i,j}(0)\right)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\det\left(g_{i,j}(t)\right)}}\det\left(g_{i,j}(t)\right)\mathrm{Tr}\left(g^{-1}(t,y)\frac{d}{dt}g(t,y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\psi(t,y)tr\left(g^{-1}(t,y)\frac{d}{dt}g(t,y)\right).\end{aligned}$$

Termenul $\mathrm{Tr}\left(g^{-1}(t,y)\frac{d}{dt}g(t,y)\right)$ nu depinde de alegerea coordonatelor. Deci urmatoarea ecuatie de reactie-difuzie neomogena este invarianta la schimbari de coordonate.

$$\frac{d}{dt}\left(h^x(t,y)\right) + h^x(t,y))tr\left(\frac{1}{2}g^{-1}(t,y)\frac{d}{dt}g(t,y)\right) = \frac{1}{2}\Delta_{g(t)}h^x(t,y).$$

de unde deducem ca , daca intr-un sistem de coordonate fixat metrica nu depinde de timp, schimband sistemul folosind transformarea data de functiile $H(x,t)$, avem un trace egal cu zero, de unde nu putem deduce ca toate componentele metricii sunt invariante la timp. Putem deduce ca $\psi(t,y)$ nu depinde de timp, deci determinantul metricii nu variaza in timp.[91], [92],[93], [94], [95], [96] contin ecuatiile de evolutie si aproximari ale probabilitatii de tranzitie in cazul coeficientilor ce depind de timp, unde la fiecare ordin se rezolva ecuatii diferentiale ordinare si se calculeaza lungimi geodezice (minimizatoare pentru un Lagrangian ce depinde de o metrica).

3.3 Modele solvabile

Urmatoarele solutii exacte ale ecuatiei Fokker-Planck pentru operatori Laplace cu potential sau cu drift au fost gasite in lucrarile [110] $-$ [119]. Coeficientii metricilor asociate nu depind de timp.

1. nucleul caldurii pentru operatorul $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}\partial_x^2 p - \frac{a^2}{2}x^2 p$ cu $\lim_{t\searrow 0} p(t,x,y) = \delta(x-y)$ este

P(t,x,y)= $\sqrt{\frac{at}{2\pi t\sinh(at)}}\exp(-\frac{1}{2t}\frac{at}{\sinh(at)}[(x^2+y^2)\cosh(at) - 2xy]$

2. nucleul caldurii pentru operatorul $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}\partial_x^2 p - axp$ cu $\lim_{t\searrow 0} p(t,x,y) = \delta(x-y)$ este

P(t,x,y)= $\sqrt{\frac{1}{2\pi t}}\exp(-\frac{(x-y)^2}{2t} - \frac{1}{2}a(x+y)t + \frac{a^2t^3}{24}),$ t > 0

3. Calin, Chang, Hu calculeaza nucleul caldurii pentru operatori hipoeliptici utilizand tehnici din mecanica hamiltoniana, transformarea Fourier si formula Feynman-Kac, fiind densitatea unui proces stohastic asociat. Tehnicile au fost folosite de Kolmogorov in 1930 si Gaveau in '70.Coeficientii nu depind de timp.

4. Exemple de potentiale solvabile pentru ecuatia $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}\partial_x^2 p + Qp$ (prin solvabilitate se intelege solutie exacta in forma analitica sau serie de vectori proprii hypergeometrici): oscilatorul armonic, Coulomb, Morse, Poschl-Teller si Rosen. Clasificarea a fost inceputa de Natanzon in 1971.

Pentru procesul stohastic df=s(f)dW, potentialul Q=$\frac{1}{4}ss^{ii} - \frac{1}{8}(s^i)^2$

Procesul CEV. df = $f^a dW$, Q(s)= $\frac{a(a-2)}{4(1-a)^2 s^2}$, a diferit de 1

Lucrarea [136](Labordere) contine potentiali solvabili descoperiti folosind conceptul de supersimetrie.

Potentialul hipergeometric a lui Gauss.

Q(s)= $\frac{s(z)-1}{r(z)} - (\frac{a-2(a+b)z}{z(1-z)} - \frac{5}{4}\frac{a^2-4ac}{r(z)} + b)\frac{z^2(1-z^2)}{r(z)^2}$, unde $r(z) = bz^2 + az + c$ si s(z) polinom de grad 2

Relatia dintre variabilele s si z este data de $z'(s) = \frac{2z(1-z)}{\sqrt{r(z)}}$. Vectorul propriu cu valoarea proprie E este dat de f(s,E)=$(z')^{-1/2} z^{\gamma/2}(1-z)^{(-\gamma+\alpha+\beta+1)/2} F(\alpha,\beta,\gamma,z)$, unde F satisface z$(1-$z)F" + $(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)F' - \alpha\beta z = 0$

Potentialul hipergeometric confluent

Q(s)= $\frac{s(z)-1}{r(z)} - (\frac{a}{z} - \frac{5}{4}\frac{a^2-4bc}{r(z)} + b)\frac{z^2}{r(z)^2}$, unde $r(z) = bz^2 + az + c$ si s(z) polinom de grad 2

Relatia dintre variabilele s si z este data de $z'(s) = \frac{2z}{\sqrt{r(z)}}$. Vectorul propriu cu valoarea proprie E

este dat de f(s,E)=$(z')^{-1/2} z(s)^{\gamma/2}(e)^{(-wz(s))/2} F(\alpha,\beta,\gamma,wz(s))$. Parametrii depind de E.

$g(z) = F(\alpha,\beta,\gamma,wz)$ satisface $zg'' + (\gamma - wz)g' - w\alpha g = 0$, solutia generala fiind data de functiile Whittaker.

In Finante s-au folosit urmatoarele ecuatii diferentiale stohastice cu potential solvabil
Vasicek: dr=(a+br)dt + cdW
CIR: dr=(a+br)dt +csqrt(r)dW

5. [117]V. Stohny calculeaza solutiile exacte ale ecuatiei Fokker-Planck folosind schimbari de coordonate si calculul generatorilor infinitezimali.

a) Difuzia in camp gravitational:

$$\frac{dp}{dt} = \tfrac{1}{2}D\partial_x^2 p + \partial_x(gp)$$

b) procesul Ornstein-Uhlenbeck

$$\frac{dp}{dt} = \tfrac{1}{2}D\partial_x^2 p + \partial_x(kxp)$$

c) procese de tip Rayleigh

$$\frac{dp}{dt} = \tfrac{1}{2}D\partial_x^2 p + \partial_x((kx - \frac{D}{x})p)$$

d) modele folosite in stiinte sociale (genetica, demografie)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}D\partial_x^2[(x-c)^2 p] + b\partial_x((x-c)p)$$

$$\frac{dp}{dt} = \partial_x^2[(x^2-1)^2 p]$$

$$\frac{dp}{dt} = a\partial_x^2[x^2(x^2-1)^2 p]$$

Parametrii sunt constante arbitrare.

Teorema ([117]Stohny): Schimbarea de variabile p(t,x)=f(x,t)g(y(x,t), h(x,t)) reduce ecuatiile de mai sus la ecuatia caldurii satisfacuta de g: $\frac{dg}{dh} = \partial_y^2 g$. Functia f si noile variabile independente y si h sunt date pentru fiecare din ecuatiile de mai sus de formulele:

a) $f = \exp(-\frac{g}{D}x - \frac{g^2}{2D}t)$; y = x, h = Dt/2

b) $f = \exp(kt)$; y = $\exp(kt)$x, h = $\mathrm{D}'\exp(2kt)$

c) $f = \exp(2kt)x$; y = $\exp(kt)$x, h = $\mathrm{D}'\exp(2kt)$

d) $f = \exp(kt)(x-c)^b$; y = const × ln(x − c), h = t

$$f = \exp(-t)(1-x^2)^{-3/2}; \quad \mathrm{y} = \tfrac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}), \quad \mathrm{h} = \mathrm{t}$$

$$f = \exp(-vt)x^{-3/2}(1-x^2)^{-3/2}; \quad \mathrm{y} = \ln(\frac{x}{1-x}), \quad \mathrm{h} = \mathrm{const} \times \mathrm{t}$$

Ecuatiile Fokker-Planck de forma $\frac{dp}{dt} = c(t)\partial_x^2[p] + -\partial_x((a(t)x + b(t))p)$

se pot transforma in ecuatia caldurii prin substitutia:

$$f = e^{-\int_0^t a(s)ds}$$
$$y = x[\exp(-\int_0^t a(s)ds)] - \int_0^t b(s)\, e^{-\int_0^s a(q)dq}\, ds$$
$$h = \int_0^t c(s)\, e^{-2\int_0^s a(q)dq}\, ds$$

Teorema Norman-Wei a fost aplicata de Lo si Hui [115],[116] in calculul solutiei fundamentale a unor ecuatii din Matematicile Financiare.

Se considera ecuatia $\frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t)$, U(0) = Id, U si H sunt operatori liniari ce depind de timp.

Teorema Norman-Wei. Daca H(t)= $\sum_{n=1}^{N} a_n(t)L_n$, a(t) functii si L_n genereaza o algebra Lie solvabila de dimensiune N sau o algebra Lie real 3-dimensionala simpla, atunci solutia $U(t) = \prod_{n=1}^{N} \exp[g_n(t)L_n]$. Prin substitutie in ecuatia initiala, $g_n(t)$ verifica un sistem de ecuatii diferentiale ordinare.

Pretul unei optiuni $P(S_1, ...S_n, t)$ce depinde de n active financiare este solutia urmatoarei ecuatii:

$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} s_i(t)s_j(t)\rho_{ij}(t)S_iS_j\partial_{ij}^2 P + \sum_{i=1}^{n} rS_i\partial_i P - rP$; coeficientii depind numai de timp in acest caz.

$$a_{ij}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t s_i(q)s_j(q)\rho_{ij}(q)dq$$

$$b_i(t) = \int_0^t [r - \tfrac{1}{2}s_i(q)s_i(q)]dq \quad \text{a}^{-1}(t) \text{ este inversa matricei } (\text{a}_{ij}(t))$$

$K(x_1, ...x_n, t; y_1, ...y_n) = \frac{\exp(-rt)}{\sqrt{(4\pi)^n \det(a)}} \times \exp(-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - y_i + b_i)a_{ij}^{-1}(x_j - y_j + b_j))$ este nucleul caldurii ecuatiei Black-Scholes particulare de mai sus, construit de Lo si Hui [115],[116] prin metoda Norman-Wei in cazul unei algebre Lie abeliene. Similar s-a gasit o formula exacta pentru modelul CEV, in care s-a folosit algebra Lie su(1,1), solutia generala fiind ca si mai sus, de forma $P(S_1, ...S_n, t)$=$\exp(-rt)U(t, 0)P(S_1, ...S_n, 0)$

Urmatoarea teorema de clasificare se aplica unor procese stohastice fara drift ,cu volatilitatea independenta de timp,(referinta [113]A.Kuznetsov).

Un proces Y_t este solvabil daca volatilitatea este de forma:

s(y)= $s(Y(x)) = C\sqrt{A(x)}\frac{W(x)}{(c_1F_1(x)+c_2F_2(x))^2}\sqrt{\frac{A(x)}{R(x)}}$, unde schimbarea de variabila e data de Y(x) =$\frac{c_3F_1(x)+c_4F_2(x)}{c_1F_1(x)+c_2F_2(x)}$
Pentru A(x)=x, R(x) e polinom de grad 2 fara radacini reale,

$$F_1(x) = M(a, b, wx) \text{ si } F_2(x) = U(a, b, wx)$$

Pentru A(x)=x(1-x), R(x) e polinom de grad 2 fara radacini reale,$F_1(x)$ si $F_2(x)$ sunt 2 solutii liniar independente ale ecuatiei diferentiale hipergeometrice $z(1 - z)F''(z) + (\gamma - (1 + \alpha + \beta)z)F'(z) - \alpha\beta F(z) = 0$. W(x) este Wronskianul $x^{-\beta-1}(A - x)^{-\alpha-1}$.Definitia este echivalenta cu : functia Green poate fi calculata in functie de functii hipergeometrice (confluente).
In acest caz, solutiile ecuatiei Lf=af sunt de forma f(y)=h(z(y),a)F(z(y)), unde F este ${}_2F_1(a, b, c, z)$ sau M(a, b, wz), solutie a ecuatiei diferentiale Kummer.

Exemple:

Procesul Ornstein-Uhlenbeck

Generator: $L = (a - bx)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}s^2\frac{d^2}{dx^2}$, b>0 Spectrul generatorului {-bn}, cu vector propriu

$$\text{H}_\text{n}(\sqrt{\frac{b}{s^2}}(x - \frac{a}{b})), H_n \text{ sunt polinoamele Hermite}$$

P(t,x,y)=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp(-bnt)}{2^n n!}H_n(z)H_n(g)$, unde z =$\sqrt{\frac{b}{s^2}}(x - \frac{a}{b})$ si g =$\sqrt{\frac{b}{s^2}}(y - \frac{a}{b})$

Procesul CIR

Generator $L = (a - bx)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}s^2x\frac{d^2}{dx^2}$.Solutia fundamentala:

p(t,x,y)dy= $\frac{-2b}{s^2(\exp(-bt)-1)}(\frac{y\exp(bt)}{x})^{1/2d}\exp[-\frac{-2b}{s^2(\exp(-bt)-1)}(x\exp(-bt)+y)]I_d(2\frac{-2b}{s^2(\exp(-bt)-1)}\sqrt{xy\exp(-bt)})$,
unde I_d este functia Bessel modificata de prima speta. d $= -1+\frac{2a}{s^2}$

Spectrul dat de –bn, cu vector propriu $L_n^d(\frac{2b}{s^2}x)$, unde L_n^d sunt polinoamele Laguerre de ordin d ce verifica recurenta :
$(n+1)L_{n+1}^d(y) - (2n+1+d-y)L_n^d(y) + (n+d)L_{n-1}^d(y) = 0$

Procesele Jacobi

Generator $L = (a-bx)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}s^2x(A-x)\frac{d^2}{dx^2}$

Domeniu [0,A]. Spectrul e dat de

$$\lambda_n = -\frac{s^2}{2}n(n-1+\frac{2b}{s^2}) \quad c = \frac{2b}{s^2} - \frac{2a}{s^2A} - 1 \quad d = \frac{2a}{s^2A} - 1$$

Vector propriu $P_n^{c,d}(\frac{2x}{A}-1)$, unde $P_n^{c,d}$sunt polinoamele Jacobi de ordin c, d

Transformari Liouville si invarianti Bose

Consideram operatorul $L = b(y)\frac{d}{dy} + a(y)\frac{d^2}{dy^2}$
Transformarea gauge transforma operatorul in $L \to \frac{1}{h}Lh = a(y)\frac{d^2}{dy^2} + a(y)I(y)$, unde $h = \exp(-\int_{(y)}\frac{b}{2a}(u)du)$
Forma canonica a lui L este data de
$L^c = I(y) + \frac{d^2}{dy^2}$, unde I(y)= $(\frac{h'}{h})' - (\frac{h'}{h})^2$=Funct(a,b) numit invariantul Bose.
La o schimbare de coordonate y=y(x), invariantul Bose in coodonatele x
J(x)=$(y'(x))^2I(y(x) + \frac{1}{2}\{y,x\}$, unde {y, x} este Schwartzianul $= (\frac{y''}{y'})' - \frac{1}{2}(\frac{y''}{y'})^2$

Laplacieni pe varietati

1. spatiul hiperbolic 3-dimensional $\{(x,y,z)|z>0\}$ cu metrica $ds^2 = (dx^2+dy^2+dz^2)/z^2$
$\Delta = z^2(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) - z\partial_z$

K(t,x,y)= $\frac{d}{(4\pi t)^{3/2}\sinh(d)}\exp(-t-\frac{d^2}{4t})$, $t>0$, unde d = distanta hiperbolica dintre xsi y

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial g^2} - 2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial g\partial\theta})$$

2. Operatorul $\frac{1}{2}\sum\partial_{x_i}^2 - \frac{1}{2}a^2|x|^2$

Hamiltonianul asociat este H=$\frac{1}{2}\sum_i\sigma_i^2 - \frac{1}{2}a^2|x|^2$ cu sistemul:

$$\dot{\sigma}_j = a^2x_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}$$
$$\dot{x}_j = \sigma_j = \frac{\partial H}{\partial s_j}$$

$S_{cl}(x,y,t) = \frac{a}{2}\bullet\frac{1}{\sinh(at)}[(|x|^2+|y|^2)\cosh(at) - 2 < x,y >]$
Nucleul caldurii este de forma $K(x,y,t) = V(t)\exp(kS_{cl}(x,y,t))$
$V(t) = \sqrt{\det(-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}S_{cl})} = (\frac{a}{2\pi\sinh(at)})^{n/2}$

Nucleul caldurii pentru $L = \frac{\lambda}{y^2} + 1/2\frac{d^2}{dy^2}$ cu 0< λ<1/8 si y>0

este K(x,y,t)= $\frac{\sqrt{xy}}{t}\exp(-(|x|^2+|y|^2)/2t)I_d(xy/t),$ t $> 0,$ unde d $=\frac{1}{2}\sqrt{1-8\lambda}$

I_d este functia Bessel de ordin d

3.3.1 ecuatii diferentiale stohastice si functii hypergeometrice de argument matriceal

In aceasta sectiune prezentam cateva rezultate demonstrate de: Malecki, Lawi, Bensusan, Katori, Bru, Demni legate de ecuatii diferentiale de argument matriceal. Sunt considerate "cele mai naturale" generalizari de la cazul 1-dimensional la cazul matriceal. Le-am selectat pentru lucrarea noastra deoarece in cazul 2-dimensional au meritul de a fi solvabile, mai exact valorile si vectorii proprii au functia de tranzitie solvabila in cazul 2-dimensional, deci ar putea fi utile in modelarea unor procese economice. Literatura de specialitate contine rezultate similare polinoamelor Hermite in modelarea unui haos Wiener. Au fost folosite in fizica matematica si s-a propus in cateva lucrari (Bensusan, Amaral) modelarea matricei de covarianta cu un proces Wishart in cazul unei volatilitati stohastice. Referinte: [100], [101], [102], [103]. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{t\geq 0}), \mathbb{P})$ un spatiu de probabilitate filtrat. Un proces cu valori matriceale este definit de:

$$X : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$$
$$(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$$

unde $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ este multimea matricilor complexe. Fie S_m, H_m multimea matricilor patratice si Hermitiene.

Example

Modelul Dyson: $B^1 = \left(B^1_{ij}\right)_{i,j}$, $B_2 = \left(B^2_{ij}\right)_{i,j}$: 2 matrici reale independente Browniene $m\times m$-dimensionale.

$$X_{ij}(t) = \begin{cases} B^1_{ij}(t) & i=j \\ \dfrac{B^1_{ij}(t)+\sqrt{-1}B^2_{ij}(t)}{\sqrt{2}} & i<j. \end{cases}$$

Procese Wishart (Bru, Donati-Doumerc-Yor):

$$X(t) = B^T(t)B(t), \quad B : n\times m \text{ matrice Browniana reala.}$$

Model β-matriceal (Demni)

Valorile proprii satisfac urmatoarea ecuatie diferentiala stohastica:

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq 1}\frac{dt}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)} \quad 1\leq i\leq m$$

$0<\beta\leq 2$ Intrarile procesului matriceal sunt date de:

$$X_{ij}(t) = \begin{cases} B^1_{ij}(t) & i=j \\ \sqrt{\dfrac{\beta}{2}}\left(\dfrac{B^1_{ij}(t)+B^2_{ij}(t)}{\sqrt{2}}\right) & i<j \end{cases}$$

unde $\left(B^1_{ij}, B^2_{ij}\right)_t = \left(1-\dfrac{\beta}{2}\right)t$ iar B^1, B^2 sunt doua matrice Browniene independente $m\times m$.

2. ecuatii diferentiale stohastice matriceale

Fie $\mathcal{S}_p$ spatiul matricilor simetrice reale de dim. $p \times p$. $X = H\Lambda H^T$ este o diagonalizare a lui X, cu H o matrice ortogonala si Λ matricea diagonala a valorilor proprii. Fie B_t o $p \times p$ matrice Browniana. Fie X_t un proces stohastic cu valori in $\mathcal{S}_p$ astfel incat $X_0 \in \overline{S}_p$, multimea matricilor simetrice cu p valori proprii diferite. Fie $\Lambda_t = diag\left(\Lambda_i(t)\right)$ matricea diagonala a valorilor proprii a lui X_t ordonata crescator: $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \ldots \leq \lambda_p(t)$ si H_t ortogonala formata din vectori proprii a lui X_t cf. [19].

Teorema 3. Presupunem ca procesul stohastic X_i cu valori in $\mathcal{S}_p$ satisface urmatoarea ecuatie diferentiala stohastica.

$$dX_t = g(X_t)dB_t h\left(X_t\right) + h\left(X_t\right)dB_t^T g\left(X_t\right) + b\left(X_t\right)dt$$

unde $g, h, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $X_0 \in \widetilde{\mathcal{S}}_p$.

Fie $G(x,y) = g^2(x)h^2(y) + g^2(y)h^2(x)$. Atunci pentru $t < \tau$ procesul valorilor proprii Λ_t si cel al vectorilor proprii H_t verifica urmatoarele ecuatii diferentiale stohastice:

$$d\lambda_i = 2g\left(\lambda_i\right)h\left(\lambda_i\right)d\nu_i + \left(b\left(\lambda_i\right) + \sum_{k\neq 1}\frac{G\left(\lambda_i,\lambda_k\right)}{\lambda_i - \lambda_k}\right)dt$$

$$dh_{ij} = \sum_{k\neq j} h_{ik}\frac{\sqrt{G\left(\lambda_j,\lambda_k\right)}}{\lambda_j - \lambda_k}d\beta_{kj} - \frac{1}{2}h_{ij}\sum_{k\neq j} h_{ik}\frac{G\left(\lambda_j,\lambda_k\right)}{\left(\lambda_j-\lambda_k\right)^2}dt,$$

unde (ν_i) and $\left(\beta_{kj}\right)_{k<j}$ sunt miscari Browniene independente $\beta_{jk} = \beta_{kj}$.

2.2. Procese Wishart. Fie $X_t = N_t^T N_t$ unde N_t este o $n \times p$ matrice Browniana. Fie $\alpha > 0$ si $B = \left(B_t\right)_{t0}$ o $p \times p$ matrice Browniana. Pentru parameterul α ecuatia de definitie este:

$$\begin{cases} dX_t = \sqrt{X_t}dB_t + dB_t^T\sqrt{X_t} + \alpha I dt \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

A fost introdusa de Bru[3]. Teorema 3 se aplica pentru:

$$dY_t = \sqrt{|Y_t|}dB_t + dB_t^T\sqrt{|Y_t|} + \alpha I dt$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $Y_0 = y_0 \in \overline{S}_p$, $g(x) = \sqrt{|x|}$, $h(x) = 1$ si $G(x,y) = |x| + |y|$ pentru $x, y \in \mathbb{R}$.

Valorile proprii ale lui Y_t satisfac sistemul:

$$d\lambda_i = 2\sqrt{|\lambda_i|}d\nu_i + \left(\alpha + \sum_{k\neq i}\frac{|\lambda_i| + |\lambda_k|}{\lambda_i - \lambda_k}\right)dt$$

Pentru $n \in \mathbb{R}$ si $0 < \lambda_1(0) < \lambda_2(0) < \ldots < \lambda_p(0)$ valorile proprii $\lambda_i(t)$ sunt distincte aproape sigur.

Polinoame zonale si functii hipergeometrice

Fie n o partitie a lui k, $n = (k_1, \ldots, k_m)$, $k_1 \geq \ldots \geq k_m \geq 0$ si $k = \sum_{i=1}^{m} k_i$.

