Procese stochastice Browniene şi aplicaţii

Mihai N. Pascu

IMAR, Bucureşti – Romania

Simpozion

“Modelarea matematică în Ştiinţele economice”

24 Ianuarie 2013, IMAR, Bucureşti

Ecuaţii diferenţiale stochastice (EDS)

Considerăm ecuaţia stochastică 1-dimensională

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \int_0^t b(X_s)\, ds, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

- ξ - valoarea iniţială X_0 a procesului $(X_t)_{t\geq 0}$ studiat
- $(B_t)_{t\geq 0}$ - mişcare Browniană 1-dimensională standard începută la $B_0 = 0$
- $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - coeficientul de difuzie
- $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - coeficientul de drift.

Două tipuri de soluţii: *soluţii tari* (strong solutions) şi *soluţii slabe* (weak solutions) , şi două tipuri de existenţă şi unicitate corespunzătoare: *existenţă şi unicitate tare / slabă*. (cf. T. Watanabe şi S. Yamada ([YaWa71a]).

Rezultate privind unicitatea tare (LeGall, 1983)

(A) Există o funcţie crescătoare $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cu $\int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = \infty$ şi

$$(\sigma(x) - \sigma(y))^2 \leq \rho(|x - y|), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(B) Există o funcţie crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$(\sigma(x) - \sigma(y))^2 \leq |f(x) - f(y)|, \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Theorem ([Ga83])

Presupunem că σ, b sunt funcţii măsurabile mărginite ce verifică una din următoarele ipoteze

1. *σ verifică condiţia (A) şi b este o funcţie Lipschitz;*
2. *σ verifică condiţia (A) şi există $\varepsilon > 0$ astfel încât $|\sigma| \geq \varepsilon$;*
3. *σ verifică condiţia (B) şi există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\sigma \geq \varepsilon$.*

Atunci unicitatea tare este verificată pentru ecuaţia (1).

Alte rezultate: T. Yamada şi S. Watanabe ([YaWa71b]), S. Nakao ([Na72]), J. F. Le Gall ([Ga83]), M. T. Barlow şi E. Perkins ([BaPe84]), T. S. Zhang ([Zh94]), R. Bass şi M. F. Chen ([BaCh01]), etc.

O reprezentare a soluţiei unei EDS (*sticky Brownian motion*)

Theorem ([PaPa11a])

Dacă B_t *este o mişcare Browniană* 1*-dimensională cu* $B_0 = 0$ *şi* X_t *este un proces continuu care verifică ecuaţia (1) cu* $\sigma = 1_{\mathbb{R}^*}$, $b \equiv 0$ *şi* $\xi \equiv x \in \mathbb{R}$*, atunci* X_t *admite reprezentarea*

$$X_t = B_t - B_{t_\Lambda}, \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

unde t_Λ *este primul punct de creştere al funcţionalei* $\Lambda_s = \int_0^s 1_{\{0\}}(X_u)\,du$ *după timpul* t*, adică*

$$t_\Lambda = \inf\{s \geq t : \Lambda_s > \Lambda_t\} \in [0, \infty], \tag{5}$$

şi în cazul $t_\Lambda = \infty$ *definim*

$$B_\infty = \begin{cases} -x, & t_\infty = 0 \\ B_{t_\infty}, & t_\infty > 0 \end{cases}, \tag{6}$$

unde $t_\infty = \inf\{s \geq 0 : \Lambda_s = \Lambda_\infty\}$ *este ultimul punct de creştere al funcţionalei* Λ.

Remark

Reprezentarea anterioară a soluţiei este diferită de cea clasică, care foloseşte noţiunea de "time delay" ([EnSc85], Definiţia 4.1 şi Teorema 5.5).

Remark

Dacă soluţia X_t petrece timp zero în origine, atunci $\Lambda_t \equiv 0$ şi $t_\Lambda \equiv \infty$, şi reprezentarea din teoremă devine

$$X_t = B_t - B_\infty = x + B_t, \qquad t \geq 0.$$

Corollary

În condiţiile teoremei anterioare, are loc unicitatea traiectorială pentru soluţiile ce petrec timp zero în origine. Mai mult, o soluţie tare este dată explicit de $X_t = x + B_t$, $t \geq 0$.