Definitie Pentru $X \in S_m$, polinomul zonal $C_n(X)$ este un polinom simetric in valorile proprii $(x_1, \ldots, x_m)$ of X, omogen, solutie a operatorului Laplace-Beltrami

$$D^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i<j}\frac{x_i^2}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

pentru valoarea proprie

$$\sum_{i=1}^{m} k_i\,(k_i - i) + k(m-1),$$

Pentru $Y \in S_m^+$,

$$C_k(YX) = C_k\left(\sqrt{Y}X\sqrt{Y}\right).$$

Definitie Functiile hipergeometrice de argument matriceal se definesc:

$$_pF_q\left(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q : X\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n}\frac{(a_1)_\kappa\cdot\ldots\cdot(a_p)_\kappa}{(b_1)_\kappa\cdot\ldots\cdot(b_q)_\kappa}\cdot\frac{C_k(X)}{k!},$$

unde a 2-a sumare este dupa toate partitiile $\kappa = (k_1,\ldots,k_m)$, $k_1 \geq \ldots \geq k_m \geq 0$, a lui $k = \sum_{i=1}^{m} k_i$, $k! = k_1!\ldots k_m!$;simbolurile generalizate Pochhammer sunt date de:

$$(a)_\kappa = \prod_{i=1}^{m}\left(a - \frac{i-1}{2}\right)_{k_i},\ (a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1),\ (a)_0 = 1.$$

Functiile hipergeometrice de 2 argumente matriceale $X, Y \in S_m$ sunt definite astfel:

$$\begin{aligned}&{}_pF_q^{(m)}\left(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q : X,Y\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n}\frac{(a_1)_\kappa\cdot\ldots\cdot(a_p)_\kappa}{(b_1)_\kappa\cdot\ldots\cdot(b_q)_\kappa}\cdot\frac{C_n(X)C_n(Y)}{k!C_\kappa(I)},\end{aligned}$$

unde $I = \text{diag}_m(1)$. $\text{etr}(X) = \exp(tr(X))$. Exista urmatoarea relatie:

$$\begin{aligned}&\int_{O_m} {}_pF_q\left(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q XHYH'\right)(dH) = \\ &=_p F_q^{(m)}\left(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;X,Y\right),\end{aligned}$$

unde (dH) este masura Haar a grupului ortogonal O_m si H' e transpusa lui H.

2.2.1. Polinoame Hermite

Polinoamele Hermite de argumente matriceale $\{H_n(X)\}$ se definesc prin functia lor generatoare; $U(Z) = Z$, $F(Z) = \text{etr}\left(-\frac{1}{2}Z^2\right)$, that is

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n} H_n(X)\frac{C_\kappa(Z)}{k!C_\kappa(I)} = \text{etr}\left(-\frac{Z^2}{2}\right)\int_{O_m}\text{etr}\left(HXH'Z\right)(dH),$$

pentru X si Z doua $m\times m$ matrici simetrice. Formeaza un sistem ortogonal complet in $\S_m$ in raport cu ponderea

$$W^H(X) = \text{etr}\left(-\frac{X^2}{2}\right),$$

astfel incat

$$\int_{\S_m}\text{etr}H_\kappa(X)H_\sigma(X)W^H(X)(dX) = \mathcal{N}_\kappa^{(H)}\delta_{\kappa\sigma},$$

cu normalizarea

$$\mathcal{N}_\kappa^{(H)} = k!C_\kappa(I)2^{\frac{m}{2}}\pi^{\frac{m(m+1)}{4}}.$$

$H_n(X)$ satisfac ecuatia

$$\mathcal{L}^{(H)}H_\kappa(X) = \lambda_\kappa H_\kappa(X),$$

pentru

$$\mathcal{L}^{(H)} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

cu valorile proprii $\lambda_\kappa = -k$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n} H_\kappa(X,t)\frac{C_\kappa(Z)}{k!C_\kappa(I)} = \operatorname{etr}\left(-\frac{Z^2}{2}t\right)\int_{O_m}\operatorname{etr}(HXH'Z)dH.$$

Propozitie Pentru $X \in S_m$ fie $\{H_m(X,t)\}$ polinoamele Hermite de 2 argumente definite de

$$H_\kappa(X,t) = t^{\frac{k}{2}}H_\kappa\left(\frac{X}{\sqrt{t}}\right).$$

Atunci pentru o marice simetrica Browniana, $(X_t, t \geq 0)$, $(s < t)$:

$$E\left[H_\kappa(X_t,t) \mid X_s\right] = H_\kappa(X_s,s).$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}\right)H_\kappa(X,t) = 0,$$

pentru $\mathcal{L}$ generatorul infinitezimal al procesului stohastic al valorilor proprii

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i<j}\frac{1}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Capitolul II

1 Introducere

Interactiunea la nivelul relatiilor algebrice primare dintre integralele iterate Ito si Stratonovich in raport cu miscarea Browniana n-dimensionala a fost discutata de cercetatori din stiintele sociale (cresterea populatiei, Black-Scholes option pricing, mecanica cuantica- ecuatia Fokker-Planck). Rezultatul nostru este formularea si demonstrarea existentei unui izomorfism de algebre Hopf, concret, echivalent in fapt cu relatiile dintre integralele Ito si Stratonovich. O teorema de mai mare generalitate din teoria algebrica a operazilor include existenta acestui izomorfism, al carui merit este ca formula lui specifica folosita in matematicile financiare implica un rezultat algebric. Exista 2 aplicatii ale acestui rezultat, prima legata de abordarea lui Hudson a calculului stohastic cuantic cu conexiuni in geometria ne-comutativa; a 2-a aplicatie este un izomorfism de algebre asociative la nivelul algebrei Hopf decorate Connes-Kreimer.

Simularile numerice efectuate produc rezultate si fapte stilizate ce sunt in concordanta cu lucrarile in domeniu referitoare la conjecturi asupra functiei de volatilitate locala folosita in studiile experimentale si teoretice referitoare la stock market index returns.Ele se bazeaza pe aproximari folosind WKB or Instanton aproximations, folosite in mecanica cuantica.

Relatiile algebrice dintre integralele iterate Ito si Stratonovich au fost folosite ca instrumente tehnice in urmatoarele articole legate de Matematica Financiara, in demonstrarea unor margini superioare pentru valoarea expectativa a unor procese stohastice descriptibile in forma integrala.

- [30]: relatiile si izometria Ito au fost folosite in lemele 2.4-2.8, leme considerate esentiale in calculul erorii globale a unor scheme numerice.

- [31]: s-au calculat momentele ariei Levy pentru o miscare Browniana 2-dimensionala intr-un mod nou, folosind integrale iterate si argumente combinatorial-algebrice ce implica *produsele shuffle*. In studiul modelului de volatilitate Heston, [32] foloseste momentele ariei Levy si structuri de algebre Hopf pentru a demonstra margini superioare a valorilor expectative (Lemma 4.3,[32] Malham, S.J.A. si Wiese, A, 2009).

- [33] (Sectiunea 2). Dezvoltarea in serie Ito-Taylor este scrisa ca sume indexate dupa arbori combinatoriali (B-series expansion) si este folosita in metoda Euler-Maruyama aplicata in option pricing pentru diverse modele cu volatilitate stohastica.

2 Calcul Ito si calcul Stratonovich

2.1.1. Relatii algebrice interne intre integrale iterate Stratonovich

Fie X_t solutie n-dimensionala Stratonovich SDE

$$dX_t = V_0 dt + \sum_{i=1}^{m} V_i \circ dW_t^i, \qquad (***)$$

$X_0 \in \mathbb{R}^n$.

Notatie. $dt = dW_t^0$. pentru orice functie diferentiabila f, avem dezvoltarea in serie Stratonovich-Taylor.

$$f\left(X_T\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_k \le r} V_{i_1} \circ V_{i_2} \circ \ldots \circ V_{i_k} f\left(X_0\right) \underbrace{\int_{0 \le t_1 \le t_2 \ldots \le t_k \le T} dW_{t_1}^{i_1} \circ \ldots \circ dW_{t_k}^{i_k}}_{\text{IteratedStratonovichIntegrals}} + R_r\left(T, X_0, f\right)$$

Teorema (Chen) ([4] 2009 p. 363)

$$X_{0,1}(W) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k} \int_{0 \le t_1 \le t_2 \ldots \le t_k \equiv 1} dW_{t_1}^{i_1} \circ \ldots \circ dW_{t_k}^{i_k}$$

este element grupal si L este o serie Lie (primitiva).

Teorema ([4] Yamoto). Solutia X_t a ecuatiei $(* * *)$ se reprezinta ca $X_t = \exp\left(L_t\right) X_0$, unde $L_t = tV_0 + \sum_{i=1}^{m} W_t^i V_i + \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k \le r} c_j W_t^j V^j$, W_t^j iterated Stratonovich integrals. $V^j = \left[\left[\left[V_{j_1}, V_{j_2}\right] \ldots V_{j_{n+1}}\right]\right]$ paranteze Lie iterate de vector fields.

O algebra Hopf este un spatiu vectorial H impreuna cu operatiile m, Δ, E, η si S astfel incat avem o algebra asociativa $a(bc) = (ab)c$. (H, Δ) este coalgebra $\Delta : H \to H \otimes H$, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ (compatibilitatea dintre structurile de algebra si coalgebra). $S : H \to H$ se numeste antipodul lui H daca $\sum S\left(a_1\right) a_2 = \sum a_1 S\left(a_2\right) = \varepsilon(a)\, 1_H$, unde $\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2$. Campurile vectoriale $V_0, V_1, \ldots, V_m$ formeaza o algebra Hopf; multiplicarea e data de concatenarea cuvintelor formata din alfabetul $V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}$, $\Delta(V) = V \otimes 1 + 1 \otimes V$ $S\left(V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}\right) = (-1)^k V_{i_k}, V_{i_{k-1}}, \ldots, V_{i_1}$.

Definitie. $L \in H$ se numeste primitiv daca $\Delta(L) = L \otimes 1 + 1 \otimes L$. $g \in H$ se numeste grupal $\Delta(g) = g \otimes g$.

2.1.2. Relatii intre procesele stohastice definite de integralele iterate Ito si Stratonovich.

Definitie ([30]L.G.Gyurko, L. G. si Lyons, T. J. (2008) pag 3) A si B doua semi-martingale continue, integrala Stratonovich

$$\int A \circ dB = \int AdB \text{ (Ito integral)} + \frac{1}{2}\langle A, B\rangle$$

procesul de cross-variatie. Egalitatile urmatoare sunt standard si pot fi gasite in [30], [32], [35], [36],[37]; au aplicatii in formulele de cubatura si in aproximarea SDE, generand transformari intre egalitatile din precedentele 2 sectiuni.

$$J(a,b;w) = \int_{a<s_1<s_2<\ldots<s_n<b} dA_{\alpha_1}\left(s_1\right) \circ dA_{\alpha_2}\left(s_2\right) \circ \ldots \circ dA_{\alpha_n}\left(s_n\right)$$

integrala iterata Stratonovich in raport cu miscarea Browniana si de multi-index $w = \left(\alpha_j\right)$. Folosim notatia $I(a,b,w)$ pentru integralele Ito similare si ignoram pentru convenienta a si b.

$$J_w = \sum_{u \in D(w)} \frac{1}{2^{n(u)}} I_u,$$

unde $n(u)$ este numarul de zero-uri obtinut prin inlocuirea (colapsarea) a $n(u)$ indici adiacenti egali w, si u este cuvantul rezultat (diferentiale multiple)

$$I_W^{Ito} = \sum_{u \in D(W)} \frac{(-1)^{n(u)}}{2^{n(u)}} J_u^{Strat}$$

[35] Platen-Kloeden (1992, pag. 174). In urmatoarea sectiune vom vedea daca aceste egalitati pot fi structurate mai mult.

Produse de integrale Stratonovich se comporta ca produse de integrale iterate clasice; Produsul integralelor Ito se comporta ca un "stuffle" sau produs Ito descris mai jos. In teoria integrarii Ito, se considera si intersectiile simplexelor de dimensiuni mai mici decat domeniul de integrare.

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t dB(x)\right)\left(\int_0^t dB(x)\right) &= \int_0^t \left(\int_0^s dB(x)\right) dB(s) + \\ &+ \int_0^t \left(\int_0^x dB(s)\right) dB(x) + \int_0^t (dB \cdot dB)(x).\end{aligned}$$

3 structuri de algebre Hopf in teoria fluxurilor stohastice clasice si quantice

Descriem dupa([3],[24],[26],[34],[41]) aparitia algebrelor Hopf in abordarea lui Hudson a calculului stohastic quantic si a diferentialelor Ito pentru quantum noises. Fie A algebra asociativa. Peste algebra tensoriala $T(A) = \bigoplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes K}$ exista doua structuri de algebre Hopf cu aceeasi comultiplicare, dar cu multiplicari diferite

$$\Delta\left(L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_n\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_j\right) \otimes \left(L_{j+1} \otimes \ldots \otimes L_n\right).$$

Produsul shuffle $\blacktriangle$ dintre doua elemente omogene

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n) \blacktriangle (b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_m) = \sum (c_1 \otimes c_2 \otimes \ldots \otimes c_{m+n}),$$

suma este dupa toate $\begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}$ modurile de a insera $a's$ printre $b's$: elementele $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n$ vor apare in aceeasi ordine ca si $c - uri$. Analog pentru $b's$.

Examplu:

$$\begin{aligned}(a \otimes b)\blacktriangle(x \otimes y) &= x \otimes a \otimes b \otimes y + a \otimes x \otimes b \otimes y + a \otimes b \otimes x \otimes y + \\ &+ x \otimes y \otimes a \otimes b + x \otimes a \otimes y \otimes b + a \otimes x \otimes y \otimes b\end{aligned}$$

$\blacktriangle$ este numit produs shuffle; impreuna cu comultiplicarea Δ, $T(A)$ este o algebra Hopf.

Produsul Ito foloseste structura de algebra a lui A:

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n)\, \widetilde{\blacktriangle}(b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_m) = \sum_{j=0}^{\min(m,n)} \sum (c_1 \otimes c_2 \otimes \ldots \otimes c_{m+n-j}).$$

In a doua suma, c_j este egal cu un a_α, b_β, sau cu un produs $a_i b_j$.

Ca si in produsul $\blacktriangle$, aparitia elementelor a' si b' respecta ordinea initiala din $a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n$ si $b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_m$. produsul shuffle este un caz particular pentru produsul Ito in cazul unei algebre asociative triviale $xy = 0$, $\forall\, x$ si y. Antipodul $S_{\widetilde{\blacktriangle}}\left(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n\right) = (-1)^m a_n \otimes a_{n-1} \otimes \ldots \otimes a_1 +$ l.o.t. a fost descris de Hudson ([34],[41]).

3.1.1 Folosind relatiile din sectiunea 2.1.2 demonstram urmatoarea teorema

Teorema 3.1.1 Exista un izomorfism de algebre Hopf intre algebra Hopf shuffle $T_\blacktriangle(A)$ si algebra Hopf Ito $T(A)$, unde A este algebra diferentialelor Ito clasice: $A = R\left\langle a_0 a_1 \ldots a_n \right\rangle$, $a_i a_j = 0$, pentru $i \neq j$, $a_i^2 = a_0$, pentru $j \neq 0$.

Demonstratie Rezultatul este algebric, dar demonstratia se bazeaza pe relatiile dintre integralele iterate Ito si Stratonovich. Definim $f : T(A) \to T_\blacktriangle(A)$

$$f\left(a_{i_1} \otimes a_{i_2} \otimes \ldots \otimes a_{i_n}\right) = \sum \text{coeff*} a_{j_1} \otimes a_{j_2} \otimes \ldots \otimes a_{j_k}$$

astfel incat integrala iterata Ito in raport cu diferentialele data de un n-dim Wiener process $I = \int\limits_0^t dW_{i_1} dW_{i_2} \ldots dW_{i_n}$ este suma integralelor Stratonovic asociate cu diferentialele din partea dreapta, fiecare multiplicata cu coeficienti conform formulelor $I_W^{Ito} = \sum\limits_{u \in D(W)} \frac{(-1)^{n(u)}}{2^{n(u)}} J_u^{Strat}$. $D(w) =$ multimea cuvintelor folosite din W inlocuind perechi de indici egali din W cu 0. [35]Platen-Kloeden (1992, pag 174) $J\left(W_1\right) J\left(W_2\right) = J\left(W_1 \blacktriangle W_2\right)$ J iterated Stratonovich integral.

Afirmam ca f este morfism de algebre intre $T(A)$ si $T_\blacktriangle(A) f\left(W_1 \widetilde{W_2}\right) = f\left(W_1\right) f\left(W_2\right)$. Produsul din partea dreapta dintre doua procese Stratonovici, care se scrie ca suma de integrale iterate se calculeaza folosind produsul shuffle, iar rezultatul este acelasi proces din stanga, care este o integrala Ito egala cu produsul Ito dintre (W_1) and (W_2). $I_{W_1} \cdot I_{W_2} = I_{W_1 \widehat{W_2}} = \left(\sum J\right) \cdot \left(\sum J\right) = \sum$ *shuffle* produse intre integrale Stratonovici.

Exista doua moduri de a demonstra ca f este bijectiva:

1)folosind corolarul 5 si propozitia 6 din ([42] 1995)care afirma ca algebrele Hopf Ito $T_\blacktriangle(A)$ au aceeasi baza ca spatii vectoriale gradate formata din cuvintele Lyndon; f este deci un izomorfism gradat de spatii vectoriale reprezentabil prin matrici superior triunghiulare.

2) definind $g : T_\blacktriangle(A) \to T(A)$ in acelasi mod ca si f:

$$g\left(a_{i_1} \otimes a_{i_2} \otimes \ldots \otimes a_{i_n}\right) = \sum \text{coeff*} a_{j_1} \otimes a_{j_2} \otimes \ldots \otimes a_{j_k}$$

astfel incat o integrala Stratonovich din partea stanga este egala cu suma de integrale Ito conform diferentialelor din partea dreapta al caror produs se calculeaza conform produsului Ito $J_w = \sum\limits_{u \in D(w)} \frac{1}{2^{n(u)}} I_u$. $D(w)$ =multimea cuvintelor obtinute din W inlocuind termeni egali adiacenti din W cu 0; Platen-Kloeden (1992, pag 174). Suma integralelor Stratonovici peste diferentialele date de $F\left(G\left(a_{i_1} \otimes a_{i_2} \otimes \ldots \otimes a_{i_n}\right)\right)$ va fi egala cu

$$\int\limits_{a < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < b} dA_{\alpha_1}\left(s_1\right) \circ dA_{\alpha_2}\left(s_2\right) \circ \ldots \circ dA_{\alpha_n}\left(s_n\right),$$

diferentialele fiind date de $a_{i_1} \otimes a_{i_2} \otimes \ldots \otimes a_{i_n}$, deci este de fapt aplicatia identitate. Conform unui corolar a propozitiei 2.1 din [16], procesele stohastice reprezentate de integralele iterate Stratonovich sunt linear independente peste Q si genereaza spatiul vectorial al algebrei libere generata de $a_0, a_1, \ldots, a_n$. F and g sunt transformari superior triunghiulare = identity $+l$.o.t si aplicand colapsarea termenilor adiacenti egali de 2 ori datorita semnelor ne da zero in $f(g(x))$,rezultand transformarea identica.

In teoria proceselor stohastice, insasi existenta primara a integralelor iterate Ito si Stratonovich si a relatiilor dintre ele a generat rezultatul din sub-sectiunea 3.1.1 , un exemplu de situatie cand intuitii si rezultate situate in perimetrul matematicilor financiare pot conduce la rezultate algebrice.

O relatie mai putin evidenta este izomorfismul de coalgebre: $\Delta g(a) = (g \otimes g)\Delta(a)$ pentru

$$a = x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_m} \Leftrightarrow \Delta\left[x_{i_1} \ldots x_{i_m}\right]^{Ito} = \sum_k \left[x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}\right]^{Ito} \otimes \left[x_{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_m}\right]^{Ito}$$

$$V = \sum_k \left[x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}\right]^{Ito} \otimes \left[x_{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_m}\right]^{Ito} = \sum_k \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} J^\alpha \otimes J^\beta,$$

unde J^i sunt integralele Ito ale caror diferentiale au fost obtinute prin colapsarea indicilor egali adiacenti (indici din diferentiale asociate integralelor Stratonovici $\left[x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}\right]$ si $\left[x_{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_m}\right]$. $V = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \sum_k J^\alpha \otimes J^\beta$ = suma de termeni obtinuti prin aplicarea comultiplicarii la un monom obtinut din $a = x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_m}$ prin colapsarea a $^{\alpha+\beta}$ perechi de indici egali, deci suma este egala cu $\Delta g(a)$. f si g fiind bijective, rezulta ca algebra Hopf Ito de calcul Ito n-dimensional clasic este izomorfa cu o algebra Hopf shuffle (determinista).

3.1.2 Operazi Algebrici si algebre shuffle

Rezultatul de mai sus se bazeaza pe gasirea unui izomorfism concret. In cadrul spectaculoasei teorii a operazilor algebrici, Loday enunta urmatoarea teorema despre quasi sau Ito shuffle algebre care include ca un caz special algebra diferentialelor Ito care este comutativa:

Teorema ([80], Remark 4.3 pag 11). Orice algebra Hopf Ito asociata unei algebre comutative B este izomorfa ca algebra Hopf cu algebra shuffle $T(B)$ cu co-produsul de deconcatenare. Demonstratia se bazeaza pe existenta si universalitatea algebrelor asociative si a algebrelor Lie liber generate de o multime, pe proprietatile algebrei universale anvelopante si pe teorema de structura a algebrelor Hopf co-comutative conexe.

4 Calcul diferential bicovariant

Teorema 3.1.1. foloseste proprietatile multiplicative si relatiile shuffle dintre integralele stohastice. Co-produsul de deconcatenare nu a jucat un rol foarte important. [45] Teorema 4 afirma ca o algebra Hopf Ito determina un calcul diferential de ordinul 1 stang-covariant. Amintim definitiile si proprietatile principale a unui calcul diferential bicovariant de ordinul 1.

Definitie ([46]Mesref, pag 10-12) Dandu-se o algebra A, un calcul diferential de ordinul 1 A este o pereche (B, d) astfel incat $d : A \to B$ este liniara si:

1) B este A-bimodul $(a \to b) \leftarrow a'' = a \to (b \leftarrow a'')$

2) d satisface regula Leibnitz $d(xy) = x \to d(y) + d(x) \leftarrow y$

3) bimodulul B numit spatiul 1-formelor este generat de elementele $x \to d(y)$.

Definitie Daca A este algebra Hopf, un calcul diferential de ordinul 1 peste A e dat de un quadruplu $(B, d, \Delta_L, \Delta_R)$ astfel incat (B, d) este un calcul diferential de ordinul 1, (B, Δ_L, Δ_R) este bimodul bicovariant peste A, d este aplicatie intre bicomodule.

Orice calcul diferential de ordinul 1 peste A permite definirea unui produse wedge intre forme, constructia algebrei exterioare $O(A)$ si extinderea unica a diferentialei d la $O(A)$. Lucrarea susmentionata contine exemple, primii pasi fiind dati de constructia unei forme Maurer-Cartan (page 6, [47]Majid)si a operatorilor Yang-Baxter ([47] pag 4, si [48]Woronowicz, Proposition 3.1).

In [45], Hudson defineste un calcul diferential de ordinul 1 peste algebra Hopf Ito a unei algebre asociative X, folosind: $D : A = T(X) \to T(X) \otimes X = B$, unde

$$D\left(L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_n\right) = \left(L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_{n-1}\right) \otimes \left(L_n\right)(a \otimes b) \leftarrow c = (ac \otimes b),$$

multiplicarea Ito s-a folosit pentru primul factor. $c \to (a \otimes b) = (ca \otimes b) + D(c)(a \otimes b)$, produsul tensorial al multiplicarilor a 2 algebre folosindu-se in al doilea termen. Aplicand izomorfismul f din Teorema 3.1.1 la corolarul (pag 157 [45]) care afirma ca "in cazul produsului shuffle obisnuit, calculul diferential introdus este b-covariant", deducem ca este posibil a construi un calcul diferential bi-covariant folosind diferentialele Ito (miscarea Browniana).

5 Comentarii. Aplicatii in Finantele Computationale si simulari numerice

2.5.1. Simetrii Orice automorfism G, de algebre Hopf al algebrei shuffle $T(A)$ va genera un automorfism al algebrei Hopf Ito(A) folosind $f \circ G \circ f^{-1}$. G este generata de restrictia la spatiul vectorial $(n+1)$-dimensional A care este un automorfism liniar g a lui A. Numai daca g este automorfism al algebrei asociative Ito A ($g(xy) = g(x)g(y)$), aplicatia $f \circ G \circ f^{-1}$ este extensia lui g la termeni monomiali data de $g\left(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_m}\right) = g\left(x_{i_1}\right) \otimes \ldots \otimes g\left(x_{i_m}\right)$. Numai in acest caz G are o interpretare probabilistica, g fiind asociat cu Iacobian-ul unei schimbari de variabile. O situatie similara apare in studiul simetriilor stohastice Ito. Conceptul de simetrie Ito a unei ecuatii diferentiale stohastice este relativ nou si a fost descris in lucrarile [51],[52],[53]. Orice simetrie Ito ce transforma o solutie a SDe intr-o alta solutie genereaza o simetrie Lie a ecuatiei Fokker-Planck asociate, dar numai o clasa a simetriilor date de aceasta ecuatie cu derivate partiale pot fi numite simetrii Ito. Prezentam dupa lucrarile [51],[52],[53] simetriile de tip Ito ale ecuatiilor diferentiale stohastice.

Consideram urmatoarea ecuatie diferentiala de ordinul 1 $\Delta \triangleq \frac{dx}{dt} - f(t,x) = 0$
Varietatea solutiilor din M=R$^3 = \{(t, x, x')\}$ este S=$\{(t, x, y)|y = f(t, x)\}$

Ne intereseaza campurile de vectori X=$a(t,x,y)\partial_t + b(t,x,y)\partial_x + c(t,x,y)\partial_y$ care genereaza o familie 1-dimensionala de difeomorfisme care invariaza S. Din interpretarea fizica a problemei , y derivata de conduce la restrictia a=a(t,x), b=b(t,x), iar transformarea in y este indusa de transformarea in planul (t,x) prin schimbarea de coordonate. Notam $X_0 = a(t,x,y)\partial_t + b(t,x,y)\partial_x$, iar X va fi prelungirea acestui camp de vectori. In cazul unui sistem de ecuatii diferentiale ordinare n-dimensional,

{t,x}=$\{t, x_{1,\ldots} x_n\}$ cu campurile u=$\{u_{1,\ldots} u_p\}$, **formula de prelungire** data de
$X_0 = a(t,x,u)\partial_t + \sum b^i(t,x,u)\partial_{xi} + \sum c^j(t,x,u)\partial_{uj}$ pe spatiul –jet R $\times$ R$^n \times$ R$^p \times \prod_{k=1}^{N} U^k$
(spatiul derivatelor partiale de ordin k) este data de X=X_0+$[\sum_J \partial_J(c^j - \sum_{i=1}^n b^i u_i^j) + \sum_{i=1}^n u_{i,J}^j]\frac{d}{du_J^j}$,
J multi-index
Timpul joaca un rol special, deci transformarile duc ecuatii de evolutie in ecuatii de evolutie.
$a(t,x,u)$ va depinde numai de t. b^inu va depinde de u, iar p=1

Definitie: Campurile de vectori X_0 cu aceasta forma particulara vor fi numite campuri proiectabile sau conservative pe fibre.
In cazul sistemelor de forma $\frac{dx^i}{dt} - f^i(t,x) = 0$, functiile a(t) si $b^i(t,x)$ trebuie sa satisfaca ecuatia: oricare i, $(a(t)\frac{d}{dt} + \sum_j b^j\partial_j)f^i(t,x) - (\frac{d}{dt} + \sum_j f^j\partial_j)b^i(t,x) + f^i(\frac{d}{dt} + \sum_j f^j\partial_j)a = 0$. Acest sistem de ecuatii cu derivate partiale are intotdeauna o solutie a(t),b. Putem fixa a(t) cu necunoscutele b. Exista un numar infinit de simetrii.

Simetriile ecuatiilor diferentiale stohastice

Consideram ecuatia Ito $dx^i = f^i(t,x)dt + s^i_k(t,x)dw^k$, unde w^k sunt procese Wiener independente. k = 1..n. Aceasta ecuatie este echivalenta cu ecuatia Stratonovich cu drift $b^i(t,x) = f^i(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j,k}[s^j_k\frac{ds^i_j}{dx^k}]$. Ecuatia Fokker-Planck asociata este:

$\partial_t p + \sum_i \partial_i(f^i p) = \frac{1}{2}\partial^2_{ij}[(ss^T)^{ij}p]$. Se va presupune ca matricea ss^T este non-degenerata.
P(t,x) satisface pentru t=o $\int_{-\infty}^{+\infty} p(0,x)dx^1...dx^n = 1$. Numai transformarile ce conserva aceasta conditie vor avea o interpretare probabilistica si au conexiuni cu simetriile ecuatiei diferentiale stohastice. Ecuatii diferentiale Ito ,diferite, pot avea aceeasi ecuatie Fokker-Planck.

Simetriile punctuale spatiale de tip Lie are ecuatiei Ito de mai sus sunt generate de campurile vectoriale $X_0 = \sum b^i(t,x,)\partial_{xi}$, care genereaza un grup cu 1 parametru de difeomorfisme $\varphi^i(t,x), i = 1..n$, astfel incat procesul stohastic vectorial $y^i = \varphi^i(t,x)$ verifica aceeasi ecuatie Ito.
In acest caz, $b^i(t,x,)$ verifica oricare i, $\partial_t b^i + (-\sum_j b^j\partial_j)f^i(t,x) + (\sum_j f^j\partial_j)b^i(t,x) + \frac{1}{2}(ss^T)^{jk}\partial^2_{jk}b^i = 0$ si
$(\sum_{j,k} s^j_k\partial_j)b^i(t,x) = \sum_k(\sum_j b^j\partial_j)s^i_k(t,x)$. Pentru o matrice s identic nula, ecuatiile se reduc la cazul determinist. In cazul in care are loc o transformare a(t) a timpului, sistemul devine supra-determinat , pot sa nu existe simetrii. Mai mult, apare transformarea procesului Wiener W(s)=w(t(s)) in cazul schimbarii variabilei timp t in s, data de o functie t.

$a(t)\frac{d}{dt}$ induce o transformare care in cazul spatiului Wiener ia forma dw(s)=(1+$\varepsilon a'/2$)dw

Definitie (Misawa). I se numeste cantitate conservata pentru procesul stohastic x daca dI(x(t),t)=0, unde am aplicat diferentiala Ito. In acest caz, YI este de asemenea cantitate conservata, unde Y este vectorul generator al unei simetrii Ito.

3. Simetriile ecuatiei Fokker-Planck $\partial_t u + A^{ij}\partial^2_{ij}u + B^i\partial_i u + Cu = 0$
Cazurile 1-2 spatial-dimensionale se considera complet rezolvate. (Cicogna, Vitali ,Finkel- 1999).
In cazul ecuatiilor Ito, coeficientii nu sunt independenti si au o forma specifica.

$$A^{ij}(t,x) = -\tfrac{1}{2}(ss^T)^{ij}$$

$$B^i(t,x) = f^i - \sum_j \partial_j(ss^T)^{ij}$$

$$C(t,x) = \sum_i \partial_i f^i - \tfrac{1}{2}\partial^2_{ij}(ss^t)^{ij}$$

Ecuatiile ce trebuiesc satisfacute de $X_0 = a(t)\partial_t + \sum b^i(t,x)\partial_{xi} + \sum c^j(t,x,u)\partial_{uj}$ in acest caz particular al operatorilor de ordin 2 proveniti din SDE, implica $c^j(t,x,u) = \alpha(t,x) + \beta(t,x)u$, α verifica ecuatia FP. β verifica FP(β)=o functionala ce depinde de a(t) si b(t,x).

Conditia de normalitate
$\int_{-\infty}^{+\infty} p(0,x)dx^1...dx^n = 1$ se conserva daca si numai daca $\beta(t,x) = -div(b^i)$ si $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t,x)dx^1...dx^n = 0$
In plus, daca d(i,k)=0, unde d(i,k) se definesc prin ecuatiile:
$s_j^m \partial_m b^k - b^m \partial_m s_j^k - a(t)\partial_t s_j^k - \frac{1}{2} s_j^k \partial_t a = d(k,s)\delta^{js}$, atunci X_0 genereaza o simetrie a ecuatiei Ito.

Teorema: Fie $a(t)\partial_t + \sum b^i(t,x)\partial_{xi}$ care genereaza o simetrie a ecuatiei diferentiale stohastice asociate. Pentru $\beta(t,x) = -div(b^i)$, avem o simetrie a ecuatiei Fokker-Planck.

Urmatoarele subiecte reflecta importanta tehnicilor de algebre Lie, Hopf si a integralelor iterate in evaluarea preturilor optiunilor.

1. Formulele de cubatura pe spatiul Wiener au fost definite in [54],s-a demonstrat in [54] ca aceste formule exista si au fost aplicate in option pricing si aproximari de ecuatii diferentiale [55]. Fundamentul teoretic este dat de geometria sub-Riemanniana si Teoria masurii(Teoremele Chow-Rashevski si Tchakaloff) care prezic $M = 4^m$ diviziuni ale unor curbe liniare pe portiuni necesare simularii miscarii browniene si un numar exponential de curbe pentru a aproxima pretul teoretic al optiunilor Europene pana la ordinul m. Valoarea expectativa a solutiei unei ecuatii diferentiale stohastice este solutia unui PDE de tip ecuatia caldurii definite pe o varietate compacta d-dim M. L, operator diferential eliptic de ordin 2 definit de o conexiune intr-un fibrat vectorial admite un smooth Schwartz kernel. datorita teoremei lui Hormander teorema este adevarat si in cazul hipoeliptic. Pentru $d = 1$ si pana la ordinul 11, Lyons si Victoir au construit formule de cubatura folosind programarea in C++. Este considerata o problema deschisa gasirea de formule de cubatura concrete pentru ordine si dimensiuni mai mari, din punct de vedere matematic si al complexitatii computationale.

Un corolar al aproximarilor prin cubatura a preturilor optiunilor este urmatorul. Presupunem ca la momentul t=0 stim pretul activului S si preturile tuturor optiunilor pentru toate maturitatile T si a preturilor de exercitare K - avem deci suprafata de volatilitate implicita. Daca preturile urmeaza un proces de difuzie dat de o ecuatie diferentiala stohastica $dx_t = a(x_t,t)\,dt + b(x_t,t)\,dW$, iar pretul teoretic al optiunilor se considera calculat folosind formule de cubatura de ordin m atunci contrar rezultatelor lui Dupire si Gatheral nu putem recupera functia de volatilitate locala $b(x,t)$, eventual valoarea ei pe un numar de f(m) curbe plane, insuficient pentru a calcula pretul optiunilor la un moment din viitor.

Fie $V_0, V_{1...}, V_d,$ campuri vectoriale pe R^N ce definesc operatorul diferential L $=V_0, + \sum V_i^2$
Se considera ecuatia diferentiala cu derivate partiale parabolica $\begin{array}{l} \frac{du}{dt}(t,x) = -Lu \\ u(T,x) = f(x) \end{array}$
Pentru o functie data f Lipschitz. Scopul formulelor de cubatura e aproximarea pentru u(0,-).
Fie spatiul de probabilitate (spatiul Wiener) $(C_0^0([0,T],\mathrm{R}^d), \Im, \wp)$ cu corpul Borelian asociat si $\wp$ masura Wiener.Pentru orice drum f din $C_0^0([0,T],\mathrm{R}^d)$ se considera $f^0(t) = t$. pe langa celalalte d componente.

$$B = (B_t^1...B_t^d) \text{ miscare Browniana d} - \text{dimensionala } B_t^i(f) = f^i(t). \text{ Consideram } B^0(t) = t$$

Fie $\alpha_{t,x}$ solutia ecuatiei diferentiale stohastice Stratonovich $d\alpha_{t,x} = \sum_{i=0}^d V_i(\alpha_{t,x}) \circ dB_t^i, \quad \alpha_{0,x} = x$
Functia u(t,x)=$E(f(\alpha_{T-t,x}))$ este solutia pentru ecuatia cu derivate partiale de mai sus.
Fie $\Omega_{T,x}$:$C_0^0([0,T],\mathrm{R}^d) \to \mathrm{R}^N, \Omega(f) = \alpha_{T,x}(f)$. Atunci u(0,x)=$\int_{\text{spatiul Wiener}} f(\Omega_{T,x}(h))\wp(dh)$
Este suficient a aproxima integrala pe spatiul Wiener.

Definitie: Fie $R_m[x_1...x_d]$ spatiul polinoamelor in d variabile de grad mai mic decat m
Fie μ masura pozitiva pe R^d. Spunem ca punctele x(1)...x(n) in suportul masurii si cu ponderile pozitive L(1)...L(n) definesc o formula de cubatura de grad m in raport cu μ daca si numai daca pentru orice polinom P din $R_m[x_1...x_d]$ avem $\int_{R^d} P(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} L(i)P(x(i))$.
Pentru d=1 aceste formule se numesc formule de cuadratura.
Putinar (1997), Tchakaloff (1971) au demonstrat ca exista astfel de formule cu n mai mic decat dim $R_m[x_1...x_d]$, in cazul in care $\int_{R^d} |P(x)|\mu(dx) \prec \infty$ oricare P din $R_m[x_1...x_d]$.
Putem deci sa aproximam $\int_{R^d} f(x)\mu(dx)$ printr-o masura cu support finit, gradul de acuratete fiind dat de aproximarea lui f cu elemente din $R_m[x_1...x_d]$.

Spunem ca drumurile f(1)....f(n) cu ponderile pozitive L(1)...L(n) definesc o formula de cubatura pe spatiul Wiener de ordin m daca valoarea expectativa a tuturor integralelor iterate Stratonovich de grad mai mic decat m sunt egale cu cu suma ponderata a integralelor iterate pe drumurile f(i). Aceasta formula conduce la aproximarea lui u(0,x) cu suma ponderata a solutiilor unor ecuatii diferentiale ordinare asociate fiecarui drum.

Fie $\alpha_{t,x}$ solutia ecuatiei diferentiale stohastice Stratonovich $d\alpha_{t,x} = \sum_{i=0}^{d} V_i(\alpha_{t,x}) \circ dB_t^i, \quad \alpha_{0,x} = x$
Atunci oricare functie f, $f(\alpha_{t,x}) = f(x) + \int_0^t \sum_{i=0}^{d} V_i f(\alpha_{s,x}) \circ dB_s^i$, Aplicand aceasta formula si in interiorul integralei se obtine ca o buna aproximare in termenii valorii expectative pentru $f(\alpha_{t,x})$ este data de valoarea expectativa a procesului stohastic.

$$\sum_{(\mathrm{i1,\ i2,...ik}) \in A_m} V_{i1} \circ ... \circ V_{ik} f(x) \int_{0<t_1<...<t_k<t} dB_{t1}^{i1} \circ ... \circ dB_{tk}^{ik}, \text{ unde (i1, i2,...ik)} \in A_m \ \mathrm{card}\{\mathrm{j}, \mathrm{i}_j = 0\} \leq m-k$$

Definitie: n curbe f(i) de ponderi L(i) definesc o formula de cubatura pe spatiul Wiener daca oricare (i1, i2,...ik) $\in A_m$ avem $E(\int_{0<t1<...<tk<T} dB_{t1}^{i1} \circ ... \circ dB_{tk}^{ik}) = \sum_i L(i)(\int_{0<t1<...<tk<T} df_i^{i1}(t_1)...df_i^{ik}(t_k)$
Pentru fiecare curba indexata dupa i, selectam componentele data de (i1, i2,...ik) $\in A_m$ si evaluam integrala iterata (integrala pe simplex din pull-back-ul unei forme).

2.5.2.Simulari numerice

Studii recente au subliniat importanta distributiei generalizate hyperbolice in modelarea indexului bursier(Romanian BETC in [56]) (Polish WIG20 index in [57])(S & P 500 indices in [58]) (European stock indices in [59]). Folosind simulari numerice, am testat empiric metoda de aproximare bazata pe Instanton (numita de asemenea WKB sau aproximare semi-clasica [63], [64],[65],[154])a pretului teoretic al optiunilor. Articolele de finante sus-mentionate sugereaza ca distributia hiperbolica generalizata este capabila a aproxima distributia empirica observata. Ipoteza noastra de start a fost ca distributia de probabilitate a anumitor indexi bursieri poate fi robust-aproximata cu cea a unui proces stohastic cu volatilitate locala $b(x,t)$ intrebarea fiind daca functia $b(x,t)$ depinde sau nu de timp. Simularile noastre sugereaza o dependenta de timp si in acest caz teoreme diferite, mai puternice de aproximare a nucleului caldurii pentru varietati Riemannene cu metrica dependenta de timp trebuiesc aplicate in evaluarea pretului optiunilor [62], [63], [64], [4],[94], [95], [96].

Functia de densitate ($\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu$ parameters) a unei distributii hiperbolice generalizate

$$GH(x, \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\delta} \right) \cdot \frac{e^{(x-\mu)\beta}}{\sqrt{2\pi}\, K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\delta^2+(x-\mu)^2}{\alpha}\right]^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} \cdot K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)$$

K_λ(x) este functia modificata Bessel de speta a 3^a,

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-\frac{1}{2}t\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx, \qquad t>0.$$

Este solutie a ecuatiei diferentiale

$$x^2W_{xx}+xW_x-\left(x^2+\lambda^2\right)W=0.$$

Aplicam urmatoarea aproximare a nucleului caldurii pentru $dx_t=b\left(t,x_t\right)dW$,

$$p\left(t_1,x_1,T,K\right)\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(T-t_1\right)}a\left(t_1,x_1\right)}e^{-\int_{t_1}^{T}L(c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial T}\left[-\log\, p\right]-\frac{1}{2\left(T-t_1\right)}=L(c)(T,K). \tag{**}$$

Integrala este evaluata de-a lungul solutiei unei ecuatii Euler-Lagrange pentru $L=\left[(c)/b\left(t,c(t)\right)\right]^2$. Curba $c(t)$ este solutie a urmatoarei ecuatii:

$$c''-\frac{f_t}{f}c'-\frac{1}{2}\frac{f_X}{f}\left(c'\right)^2=0.$$

Linia dreapta $\alpha\in[0,t]$, $x(\alpha)=x_0+\dfrac{\alpha}{t}\left(x_1-x_0\right)$ este o solutie daca si numai daca

$$\frac{f_t}{f_y}=\frac{y_o-y}{2t},$$

unde $f=$ patratul volatilitatii locale $b(t,x)$. Egalitatea e posibila daca si numai daca

$$b(t,x)=F\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{t}}\right),$$

pentru F o functie arbitrara. Deci volatilitatea b este obligata sa depinda de timp, si anume sub forma unei dependente functionale de moneyness, daca consideram $x=log$ (stock index or price); simularile noastre numerice sugereaza ca segmentele de linie sunt solutii ale ecuatiei de mai sus, in cazul in care am aproximat densitatea empirica observata cu o distributie hiperbolica simetrica generalizata. Facem urmatoarea conjectura despre structura lui F:

$F(x)=a_0+a_1\sqrt{x^2+a_2}-\dfrac{a_3}{x^2+\varepsilon}$, unde a's si ε sunt constante pozitive.

Imaginile de mai jos sunt generate de analiza distributiei hiperbolice GH ($\delta:=0.00585$; $\lambda:=$ 02718; $\mu=10$, $\beta=0$, $\alpha=1/3$). Daca solutiile ecuatiei Euler-Lagrange sunt linii drepte, $L(t,c(t),c'(t))$ e constanta pe $c(t)$ daca si numai daca $c(t)$ e geodezica in planul (t,x) inzestrat cu tensorul metric $g(1,2)=g(2,1)=0$, $g(1,1)=1$ si $g(2,2)=1/b$. $((x(t),u(t))$ e geodezica parametrizata dupa lungimea de arc daca si numai daca

$$\begin{cases} x''+\dfrac{1}{2}\dfrac{f_t}{b^2}\left(y'\right)^2=0 \\ y''-\dfrac{f_t}{f}x'y'-\dfrac{1}{2}\dfrac{f_x}{f}\left(y'\right)^2=0. \end{cases}$$

Daca pentru o difuzie fara drift cu volatilitate locala b, solutiile ecuatiei $Euler-Lagrange$ si geodezicele sunt linii drepte identice, atunci b nu depinde de timp. Experimentele noastre numerice arata ca $L(t, c(t), c'(t))$ nu e constanta pe $c(t)$, deci b depinde de timp. Reprezentam grafic $L(T, K)$, cunoscandu-l din ecuatia distributiei hiperbolice (**). In loc sa lucram cu o singura suprafata data de $(t = 0, x)$,consideram 2 suprafete. Intersectiile lor sunt curbe, cel putin una dintre ele fiind data de solutiile ecuatiei lagrangiene:

Figura.1: suprafetele sqr $[c'(t)/b(T, K)]$,pentru (t_i, x_i) si c curba Lagrangiana; structura non-planara a intersectiei

Figura 2. curbe de intersectie, unele sunt solutii ale Eq. Euler-Lagrange

Figure 3. $c(t)$ sunt linii drepte in planul (T, K).

Figure 4. Curbele Lagrangiene se proiecteaza in linii in planul (K, T) si L(t,c(t),c'(t)) variaza pe c(t).

Imaginile sunt generate de analiza distributiilor hiperbolice GH ($\delta := 0.01$; $\lambda := 1.9$; $\mu = 10$, $\beta = 0$, $\alpha = 1/3$). GH ($\delta := 0.0861$; $\lambda := -2.621$; $\mu = 10$, $\beta = 0$, $\alpha = 1/3$). Distributiile hiperbolice simetrice au fost folosite in studiul indicilor bursieri brazilieni si germani [57],[58],[103], precum si in China si India.

$b(t, x) = F\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{t}}\right)$ unde $F(x) = a_0 + a_1\sqrt{x^2 + a_2} - \frac{a_3}{x^2 + \varepsilon}$, are urmatoarele avantaje: chiar daca distributiile hiperbolice sunt capabile a aproxima foarte bine diverse distributii empirice, formule pentru pretul optiunilor in modelele de volatilitate stohastica sau conduse de procese Levy care genereaza aceste distributii GH nu exista, poate doar in forma aproximativa, pe cand in modelele generalizate Black-Scholes exista rezultate de aproximare oricat de buna pentru volaitiliatea implicita, locala si pentru heat kernel.

Extragem din lucrarile [56],[57],[58] rezultate teoretice legate de distributiile hiperbolice generalizate.

Momentele distibutiei hyperbolice generalizate

Notam al k-lea moment in raport cu μ prin

$$\overline{M}_k = E(X - \mu)^k.$$

Teorema Presupunem $X \sim gh(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$. Atunci

$$\overline{M}_k = \sum_{\ell=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} \frac{k!}{(k-\ell)(2\ell-k)!2^{k-1}} \beta^{2\ell+k} E(W^{-\ell},$$

unde $W \sim gig\,(\lambda, \delta^2, \alpha^2 - \beta^2)$.

Corolar Presupunem $X \sim gh(\lambda, \alpha, 0, \delta, \mu)$. Atunci $\overline{M}_k = 0$ pentru k impar, in timp ce

$$\begin{aligned}\overline{M}_k &= a_{k,k/2} \left(\frac{\delta^2}{\zeta}\right)^{\lambda+k/2} \frac{K_{\lambda+k/2}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)} \\ &= k! \left[2^{k/2}\left(\frac{k}{2}\right)!\right]^{-1} \left(\frac{\delta^2}{\zeta}\right)^{\lambda+k/2} \frac{K_{\lambda+k/2}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)}\end{aligned}$$

pentru k par.

Ecuatii diferentiale stohastice

Fie $\{X_t\}$ unica solutie slaba pentru ecuatia diferentiala stohasica

$$dX_t = b\,(X_t;\theta)\,dt + \sigma\,(X_t;\theta)\,dW_t,$$

$\sigma(x;\theta)$ pozitiv oricare x si oricare θ intr-un p-dimensional spatiu de parametrii Θ. Densitatea e notata cu μ_0.

Procesele de difuzie cu distributie marginala data sunt specificate de drift-ul b si coeficientul de difuzie σ. Exista urmatoarea relatie intre coeficientul de drift si densitatea distributiei.

$$2b(x;\theta) - v'(x;\theta) = v(x;\theta)\frac{\mu'_\theta(x)}{\mu_\theta(x)},\ l < x < r,\ \theta \in \Theta,$$

$v(x;\theta) = \sigma^2(x;\theta)$.

Folosind (4.2). Bibby & Sørensen (2001) au construit procese de difuzie cu distributie marginala prescrisa. Fixam .

$$b(x;\theta) = \frac{1}{2}v(x;\theta)\frac{d}{dx}\log\left[v(x;\theta)f(x)\right],$$

unde f e functie oarecare integrabila pe (l, r), se arata ca procesul de difuzie dat de (4.1) are densitatea μ_θ proportionala cu f.