Remark

Considerăm ecuaţia $X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha \, dB_s$, $t \geq 0$, unde B_t este o mişcare Browniană 1-dimensională cu $B_0 = 0$. În [BaBuCh07], autorii au arătat că unicitatea traiectorială are loc în cazul $\alpha \in (0, 1/2)$ dacă mulţimea soluţiilor se restrânge la clasa funcţiilor care pretrec timp zero în 0, şi au arătat de asemenea existenţa unei soluţii tari în acest caz.
Pentru $\alpha \searrow 0$ avem $\sigma_\alpha(x) = |x|^\alpha \to 1_{\mathbb{R}^*}(x) = \sigma(x)$, şi consecinţa anterioară arată că acest rezultat este valabil şi în cazul limită $\alpha = 0$.

O caracterizare a tuturor soluţiilor slabe

Considerăm ecuaţia

$$X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s, \qquad t \geq 0. \tag{7}$$

Theorem ([PaPa11b])

$\left(U_t Y_t, B_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ este o soluţie slabă a ecuaţiei (7), unde

- *Y_t mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t,*
- *U_t este o alegere de semn pentru Y_t ce ia valorile ± 1 cu probabilităţi egale,*
- *şi $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtraţia generată de B_t şi U_t ce verifică condiţiile uzuale.*

Reciproc, orice soluţie slabă $\left(X_t, B_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ a ecuaţiei (7) admite reprezentarea $X_t = U_t Y_t$, în care procesele U_t şi Y_t sunt definite ca mai sus.
În particular, orice soluţie a ecuaţiei (7) este unică până la o alegere de semn, adică dacă X_t^1 şi X_t^2 sunt verifică (7), atunci are loc

$$P\left(\left|X_t^1\right| = \left|X_t^2\right| \text{ oricare ar fi } t \geq 0\right) = 1.$$

Definition ([Pa13b])

Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă. O φ-soluţie tare a ecuaţiei diferenţiale stochastice (1) pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ în raport cu o mişcare Browniană B_t este un proces continuu X_t pentru care (1) are loc aproape sigur, şi astfel încât $\varphi(X_t)$ este un proces adaptat în raport cu filtraţia augmentată generată de B_t şi $P\left(\int_0^t (|b(X_s)| + \sigma^2(X_s))ds < \infty\right) = 1$ are loc oricare ar fi $t \geq 0$.

Spunem că φ-unicitatea tare are loc pentru (1) dacă oricare ar fi X_t şi $\widetilde{X}_t$ două φ-soluţii tari relative la aceeaşi mişcare Browniană B_t, atunci

$$P\left(\varphi(X_t) = \varphi(\widetilde{X}_t), \quad t \geq 0\right) = 1.$$

Alegere de semn

Definition ([Pa13b])

Dat fiind un proces nenegativ $(Y_t)_{t\geq 0}$, o alegere de semn pentru Y_t este un proces $(U_t)_{t\geq 0}$ ce ia valorile ± 1, astfel încât $(U_t Y_t)_{t\geq 0}$ este un proces continuu.

Definition ([Pa13b])

Dat fiind un proces continuu nenegativ şi adaptat $(Y_t)_{t\geq 0}$ pe un spaţiu de probabilitate filtrat $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, o alegere de semn i.i.d. pentru $(Y_t)_{t\geq 0}$ este un proces adaptat $(U_t)_{t\geq 0}$ definit prin

$$U_t(\omega) = \begin{cases} U_{i,j}(\omega), & t \in I_{i,j}(\omega) \\ 1, & t \in \mathcal{Z}(\omega) \end{cases}, \qquad t \geq 0,\ \omega \in \Omega, \tag{8}$$

unde $\mathcal{Z}(\omega)$ este mulţimea zerourilor lui $Y(\omega)$, $(I_{i,j}(\omega))_{i,j\geq 1}$ sunt intervalele ordonate de excursie a lui $Y(\omega)$, şi $(U_{i,j})_{i,j\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare i.i.d. pe $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ce iau valori ± 1, şi care sunt de asemenea independente de filtraţia $\mathcal{F}^Y$.