Bibby & Sørensen (2001) considera cazul in care

$$v(x;\theta) = \sigma^2 f(x)^{-\kappa}, \quad \sigma^2 > 0, \quad \kappa \in [0,1].$$

precum si urmatoarea ecuatie diferentiala stohastica

$$dX_t = \frac{1}{2}\sigma^2(1-\kappa)f(X_t)^{-\kappa}\left[\beta - \frac{\alpha\,(X_t-\mu)}{\sqrt{\delta^2 + (X_t-\mu)^2}}\right]dt + \sigma f\,(X_t)^{-\kappa}\,dW_t,$$

unde

$$f(x) = \exp\left[-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)\right].$$

2.5.4. Calcul variational Elementele de calcul variational ce pornesc de la cadrul oferit de geometria diferentiala si ecuatiile cu derivate partiale se regasesc in lucrarile:[154],[150],[110],[65],[64].Urmatoarele definitii si teoreme se regasesc in aceste lucrari mentionate.

Formalismul Hamiltonian Fie $H = H(x,p)$ o functie cu valori reale de doua ori diferentiabila. Fie $X(t,x_0,p_0)$, $P(t,x_0,p_0)$ solutiile sistemului

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p}(x,p) \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,p) \end{cases}$$

cu conditii initiale $(x_0,p_0))$ la timpul zero. Presupunem ca pentru z_0 si $t_0 > 0$, si toti $t \in (0,t_0]$, exista o vecinatate a originii in p-spatiul $\Omega_t(x_0) \in \mathbb{R}^n$ astfel incat aplicatia $p_0 \mapsto X(t,x_0,p_0)$ este un difeomorfism de la $\Omega_t(x_0)$, iar imaginea contine o vecinatate fixata $D(x_0)$ of x_0 ce nu depinde de t. Familia $\Gamma(x_0)$ de solutii a sistemului Hamiltonian cu conditie initiala (x_0,p_0), $p_0 \in \Omega_t(x_0)$, se numeste camp de caracteristici cu conditie initiala x_0 ce acopera $D(x_0)$ pentru $t \leq t_0$. Exista o functie diferentiabila

$$p_0(t,x,x_0) : (0,t_0) \times D(x_0) \mapsto \Omega(x_0)$$

astfel incat

$$X((t,x_0,p_0(t,x,x_0)) = x.$$

$\Gamma(x_0)$ defineste 2 campuri de vectori , viteza si momentul, pe $(0,t_0] \times D(x_0)$

$$p(t,x) = P(t,x_0,p_0(t,x,x_0)), \quad v(t,x) = \frac{\partial H}{\partial p}(x,p(t,x))$$

La fiecare solutie $X(t,x_0,p_0)$, $P(t,x_0,p_0)$ pentru sistemul hamiltonian se defineste functionala de actiune

$$\sigma(t,x_0,p_0) =$$
$$= \int_0^t \Big(P(\tau,x_0,p_0)\dot{X}(\tau,x_0,p_0) - H(X(\tau,x_0,p_0), P(\tau,x_0,p_0)) \Big) d\tau.$$

Se poate defini local functia $S(t,x,x_0)$ ca actiunea de-a lungul traiectoriei $\Gamma(x_0)$ ce uneste x_0 si x la timpul t, i.e.

$$S(t,x,x_0) = \sigma(t,x_0,p_0(t,x,x_0)).$$

sau in forma echivalenta .

$$S(t,x,x_0) = \int_0^t (p(r,x)dx - H(x,p(r,x))dr)$$

integrala de-a lungul curbei caracteristice $X(r,x_0,p_0(t,x,x_0))$.

Un rezultat clasic fundamental al calculului variational este urmatorul:

Propozitie Ca functie de (t,x), functia $S(t,x,x_0)$ satisface ecuatia Hamilton-Jacobi.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H'\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right)$$

in domeniul $(0,t_0)\times D\,(x_0)$, si

$$\frac{\partial S}{\partial x}=p(t,x).$$

Integrala din S nu depinde de drum, are aceeasi valoare pentru toate curbele $x(r)$ ce unesc x_0 si x in timpul t , situate in domeniul $D(x_0)$.

Functia Weierstrass $W(x,q,p)$ se defineste ca

$$W(x,q,p)=H(x,q)-H(x,p)-\left(q-p,\frac{\partial H}{\partial p}(x,p)\right).$$

In formalismul Lagrangian ce foloseste variabilele x, v legate de variabilele Hamiltoniene canonice x, p prin formula $v(x,p)=\dfrac{\partial H}{\partial p}(x,p)$, functia Weierstrass are forma

$$W\,(x,v_0,v)=L(x,v)-L\,(x,v_0)-\left(v-v_0,\frac{\partial L}{\partial v}\,(x,v_0)\right).$$

Formalismul Lagrangian Fie functia Lagrangian L pe $\mathcal{R}^{n(v+2)}$ Consideram functionala integrala

$$I_t(y(.))=\int_0^t L(y(\tau),\dot y(\tau),\ldots,y^{\nu+1}(\tau)d\tau)$$

cu domeniul functiile y definite pe $[0,t]$ cu $\nu+1$ derivate continue, cu conditia de frontiera

$$\begin{cases} y(0)=a_0, & \dot y(0)=a_1, \quad \ldots, \quad y^{(\nu)}(0)=a_\nu \\ y(t)=b_0, & \dot y(t)=b_1, \quad \ldots, \quad y^{(\nu)}(t)=b_\nu \end{cases}$$

Presupunem ca exista o astfel de functie $\widetilde{y}(\tau)$ ce minimizeaza functionala de mai sus. Definim cu ajutorul acesteia

$$g(\tau)=\frac{\partial\overline{L}}{\partial y^{(\nu+1)}}(\tau)-\int_0^\tau\frac{\partial\overline{L}}{\partial y^{(\nu)}}(\tau_1)d\tau_1+\int_0^\tau\left(\int_0^{\tau_1}\frac{\partial\overline{L}}{\partial y^{(\nu-1)}}(\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{\nu+1}\int_0^\tau..\left(\int_0^{\tau_\nu}\frac{\partial\overline{L}}{\partial y}\,(\tau_{\nu+1})\,d\tau_{\nu+1}\right)\ldots d\tau_1.$$

A doua lema a calculului variational;Ecuatia Euler in forma integrala g este polinom de grad ν, i. e, exista constantele $c_0,c_1,\ldots,c_\nu$, astfel incat

$$g(\tau)=c_0+c_1\tau+\ldots+c_\nu\tau^\nu.$$

Solutiile ecuatiei de mai sus se numesc extremalele functionalei I de mai sus.

Fie $\overline{y}(\tau)$ ce minimizeaza functionala Lagrangiana. Presupunem ca matricea data de

$$\frac{\partial^2\overline{L}}{\left(\partial y^{(\nu+1)}\right)^2}(\tau)=\frac{\partial^2\overline{L}}{\left(\partial y^{(\nu+1)}\right)^2}(\tau)\left(\overline{y}(\tau),\dot{\overline{y}}(\tau),\ldots,\overline{y}^{(\nu+1)}(\tau)\right)$$

e pozitiv definita oricare $\tau \in [0,t]$. Atunci $\overline{y}(\tau)$ satisface ecuatia diferentiala Euler

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{d^2\tau}\frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} - \ldots + (-1)^{\nu+1}\frac{d^{\nu+1}}{d\tau^{\nu+1}}\frac{\partial L}{\partial y^{(\nu+1)}} = 0.$$

Ecuatiile Euler-Lagrange corespund cazului $\nu = 0$.

Exista o forma Hamiltoniana a ecuatiilor de mai sus. Se introduc variabilele canonice $x = (x_0, \ldots, x_\nu)$ prin $x_0 = y$, $x_1 = \dot{y}$, $\ldots$, $x_\nu = y^{(\nu)}$ si $p = (p_0, \ldots, p_\nu)$ prin ecuatiile

$$\begin{cases} p_\nu = \dfrac{\partial L}{\partial y^{(\nu+1)}}\left(y, \dot{y}, \ldots, y^{(\nu)}, y^{(\nu+1)}\right) \\ p_{\nu-1} = \dfrac{\partial L}{\partial y^{(\nu)}} - \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y^{(\nu+1)}}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_0 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \ddot{y}}\right) + \ldots + (-1)^\nu \dfrac{d^\nu}{d\tau^\nu}\left(\dfrac{\partial L}{\partial u^{(\nu+1)}}\right). \end{cases}$$

Propozitie Presupunem ca $\dfrac{\partial^2 L}{\left(\partial y^{(\nu+1)}\right)^2} \geq \delta$, $\delta > 0$. Atunci sistemul de mai sus are solutia $y^{(\nu+1)}, \ldots, y^{(\nu+l+1)}$. $y^{(\nu+l+1)}$ nu depind de $p_0, \ldots, p_{\nu-l-1}$, oricare l:

$$y^{(\nu+l+1)} = f_l\left(x_0, p_\nu, p_{\nu-1}, \ldots, p_{\nu-l}\right).$$

Propozitie (Teorema Ostrogradski). Ecuatiile Euler sunt echivalente cu sistemul Hamiltonian (1.1) pentru variabilele $x = (x_1 p_0 + \ldots + x_\nu)$, $p = (p_0, \ldots, p_\nu)$, cu Hamiltonianul

$$H = x_1 p_0 + \ldots + x_\nu p_{\nu-1} + f_0(x, p_\nu)p_\nu - L\left(x_0, \ldots, x_\nu, f_0\left(x, p\nu\right)\right),$$

unde f_0 e definit de

$$y^{(\nu+1)} = f_0\left(x_0, \ldots, x_\nu, p_\nu\right).$$

.

In cazul unui Lagrangian L patratic

$$L\left(x_0, \ldots, x_\nu, z\right) = \frac{1}{2}\left(g(x)(z + \alpha(x)), +\alpha(x)\right) + V(x).$$

Hamiltonianul asociat are forma

$$H = x_1 p_0 + \ldots + x_\nu p_{\nu-1} + \frac{1}{2}\left(g^{-1}(x)p_\nu, p_\nu\right) - (\alpha(x), p_\nu) - V(x).$$

4.3. Determinantul Van Vleck-Pauli-Morette

Se considera o solutie $\xi(t)$ a ecuatiei omogene

$$\left[-\partial_t^2 - \Omega^2(t)\right]\xi(t) = 0,$$

si se defineste

$$D_{ron} = \xi(t)\xi(t_0)\int_{t_a}^{t_b}\frac{dt'}{\xi^2(t')}$$

Functia de frecventa $\Omega(t)$ are forma speciala $\Omega^2(t) = V''(x_{cl}(t))/M$. Consideram solutia ecuatiei Euler-Lagrange $x_{cl}(t)$ si derivatele partiale mixte ale functionalei de actiune $A((x_b x_a; t/t_b - t_a)$. Solutia $\xi(t)$ este data de

$$\xi(t) = \dot{x}_{cl}(t).$$

$$\partial_t \left[M\widetilde{x}_{cl} + V'(x_{cl}(t))\right] = \left[M\partial_t^2 + V''(x_{cl}(t))\right] = 0,$$

.

$$D_{ren} = \dot{x}_{cl}(t_b)\dot{x}_{cl}(t_a)\int_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{\dot{x}_{cl}^2(t)}$$

$$D_a = \dot{x}_{cl}(t)\dot{x}_{cl}(t_a)\int_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{\dot{x}_{cl}^2(t)}, \qquad D_b = \dot{x}_{cl}(t_b)\dot{x}_{cl}(t)\int_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{\dot{x}_{cl}^2(t)}$$

$$D_{ren} = -\left(\frac{\partial \dot{x}_b}{\partial x_a}\right)^{-1} = -M\left[\frac{\partial^2}{\partial x_b \partial x_a}\mathcal{A}_{cl}\right]^{-1}$$

Aproximarea semiclasica a unei integrale de drum este data de actiunea

$$\mathcal{A}_{qu}[x,\dot{x}] = \mathcal{A}[x_{cl}] + \int_{t_a}^{t_b} dt\left[\frac{M}{2}(\partial\dot{x})^2 + \Omega^2(t)(\partial x)^2\right],$$

unde $\Omega^2(t)V''(x_{cl}(t))/M$ of (4.85).

$$F(x_b, x_a; t_b - t_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i h/M}}\left[\frac{\partial \dot{x}_b}{\partial x_a}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i h}}\left[-\partial_{x_b}\partial_{x_a}A(x_b, x_a; t_b - t_a)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Generalizarea D-dimensionala este data de

$$F(x_b, x_a, t_b - t_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i h}^D}\left\{\det{}_D\left[-\partial_{x_b^i}\partial_{x_a^j}A(x_b, x_a, t_b - t_a)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Aproximarea semiclasica a probabilitatii de tranzitie este data de

$$(x_b t_b \mid x_a t_a) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i h}^D}\left\{\det{}_D\left[-\partial_{x_b^i}\partial_{x_a^j}A(x_b, x_a, t_b - t_a)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} e^{iA(x_b, x_a, t_b - t_a)/h}.$$

Determinantul de dimensiune $D \times D$ se numeste determinantul Van Vleck-Pauli-Morette.

$$\partial_{x_b^i}\partial_{x_a^j}A(x_b, x_a; t_b - t_a) = \frac{\partial p_b^i}{\partial x_a^j}$$

iar aproximarea semiclasica devine

$$(x_b t_b \mid x_a t_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i h}^D}\left[\det{}_D\left(-\frac{\partial p_b}{\partial x_a}\right)\right]^{\frac{1}{2}} e^{iA(x_b,x_a;t_b-t_a)/h}$$

$$\int\limits_{x(t_1)=x_1}^{x(t_2)=x_2} e^{-A[x(t)]}Dx(t) = \sqrt{\det\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 A_{Cl}(x_2,x_1)}{\partial x_2^\mu x_1^\mu}\right)}\exp\left\{-A_{Cl}(x_2,x_1)\right\} = p(t_1,x_1,T,K).$$

$A_{Cl}(x_2,x_1)$ este functionala de actiune evaluata de-a lungul solutiei clasice a ecuatiei Euler -Lagrange

$$\frac{\partial A}{\partial x^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \qquad x^\mu_{Cl}(t_1) = x^\mu_1, \qquad x^\mu_{Cl}(t_2) = x^\mu_2.$$

Elementele de calcul variational aplicate in evaluarea optiunilor europene se regasesc in lucrarile:[4],[63],[65],[64]. Definitiile si teoremele de mai jos se regasesc in aceste lucrari, fundamentul teoretic fiind cazuri particulare ale formalismului hamiltonian si lagrangian. Dandu-se un proces stohastic

$$\frac{dS}{S} = \sigma(S,t)dW_t,$$

volatilitatea implicita $\sigma_{bs}(K,T)$ se defineste ca solutie a ecuatiilor

$$C_{bs}(s,t,K,T,\sigma_{bs}(K,T)) = \mathbb{E}\left[(S_T-K)^+ \mid S_t = s\right]$$

$$C(s,t,K,T) = C_{bs}(s,t,K,T,\sigma_{bs})$$

$$\sigma_{bs}(K,T) \approx \sigma_{bs,0} + \sigma_{bs,1}(T-t) + \sigma_{bs,2}(T-t)^2.$$

Urmatoarea ecuatie quasi-parabolica cu derivate partiale are ca solutie suprafata de volatilitate implicita

$$w(k,T) := \sigma_{BS}(k,T)^2 T.$$

$$\sigma^2(k,T) = \frac{\frac{\partial w}{\partial T}}{1 - \frac{k}{w}\frac{\partial w}{\partial k} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{k^2}{w^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial k^2}}.$$

$\sigma_{bs} = \sigma_{bs,0} + \sigma_{bs,1}(T-t) + \sigma_{bs,2}(T-t)^2 + O(T-t)^3$

$d(s,K,t) = \int\limits_s^K \frac{d\xi}{\xi\sigma(\xi,t)},$

$H_0(s,K,t) = \sqrt{\frac{s\sigma(s,t)}{K\sigma(K,t)}}\exp\left[\int\limits_s^K \frac{d_t(\eta,K,t)}{\eta\sigma(\eta,t)}d\eta\right].$

- $\sigma bs, 0 = \frac{|\log K - \log s|}{d(s,K,t)}$. (BBF)
- $\sigma_{bs,1} = \frac{k}{d^3}\log\left[\frac{dH_0\sqrt{K}\sigma(K,t)}{k\sqrt{s}}\right]$, where $k = \log K - \log s$.

Aproximarea Henry-Labordère [4]

$$\sigma_{BS}(K,T) \approx \sigma_0(K,t)\left\{1+\frac{T}{3}\left[\frac{1}{8}\sigma_0(K,t)^2-\mathcal{Q}\left(f_{av}\right)+\frac{3}{4}\mathcal{G}\left(f_{av}\right)\right]\right\}$$

unde

$$\mathcal{Q}(f)=\frac{C(f)^2}{4}\left[\frac{C''(f)}{C(f)}-\frac{1}{2}\left(\frac{C'(f)}{C'(f)}\right)^2\right]$$

si

$$\mathcal{G}(f)=2\partial_t \log C(f)=2\frac{\partial_t a(f,t)}{a(f.t)},$$

$C(f)=a(f,t)$, $f_{av}=\dfrac{s+K}{2}$. Termenul $\sigma_0(K,t)$ a fost de asemenea calculat de Berestycki, Busca si Florent (2002):

$$\sigma_0(K,t)=\left[\frac{1}{\ln s-\ln K}\int_k^s\frac{d\eta}{a(\eta,t)}\right]^{-1}.$$

In [109], Berestycki, Busca si Florent (BBF) folosesc urmatoarea formula aproximativa pentru volatilitatea implicita

$$\frac{1}{\sigma_{BS}(k,T)}\approx\frac{1}{k}\int\limits_0^k\frac{dy}{\sigma(y,0)}$$

Aproximarea volatilitatii implicite de-a lungul celui mai probabil drum se obtine ca medie de-a lungul solutiei ecuatiei Euler-Lagrange:

$$\sigma^2_{BS}(k,T)\sim\frac{1}{T}\int\limits_0^T\sigma^2\left(\widetilde{x}(t),t\right)dt.$$

Reghai foloseste urmatoarea formula de aproximare

$$\sigma^2_{BS}(kT)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\sigma^2\left(\widetilde{x}(t),t\right)dt.$$

$$dS_t=S_t\sigma_L(S_t,t)dW_t=a(S_t,t)dW_t=S_t\sigma(x_t,t)dW_t.$$

Se considera urmatoarea problema variationala

$$\min_{S(t)}\frac{1}{2}\int\limits_0^T\left[\frac{S'(t)}{a\left(S(t),t\right)}\right]^2dt$$

$S(0)=s_0$ si $S(T)=K$. Ecuatia Euler-Lagrange asociata e data de urmatoarea ecuatie:

$$-\left[\frac{S'}{a\left(S,t\right)}\right]'+\frac{a_t(S,t)}{a(S,t)}\frac{S'}{a(S,t)}=0.$$

Un drum optimal satisface

$$\begin{cases} -\left[\dfrac{S'}{a(S,t)}\right]' + \dfrac{a_t(S,t)}{a^2(S,t)}S' = 0 \\ S(0) = s_0, \qquad S(T) = K. \end{cases}$$

Teorema Volatilitatea implicita σ_{BS} are urmatoarea dezvoltare asimptotica pentru $T \to 0$

$$\sigma_{BS}(K,T) = \sigma_{BS,0}(1 + \mathcal{O}(T)),$$

cu

$$\sigma_{BS,0} = \left(\frac{\sqrt{T}}{|k|}\sqrt{\int\limits_0^T \left[\frac{S'(t)}{a(S(t),t)}\right]^2 dt}\right)^{-1}$$

unde $S(t)$ este solutia ecuatiei Euler-Lagrange.

Urmatoarele formule asimptotice au fost demonstrate de Varadhan([13],[38]):

$$\lim_{t\to 0} t \log p(t,x,y) = -\frac{1}{2}\rho(x,y)^2$$

oricare x, y pe varietate in cazul volatilitatilor locale independente de timp.

$$p(t,x,y) \sim \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{m/2} H(x,y) e^{-\rho(x,y)^2/2t},$$

unde $H(x,y) = \det\left[d\exp_x\left(\gamma_{x,y}(0)\right)\right]^{-1/2}$ iar $\gamma(x,y)$ este unica geodezica ce uneste x si y.

Exista urmatoarea formula asimptotica a nucleului caldurii p, pentru $t < t'$

$$p(t,x;t',y) = \frac{e^{-\dfrac{d^2(x,y,t)}{2\,(t'-t)}}}{\sqrt{2\pi\,(t'-t)}a(y,t')} \sum_{i=0}^{k} H(t,x,y)\,(t'-t)^i \left[1 + O_{k+1}\left(t,x;t',y\right)\right],$$

unde

$$d(x,y,t) = \int\limits_x^y \frac{d\xi}{a(\xi,t)},$$

$$H_0(t,x,y) = \sqrt{\frac{a(x,t)}{a(y,t)}}\, e^{-\int\limits_x^y \frac{d_t(\eta,y,t)}{a(\eta,t)}d\eta} = \sqrt{\frac{a(x,t)}{a(y,t)}}\, e^{\int\limits_x^y \int\limits_\eta^y \frac{a_t(\xi,t)}{a^2(\xi,t)\,a(\eta,t)}d\xi d\eta}$$

$$H_1(t,x,y) = \frac{H_0(t,x,y)}{d(x,y,t)} \int\limits_x^y \frac{1}{H_0(\eta,y,t)}\left[\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} + \frac{\partial H_0}{\partial t}\right]\frac{d\eta}{(\eta,t)}$$

$$dS_t = S_t\sigma_L(S_t,t)dW_t = a(S_t,t)dW_t;$$

$S(t)$ este solutie a problemei variationale definite mai sus.

$$\sigma_{BS}^2(k,T) \sim \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sigma^2\left(\tilde{x}(t),t\right)dt = \left(\frac{\sqrt{T}}{|k|}\sqrt{\int\limits_0^T \left[\frac{S'(t)}{a(S(t),t)}\right]^2 dt}\right)^{-1}.$$

5.1 2.6.Concluzii si comentarii

1. Am demonstrat ca relatiile Ito -Stratonovich dintre integralele iterate sunt echivalente cu un izomorfism intre 2 algebre Hopf. Acest izomorfism are 2 aplicatii, in calculul bicovariant a lui Hudson generat de relatia Ito [8] si in demonstratia faptului ca doua produse comutative si asociative construite pe algebra Hopf Connes-Kreimer [19] sunt izomorfe. Este o problema deschisa si profund netriviala in a gasi si a formaliza algebric toate relatiile integrale Ito/Stratonovich sau cele generate de calculul Ito similare relatiei Hermite. Un raspuns in aceasta directie este dat de articolul [133]. Conjecturi similare din cadrul geometriei si topologiei spatiilor de moduli au fost rezolvate recent. [53]Gubinelli (2008) a stabilit conexiuni intre algebra Hopf Connes-Kreimer si cateva teorii abstracte de integrare stohastica definite prin generatori si relatii. Similar modului in care algebrele Hopf Ito si shuffle formalizeaza relatiile Ito-Stratonovici, algebra Hopf decorata Connes-Kreimer este legata de un calcul in care nu exista integrarea prin parti sau formula Stokes clasica pe varietati.

2.In cazul unor coeficienti ce depind de timp, in primul capitol am prezentat metoda parametrixului de aproximare a nucleului caldurii. Rezultatele teoretice de mai sus legate de calculul variantional si fizica teoretica si aparute in lucrarile sus-mentionate sunt legate de aproximarea semi-clasica (WKB sau Instanton) a nucleului caldurii.Parametrul "moneyness" $\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{t}}\right)$, definit ca raportul dintre log (x/strike) si radacina patrata a timpului este folosit ca axa de coordonate, impreuna cu timpul pentru a parametriza suprafata de volatilitate implicita (implied volatility surface); impreuna cu ecuatia Dupire generalizata conduce la o parametrizare similara a volatilitatii locale. Apare insa ca o medie in formula Black-Scholes clasica. Inca nu exista o explicatie economica teoretica si practica a aparitiei acestui parametru in option pricing.Distributia hiperbolica generalizata a fost folosita recent in studii empirice de stock market, pentru aproximarea volatilitatii istorice. Procesele Levy in care acestea apar nu ofera solutii analitice ale pretului optiunilor.

Concluzia noastra este ca un model de volatilitate locala in care functia de volatilitate locala depinde numai de moneyness are o probabilitate de tranzitie ce poate aproxima folosind metode semi-clasice WKB distributia hyperbolica simetrica generalizata despre care stim ca poate aproxima conform unor standarde statistice folosite de Necula et al.(teste de normalitate Kolmogorov-Smirnov si Anderson-Darling, metoda Maximum Likelihood Estimation (MLE)) cu acuratete distributia empirica a unor indexi bursieri. Aceasta ar fi explicatia empirica bazata pe simulari numerice si fapte stilizate a aparitiei parametrului "moneyness". O explicatie teoretica ar fi ca un model liniar sau tangential pentru cea mai buna dezvoltare Taylor ce porneste de la modelul Black-Scholes Merton trebuie sa il contina, pentru a genera linii drepte ca solutii ale ecuatiei Euler-Lagrange.

Avand ca punct de pornire lucrarea fundamentala [105], in care se propun metodologii de lucru pentru functii de volatilitate conjecturale, lucrarile [101],[102],[107] propun 6 modele de volatilitate implicita utile pentru Korea Stock Exchange (KOSPI 200 index) si SP CNX Nifty index, unul dintre ele avand functia de volatilitate implicita un polinom de grad 2 in parametru moneyness, numit Forward moneyness.In industria petroliera a fost folosita aceasta masura de analiza a formei suprafetei de volatilitate [108]. Lucrarea [107] propune ca definitie a parametrului moneyness $\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{t}}\right)$, . Lucrarile [109] si [110] sunt printre putinele lucrari ce atrag atentia importantei acestui parametru in modelarea suprafetelor de volatilitate implicite, conjecturand ca diferenta dintre aceste 2 suprafete la momente diferite, sa fie o functie de moneyness.

Capitolul III

1 Produse shuffle si structuri algebrice exotice in teorii de camp cuantice;conexiuni cu procesele stohastice

In cateva lucrari dedicate Teoriei Yukawa si ecuatiilor Schwinger- Dyson, D. Kreimer defineste doua produse asemanatoare produsului shuffle pe algebra Hopf decorata Connes-Kreimer. Demonstram ca unul din aceste produse interactioneaza cu structurile de definitie ale acestei algebre Hopf intr-un mod ne-clasic, mai precis exista compatibilitati intre produse si co-produse ce sunt de natura operadica, diferite de compatibilitatile clasice de tip Hopf. Amintim teoremele si intrebarile deschise unde aceste produse au fost implicate. Identificam actiunile si co-actiunile unor operazi deja studiati in Fizica Hamiltoniana pe varianta decorata a algebrei Hopf Connes-Kreimer Hopf algebra si pe dualul gradat, algebra Hopf Grossman-Larson Hopf algebra. In a doua parte amintim de produsul shuffle ciclic, folosit in geometria ne-comutativa in teoreme de index si in definirea unor produse omologice de Getzler, Loday si altii; sperantele aplicarii lui in proceselor stohastice se leaga de lucrarile lui Leandre, de miscarea Browniana a unei metrici oscilante si de difuzii pe spatii infinit dimensionale si de actiuni de grupuri Lie ce genereaza fluxuri stohastice sau actiuni pe spatii de probabilitati.

Algebra Hopf decorata Connes-Kreimer joaca un rol principal in combinatorica renormalizarii perturbative. Are o proprietate de universalitate in raport cu coomologia Hochschild ([49]. Thm.2, pag 34). Este algebra simetrica a unei algebre co-preLie libere generata de un element ([79] sect. 5.7). Dualul sau gradat este izomorf cu algebra Hopf Grossman-Larson [69], [70].

In lucrarea [66] Sect. 2 Kreimer defineste primul produs si demonstreaza asociativitatea lui. Are urmatoarea definitie recursiva:

$$t_1 * t_2 = B_+^{r(t_1)}\left(u\left(B_-\left(t_1\right)\right) * t_2\right) + B_+^{r(t_2)}\left(t_1 * u\left(B_-\left(t_2\right)\right)\right)$$

unde aplicatia u se defineste de asemenea recursiv. $u\left(\prod_{i=1}^{k} t_i\right) = t_1 * u\left(\prod_{i=2}^{k} t_i\right)$, $\prod$ este produsul obisnuit comutativ. Acest produs $*$ a fost aplicat in massless Yukawa theory; in acest caz este asociativ modulo anumite cantitati definite de diagramele Feynmann. Este o problema deschisa formulata in ([49] Sect. 2) daca legi de coerenta sunt necesare descrierii acestei lipse de asociativitate din teoria Yukawa, consecinta a ne-asociativitatii anumitor produse definite pe grafurile 1P1 primitive. Vom vedea in partea a doua o abordare algebrica a lipsei de asociativitate structurata sau controlata de operatii algebrice.

Interesul nostru in acest produs $*$ a provenit din constatarea lipsei unei descrieri combinatoriale; de asemenea dorim sa clarificam conexiunile cu deja studiata structura de algebra Hopf, ce va fi reamintita in urmatoarea sectiune.

2 Algebra Hopf Connes-Kreimer

Algebra Connes-Kreimer Hopf algebra si versiunea ei decorata precum si rolul jucat in Quantum Field Theory au fost definite si descrise in urmatoarele articole: [49], [144], [146], [145]. Descriem dupa aceste lucrari obiectele combinatoriale si operatii ce vor fi folositi.

Un arbore cu radacina non-planar t este un graf conex fara cicluri format din laturi orientate si varfuri astfel incat exista un singur varf distinct in care nu intra nici o latura, radacina lui t; feritilitatea $f(v)$ a unui varf v este numarul muchiilor ce pleaca din v. Algebra Hopf CK, $\mathcal{H}_R$ este algebra comutativa a polinoamelor cu nedeterminate indexate dupa arborii sus-mentionati; multiplicarea $m(t,t')$ a doi arbori este data de alaturarea lor intr-o ordine arbitrara.

Orice arbore t cu radacina r genereaza $f(r)$ arbori $t_1,\ldots,t_{f(r)}$ atasati de r. Notam cu B_- operatorul care elimina radacina r. $B_- : t \to B_-(t) = t_1 t_2 \ldots t_{f(r)}$ este operatia care asociaza unui monom de n arbori un nou arbore t cu radacina r si fertilitate $f(r) = n$ ce se conecteaza cu radacinile arborilor $t_1,\ldots,t_n$, $B_+ : t_1 \ldots t_n \to B_+(t_1 \ldots t_n) = t$. $B_+(B_-(t)) = B_-(B_+(t)) = t$. Asa cum se mentioneaza in [1] sectiunea 2, formula nu mai este valabila in cazul varfurilor decorate cu elementele unei multimi gradate. Un "elementary cut" este marcarea unei singure laturi din arbore. O taiere admisibila este orice alegere de "elementary cuts" astfel incat orice drum de la radacina la orice vertex, unic datorita lipsei ciclurilor, contine maxim un cut elementar. Structura de coalgebra este data de co-unitate $\overline{e} : \mathcal{A} \to \mathbb{Q}$ is $\overline{e}(X) = 0$ pentru $X \neq 1$; $\overline{e}(1) = 1$. Ecuatiile

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \Delta(t_1 \ldots t_n) = \Delta(t_1) \ldots \Delta(t_n), \quad \Delta(t) = 1 \otimes t + (B_+ \otimes id)\left[\Delta(B_-(t))\right]$$

definesc un coprodus pe arbori compatibil cu inmultirea, in mod iterativ

$$\Delta(t) = 1 \otimes t + t \otimes 1 + \sum_{\text{taieri admisibile } C \text{ of } t} R^C(t) \otimes P^C(t) =: 1 \otimes t + t \otimes 1 + \Delta'(t)$$

am folosit notatia Sweedler $\Delta(t) =: \sum t_{(1)} \otimes t_{(2)}$.

2.2. Structura algebrica; Operazi Algebrici

$\mathcal{H}_R$ a fost deja studiata folosind spectaculara teorie a *operazilor algebrici.* Importanta versiunii decorate in Teoria Operazilor este mentionata in articolele [78] (Sectiunea 11) si [79] (Introd., Sectiunile 5.7; 6.6).

Teorema 1 Fie $H(V)$ varianta decorata a algebrei Hopf Connes-Kreimer, unde varfurile arborilor sunt decorate cu o baza a unui spatiu vectorial finit-dimensional V. Atunci $H(V)$ este izomorfa ca algebra Hopf cu o algebra shuffle $T(A)$, unde A este un spatiu vectorial gradat $G(V)$. Rezultatul se bazeaza pe urmatorii pasi:

– dualul gradat al lui $H(V)$ este izomorf cu algebra anvelopanta universala a unei algebre Lie([69] Prop.2.1. si [70] Prop 4.4).

– aceasta algebra Lie este algebra Lie asociata algebrei preLie libere generata de o baza a lui V; conform rezultatelor din [72] (Corol. 5.3) si [73] (Teorema 3.3), este algebra Lie libera peste o baza a unui spatiu vectorial gradat $G(V)$, deci algebra ei anvelopanta este o algebra tensoriala, al carei dual este algebra Hopf shuffle $T(A = G(V))$, izomorfa cu algebra Hopf Connes-Kreimer Hopf algebra in care varfurile arborilor sunt decorate cu o baza a spatiului vectorial V.

Despre baza spatiului vectorial $G(V)$ nu se cunosc multe lucruri; $G(V)$ este G-algebra liber generata peste V , a unui operad G definit in [71], [72]. G este un sub-operad al operadului preLie operad si s-a conjecturat in [71] ca este liber. Seria sa generatoare a fost calculata si exista relatia $PreLie = Lie \cdot G$.

Definitie O algebra preLie algebra este un spatiu vectorial V impreuna cu o operatie binara astfel incat:

$$(x * y) * z - x * (y * z) = (x * z) * y - x * (z * y)$$

oricare x, y, z.

In acest caz $x * y - y * x$ defineste o paranteza Lie.

2.3 Definitie ([75], [77], [87]) Un non-Σ operad O este o colectie de multimi $O(n)$, $n \geq 1$ astfel incat exista o lege de compozitie: $f : O(m) \otimes O(n_1) \otimes \ldots \otimes O(n_m) \to O\left(n_1 + \ldots + n_m\right)$.

Exista un element unitate $e \in O(1)$. $f(g; e, e, e, \ldots e) = g$ pentru orice $g \in O(k)$. Legea de compozitie f este asociativa:

$$f\left[f\left(g; g_1, g_2, \ldots, g_n\right); r_1^1, r_2^1, \ldots, r_{x_1}^1, r_1^2, r_2^2, \ldots, r_{x_2}^2, \ldots, r_1^n, r_2^n, \ldots, r_{x_n}^n\right] =$$
$$= f\left(g; f\left(g_1; r_1^1, r_2^1, \ldots, r_{x_1}^1\right), \left(g_2; r_1^2, r_2^2, \ldots, r_{x_2}^2\right) \ldots \left(g_n; r_1^n, r_2^n, \ldots, r_{x_n}^n\right)\right).$$

Un operad simetric este un operad cu actiuni ale grupului simetric $S(n)$ pe $O(n)$, de obicei asociata cu permutari ale variabilelor sau renumerotari, compatibile cu compozitia. Un spatiu vectorial V este o O-algebra daca exista un morfism de operazi intre O si $End(V)$, operadul endomorfismelor lui V. Deci fiecare element a lui $O(n)$ defineste o operatie algebrica $V^{\otimes n}V$, subiectul unor compozitii de natura asociativa si a unor relatii ca ma sus, deductibile din generatorii si relatiile operadului $O(n)$. Alebrele Lie, Poisson, asociative, sunt toate O-algebre ale unor operazi.

2.4 Notiunea duala este cea de co-algebra peste un co-operad

In cazul finit-dimensional, trecerea la duale va schimba "directia" morfismelor. Spatiul vectorial gradat C este un co-operad daca si numai daca C^* este un operad. Daca D este o C-coalgebra, orice $\delta \in C(n)$ defineste o co-operatie de la D la $D^{\otimes n}$.

$$\mathrm{Prim}(D, r) := \{x \in D \delta(x) = 0 \text{ oricare } \delta \in C(n),\, n \geq r\}.$$

Partea primitiva a lui D, $\mathrm{Prim}(D) = \mathrm{Prim}(D, 1)$.

O co-algebra D este conexa daca $D = \bigcup_{r \geq 1} \mathrm{Prim}(D, r)$.

2.5 Definitie ([77],[79],[81]) O bialgebra generalizata este un spatiu vectorial H care este o C-coalgebra, o A-algebra si exista relatii de compatibilitate sau distributivitate intre operatii si co-operatii, notate $(C^c, (\Omega), \mathcal{A})$. H este numita o $(C^c, (\Omega), \mathcal{A})$-algebra. Aceste relatii de compatibilitate sunt formalizate de urmatoarea axioma (Ω): pentru oricare co-operatie $\delta \in C(m)$ si oricare operatie $\mu \in \mathcal{A}(n)$ exista urmatoarea egalitate de functii

$$\delta \circ \mu = \sum_i \left(\mu_1^i \otimes \ldots \otimes \mu_m^i\right) \circ \omega \circ \left(\delta_1^i \otimes \ldots \otimes \delta_m^i\right) : H^{\otimes n} \to H^{\otimes m},$$

unde :

$$\begin{cases} \mu \in \mathcal{A}(n), \mu_1^i \in \mathcal{A}(k_1), ..., \mu_m^i \in \mathcal{A}(k_m), \\ \delta \in \mathcal{C}(n), \delta_1^i \in \mathcal{C}(k_1), ..., \delta_n^i \in \mathcal{C}(k_m), \\ k_1 + \ldots k_m = l_1 + \ldots + l_n = r, \\ \omega \in K[S_r]. \end{cases}$$

Axioma de mai sus este generalizarea cazului bialgebrei clasice, unde avem conditia de compatibilitate Hopf: un produs de 2 element urmat de computiplicare este egal cu produsul, in algebra produs tensorial, a doua co-produse (putem schimba ordinea operatiilor si co-operatiilor). Rezultatul

nostru este: produsul $*$ Kreimer face parte dintr-o structura de bialgebra generalizata pe $H(V)$ pentru care exista o relatie de compatibilitate ca mai sus in raport cu co-produsul obisnuit. Este necesar sa definim si alte operatii si co-operatii pentru a fi in cadrul definitiei 2.5. Importanta acestor structuri rezida din urmatoarea teorema aplicabila daca ipoteze suprimentare (H1 si H2) sunt satisfacute pentru operazii A si C.

(H1)A-algebra libera generata de un orice spatiu vectorial (V) are in mod functorial o structura de $(C^c - \mathcal{A})$-bialgebra. Proiectia canonica $\mathcal{A}(V) \to V$ genereaza o aplicatie de C-coalgebre:$\varphi(V) : \mathcal{A}(V) \to C^c(V)$, C-coalgebra peste V libera si conexa.

(H2) $\varphi(V)$ este surjective si splitat.

Theorem ([77]Theorem 2.5.1.). Fie $\mathcal{H}$ o $(C^\circ, (\Omega), \mathcal{A})$-bialgebra generalizata care satisface (H1) si (H2). Atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente : $\mathcal{H}$ conexa $\Leftrightarrow$ exista un izomorfism de bialgebre $\mathcal{H} \cong U(\mathrm{Prim}\mathcal{H}) \Leftrightarrow \mathcal{H}$ este co-libera, i.e. $\mathcal{H} \cong C^c(\mathrm{Prim}\mathcal{H})$, izomorfism de coalgebre conexe. Incluziunea operadului $\mathcal{P} := \mathrm{Prim}_C\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ induce un functor $F : \mathcal{A} - \mathrm{alg} \to \mathcal{P} - \mathrm{alg}$ care are un adjunct la stanga $U : \mathcal{P} - \mathrm{alg} \to \mathcal{A} - \mathrm{alg}$, functorul algebrei universale anvelopante.

3 2.Produse shuffle pe varianta decorata a algebrei Hopf Connes-Kreimer H(V)

3.2. Primul $*$ produs Kreimer este asociativ pentru orice decoratii date de o baza a spatiului vectorial V, asa cum s-a demonstrat in [66].

Definim urmatorul co-produs $\mathbf{d} : H(V) \to H(V) \otimes H(V)$

$$d(t) = 1 \otimes t + \sum_{\text{super-elementary cuts } C \text{ of } t} R^C(t) \otimes T^C(t).$$

Un "cut" super-elementar este un singur "cut" astfel incat arborele ce nu contine radacina este un varf terminal sau are radacina de feritilitate mai mare decat 1.

d are urmatoarea definitie recursiva: $\mathrm{d}\,(B_+(t)) = 1 \otimes B_+(t) + (B_+(t) \otimes id)\,\mathrm{d}(t)$.

Pe H(V), d se defineste ca o co-derivare:

$$\mathrm{d}(xy) = xy_1 \otimes y_2 + yx_1 \otimes x_2.$$

Contrar co-produsului obisnuit, d nu este co-asociativ; d este o co-operatie preLie: dualul acestei operatii definit de dualul gradat al H(V) satisface axiomele unei operatii binare pre-Lie.

Exista relatii de compatibilitate intre d si Δ, date de urmatorul rezultat:

Lemma 3.2. Orice combinatie liniara dintre d si Δ este un co-produs preLie.

Conform rezultatelor din [69] si [70], dualul gradat al lui $H(V)$ este izomorf cu algebra Hopf Grossman-Larson.

$$f : H_{GL} \to H_k^{gr}, \qquad f(t)(u) = (B_-(t), u) = (t, B_+(u))\,, \qquad (u_1, u_2) = (B_+(u_1), B_+(u_2))$$

Avem un produs scalar $(t_1, t_2) = |SG(t_1)|\, \delta_{t_1 t_2}$, unde $|SG(t_1)|$ este cardinalitatea grupului de simetrie al arborelui. Datorita acestui izomorfism, relatiile dintre d si Δ sunt exact relatiile dintre dualele acestor co-operatii, devenite relatii binare pe H_{GL}.

Δ^* va fi un produs asociativ si d^* o operatie pre-Lie notata $*$. Atunci pentru orice x, y, z exista urmatoarea relatie:

$$(x \circ y) * z - x \circ (y * z) = (x * z) \circ y - x * (z \circ y).$$

In particular, parantezele Lie date de functia de anti-simetrizare a d si Δ sunt compatibile.

Remarca Fie $[\circ]$ si $[\cdot]$ paranteze Lie pe un spatiu vectorial comun. Putem defini o paranteza noua $[\ ,\ ]$ data de $[a,b] := \alpha[a\circ b] + \beta[a\cdot b]$, $\alpha,\beta \in C$. Identitatea Jacobi pentru $[\ ,\ ]$ este echivalenta cu urmatoarea relatie: $[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],a]=0$ is equivalent to:

$$[[a\circ b]\cdot c]+[[b\circ c]\cdot a]+[[c\circ a]\circ b]+[[a\circ b]\circ c]+[[b\cdot c]\circ a]+[[c\cdot a]\circ b]=0.$$

Dandu-se 2 produse preLie $\circ$ and $\cdot$ pe V, spunem ca sunt compatibile daca orice combinatie liniara a lor este un produs preLie. $(\alpha\circ+\beta\cdot)(a,b) := \alpha a\circ b + \beta a\cdot b$, oricare $\alpha,\beta\in K$. Aceasta proprietate este echivalenta cu conditia

$$(a\circ b)\cdot c - a\circ(b\cdot c) + (a\cdot b)\circ c - a\cdot(b\circ c) = (a\circ c)\cdot b - a\circ(c\cdot b) + (a\cdot c)\circ b - a\cdot(c\circ b)$$

oricare $a,b,c\in V$. Se demonstreaza ca ambele conditii de compatibilitate pentru Lie si preLie produse sunt implicate de relatia:

$$(x\circ y)*z - x\circ(y*z) = (x*z)\circ y - x*(z\circ y).$$

Aceasta relatie apare in [87] (pag 52). Δ este un coprodus co-asociativ, d este co-operatie preLie si sunt compatibile in sensul definitiilor de mai sus. Operazii algebrici care guverneaza aceste operatii au fost studiati in [83], [84], [85].

3.2.1. Pe H(V) s-a definit in [68] un produs asociativ de tip shuffle, $a\varpi b$, asociat integrarii iterate. Algebra shuffle T(V) este vazuta ca un sub-spatiu a lui H(V), monoamele fiind asociate arborilor liniari.

$\rho : H(V)\to H(T)\subset H(V)$.

ρ este definit recursiv, fiind identitate pe arborii liniari si

$$\rho(B_+(u)) = B_+(\rho(u)).$$

produsul obisnuit shuffle dintre $\rho(a)$ and $\rho(b) = a\varpi b$.

exemplu:

$$\rho\left({}^{b}\mathrm{V}_{a}^{c}\right) = \rho(abc)+\rho(acb) = abc+acb.$$

Definim un produs asociativ quasi-tensorial x pe $H(V)$:

$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

$a\times b = \rho(a)\to b$, unde fiecare monom din $\rho(a)$ este lipit de radacina lui b (aplicam operatorii Hochschild cu decoratiile date de $\rho(a)$;

$$\Delta(a\times b) = a_1\times 1\otimes a_2\times b + a\times b_1\otimes b_2$$

Teorema 3.2.1.

$$a*b = \rho(a_1 b)\to a_2 + \rho(b_1 a)\to b_2 = (a_1 b)\times a_2 + (b_1 a)\times b_2, \qquad (***)$$

unde $*$ este produsul Kreimer si $d(a) = a_1\otimes a_2$ este notatia Sweedler pentru d-coproduct.

Corolar. Δ si $*$ au relatii de compatibilitate de tipul descris in Definition 2.5. $H(V)$ este o bialgebra generalizata, co-operatiile relevante fiind Δ si d. Operatiile sunt :produsul obisnuit comutativ, $*$, $\times$, ϖ. Scriem cateva relatii satisfacute de acestea:

$$(ab)*c = a*b*c,$$

$$(ab) \times c = (a \varpi b) \times c = (a * b) \times c.$$

Demonstratie Demonstram prin inductie dupa numarul de varfuri al arborilor implicati ca cele 2 produse

$$t_1 * t_2 = B_+^{r(t_1)} \left(u \left(B_- \left(t_1\right)\right) * t_2\right) + B_+^{r(t_2)} \left(t_1 * u \left(B_- \left(t_2\right)\right)\right)$$

si

$$\rho(a_1 b) \to a_2 + \rho(b_1 a) \to b_2 = (a_1 b) \times a_2 + (b_1 a) \times b_2$$

sunt egale.

Fie $a = B_+(xyz..)$ and $b = B_+(\alpha\beta S..)$ doi arbori.

$$\mathrm{d}\left(B_+(xyz)\right) = 1 \otimes a + (B_+ \otimes id)\,\mathrm{d}(xyz) = 1 \otimes a + B_+^{r(a)}\left((xyz)_1\right) \otimes (xyz)_2$$

$$\begin{gathered}
(Thm.3.2.1) \Leftrightarrow B_+^{r(a)}(x * y * z * b) + B_+^{r(b)}(\alpha * \beta * S * a) = \\
= B_+^{r(a)}\left((xyz)_1\right) b \to (xuz)_2 + B_+^{r(b)}\left((\alpha\beta S)_1\right) a \to (\alpha\beta S)_2 = \\
= B_+^{r(a)}\left[(xyz)_1 b \to (xyz)_2 + B_+^{r(b)}\left((\alpha\beta S)_1\right) xyz \to (\alpha\beta S)_2\right] + \\
+ B_+^{r(b)}\left[(\alpha\beta S)_1 a \to (\alpha\beta S)_2 + B_+^{r(a)}\left((xyz)_1\right) \alpha\beta S \to (xyz)_2\right] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x * y * z * b = (xyz)_1 b \to (xyz)_2 + B_+^{r(b)}\left((\alpha\beta S)_1\right) xyz \to (\alpha\beta S)_2
\end{gathered}$$

(relatie adevarata conf. ipotezei de inductie aplicata lui x, y, z, b)

$$= \sum x_1 yzb \to x_2 + B_+^{r(b)}\left((\alpha\beta S)_1\right) x * y * z \to (\alpha\beta S)_2$$

$$d(x * y * z) = (\rho \otimes id) \sum x_1 yz \otimes x_2 = (\rho \otimes id) d(xyz).$$

Am folosit in mod esential faptul ca d este o co-derivare $\mathrm{d}(xy) = xy_1 \otimes y_2 + yx_1 \otimes x_2$ si urmatoarea proprietate a produsului Kreimer *:

$$a \varpi b = \rho(a * b) \Rightarrow (ab) \times T = (a \varpi b) \times T = (a \varpi b) \times T$$

$a * b$ si $a \varpi b$ au aceeasi imagine prin ρ

$$\Delta(a * b) = \Delta\left(a_1 b \to a_2\right) + \Delta\left(b_1 a \to b_2\right) =$$

$$= \Delta a_1 b \to (| \otimes a_2) + \Delta a b_1 \to (| \otimes b_2) + (a_1 b \otimes |) \to \Delta a_2 + (a b_2 \otimes |) \to \Delta b_2.$$

Produsul Kreimer $*$, Δ si d au o relatie de distributivitate generalizata $\Delta(a * b)$ pot fi calculate aplicand mai intai co-operatii si dupa aceea produse $\times$ si ϖ.