φ-existenţă şi unicitate pentru o EDS degenerată

$$X_t = \int_0^t \sigma_{a,b}\left(X_s\right) dB_s, \qquad t \geq 0, \tag{9}$$

unde $\sigma_{a,b} = a1_{[0,\infty)} + b1_{(-\infty,0)}$.

Theorem ([Pa13b])

Pentru orice $a > 0 > b$, are loc $\varphi_{a,b}$-unicitatea tare pentru (9), unde funcţia $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită de

$$\varphi_{a,b}\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{a}x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{b}x, & x < 0 \end{cases}. \tag{10}$$

O $\varphi_{a,b}$-soluţie tare (şi o soluţie slabă) pentru (9) este dată de $\left(\sigma_{a,b}\left(U_t\right) Y_t, B_t, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}\right)$, unde

- *Y_t este mişcarea Browniană reflectată pe $[0,\infty)$ construită din mişcarea Browniană B_t,*
- *U_t este o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t ce ia valoarea 1 cu probabilitate $\frac{b}{b-a}$,*
- *iar $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$ este filtraţia generată de B_t şi U_t ce verifică condiţiile uzuale.*

Reciproc, orice soluţie slabă $\left(X_t, B_t, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}\right)$ a EDS (9) are reprezentarea $X_t = \sigma_{a,b}\left(U_t\right) Y_t$, unde U_t şi Y_t sunt ca mai sus.

φ-existenţă şi unicitate pentru o EDS degenerată

Theorem ([Pa13b])

Fie $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă astfel încât $|\sigma|$ este mărginită de constante strict pozitive, şi există o funcţie crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq |f(x) - f(y)|, \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Mai mult, presupunem că σ este o funcţie impară pe $\mathbb{R}^*$ şi că $x\sigma(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Are loc $|x|$-unicitatea tare pentru ecuaţia diferenţială stochastică

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s, \qquad t \geq 0, \tag{12}$$

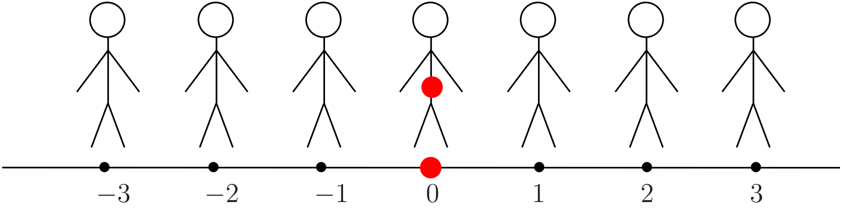
unde B_t este o mişcare Browniană 1-dimensională.
O $|x|$-soluţie tare (şi o soluţie slabă) este dată explicit de $(U_t Y_t, B_t, \mathcal{F}_t)$ unde Y_t este soluţia traiectorial unică a ecuaţiei

$$Y_t = \int_0^t |\sigma(Y_s)|\, dB_s + \widehat{L}_t^0(Y), \qquad t \geq 0, \tag{13}$$

şi U_t este o alegere de semn i.i.d. pentru Y_t ce ia valori ± 1 cu probabilităţi egale.
Mai mult, orice soluţie slabă a ecuaţiei (12) admite reprezentarea $X_t = U_t Y_t$, unde U_t şi Y_t sunt ca mai sus.

Un model probabilistic de circulaţie a banilor

Membrii populaţiei decid să păstreze sau să dea banii (moneda) cu aceeaşi probabilitate (constantă în timp), decizia fiind independentă de deciziile anterioare, precum şi de deciziile restului populaţiei.
Dacă un individ decide să dea moneda, el o dă unuia din cei doi vecinii ai săi, cu probabilităţi egale.



Modelul matematic: pe spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ fixat, considerăm şirurile de variabile aleatoare i.i.d., independente de unele de altele:

i) $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ - variabile aleatoare ce iau valori ± 1 cu probabilităţi egale
(Y_i reprezintă incrementul poziţiei monedei la momentul de timp i, dacă individul ce are moneda la acest moment de timp este de acord să o dea unuia din vecinii săi)

ii) $(U_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}, j\in\mathbb{N}}$ - variabile aleatoare Bernoulli ce iau valoarea 1 cu probabilitate $p \in (0,1)$
($U_{i,j} = 1$ dacă individul i are moneda la momentul de timp j şi este de acord să dea moneda unuia din vecinii săi, $U_{i,j} = 0$ în rest)

iii) Filtraţia $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\mathcal{F}_0 = \sigma\left(U_{i,0} : i \in \mathbb{Z}\right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma\left(U_{i,j}, Y_k : i \in \mathbb{Z}, j < n, k \leq n\right)$, $n \geq 1$ ($\mathcal{F}_n$ reprezintă σ-algebra evenimentelor cunoscute la timpul $n \in \mathbb{N}^*$)

Drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al monedei este dat de

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ X_1 + \ldots + X_n, & n \geq 1 \end{cases}, \text{ unde } X_{n+1} = U_{S_n,n} Y_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1}, & \text{dacă } U_{S_n,n} = 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}. \qquad (14)$$

Legi limită ale procesului

Proposition ([Pa13a])

Drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este o* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$*-martingală recurentă şi ireductibilă.*

Theorem ([Pa13a])

Drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definit de (14) verifică următoarele.*
*(**SLLN**) Are loc convergenţa aproape sigură*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0. \tag{15}$$

*(**CLT**) Are loc de asemenea convergenţa în distribuţie*

$$\frac{S_n}{\sqrt{np}}\xrightarrow{\mathcal{D}} Z\in\mathcal{N}(0,1). \tag{16}$$

*(**FCLT**) Mai mult, dacă* $(\xi_n(t))_{0\le t\le 1}$ *este procesul continuu*

$$\xi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{np}}\left(S_k+X_{k+1}(nt-k)\right),\qquad \frac{k}{n}\le t\le\frac{k+1}{n}\quad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

obţinut prin interpolare liniară între puncte consecutive din şirul de puncte $\left(\frac{k}{n},\frac{S_k}{\sqrt{np}}\right)_{0\le k\le n}$*, atunci toate distribuţiile finit dimensionale ale procesului* $\xi_n(t)$ *converg slab pentru* $n\to\infty$ *către distribuţiile finit dimensionale corespunzătoare ale unei mişcări Browniene standard* $(B_t)_{0\le t\le 1}$ *cu* $B_0=0$*.*

Extensii ale modelului

- *Membrii populaţiei decid să păstreze sau să dea monedă cu o anumită probabilitate (nu neapărat aceeaşi pentru toţi membrii, dar constantă în timp), decizia fiind independentă de deciziile anterioare, precum şi de deciziile restului populaţiei. Dacă un individ decide să dea moneda, el o dă unuia din cei doi vecinii ai săi, cu probabilităţi egale.*
- Modelul matematic extins este similar celui anterior, cu următoarea modificare:
  - ii) $(U_{i,j})_{i\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{N}}$ - variabile aleatoare Bernoulli ce iau valoarea 1 cu probabilitate $p_i \in (0,1)$ ($U_{i,j} = 1$ dacă individul i are moneda la momentul de timp j şi este de acord să dea moneda unuia din vecinii săi, şi $U_{i,j} = 0$ în rest).
- Rezultate pentru modelul extins:

Proposition ([Pa12])

Dacă $p_i > 0$ oricare ar fi $i \in \mathbb{Z}$, atunci drumul aleator $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingală recurentă şi ireductibilă.

Theorem ([Pa12])

*(**SLLN**) Dacă $\inf_{i\in\mathbb{N}} p_i = p > 0$, atunci are loc convergenţa aproape sigură*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0. \tag{17}$$

Concluzii/implicaţii economice

- Deoarece drumul aleator S_n al monedei este recurent, dacă un individ este în posesia monedei la un anumit moment de timp, atunci cu siguranţă el va primi din nou moneda în viitor (de o infinitate de ori). Din punct de vedere Economic acesta este un deziderat, pentru că arată o bună circulaţie a banilor în interiorul societăţii.
- Faptul că drumul aleator ale monedei este ireductibil, arată că modelul considerat este corect (fiecare individ al societăţii va fi în posesia monedei la un anumit moment de timp).
- Faptul că drumul aleator este o martingală arată că modelul considerat este corect (nu există o tendinţă particulară a monedei de a favoriza o anumită regiune a societăţii).
- Rezultatele de convergenţă obţinute pot fi folosite pentru a calcula diverse probabilităţi legate de drumul aleator al monedei (probabilităţile legate de drumul aleator S_n pot fi aproximate prin probabilităţile corespunzătoare ale unei mişcări Browniene 1-dimensionale).