3.2.2. Definitie. O algebra dendriforma este un spatiu vectorial V, impreuna cu doua operatii binare $\wedge$ si $*$ astfel incat: $*$ este asociativa, $* == \vee + \wedge$ si :

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y * z) \qquad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \wedge z) \qquad (x * y) \vee z = x \vee (y \vee z).$$

Definitie O algebra Zinbiel este un spatiu vectorial V cu o singura operatie binara astfel incat:

$$(x > y) > z = x > (y > z) + x > (z > y) = x > (y * z),$$

unde $x*y=x>y+y>x$.

Putem descompune produsul Kreimer $*$ in 4 operatii binare diferite $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$

$a\searrow b=b\nwarrow a$ $\qquad a\nearrow b=b\swarrow a$

$a*b=a_1b\rightarrow a_2+b_1a\rightarrow b_2=B_+^{r(a)}\left(u\left(B_-(a)\right)*b\right)+B_+^{r(b)}\left(u\left(B_-(b)\right)*a\right)$

$a>b=a_1b\rightarrow a_2=ab+ab=$ suma arborilor cu radacina $r(a)+$ suma arborilor cu radacina $r(b)$

$a<b=b_1a\rightarrow b_2=ab+ab=$ suma arborilor cu radacina $r(a)+$ suma arborilor cu radacina $r(b)$

$a\wedge b=B_+^{r(a)}\left(u\left(B_-(a)\right)*b\right)=a\nearrow b+a\nwarrow b$

$a\vee b=B_+^{r(b)}\left(u\left(B_-(b)\right)*a\right)=a\searrow b+a\swarrow b$.

Se verifica faptul ca ($\wedge$, $\vee$ and $*$) formeaza o algebra dendriforma pe $H(V)$. De asemenea,

$$x>(y*z)+y>(x*z)=(x*y)>z.$$

Aceasta este relatia care quantifica sau controleaza faptul ca $H(V)$, $>$ nu este o algebra Zinbiel, contrar situatiei in care ar fi o quadri-algebra. Aceasta abordare a fost initiata urmand metodologia abordata in [76] pentru quadri-algebre, care sunt algebre asociative in care produsul se spliteaza in patru produse diferite ce verifica un set de axiome.

3.3.Alte produse de tip shuffle

Algebra Hopf Connes-Kreimer a fost folosita de Gubinelli et al. in studiul ecuatiilor Navier-Stokes si Korteweg–de Vries, modele fundamentale in studiul mecanicii fluidelor si al propagarii undelor in diverse medii . Expunem dupa lucrarea [50] Gubinelli cateva elemente ale acestor teorii.
Proprietatile formale ale dezvoltarii asimptotice clasice in serie Taylor au fost generalizate si in cazul in care un produs de integrale iterate nu este egal cu suma dupa produse shuffle, integrarea Ito avand un rol important in eliminarea acestei reguli.

1. Incremente (infinitezimale).
Fie T >0 si V un spatiu vectorial
$C_k(V)=\{g:[0,T]^k\rightarrow V$ astfel incat $\mathrm{g}(\mathrm{t}_1,...\mathrm{t}_k)=0$ daca exista i astfel incat $\mathrm{t}_i=\mathrm{t}_{i+1}\}$multimea k-incrementelor. $C_*(V)=\bigcup\limits_{k>0}C_k(V)$. Avem un complex **aciclic** dat de co-frontiera d, $\mathrm{d}^2=0$
$d:C_k(V)\rightarrow C_{k+1}(V)$,

$(\mathrm{dg})(\mathrm{t}_1,...\mathrm{t}_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i g(\mathrm{t}_1,...\overset{\wedge}{\mathrm{t}_i},...\mathrm{t}_{k+1})$

Pentru V=R, avem o structura de algebra$\odot$ data de $(\mathrm{gh})(\mathrm{t}_1,...\mathrm{t}_{m+n-1})=(\mathrm{g})(\mathrm{t}_1,...\mathrm{t}_m)(\mathrm{h})(\mathrm{t}_m,...\mathrm{t}_{m+n-1})$

In acest caz d este o derivare gradata, se respecta regula lui Leibnitz modulo semne data de gradare.

Pentru $f\in C_1(R)$ si $\mathrm{h}\in C_2(R)$, integrala $\int_s^t df_u h_{us}$ se noteaza $\mathrm{I}(\mathrm{dfh})\in C_2$
Integralele iterate se definesc recursiv pentru n elemente din C(1), I(DaDbDc...)=I(Da I(DbDc...))

Formula coprodusului: $dI(\mathrm{Dt}_1,...D\mathrm{t}_n)=\sum_{i=1}^{n-1}I(\mathrm{Dt}_1,...D\mathrm{t}_k)I(\mathrm{Dt}_{k+1},...D\mathrm{t}_n)$

Fixand o familie de m elemente din C(1), putem defini functia X (integralele iterate pe simplexe si cuburi): algebra Hopf Connes-Kreimer decorata cu {1,2...m}$\rightarrow C_2(V)$, variabilele libere fiind date de marginile inferioare si superioare de integrare.

Propozitie: d(X(t))=X($\Delta(t) - 1 \otimes t - t \otimes 1$), unde s-a aplicat$\odot$ produsul exterior $C_2 \otimes C_2 \to C_3$, Un caz particular al acestei formule este formula Chen aplicata arborilor liniari.

Propozitie: Exista o unica functie liniara $L : \ker(d : C_3 \to C_4) \to C_2$ astfel incat d(L(h)) = h

Pentru un camp vectorial $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, solutia y a ecuatiei diferentiale $\frac{dy}{dt} = f(y(t))$, y(0)=v admite dezvoltarea in B-serie: y(t)=v $+\sum_{\text{J arbore}} A(f,t)(v)\frac{t^{|J|}}{sym(J)J!}$, unde sym(J) este cardinalul grupului de simetrie al arborelui.Coeficientii A(f,-) se definesc recursiv.

$$\mathrm{A(f\ ,B_+(abc...)(y)\ =\ f\ ^{(m)}(y)[A(f\ ,a)(y),\ A(f\ ,b)(y).\ .\ .\ ,\ A(f\ ,t_m)(y)].}$$

Derivatele de ordin superior in raport cu t ale egalitatii $\frac{dy}{dt} = f(y(t))$ se exprima in functie de y si de derivatele partiale ale lui f, expresii ce pot fi formalizate pe arbori. Referinte.

Scrierea acestor relatii de diferentiabilitate clasica in forma integrala, trecerea la diferentialele date de miscarea Browniana si apoi generalizarea relatiei Ito au dus la “rough path theory”dezvoltata de Lyons, Gubinelli e.a. $dy_t = \sum_a f_a(y_t)dx_t^a, \quad y_0 = y$ devine $y_t = y_0 + \int_0^t \sum_a f_a(y_s)dx_s^a$.
$I(f)_{ts} = f_a(x_s)X_{ts}^a + \partial_b f_a(x_s)X_{ts}^{ba} + r_{ts}$, r=L(da).

O teorie abstracta de integrare este data de $\{X^J\}$, J arbore, ce satisface : d(X(t))=X($\Delta(t) - 1 \otimes t - t \otimes 1$), aplicatiile liniare $\{I^J\}$, definite pe C(2) ce satisfac:

$$\mathrm{I(hf)}_{ts} = \mathrm{I(h)}_{ts}\mathrm{f}_s \text{ oricare h din C(2), f } \in \mathrm{C(1)} \text{ si } \mathrm{(hf)}_{ts} = \mathrm{(h)}_{ts}\mathrm{(f)}_s;$$

$$dI(h)_{tus} = I(e)_{tu}h_{us} + \sum_i I(h^{1,i})_{tu}h_{us}^{2,i}, \text{ oricare } \mathrm{dh}_{tus} = \sum_i h_{tu}^{1,i}h_{us}^{2,i}$$

$$X_{ts}^{\bullet a} = I^a(e)_{ts} \quad \mathrm{X}_{ts}^{B_+^a(f)} = I^a(X^f)_{ts} \quad \mathrm{X}_{ts}^{AB} = \mathrm{X}_{ts}^A\mathrm{X}_{ts}^B$$

O ecuatie diferentiala este data de dy=$\sum I^a(f_a(y))$, unde y este dat de constante ce satisfac conditii specifice de controlabilitate ,$\{y_0^t\}_{t \text{ arbore}}$ $\quad \mathrm{y}_t = \sum_{J \text{ arbore}} y_0^J X_{to}^J$

Acest tip de analiza a operatorilor diferentiali si integrali a fost realizata in cazul ecuatiei
1-periodice Korteweg–de Vries (KdV):

$\partial_t u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x) + \frac{1}{2}[\partial_x u(t,x)]^2 = 0$, u(0, x) data, (t, x) $\in$ R $\times$ T(torus)
cand data initiala nu e diferentiabila, ecuatia se scrie in forma integrala
u(t) = U(t)u(0, x)+$\frac{1}{2}\int_0^t U(t-s)[\partial u(s)]^2$, unde U(t) verifica $\partial_t U(t) = \partial^3 U(t)$
u fiind o solutie in sensul Gubinelli.

In cazul ecuatiei Navier-Stokes (Gubinelli) si in cazuri particulare ale unor ecuatii de transport cu semnal stohastic [55](Turinici) teoria integrala generala de mai sus si formulele de cubatura capata o structurare algebrica, numai anumiti arbori fiind folositi diagramatic.

2. Am vazut in sectiunea precedenta ca exista teorii de integrare in care produsul shuffle a fost complet ignorat. De asemenea produsul stohastic Ito, caz particular al unui produs Ito asociat unei algebre asociative a fost generalizat:[79] si [80]Loday. Teoria functiei Zeta a lui Riemann si algebrele Hopf definite de Goncharov folosesc cele 2 produse, shuffle si "Ito aditiv" , in mod esential.

Definitie Pentru orice secventa de intregi pozitivi, definim valorile zeta multiple.

$$a = (a_1 ... a_r),\ \mathrm{a}_1 > 1,\ \text{functia zeta multipla}\ \zeta(\mathrm{a}) = \sum_{n_1 > n_2 > ... > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{a_1} n_2^{a_2} ... n_r^{a_r}}$$
$$w(a) = \sum a_i \qquad \mathrm{d(a) = r} \qquad \text{Proprietati :}$$

$$\zeta(2,1) = \zeta(3) \quad \zeta(3,1) = \tfrac{1}{4}\zeta(4) \quad \zeta(5) = \zeta(3,1,1) + \zeta(2,1,2) + \zeta(2,2,1)$$

$$\text{Fie n si r} < \text{n fixate. Atunci}\ \zeta(n) = \sum_{(a)|w(a)=n} \zeta(a)$$

Formula Kontsevich:

$$\omega_0(t) = \tfrac{dt}{t}; \qquad \omega_1(t) = \tfrac{dt}{1-t}$$
$$\sum_{n_1 > n_2 > ... > n_r > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{a_1} n_2^{a_2} ... n_r^{a_r}} = \int_0^z \omega_{p(n)}(t_n) \int_0^{t_n} \omega_{p(n-1)}(t_{n-1}) ... \int_0^{t_2} \omega_{p(1)}(t_1).\ \text{integrala iterata}$$
$$Secventa \quad (p_1 ... p_n), unde\ \ \mathrm{n = w(a)\ si}\ p_i \in \{0,1\}\ \text{este data de concatenarea}$$
$$\text{secventelor}\ 0000^{a(j)-1}1$$

Exista o bijectie intre secventele binare care incep cu 0 si se termina cu 1 si valorile zeta convergente; exista o dualitate, consecinta a unei schimbari de variabile care afirma ca
$\zeta(\mathrm{a}) = \zeta(\mathrm{T(a)})$, unde functia T asociaza $1 \to 0,\ 0 \to 1$ si inverseaza secventa binara.Ex : T(001) = 011

Teorema produsului shuffle pentru MZV (multiple zeta values):

$$\zeta(\mathrm{a})\zeta(\mathrm{b}) = \zeta(\overrightarrow{\mathrm{a}}\ \text{shuffle}\ \overrightarrow{b}),\ \text{unde}\ \overrightarrow{x}\ \text{este forma binara a secventei de intregi x}$$

Exemplu de consecinta a acestei formule, care se demonstreaza folosind faptul ca un produs de 2 simplexe se descompune in simplexe indexate dupa permutari shuffle.

$$\zeta(2)\zeta(3,1) = \zeta(2,3,1) + 3\zeta(3,2,1) + 9\zeta(4,1,1) + \zeta(3,1,2)$$

Teorema produsului stuffle (Ito aditiv) pentru MZV (multiple zeta values)

$$\zeta(\mathrm{a})\zeta(\mathrm{b}) = \zeta(\mathrm{a} * \mathrm{b}),\ \text{unde a} * \text{b este produsul quasi} - \text{Ito dintre cele 2 secvente}$$
$$\text{de numere intregi : pe orice pozitie apare un element din monomul a sau}$$
$$\text{b, sau o suma a(i)} + \text{b(j), respectandu} - \text{se ordinea initiala data de a si b.}$$

Este conjecturat ca toate relatiile dintre MZV sunt consecinta relatiilor de mai sus. Goncharov [158] defineste o algebra Hopf Li-shuffle care inglobeaza fenomenele descrise mai sus. BiAlgebrele [Hopf] intalnite in Matematicile Financiare Malham [32], Hudson [34] sunt gradate si conexe, deci au automat un antipod conform Teoremei Milnor-Moore , construit dupa formula Takeuchi si descris in Mahajan si Aguiar [159] (2010, pag 248, Prop. 8.13 and 8.14, and pag 36, formula 2.55 and remark 2.10) . In Econofizica si QFT, antipodul corecteaza schimbarea orientarii domeniului de integrare.

Se considera varietatea $\begin{array}{l} M_{0,n}(\mathrm{C}) = \{(z_1,...z_n), \text{ numere complexe distincte ce parametrizeaza} \\ \text{spatiul proiectiv complex modulo/actiunea } \mathrm{PSL}_2 \ \mathrm{z} \to \frac{az+b}{cz+d}\} \end{array}$

Exista un unic reprezentant in fiecare clasa cu $(z_1 = 1, ...z_3 = 0 \quad z_2 = \infty)$ iar coordonatele simpliciale se definesc $m = n-3$, $\mathrm{t}_1 = z_4$, $\mathrm{t}_2 = z_3, ...\mathrm{t}_m = z_n \quad \mathrm{t}_i \neq \mathrm{t}_j$ pentru $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$

Pentru 4 indici diferiti i, j, k, l biraportul (cross − ratio) se defineste

$[\mathrm{ij}|\mathrm{kl}] = \frac{(z_i-z_k)(z_j-z_l)}{(z_i-z_l)(z_j-z_k)}$

Coordonatele cubice se definesc prin egalitatile:

$m = n-3$, $\mathrm{t}_1 = x_1x_2...x_m$, $\mathrm{t}_2 = x_2...x_m$, $\mathrm{t}_m = x_m \quad \mathrm{t}_i \neq \mathrm{t}_j$ pentru $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$

implica $\mathrm{x}_i \notin \{0,1\}$ si $x_px_2...x_k \neq 1$ daca $\mathrm{p} < \mathrm{k}$

Coodonatele diedrale se definesc pentru fiecare actiune a grupului diedral asupra urmatoarelor coodonate, submultime a birapoartelor:

{u(ij)=[i,i+1|j,j+1] } Orice biraport este un produs de aceste coordonate.

Integrarea unor forme diferentiale de dimensiune maxima de tipul $\frac{dt_1dt_2...dt_m}{\prod_{i=1}^{n-2} z_{s(i+1)}-z_{s(i)}}$ pe aceste varietati (s fiind un reprezentant pentru coset-ul S(n)/grupul diedral D(n)) si schimbari de coordonate intre cele simpliciale, cubice si diedrale au dus la redemonstrarea in 1996 a unei identitati Dixon (1905):

$I(h,i,j,k,l) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^h(1-x)^iy^k(1-y)^jdxdy}{(1-xy)^{i+j-l+1}}$ Atunci: $I(h,i,j,k,l) = \frac{j!k!}{(k+l-i)!(i+j-l)!} I(h,i,k+l-i,i+j-l,l)$

Geometria acestor varietati permite definirea unui produs shuffle pentru elementele coset-ul S(n)/grupul diedral D(n): puncte pe cerc modulo actiunea grupului diedral. Produsul shuffle a 2 cercuri A si B este suma dupa toate cercurile astfel incat ordinea ciclica a lui A si B se regaseste pe cerc. Produsul a 2 integrale specifice atasate lui A si B, de tipul $\frac{dt_1dt_2...dt_m}{\prod_{i=1}^{n-2} z_{s(i+1)}-z_{s(i)}}$ pe varietatea M(n) se scrie ca suma dupa aceste produse shuffle ciclice din astfel de forme –numite celulare. Integralele asociate nu sunt integrale iterate, dar demonstrarea unor identitati ca cele de mai sus se reduce la folosirea produsului shuffle clasic. Referinte:[125],[126].

3.3.4. Produsul ciclic shuffle in geometrie necomutativa si teorii de index.

Definitie. Consideram multimea $\{(1,0),(1,1)...(1,p);(2,0)....(2,q)\}$ ordonata lexicografic

O permutare F a acesteia se numeste un (p+1,q+1)-shuffle ciclic daca:

F(1,0)<F(2,0) iar elementele F(1,0).....F((1,p), respectiv F(2,0).....F((1,q)), formeaza o Permutare ciclica a p+1 elemente (respectiv q+1) elemente. Inversa permutarii F actioneaza asupra multimii {1,2...p+q+2} rearanjand ciclic k,k+1....p+1,1,2...p (analog pentru q).

$$\mathrm{x} \bmod 1 = \mathrm{x} \text{ daca } \mathrm{x} \in [0,1] \text{ si } \mathrm{x}-1 \text{ in cazul in care } \mathrm{x} \in (1,2]$$

Pentru $(r,s,t) \in [0,1]^2 \times [0,1]^p \times [0,1]^q$, definim r+s+t:=$(r_1, r_1+s_1, ...r_1+s_p, r_2, r_2+t_1, ...r_2+t_q)$ Mod 1

Pentru F un (p+1,q+1)-shuffle ciclic, definim $\Sigma(F) = \{(r,s,t) \in \Sigma^2 \times \Sigma^p \times \Sigma^q \subset [0,1]^2 \times [0,1]^p \times [0,1]^q | \ (\mathrm{F} \to (\mathrm{r}+\mathrm{s}+\mathrm{t})) \in \Sigma^{p+q+2}\}$

Atunci $\Sigma^2 \times \Sigma^p \times \Sigma^q$ se descompune ca reuniunea simplexelor $\Sigma(F)$, unde F parcurge multimea shuffle-urilor ciclice. Σeste simplexul standard, coordonatele fiind in ordine crescatoare si cuprinse intre 0 si 1. Este adevarata si o teorema mai generala, si anume

$\Sigma^n \times \Sigma^{p1} \times \Sigma^{p2}... \times \Sigma^{pn}$ se descompune in simplexe parametrizate dupa (p1....pn) − shuffle permutari ciclice

Spre deosebire de produsul shuffle obisnuit , care genereaza un produs asociativ pe spatiul vectorial al algebrei tensoriale (asociativitatea fiind si rezultatul descompunerii geometrice a produsului a 3 simplexe standard), produsul ciclic shuffle nu mai are aceasta proprietate si este implicat in calcule coomologice ce vor fi amintite mai jos, precum si in structura algebrica de $A_\infty - a\lg ebra$, notiune ce cuprinde ca un caz particular notiunea de algebra asociativa. Getzler si Jones [127],[128] au identificat in teoria spatiilor de functii structurile algebrice ce vor fi amintite mai jos, precum si fundamentul geometric al produsului ciclic shuffle ce apare si in Loday [137] si [129]

DefinitieO algebra A_∞ este un spatiu vectorial gradat A = $\underset{p \text{ intreg}}{\oplus} A^p$ inzestrat cu o familie de aplicatii liniare gradate de grad (2-n): $m_n : A^{\otimes n} \to A,$ n > 0,satisfacand urmatoarele identitati (Stasheff): $\sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t\geq 0, s\geq 1}} (-1)^{r+st} m_{r+t+1}(id^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id^{\otimes t}) = 0.$ E numita si strongly homotopy algebra.
Definitia este echivalenta cu existenta unei coderivari de grad 1 pe T(sA), coalgebra libera generata de A astfel incat D(D(x))=0

Exemplu: Fie complexul $\Omega(M)[u]$ al formelor diferentiale pe varietatea M pe care actioneaza S^1 Variabila u este de grad 2. Definim aplicatiile multiliniare:

$P(k) : \Omega(M)^{\otimes k} \to \Omega(M),$ P(k)($\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, ...\mathrm{w}_k$) = $\int_{\Delta(k)} i\mathrm{w}_1(t_1)\Lambda...\Lambda i\mathrm{w}_k(t_k)$
i este campul vectorial ce genereaza actiunea lui S^1*inserat* in formele diferentiabile
$W(t)$ este actiunea difeomorfismului φ(t) asupra formei w $\Leftrightarrow$ argumentele formei diferentiale, care sunt campuri vectoriale sunt translatate cu Dφ(t)

Urmatoarele aplicatii definesc o structura A_∞ pe $\Omega(M)[u]$

$$m_1(w) = dw + uP(1)(w) \quad m_2(a,b) = a\Lambda b + \mathrm{uP(2)(a,b)} \quad m_n = uP(n)$$

Omologia unei algebre A_∞ este omologia lui A inzestrat cu diferentiala m(1).
H(A) devine algebra asociativa cu produsul indus de m(2).

In cazul in care M=LX, avem un morfism de A_∞-algebre s:N($\Omega(X)$)[u]$\to \Omega(M)[u] = \Omega(LX)[u]$ care induce izomorfism in omologie. S se numeste aplicatia data de integralele iterate.
N($\Omega(X)$)[u]=Imaginea aplicatiei S: C($\Omega(X)$) $\to \Omega(LX)$
Daca w este 1-forma diferentiala pe X, $c \in LX \to \int_c w$ este functie pe LX
Daca w este forma diferentiala pe X, w(t) e forma diferentiala pe LX data de pull-back-ul formei w prin aplicatia e(t):LX$\to$ X, e(t)(c)=c(t)

$S(k) : \Omega(M)^{\otimes k+1} \to \Omega(M),$ S(k)(w, $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, ...\mathrm{w}_k$) = $\int_{\Delta(k)} \mathrm{w}(0)\Lambda.\mathrm{iw}_1(t_1)\Lambda...\Lambda i\mathrm{w}_k(t_k)$
i este campul vectorial ce genereaza actiunea lui S^1.
$W(t)$ este actiunea difeomorfismului φ(t) asupra formei w $\Leftrightarrow$ argumentele formei diferentiale, care sunt campuri vectoriale sunt translatate cu Dφ(t)

Fie A si B 2 algebre asociative. $\begin{array}{l} a = (a_0, a_1, ...a_p) \in \Omega^p(A) = A \otimes (A/\mathrm{C}\cdot 1_A)^{\otimes p} \\ b = (b_0, b_1, ...b_q) \in \Omega^q(B) = B \otimes (B/\mathrm{C}\cdot 1_B)^{\otimes q} \end{array}$
$d : A \to (A/\mathrm{C}\cdot 1_A)$ functia factor $-$ inmultire cu scalari a unitatii

Definim produsul shuffle ciclic
a $\overset{\longleftrightarrow}{\times}$ b $=\sum_{F \text{ ciclic (p+1,q+1)}-\text{shuffle}} F_{\longrightarrow}(1\otimes 1, a_0\otimes 1, a_{1,}\otimes 1, ...a_p\otimes 1, 1\otimes b_0, 1\otimes b_1, ...1\otimes b_q)$

Definitie
Aplicatia de frontiera Hochschild b$(a_0,a_{1,},...a_p)$=$(a_0a_1,...a_p)+\sum(a_0a_1,...a_ia_{i+1},...a_p)$
Aplicatia Connes B$(a_0,a_{1,},...a_p)$=$\sum(-1)^{ip}(1,a_i...a_p,a_0,...a_{i-1})$

Propozitie: B(a $\times$ b)-Ba $\times$ b-$(-1)^p$a $\overset{\longleftrightarrow}{\times}$ Bb + b(a $\overset{\longleftrightarrow}{\times}$ b)-ba $\overset{\longleftrightarrow}{\times}$ b-$(-1)^q$a $\overset{\longleftrightarrow}{\times}$ b(b)=0
Obstructia operatorului Connes B de a fi derivare pentru produsul shuffle e egala modulo semne cu obstructia operatorului Hochschild b de a fi derivare pentru produsul ciclic shuffle.

Teorema (Teorema Eilenberg-Zilber pentru Omologia ciclica negativa)

Aplicatia x + v $\overset{\longleftrightarrow}{\times}$:CN(A) $\underset{C[v]}{\hat{\otimes}}$ CN(B)$\rightarrow CN(A\otimes B)$ induce izomorfism in omologie.

$$CN_\bullet(A)=(\Omega^*(A)[[v]], b+vB) \text{ este complex celular, v parametru formal de grad } -2$$

Daca A este algebra functiilor diferentiabile pe varietatea diferentiabila M, omologia Hochschild HH(A) este izomorfa cu $\begin{matrix}\Omega(M) \text{ (Teorema Hochschild}-\text{Konstant}-\text{Rosenberg)} \\ (f_0,f_1,...f_n)\rightarrow \frac{1}{n!}f_0df_1,...df_n\end{matrix}$
Produsul shuffle de pe HH(A) este trimis in produsul exterior al formelor.
Operatorul Connes B este trimis in operatorul de diferentiere exterioara a formelor.

Calcul diferential ne-comutativ (Tamarkin si Tsygan [130]).

$\Omega(M)$ spatiul vectorial gradat al formelor diferentiale pe M si $V^*(M)=\Gamma(M,\Lambda^\bullet(TM))$ poly-campurile vectoriale pe M. Sunt inzestrate cu urmatoarele operatii: diferentiala de Rham, produsul exterior al campurilor de vectori, derivata Lie, contractia unei forme cu un vector, si paranteza Schouten-Nijenhuis care impreuna cu produsul exterior defineste o structura de algebra Gerstenhaber pe V.
$[(a_0,a_{1,},...a_p)(b_0,b_1,...b_q)]=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}[a_i,b_j](a_0,a_{1,},...\overrightarrow{a_i}...b_0,...\overrightarrow{b_j},...b_q)$ este derivare a produsului.

O pereche de spatii vectoriale gradate (V,Ω) inzestrata cu operatorii si cu relatiile de mai sus spunem ca formeaza o T-algebra. Exista o structura mai generala, de T_∞-algebra astfel incat orice T-algebra este automat o T_∞-algebra, data de un morfism de operazi p: $T_\infty\rightarrow T$ce induce izomorfism in coomologie.

Teorema oricare algebra asociativa A, perechea $C_*(A,A), C^*(A,A)=Hom(A^*,A)$ are o structura de T_∞-algebra In cazul A=$C^\infty(M)$, aceasta este T_∞-izomorfa cu structura de T-algebra pe $\Omega(M)$,$V^*(M)$.

Recent s-a demonstrat ca aplicatia $\begin{matrix}V^*(M)=\Gamma(M,\Lambda^\bullet(TM))\rightarrow \overset{k}{\oplus}C^k(A,A) \\ a\rightarrow(f_1...f_n\rightarrow <a, df_1\Lambda...\Lambda df_n>)\end{matrix}$ este un morfism de hLie algebre.

Definitie. Un spatiu vectorial V este o $L_\infty-$algebra daca este inzestrat cu aplicatiile liniare $m^k : V^{\otimes k+1} \to V$ gradat $-$ simetrica in argumente si de grad $-$ 1astfel incat pentru orice n avem identitatea Jacobi de grad n.

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\{\mathrm{i}_0<\ldots\mathrm{i}_k\}\bigcup \mathrm{i}\{\mathrm{j}_1<\ldots j_{n-k}\}=\{0,1\ldots n\}} (-1)^e\{\{a_{\mathrm{i}_0},\ldots a_{\mathrm{i}k}\},a_{j_1},\ldots a_{jn-k}\}=0$$

Complexul Hochschild al unei algebre asociative este dat de

$C^k = Hom_{\mathrm{C}}(A^{\otimes k}, A) \quad \mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$

$\mathrm{df}(\mathrm{a}_1\otimes\ldots\otimes\mathrm{a}_{k+1}) = a_1\mathrm{f}(\mathrm{a}_2\otimes\ldots\otimes\mathrm{a}_{k+1}) \overset{+}{-} \mathrm{f}(\mathrm{a}_1\otimes\ldots\otimes\mathrm{a}_k)\mathrm{a}_{k+1} + \sum_i(-1)^i\mathrm{f}(\mathrm{a}_1\otimes\ldots\mathrm{a}_i\mathrm{a}_{i+1}\ldots\otimes\mathrm{a}_{k+1})$

Produsul Gerstenhaber [,] se defineste astfel:

[f,g]= $f\circ\mathrm{g}-\mathrm{g}\circ\mathrm{f}$, unde $f\circ\mathrm{g}(a_0\otimes\ldots\otimes a_{m+n}) = \sum_{i=0}^m(-1)^{in}\mathrm{f}(a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\otimes g(a_i\otimes\ldots\otimes a_{i+n})\otimes\ldots a_{m+n)}$

Fie A= algebra functiilor diferentiabile definite pe o varietate M.

Fie D_{poly}= subcomplexul complexului Hochschild generat de n $-$ lanturile de forma $(a_0\otimes\ldots\otimes a_n) \to \prod_{k=1}^n D_k a_k,\ D_k$ operatori diferentiali

In 1997, Kontsevich a demonstrat Teorema de Formalitate, care afirma existenta unui morfism de $L_\infty-$algebre intre D_{poly}si spatiul vectorial al poly-vectorilor $V^*(M) = \Gamma(M, \Lambda^\bullet(TM))$, care induce un izomorfism intre omologiile acestor complexe care sunt algebre Lie diferentiale gradate.
Recent (2008) s-a generalizat aceasta teorema in cazul ciclic, in care formele diferentiale invariante la operatorul Connes , precum si produsele shuffle ciclice sunt implicate. In 2009 Arnaudon, Coulibaly si Thalmaier au construit pentru orice drum c cu valori in varietate o familie de difuzii generate de un operator eliptic L(t), cu coeficienti non-constanti si eventual depinzand de o metrica oscilanta g(t). Formalismul folosit apropie aceste constructii de structurile matematice descrise mai sus, mai exact de abordarea lui Getzler . Cel putin in stadiul actual structurile algebrice ce pot fi intalnite sunt cele descrise mai sus, legate de teoria omotopica a operazilor, quantizari si formalitate.

Teorema. (Arnaudon, Coulibaly si Thalmaier)

Fie c :R $\to$ (M , g(t)), completa oricare t.L(t) = $\Delta_{g(t)} + Z$, Z camp vectorial si L eliptic.Exista o *familie de* $L(t)-$ *difuzii* X_t(u), cu $\mathrm{X}_0(\mathrm{u}) = \mathrm{c}(\mathrm{u})$.astfel incat $\partial_u \mathrm{X}_t(\mathrm{u}) = W^t(X(u))_t(\frac{dc}{dt}(u))$,

[unde $W^t(X(u))_t : T_{X0(u)} \to T_{Xt(u)}$este aplicatia liniara, solutie a ecuatiei diferentiale stohastice $DW(X)_t = -\frac{1}{2}Ric^\#(W(X)_t)dt + \nabla_{W(X)_t}Zdt$ si pentru orice u, $\mathrm{X}_t(u) = \mathrm{Y}_t$

rezolva ecuatia diferentiala stohastica :$\mathrm{d}^\nabla\mathrm{Y}_t = P_{0,u}^{t,\mathrm{Y}_t}\, dX_t(0) + Z(t, X_t(u))dt$,

$\mathrm{P}_{0,u}^{t,\mathrm{Y}_t} : T_{X0(u)} \to T_{Xt(u)}$este translatia paralela de $-$ a lungul lui $\mathrm{X}_t(u)$

Familiile de difuzii ca cele de mai sus, sau actiunea unui grup de difeomorfisme asupra unor difuzii permite integrarea data de formulele din [127],[128] si deci evidentierea unor structuri de $A_\infty-$algebra.

Concluzii finale

Capitolul I. Evaluarea preturilor optiunilor Europene se realizeaza considerand modele de volatilitate locala ce generalizeaza modelul clasic Merton Black-Scholes. Ecuatiile diferentiale stohastice conduc la pretul optiunilor ca solutii ale unor ecuatii cu derivate partiale. Practica economica si metode statistice specifice selecteaza anumite modele matematice, iar literatura de specialitate este saraca in formule analitice, practice de evaluare. Una din cauzele ne-prezentei acestor formule a fost identificata in lucrarea noastra, si nu este rezultatul lipsei de diversitate a modelelor propuse, ci al teoremei pag.17: daca cel putin unul dintre coeficientii transformati ai SDE depinde de timp, nu exista o transformare canonica care transforma ecuatia Merton Black-Scholes intr-o ecuatie cu coeficienti ce nu depind de timp.

Metoda initiala de demonstratie se bazeaza pe o teorema a lui Berline-Getzler-Vergne si consta in scrierea covarianta a ecuatiei Black-Scholes generalizate ca un Laplacian generalizat asociat unei conexiuni intr-un fibrat vectorial; conexiunea Levi-Civita si spatiul tangent fiind folosit in acest caz. Cadrul geometric adecvat studierii transformarilor via difeomorfisme ale ecuatiilor implicate in option pricing este cel al ecuatiilor de evolutie geometrice, mai exact mean curvature flow. Transformarea cautata (t—H(x,t) apare ca necunoscuta, sau ca solutie a unor ecuatii cu derivate partiale.

Aceste transformari, particulare, apar in studiul simetriilor Ito ale ecuatiilor diferentiale stohastice. Schimbarea coordonatei timp t implica o schimbare a ecuatiilor de simetrie deoarece insasi vectorul miscarii Browniene trebuie schimbat conform unor reguli probabilistice nu pe deplin studiate.

In economie aceste transformari sunt necesare aplicarii metodei integralelor de drum, in care determinantul Van Vleck poate fi calculat numai daca ele exista.Amintim si alte metode de calcul si aproximare ale nucleului caldurii, unele prezente in lucrare impreuna cu exemple de modele solvabile:
-metode geometrice; calculul geodezicelor, al solutiilor ecuuatiei Euler-Lagrange, al functiei de actiune ca solutie a ecuatiei Hamilton-Jacobi.
-transformarea Fourier; dezvoltarea in serie dupa vectori proprii.
-metode stohastice; operatorul diferential este generatorul unui proces de difuzie Ito.
-aproximarea folosind metoda parametrixului, formule de cubatura , metoda Instanton-ului si a aproximarii semi-clasice.
-calculul simetriilor Lie si al simetriilor discrete.
De mentionat ca nu avem o formula inchisa pentru nucleului caldurii in cazul sferei 2-dimensionale [120],[121]. In 1985 apare dezvoltarea asimptotica Fisher-Jungster-Williams pentru SU(2)/U(1). Polinoamele Jacobi sunt definite ca

$$P(n,a,b)(x) = \begin{pmatrix} n+a \\ n \end{pmatrix} \sum_{p=0}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} p+a \\ p \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} n+a+b+p \\ p \end{pmatrix} [(x-1)/2]^p$$

Polinoamele Legendre se obtin in cazul a=b=0. Nucleul caldurii in cazul sferei

$S^2 = SU(2)/U(1)$ este dat de $\mathrm{E(t, gH)} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\exp(-n(n+1)t/2)P(n)(\frac{1}{2}(tr(g)^2 + (tr(Jg)^2) - 1)$
$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$; tr := urma unei matrice din SU(2), caz particular al formulei lui Benabdallah pentru spatiile omogene compacte de forma G/H
O formula similara pentru K(t,x,x) a fost obtinuta de Avramidi folosind izomorfismul $S^2 = SO(3)/SO(2)$
Formula lui Benabdallah pentru G/H:

$E_{G/H}(t, gH) = \sum_{i \in J} d_i \exp(-\lambda_i t) f_i(gH)$, unde :
J este multime de index pentru clasele de reprezentari unitare ireductibile ale lui G care restrictionate la H lasa invariant un vector nenul. d_i este dimensiunea reprezentarii.
λ_i este o submultime a valorilor proprii ale Laplacianului pe G, care sunt valori proprii si pentru G/H
$f_i(gH) = \int_H ch(gh)dh$, unde ch este caracterul reprezentarii si dh e masura Haar normalizata pe H.

Capitolul II. Acest capitol porneste de la studiile empirice asupra suprafetei de volatilitate implicite. Are si o componenta experimentala si face conexiunea dintre abordarea analitica a primului capitol si cea algebrica a celui din urma capitol.
Contributia noastra consta in formalizarea relatiilor dintre integralele iterate Ito si Stratonovich prin demonstrarea existentei unui izomorfism intre 2 algebre Hopf. Rezultatul are aplicatii algebrice in calculul bi-covariant algebric al lui Hudson si in studiul celor 2 produse de tip shuffle introduse de Kreimer [66] si [67]. Metodologia de studiu poate fi aplicata si in cazul celui de-al doilea tip de produs shuffle definit de Kreimer in lucrarile: [144],[145],[146],[147].

Al doilea aspect evidentiat este parametrul "moneyness" $\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{t}}\right)$; definit ca raportul dintre log (x/strike) si radacina patrata a timpului, este folosit ca axa de coordonate impreuna cu timpul pentru a parametriza suprafata de volatilitate implicita (implied volatility surface). Ecuatia Dupire generalizata conduce la o parametrizare similara a volatilitatii locale.

Distributia hiperbolica generalizata a fost folosita recent in studii empirice de stock market, pentru aproximarea volatilitatii istorice in Germania, Brazilia, India, China. Procesele Levy in care acestea apar nu ofera solutii analitice ale pretului optiunilor. Concluzia noastra este ca un model de volatilitate locala in care functia de volatilitate locala depinde numai de moneyness are o probabilitate de tranzitie ce poate aproxima folosind metode semi-clasice WKB o distributie hiperbolica simetrica generalizata despre care stim ca poate aproxima conform testelor de normalitate Kolmogorov-Smirnov si Anderson-Darling, metoda Maximum Likelihood Estimation (MLE)) cu acuratete distributia empirica a unor active financiare. O explicatie teoretica ar fi ca un model liniar sau tangential pentru cea mai buna dezvoltare Taylor ce porneste de la modelul Black-Scholes Merton trebuie sa contina acest parametru, pentru a genera linii drepte ca solutii ale ecuatiei Euler-Lagrange.

Avand ca punct de pornire lucrarile fundamentale [61] si [105], in care se propun metodologii de lucru pentru functii de volatilitate conjecturale, lucrarile [101],[102] si [103] propun 6 modele de volatilitate implicita utile pentru Korea Stock Exchange (KOSPI 200 index) si SP CNX Nifty index, unul dintre ele avand functia de volatilitate implicita un polinom de grad 2 in parametru moneyness, numit Forward moneyness.In industria petroliera a fost folosita aceasta masura de analiza a formei suprafetei de volatilitate [108]. Lucrarea [104] propune ca definitie a parametrului moneyness $\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{t}}\right)$, . Lucrarile [106] si [107] sunt printre putinele lucrari ce atrag atentia importantei acestui parametru in modelarea suprafetelor de volatilitate implicite, conjecturand ca diferenta dintre aceste 2 suprafete la momente diferite este o functie de moneyness.

Capitolul III.
Ultimul capitol al lucrarii cuprinde fenomene de natura structurala, algebrica.
Metodologia de lucru si tipul de rezultatele obtinute in cazul primului produs Kreimer * pot fi aplicate si in cazul celui de-al doilea produs de tip shuffle introdus de acesta in lucrarile: [144],[145],[146],[147].Algebra Hopf Connes-Kreimer definita in [49] joaca un rol important in combinatorica renormalizarii perturbative. In cazul teoriei Yukawa, calculele integralelor bazate pe forme de volum (diferentiale) specifice construite cu ajutorul functiilor hipergeometrice au doua proprietati: nu putem aplica produsul shuffle, iar diferentialele nu formeaza o algebra asociativa (triviala in cazul diferentialelor clasice sau comutativa in cazul diferentialelor Ito). Exista similaritati cu integrarea functiilor de densitate probabilistica (keat kernel) si cu familli de densitati inchise la operatii algebrice.
Kreimer a reusit sa formalizeze diferenta dintre produsul shuffle obisnuit si produsul quasi-shuffle, de tip Ito , prin constructia unui produs pe algebra Connes-Kreimer definit recursiv. A doua problema deschisa este daca lipsa asociativitatii diferentialelor poate fi structurata, un model intilnit fiind cel al algebrelor A_∞.

Produsul al doilea Kreimer, ne-studiat in lucrarea noastra, stabileste o conexiune intre teoriile de camp cuantice, ecuatiile Dyson-Schwinger, si factorizarea Euler a functiei ζ a lui Riemann

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,\mathrm{prime}} \frac{1}{1-p^{-s}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

Produsul shuffle pe arbori si cel de tip Ito au fost definite in Kreimer (2000):

$$t_1 * t_2 = B_+^{r(t_1)}\left(u\left(B_-\left(t_1\right)\right) * t_2\right) + B_+^{r(t_2)}\left(t_1 * u\left(B_-\left(t_2\right)\right)\right)$$

unde aplicatia u se defineste de asemenea recursiv.

$$u\left(\prod_{i=1}^{k} t_i\right) = t_1 * u\left(\prod_{i=2}^{k} t_i\right),$$

$\prod$ este produsul obisnuit comutativ al algebrei Connes-Kreimer.

$$\begin{aligned} t_1 \times t_2 \ &= B_+^{r(t_1)}\left(\tilde{s}\left[\tilde{u}\left(B_-\left(t_1\right)\right), t_2\right]\right) + B_+^{r(t_2)}\left(\tilde{s}\left[t_1, \tilde{u}\left(B_-\left(t_2\right)\right)\right]\right) + \\ &+ B_+^{r(t_1)r(t_2)}\left(\tilde{s}\left[\tilde{u}\left(B_-\left(t_1\right)\right), \tilde{u}\left(B_-\left(t_2\right)\right)\right]\right) \end{aligned}$$

al treilea termen foloseste structura de algebra.

O aplicatie a teoremelor 3 si 4 este demonstratia faptului ca cele doua produse asociative Kreimer, sunt izomorfe in cazul in care V are o structura de algebra comutativa. [66] section 2 equations (5) and (6). Asa cum am demonstrat in ultimul capitol, nu putem vorbi despre un izomorfism de algebre Hopf datorita structurilor operadice implicate.[25] Gubinelli (2008) a stabilit deja conexiunea dintre algebra Hopf Connes-Kreimer, rough path theory si diverse teorii abstracte de integrare. Conjecturam un bun triplet de operazi in sensul [77], Section 2.5.6., care ar implica o teorema de rigiditate in cazul V-decoratei algebre Connes-Kreimer , cei doi operazi implicati in definitie fiind generati de [o operatie asociativa si una pre-Lie ce satisfac relatia

$$(x \circ y) * z - x \circ (y * z) = (x * z) \circ y - x * (z \circ y))$$

si un operad generat de 4 operatii binare($*, X, \varpi$ si un produs asociativ si comutativ satisfacand axiomele din definitia 3.2)

c) Structuri algebrice exotice au fost deja identificate in Fizica Teoretica: [74] algebre pre-Lie, vertex- algebre, [83] algebre Poisson, [84] operadul Bi-Hamiltonial si structuri Bi-Hamiltoniene [85], [86] si [87]. Este si cazul primului produs $*$ Kreimer, unde diversi operazi intalniti au fost identificati in lucrarea noastra.

d) Una dintre cele mai generale intrebari este cum am putea determina toate relatiile satisfacute de integralele Ito, similare relatiei Hermite discutata in sectiunea 2.2 pag 11. Cu siguranta orice astfel de relatie *implica* o relatie geometrica satisfacuta de simplexele peste care facem integrarea si de intersectiile lor (deoarece nu avem formula de integrare prin parti) si *implica* o egalitate in cadrul calculului diferential clasic. Probleme similare, deschise, rezolvate sau formalizate partial , au aparut recent in cadrul geometriei algebrice ne-comutative si in teoriile de quantizare. In ce masura aceste rezultate au consecinte in cazul integrarii Ito a proceselor stohastice este o problema de care ne vom ocupa in viitor. Ultima parte a capitolului III doreste a arata ca *produsul shuffle* folosit in mod esential in integrarea Ito (formule de cubatura , integrale iterate, dezvoltarea in serie taylor) are origini geometrice si nu este cel mai general produs de natura geometrica : mai exista produse shuffle ciclice si produse shuffle modulare.

Mentionam urmatoarele probleme deschise neabordate in lucrare si pentru care am prezentat metodologia de lucru:
-Lucrarile lui E.Getzler pot conduce la aplicatii in cazul proceselor stohastice in care apar astfel de produse geometrice, mai exact aceste rezultate prezinta cadrul formal al unor identitati satisfacute de familii de procese stohastice , structurate in notiunea de algebra A_∞. Generalizarea in cazul Ito a produsului ciclic shuffle. Constructia elementelor quasitriangulare in cazul structurii de "brace-algebra", dupa metodologia de constructie de catre Hudson a acestor elemente in cazul algebrei Hopf Ito; studiul produsului dublu simetric introdus de Hudson.
-al doilea produs Kreimer admite compatibilitati cu structura de coprodus formalizate prin notiunea de bialgebra generalizata.
-primul produs shuffle Kreimer [66] poate fi aplicat decorand varfurile cu diferentiale date de familii de densitati de probabilitate inchise la diverse operatii algebrice, nu neaparat asociative. Rezultatele de Formalitate si Quantizare implica faptul ca structurile diferentiabile clasice (bazate pe integrarea pe simplexe modulo frontiere datorata teoremei Stokes si a formulei de integrare prin parti) sunt similare calculului la nivel de ciclii, ca si in cazul integrarii Ito, aceasta similaritate fiind formalizata cu ajutorul unor structuri algebrice deosebit de complexe.

References

[1] Haven, E.2008, *Elementary quantum-mechanical principles and social science: is there a connection*? Romanian Journal of Econ. Forecasting, pp. 41-58.

[2] Accardi, L.; Boukas, A, 2007, *The quantum Black-Scholes equation*; GJ-PAM; 2 (2): 155-170

[3] R. L. Hudson, 2009. *Hopf algebraic aspects of iterated stochastic integrals*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Prob. and Related Topics, Vol.12, 3 pp. 479-496

[4] Henry-Labordere, P., 2009. *Analysis, Geometry, and Modeling in Finance*: Advanced Methods in Option Pricing. Chapman & Hall

[5] V. Linetsky,1998. *The path integral approach to financial modeling and option pricing*, Computational Economics 11, 129-163

[6] E. Bennati, M. Rosa-Clot and S. Taddei, 1999. *A path integral approach to derivative security pricing: I. formalism and analytical results*, International Journal of Theoretical and Applied Finance 2: 381 Available at ¡ http://arxiv.org/abs/cond-mat/9901277v1¿

[7] J. Jost, 2002 *Partial Differential Equations* Springer

[8] Vaneeva, A.G,Johnpillai, R.O. Popovych and C. Sophocleous,2008. *Group analysis of nonlinear fin equations*, Appl. Math. Lett. 21, 248-253.

[9] Nadjafikhah, M., Bakhshandeh Chamazkoti,2010. *Preliminarily group classification of a class of 2D nonlinear heat equations*, Nuovo Cimento della Soc. Ital. di Fisica B, Vol 125, Iss 12

[10] Polyanin, A. D. and Zaitsev, V. F,2004. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equation*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, section available at:
http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/npde/npde1201.pdf

[11] Widder D.V,1975, *The Heat Equation*, Pure and Applied Math., Vol. 67. Academic Press, New York-London

[12] Wolfram Mathematica 2011, Available at: http://www.wolframalpha.com/examples/ DifferentialEquations.html¿

[13] T.Batard,2011. *Heat equations on vector bundles - Application to color image Regularization*, Journal of Mathem. Imaging and Vision-Special Issue of MIA'09 conf., 41(1-2) pp. 59-85.