References

[Ba82] Barlow, M. T., 1982. One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution. J. London Math. Soc., 26 (2), pag. 335 – 347.

[BaPe84] Barlow, M. T. and Perkins, E., 1984. One-dimensional stochastic differential equations involving a singular increasing process. Stochastics **12**, pag. 229 – 249.

[BaBuCh07] Bass, R. F. , Burdzy, K. and Chen, Z. Q. , 2007. Pathwise uniqueness for a degenerate stochastic differential equation. Ann. Probab. **35** (6), pag. 2385 – 2418.

[BaCh01] Bass, R. and Chen, Z. Q. 2001. Stochastic ifferential equations for Dirichlet processes. Probab. Theory Relat. Fields, **121**, pag. 422 – 446.

[Be09] Berstrom, T. C., 2009. Ethics, evolution, and games among family and neighbors. Disponibil la: http://works.bepress.com/ted_bergstrom/106.

[Be07] Bergstrom, T. C. , 2007. Some Evolutionary Economics of Family Partnerships. Am. Econ. Rev., **97** (2), pag. 482 – 486.

[Be95] Bergstrom, T. C., 1995. On the evolution of altruistic ethical rules for siblings. Am. Econ. Rev. **85** (1), pag. 58 – 81.

[Br71] Brown, B. M., 1971. Martingale central limit theorems. Ann. Math. Statist., 42 (1), pag. 59 – 66.

[EnSc84] Engelbert, H. J. and Schmidt, W., 1984. On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift. Berlin: Springer-Verlag. Lecture Notes in Control and Information Sciences, **69**, pag. 143 – 155. .

[EnSc85] Engelbert, H. J. and Schmidt, W., 1985. On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 68 (3), pag. 287 – 314.

[Ga83] Le Gall, J. F., 1983. Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. Berlin: Springer. Lecture Notes in Math. 986, pag. 15 – 31.

[HaHe80] Hall, P. and Heyde, C. C., 1980. Martingale Limit Theory and Its Application. New York-London: Academic Press, Inc.

[It46] Itô, K., 1946. On a stochastic integral equation. Proc. Japan Acad., **22** (1-4), pag. 32 – 35.

[KaSh91] Karatzas, I. and Shreve, S. E., 1991. Brownian motion and stochastic calculus. 2nd edition. New York: Springer-Verlag.

[Na72] Nakao, S. 1972. On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations. Osaka J. Math., **9**, pag. 513 – 518.

[PaPa11a] Pascu, M. N. and Pascu, N. R., 2011. A note on the sticky Brownian motion on $\mathbb{R}$. Bull. Transilvania Univ. of Braşov (Series III), **4**(**2**), pag. 57 – 62.

[PaPa11b] Pascu, M. N. and Pascu, N. R., 2011. A closer look at the solutions of a degenerate stochastic differential equation. Bull. Transilvania Univ. of Braşov (Series III), **4**(1), pag. 59 – 66.

[Pa12] Pascu, M. N., Pascu, N. R., 2012. A Strong Law of Large number for a probabilistic cash flow model. Bull. Transilvania Univ. of Braşov (Series III), **5**(2), pag. 49 – 56.

[Pa13a] Pascu, M. N., 2013. A probabilistic cash flow model, Math. Rep. (va apare).

[Pa13b] Pascu, M. N. 2013. φ-strong solutions and uniqueness of 1-dimensional stochastic differential equations. (va apare).

[YaWa71a] Yamada, T. and Watanabe, S. 1971. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. **11**, pag. 155 – 167.

[YaWa71b] Yamada, T. and Watanabe, S., 1971. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations II. J. Math. Kyoto Univ., **11**, pag. 553 – 563.

[Zh94] Zhang, T. S., 1994. On the strong solutions of one-dimensional stochastic differential equations with reflecting boundary. Stochastic Process Appl., **50**, pag. 135 – 147.

[Zv74] Zvonkin, A. K., 1974. A transformation of the phase space of a diffusion process that will remove the drift. Mat. Sb., **93**(135), pag. 129 – 149.