[14] Rosenberg,S.,1997. *The Laplacian on a Riemannian Manifold*. Cambridge Univ. Press

[15] D. V. Vassilevich, 2003. *Heat kernel expansion: User's manual*" Phys. Rept. 388, 279 ¡arXiv:hep-th/0306138¿

[16] Sole, J. L,Utzet, F, *On the orthogonal polynomials associated with a Levy process*. Ann. Probab. 36,2008

[17] Peccati,G,2003. *Explicit formulae for time-space Brownian chaos*. Bernoulli 9(1),25-48,

[18] W. Schoutens,1998. *Levy-Sheffer and IID-Sheffer polynomials with applications to stochastic integrals*, J. Comput. Appl. Math. 99 ,365-372.

[19] B. Debusschere, H. Najm, P. Pebay, O. Knio, R. Ghanem, O. Le Ma??tre,2004. *Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes*, SIAM Journal of Scientific Computing 26 (2) 698-719.

[20] Carr P., Laurence P.,Wang, 2006. *Generating integrable one dimensional driftless Diffusions*, Comptes Rendus Mathematique, Vol.343,6,pp.393-398

[21] Gatheral 2002 *Case Studies in Financial Modelling Course Notes*, Courant Institute of Mathematical Sciences; Stochastic Volatility and Local Volatility
http://www.math.ku.dk/ rolf/teaching/ctff03/Gatheral.1.pdf

[22] Dupire, B 1994 Pricing With a Smile Risk 7, p 18-20.

[23] G. Turinici,2009. *Calibration of local volatility using the local and implied instantaneous variance*. Journal of Computational Finance, 13(2):1-18.

[24] R.L. Hudson, 2005. *Ito calculus and quantisation of Lie bialgebras*, Ann. Inst. H. Poincar-PR 41, 375-390

[25] Kloeden, E. Platen, 1992. Springer-Verlag *Numerical Solution of Stochastic Diferential Equations*

[26] Belavkin V.P., Guta M. eds.,2008. *Quantum stochastics and information: statistics, filtering and control*: Univ. of Nottingham, UK, 2006 World Scientific

[27] Studer, M.,2001. *Stochastic Taylor Expansions and Saddlepoint Approximations for Risk Management.* ¡http://e- collection.library.ethz.ch/eserv/eth:24333/eth-24333-02.pdf¿

[28] C. A. Braumann, *Ito versus Stratonovich calculus in random population growth*, Mathematical Biosciences 206 (2007) 81-107

[29] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, *Stochastic differential calculus, the Moyal *-product, and noncommutative geometry*, Lett. Math. Phys. 28, 123 (1993); hep-th/9401151.

[30] L.G.Gyurkó, L. G. and Lyons, T. J. (2008) *Rough Paths based Numerical Algorithms in Computational Finance*, Working Paper. Oxford-Man Institute of Quantitative Finance

[31] Levin, D. and Wildon, M. (2008), *A combinatorial method for calculating the moments of the Lévy area. Trans.* AMS 360(12) 6695-6709

[32] Malham, S.J.A. and Wiese, A, *Stochastic expansions and Hopf algebras*, Proc. R. Soc. A 465 (2009), pp. 3729-3749.

[33] K. Burrage, P. M. Burrage, and T. Tian, *Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: an overview*, Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering, Royal Society of London, 460 (2004), pp. 373-402.

[34] R. L. Hudson, *Hopf algebraic aspects of iterated stochastic integrals, Infinite Dimensional Analysis*, Quantum Probability and Related Topics, Vol.12, 3 pp. 479-496

[35] Kloeden, E. Platen, 1992. *The Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag

[36] Kloeden and E. Platen,1991. *Stratonovich and Ito stochastic Taylor expansions*, Math. Nachr. 151 33-50.

[37] Kloeden and E. Platen,1991. *Relations between multiple ito and Stratonovich integrals*, Stochastic Analysis and Applications Volume 9, Issue 3

[38] Peccati, G.,2003. *Explicit formulae for time-space Brownian chaos*. Bernoulli 9(1),25-48,

[39] W. Schoutens,1998. *Levy-Sheffer and IID-Sheffer polynomials with applications to stochastic integrals*, J. Comput. Appl. Math. 99 ,365-372.

[40] Henry-Labordere, P., 2009. *Analysis, Geometry, and Modeling in Finance*: Advanced Methods in Option Pricing. Chapman & Hall

[41] Belavkin V.P., Guta M. *Quantum stochastics and information: statistics, filtering and control*: University of Nottingham, UK, 15-22 july 2006 World Scientific eds.,2008.

[42] J. G. Gaines, 1995.*A basis for iterated stochastic integrals*, Math. Comput. Simulation, 38

[43] J. G. Gaines, 1994. *The Algebra of Iterated Stochastic Integrals*, Stochastics and Stochastics Reports, 49(3-4), 1994 pp. 169-179.

[44] J.-L. Loday, *On the algebra of quasi-shuffes*, Manuscripta Mathematica 123, no. 1 (2007), 79-93. http://irmav5.u-strasbg.fr/ loday/PAPERS/2007Loday(quasi-shuffle).pdf

[45] R L Hudson, *Ito versus Woronowicz calculus in the Ito-Hopf algebra*, Math Slovaca 54 (2004), 151-159. Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/130429

[46] L. Mesref, *Quantum gauge theories*, Int. J. Mod. Phys. A 20 (2005) 5317, [hep-th/0412158]

[47] Brzezinski and S. Majid. *A class of bicovariant differential calculi on Hopf algebras.* Lett. Math. Phys., 26:67-78, 1992. http://arxiv.org/pdf/hep-th/9208010.pdf

[48] S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups* (quantum groups), Commun. Math. Phys. 122, 125 (1989). http://en.scientificcommons.org/917311

[49] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry.* Commun. Math. Phys., 199, 203,1998; hep-th/9808042

[50] Gubinelli, M. (2008). *Abstract integration, Combinatorics of Trees and Differential Equations.* arXiv:0809.1821 (2008). Proceed. of Conf. on Combinatorics and Physics, MPI Bonn, 2007

[51] P.J. Catuogno, *Stochastic symmetries and transformations of stochastic differential equations*, 2011, http://arxiv.org/abs/1112.3687

[52] Gaeta G., *Symmetry of stochastic equations.* Proc Nat Acad Sci Ukraine 2004;50:98-109. http://www.slac.stanford.edu/econf/C0306234/papers/gaeta.pdf

[53] Srihirun B, Meleshko S V,Schulz E, *On the definition of an admitted Lie group for stochastic differential equations Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simul.*, 12, 1379-1389, 2007.

[54] Terry Lyons and Nicolas Victoir, *Cubature on Wiener Space, Proceedings of the Royal Society of London.* Series A. Mathematical and Physical Sciences 460 (2004), 169-198. http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/460/2041/169.full.pdf

[55] G. Turinici. *Cubature on C^1 space* preprint 2012
http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/66/08/75/PDF/cubature_c1_turinici_v1_5.pdf

[56] C. Necula (2009), *Modeling Heavy-Tailed Stock Index Returns Using The Generalized Hyperbolic Distribution*, Romanian Journal for Economic Forecasting, 6(2):118-131.

[57] Eberlein, E. and U. Keller: *Hyperbolic distributions in Finance.* Bernoulli, 1:281-299 (1995)

[58] Eberlein, E. and K. Prause, *The generalized hyperbolic model: Financial derivatives and risk measures*, FDM-Preprint 56 (1998)

[59] Poetter, Behr, *Modeling Marginal Distributions of Ten European Stock Market Index Returns*, International Research Journal of Finance and Economics Issue 28 (2009).

[60] Dupire, B 1994 Pricing With a Smile Risk 7, p 18-20.

[61] A. Alentorn (2004),*Modelling the implied volatility surface: an empirical study for FTSE options.* citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.199.3271rep=rep1type=pdf

[62] P.B. Gilkey, K. Kirsten, J.H. Park, D. Vassilevich, *Asymptotics of the heat equation with 'exotic' boundary conditions or with time dependent coefficients*, math-ph/0105009.

[63] Gatheral, J., Hse, E., Laurence, P., Ouyang, C., and Wang, T. H. (2010). *Asymptotics of implied volatility in local volatility models*. Mathematical Finance, forthcoming. doi:10.1111/j.1467-9965.2010.00472.x. http://homepages.math.uic.edu/ couyang/local

[64] Gatheral, Jim and Wang, Tai-Ho, *The Heat-Kernel Most-Likely-Path Approximation* (September 22, 2011). International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 15, No. 1, 1250001, 2012. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1663318

[65] V. N. Kolokoltsov, *Semiclassical analysis for diffusions and stochastic processes*, Springer Lecture Notes in Math. 1724, 2000

[66] D. Kreimer, *Shuffling quantum field theory*, Lett. Math. Phys.51 (2000) 179 arxiv.org/abs/hep-th/9912290

[67] D. Kreimer, *Feynman diagrams and polylogarithms: Shuffles and pentagons*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 89 (2000) 289 http://arxiv.org/abs/hep-th/0005279

[68] L. Foissy, *Unterberger, Ordered forests, permutations and iterated integrals*, arXiv: 1004.5208, 2010

[69] F. Panaite, *Relating the Connes-Kreimer and the Grassman-Larson Hopf algebras on rooted trees*, Lett. Math. Phys. bf 51 n.3 (2000), 211-219

[70] M. E. Hoffman, *Combinatorics of rooted trees and Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 3795-3811. http://arxiv.org/pdf/math.CO/0201253.pdf

[71] F. Chapoton, *Fine structures inside the PreLie operad*, Proceedings of the American Mathem. Society, 140 (2012), 1151-1157 http://arxiv.org/abs/1010.3176

[72] F. Chapoton, *Free pre-Lie algebras are free as Lie algebras*. Bulletin canadien de mathematiques, 53(3):425-437, 2010, http://arxiv.org/abs/0704.2153

[73] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*. Intern. Math. Research Notices 8 (2001), 395-408. http://arxiv.org/abs/math/0002069

[74] D. Burde, *Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics*, Cent. Eur. J. Math.4(2006)323-357.http://arxiv.org/abs/math ph/0509016

[75] M. Markl, S. Shnider, J. Stasheff (2002). *Operads in Algebra, Topology and Physics*. American Mathematical Society

[76] M. Aguiar and J.-L. Loday, *Quadri-algebras*, J. Pure Applied Algebra 191, (2004), 205-221. (arXiv:math.QA/03090171)

[77] J.-L. Loday, *Generalized bialgebras and triples of operads*, http://arxiv.org/abs/ math/0611885 , Astérisque 320 (2008), x+116 pp

[78] J-L. Loday, *Some problems in operad theory*, In: „Proceedings of the International Conference on Operads and Universal Algebra“, Nankai Series in Pure, Appl.Math. and Theor. Physics., Vol. 9, World Scienti?c, 2012, pp. 139-146, http://irmav5.u-strasbg.fr/ loday/PAPERS/PbsOperadicWS6.pdf

[79] J-L. Loday, M. Ronco, *Combinatorial Hopf algebras*, Quanta of maths, 347-383, Clay Math. Proc., 11, Amer. Math. Soc., 2010 http://www-irma.u-strasbg.fr/ loday/PAPERS/2011LodayRonco(CHA).pdf

[80] J.-L. Loday, *On the algebra of quasi-shuffles*. Manuscripta Mathematica 123, no1, (2007),79-93. http://arxiv.org/abs/math/0506498

[81] J.-L.Loday, *Theoreme de structure pour les bigebres generalisee* , „Beyond Hopf algebras“ fait à l'IHP (Paris), 2007 Colloque „Higher structures in Geometry and Physics“

[82] J.-L. Loday; M. Ronco, *On the structure of cofree Hopf algebras*, J. reine angew. Math. 592 (2006) 123-155. http://arxiv.org/abs/math/0405330

[83] V. Dotsenko, A. Khoroshkin, *Character formulas for the operad of two compatible brackets and for the bi-Hamiltonian operad*, Func.Analysis and Its Appl., 41 (2007), no.1, 1-17.

[84] V. Dotsenko, *An operadic approach to deformation quantization of compatible Poisson brackets*, I, arXiv:math/0611154, J. Gen. Lie Theory and Appl., 1 (2007), No. 2, 107-115.

[85] H.Strohmayer, *Operads of compatible structures and weighted partitions*, J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), no. 11, 2522-2534.

[86] Henrik Strohmayer. *Prop profle of bi-hamiltonian structures.* http://arxiv.org/abs/ 0804.0596 J. of Nocommutative Geom., Volume 4, Issue 2, 2010, pp. 189-235

[87] G. W. Zinbiel, (2011) „*Encyclopedia of types of algebras 2010*“. arXiv:math/1101.0267

[88] A Tanasa, *Combinatorial Hopf Algebras in (Noncommutative) Quantum Field Theory* Rom.J.Phys.55:1142-1155,2010

[89] DeTurck, Dennis M.; Kazdan, Jerry L. (1981) *Some regularity theorems in Riemannian geometry*, Annales Scientifiques de l'cole Normale Suprieure, 14 (3): 249260

[90] B Chow, P Lu, L Ni, Hamilton's Ricci flow, Graduate Studies in Mathematics 77, Amer. Math. Soc. (2006) MR2274812

[91] Marc Arnaudon, Kolehe Abdoulaye Coulibaly, and Anton Thalmaier. Brownian motion with respect to a metric depending on time: definition, existence and applications to Ricci flow. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 346(13-14):773-778, 2008

[92] Coulibaly-Pasquier, Kolhe A. Some stochastic process without birth, linked to the mean curvature flow. (English) Ann. Probab. 39, No. 4, 1305-1331 (2011)

[93] M. Arnaudon, K.A. Coulibaly, and A. Thalmaier, Horizontal diffusion in C-1-path space, To appear in Seminaire de Probabilites, Lecture Notes in Mathematics (2009); arXiv:0904.2762

[94] X.-P. Zhu, Lectures on mean curvature flows, Studies in Advanced Mathematics, vol. 32, International Press, Somerville, 2002.

[95] H.M. Soner and N. Touzi, A stochastic representation for mean curvature type geometric flows, Annals of Probability, 31 (2002) 11451165.

[96] M.-T. Wang, Mean curvature flow of surfaces in Einstein four manifolds, J. Diff. Geom. 57 (2001), 301-338.

[97] P. Graczyk, Stochastic Analysis Methods in Wishart Theory, Part I, Yamada-Watanabe Theorem for Matrix Stochastic Differential Equations., CIMPA Lecture Notes, 2012.

[98] Lawi S.: Hermite and Laguerre polynomials and matrix-valued stochastic processes Bernoulli 13 (2008), 67-84. MR2386064

[99] Stanley, H. E., Amaral, L. A. N., Gabaix, X., Gopikrishnan, P., Plerou, V., Quantifying economic fluctuations, Physica A 302 (2001) 126.

[100] Possamai, Dylan and Gauthier, Pierre, Prices Expansion in the Wishart Model (June 17, 2011). The IUP Journal of Computational Mathematics, Vol. IV, No. 1, pp. 44-71, March 2011. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1866164

[101] Choi, Youngsoo, Jordan, Steven J. and Ok, Soonchan, Dividend-Rollover Effect and the Ad Hoc Black-Scholes Model (August 1, 2012). Journal of Futures Markets, Vol. 32, No. 8, pp. 742-772, 2012. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2147460

[102] Srinivasan, Devanadhen, Deo, An Empirical Analysis of Implied Volatility in Indian Options Market , International Research Journal of Finance and Economics , Issue 18 (2008)

[103] Fajardo, J. and Farias, A. (2004): *Generalized Hyperbolic Dis tributions and Brazilian Data.* Brazilian Review of Econometrics, Vol. 24, No. 2, 249-271.

[104] Zhang, J. E., Xiang, Y.(2008). The implied volatility smirk. Quant. Finance,8(3), 263-284.

[105] Dumas, Bernard, Jeff Fleming, and Robert E. Whaley. (1997). Implied Volatility Functions: Empirical Tests, Journal of Finance 53, 20592106.

[106] Carr, P., Wu, L., 2003. Finite moment log stable process and option pricing. Journal of Finance 58, 753777.

[107] Li, Minqiang and Neil Pearson, 2005, Price Deviations of SP 500 Index Options from the Black-Scholes Formula Follow a Simple Pattern, AFA 2006 Boston Meetings Paper, http://mpra.ub.uni-muenchen.de/11530/1/SPXPrDev.Sept152006.blind.pdf

[108] S. Borovkova and F. J. Permana. Implied volatility in oil markets. Computational Statistics and Data Analysis, 53:20222039, April 2009.

[109] H. Berestycki, J. Busca, and I. Florent, Asymptotics and calibration of local volatility models, Quantitative Finance, 2 (2002), pp. 6169.

[110] O. Calin, D. C. Chang, K. Furutani, and C. Iwasaki, Heat kernels for elliptic and sub-elliptic operators, Methods and techniques, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhauser/Springer, New York, 2011

[111] A. Grigoryan. Heat kernel and Analysis on manifolds, volume 47. AMS-IP Studies in Advanced Mathematics, 2009

[112] Calin, Ovidiu, Der-Chen Chang, Jishan Hu, and L. I. Yutian. "Heat kernels for a class of degenerate elliptic operators using stochastic method." Complex Variables and Elliptic Equations 57, no. 2-4 (2012): 155-168.

[113] Kuznetsov, A., Solvable Markov Processes, Phd. Thesis (2004).

[114] Craddock, M. K.A. Lennox (2009). The calculation of expectations for classes of diffusion processes by Lie symmetry methods. The Annals of Applied Probability 19, 127157

[115] C.F. Lo, C.H. Hui, Pricing multi-asset financial derivatives with time-dependent parametersLie-algebraic approach, Int. J. Math. Math. Sci. 32 (2002) 401410.

[116] Lo, C. F., Hui, C. H., 2006. Lie-Algebraic Approach for Pricing Moving Barrier Options with Time-Dependent Parameters. Journal of Mathem. Analysis and Appl. 323, 1455-1464.

[117] Stohny V., Symmetry properties and exact solutions of the FokkerPlanck equation, J. Nonlinear Math. Phys., 1997, V.4, 132136.

[118] J. Goard, Fundamental solutions to Kolmogorov equations via reduction to canonical form, J. Appl. Math. and Decision Sciences 2006 (2006), 24.

[119] J. Derezinski, M. Wrochna, Exactly solvable Schrodinger Operators, Ann. Henri Poincare, 12 (2011), 397-418

[120] Fischer, H. R., Jungster, J. J., and Williams, F. L. The heat kernel on the two-sphere, Adv. Math, 54:226-232, [1984]

[121] I. G. Avramidi, Heat kernel on homogeneous bundles over symmetric spaces, arXiv:math.AP/0701489, 55 pp., submitted to Advances in Math. (2007),

[122] Saslow, W.M., 1999. An economic analogy to thermodynamics. American Journal of Physics 67, 12391247

[123] Ph. Chartier, E. Hairer, G. Vilmart, Algebraic structures of B-series, Found. Comput. Math. 10 407427 (2010).

[124] G. Gaeta, Lie-point symmetries and stochastic differential equations: II, J. Phys. A: Math. Gen. 33 (2000), 4883-4902

[125] F. Brown, S. Carr, and L. Schneps, The algebra of cellzeta values, Compos. Math. Vol. 146 Iss. 3 (2010) 731, [arXiv:0910.0122 [math.NT]].

[126] Brown, Francis. "Multiple zeta values and periods of moduli spaces $M_{0,n}$." (2006).

[127] E. Getzler, J.D.S. Jones and S. Petrack, Differential forms on loop space and the cyclic bar complex, Topology 30 (1991), 339371.

[128] E. Getzler and J. D. S. Jones, A_∞-algebras and the cyclic bar complex, Ill. Jour. Math. 34 (1990) 256.

[129] U. Otgonbayar, Local index theorem in noncommutative geometry, Ph.D. dissertation, The Pennsylvania State University, 2009.

[130] D. Tamarkin,B. Tsygan, Cyclic formality and index theorems, Lett. Math. Phys. 56 (2001) 85-97

[131] Willwacher, Thomas. "Formality of cyclic chains." International Mathematics Research Notices 2011.17 (2011): 3939-3956.

[132] Tamarkin, Dmitri, and Boris Tsygan. "Noncommutative differential calculus, homotopy BV algebras and formality conjectures." arXiv preprint math/0002116 (2000).

[133] Gilles Halbout Formality theorems: from associators to a global formulation Annales mathmatiques Blaise Pascal, 13 no. 2 (2006), p. 313-348

[134] V. Hinich, Tamarkins proof of Kontsevich formality theorem, Forum Math. 15, 4 (2003) 591614; math.QA/0003052.

[135] Homescu, Cristian. "Implied volatility surface: construction methodologies and characteristics." Available at SSRN 1882567 (2011).

[136] Henry-Labordere, Pierre. "Solvable local and stochastic volatility models: supersymmetric methods in option pricing." Quantitative Finance 7.5 (2007): 525-535.

[137] J.-L. Loday, Cyclic Homology, second ed., Grundlehren vol. 301, Springer, Berlin, 1998.

[138] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, in: Proceedings of the 1994 International Congress of Mathematicians I, Birkhuser, Zrich, 1995, p. 120.alg-geom/9411018.

[139] Caldararu, Andrei, and Junwu Tu. "Curved A-infinity algebras and Landau-Ginzburg models." arXiv preprint arXiv:1007.2679 (2010).

[140] T. Batard: Heat Equations on Vector Bundles - Application to Color Image Regularization. [hal] Journal of Mathematical Imaging and Vision JMIV (Special Issue of MIA'09 Conference), 41(1-2) 2011, pp. 59-85

[141] T. Batard and M. Berthier: Heat Kernels of Generalized Laplacians - Application to Color Image Smoothing. IEEE International Conference on Image Processing ICIP 2009

[142] Heckenberger, Istvn. "Hodge and LaplaceBeltrami operators for bicovariant differential calculi on quantum groups." Compositio Mathematica 123.3 (2000): 329-354.

[143] Dimakis, Aristophanes. "Noncommutative differential calculus: Quantum groups, stochastic processes, and the antibracket." arXiv preprint hep-th/9401151 (1994).

[144] D. Kreimer. Unique factorization in perturbative QFT. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 116:2003

[145] D.Kreimer. Structures in Feynman graphs: Hopf algebras and symmetries, http://arxiv.org/abs/hep-th/0202110 in the Dennisfest Proce., Stony Brook, June 2001

[146] D. Kreimer. New mathematical structures in renormalizable quantum field theories. Ann. Phys., 303:179-202, 2003. http://arxiv.org/abs/hep-th/0211136

[147] D. Kreimer. Factorization in quantum field theory: An exercise in Hopf algebras and local singularities. 2003. Contributed to Les Houches School of Physics: Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry, Les Houches, France, 9-21 Mar 2003.

[148] Majid, Shahn. "Scaling limit of the noncommutative black hole." Journal of Physics: Conference Series. Vol. 284. No. 1. IOP Publishing, 2011.

[149] Amelino-Camelia, Giovanni, and Shahn Majid. "Waves on noncommutative spacetime and gamma-ray bursts." International Journal of Modern Physics A 15.27 (2000): 4301-4323.

[150] Bonnet, F. D. (2008). Option pricing using path integrals (Doctoral dissertation, University of Adelaide, Australia).

[151] Martnez, P. J., Pena, J. L., Panaite, F., van Oystaeyen, F. (2008). On iterated twisted tensor products of algebras. International Journal of Mathematics, 19(09), 1053-1101.

[152] Sommerhuser, Yorck. "Deformed enveloping algebras." New York J. Math 2.35 (1996): 58.

[153] Panaite, Florin, and Freddy Van Oystaeyen. "LR-smash biproducts, double biproducts and a braided category of Yetter-Drinfeld-Long bimodules." arXiv preprint arXiv:0805.3432 (2008).

[154] Kleinert, Hagen. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. World Scientific Publishing Company Incorporated, 2009.

[155] Voit, Johannes. The statistical mechanics of financial markets. Springer, 2005.

[156] Chirikjian, Gregory S. "Stochastic models, information theory, and lie groups (hardback): classical results geometric methods book (applied numerical harmonic) POD." (2009).

[157] Kontsevich, Maxim. "Deformation quantization of Poisson manifolds." Letters in Mathematical Physics 66.3 (2003): 157-216.

[158] Goncharov, Alexander B. "Periods and mixed motives." arXiv preprint math/0202154 (2002).

[159] Aguiar, Marcelo, and Swapneel Arvind Mahajan. Monoidal functors, species and Hopf algebras. American Mathematical Society, 2010;available at http://www.math.iitb.ac.in/ swapneel/aguiar.pdf