

Modele de Sisteme Dinamice Neliniare in Economie

Proiect POSDRU/89/1.5/S/62988

Eugen Mihailescu,
IMAR, Bucuresti

Sinteza rezultatelor

- In cadrul acestui proiect POSDRU, am introdus si studiat diverse metode de **sisteme dinamice hiperbolice si teorie ergodica**, aplicate unor modele economice definite implicit, cat si unor modele financiare cu dinamica haotica sau puternic neliniara. Acestea sunt metode si idei noi, originale care se pot aplica cu succes unor modele din economie.
- Rezultatele cercetarilor au fost publicate in **2 articole stiintifice** care au aparut in **jurnale ISI de prestigiu** pe plan international, si anume:
 - 1) E. Mihailescu, Inverse limits and statistical properties for chaotic implicitly defined economic models, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **394**, 517–528, 2012. **Factor de impact ISI in 2012: 1,001.**
 - 2) E. Mihailescu, Equilibrium measures, prehistories distributions and fractal dimensions for endomorphisms, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **32**, no. 7, 2485-2502, 2012. **Factor de impact ISI in 2012: 0,913.**

Modele studiate si metode principale

Am studiat dinamica si teoria ergodica pentru anumite modele economice care sunt definite implicit. Am considerat:

- 1) **Modelul generatiilor suprapuse** OLG 1-dimensional si 2-dimensional;
- 2) **Modelul cash-in-advance**;
- 3) **Modelul de tip cobweb cu ajustari adaptate**;
- 4) **Modelul pietelor eterogene**.

In acest scop am considerat **spatii de limite inverse** pentru fractalii haotici invarianti asociati.

Spatiile de limite inverse dau multimile de echilibre intertemporale asociate problemei respective. Modelele considerate prezinta o **dinamica neinvertabila**, cat si un **comportament haotic**.

In unele din aceste modele avem:

---multimi de tip **horseshoe** hiperbolice (precum in modelul cobweb, Onozaki, Zhang, etc.),

--- in altele avem multimi invariante asociate unor **orbite transverse omoclinice/eteroclinice** provenite din puncte periodice de tip sa (precum in modelul pietelor eterogene, Foroni, etc.),

--- in altele exista **repelori de tip snap-back** precum in modele 1- si 2-dimensionale de generatii suprapuse (de exemplu Gardini, Tramontana)

Deasemenea in cazul unor aplicatii unimodale care descriu unele scenarii de generatii suprapuse, avem un comportament haotic pe:

---**multimi Cantor de respingere invariante**, de exemplu in cazul aplicatiei logistice F_{ν} , $\nu > 4$ (Medio, Robinson, etc.)

Exista deasemenea multe **procese financiare** date prin serii temporale discrete, cum ar fi cotationile indicelui SP 500 sau ale altor pietee financiare, sau diverse cotationi ale ratelor de schimb valutar.

Si in aceste cazuri exista un comportament haotic si din tabelele de cotationi se poate extrage un atractor haotic prin metoda reconstructiei a lui Takens. Pe acest atractor se pot studia coeficientii Liapunov, dimensiunea Hausdorff si alti invarianti numerici care descriu complexitatea fenomenului, si se pot face predictii pe termen scurt/mediu.

Pentru modelele economice si financiare de mai sus se pot investiga si proprietatile statistice, determinate de anumite masuri invariante, de exp.:

---masura de entropie maximala pe o multime fractala Λ ,

---masuri de echilibru ale unor potentiali Holder reprezentati de functii de utilitate,

---masura SRB (in caz ca exista), sau masura inversa SRB (in caz ca exista),

---unele masuri absolut continue.

In economie, o importanta deosebita o au **functiile de utilitate (utility functions)**, care descriu evolutia in timp a preferintelor consumatorilor pentru un anumit bun.

In cazul sistemelor economice definite implicit, aceste functii sunt definite pe **spatiile de echilibre intertemporale**, reprezentate de spatiile de siruri de nivele optime consecutive, permise in viitor de catre dinamica implicita.

Spatiul de echilibre intertemporale asociat sistemului dinamic (f, Λ) este de fapt dat de **limita inversa** $\hat{\Lambda}$ impreuna cu metrica sa canonica.

Am aratat ca functiile de utilitate $W(\hat{x})$ definite pe limita inversa $\hat{\Lambda}$ a fractalului invariant Λ sunt de fapt **Holder continue** in raport cu metrica de pe $\hat{\Lambda}$.

Cum limita inversa a unei multimi bazice hiperbolice are proprietatea de specificare, rezulta ca putem aplica formalismul termodinamic pentru aceste functii de utilitate W si ca, data fiind W , exista o **unica masura de echilibru** a sa, $\hat{\mu}_W$.

In modelele economice si financiare mentionate in Capitolul 2 al tezei, avem un caracter haotic dat de hiperbolicitate, ceea ce face ca limitele inverse ale multimilor lor invariante (cat si functiile de utilitate pe aceste limite inverse), sa se gaseasca in cadrul de mai sus.

Am demonstrat in Capitolul 3 ca integrala lui W in raport cu o masura probabilistica f -invarianta $\hat{\mu}$ pe limita inversa $\hat{\Lambda}$, se poate calcula folosind valorile unei functii de U in raport cu **proiectia** μ a masurii $\hat{\mu}$, iar μ este o masura probabilistica f -invarianta pe multimea fractala respectiva.

Cum in general, in practica sistemele dinamice nu sunt cunoscute cu o precizie extrem de buna, este important ca sa avem **stabilitate la perturbatii** ale sistemului.

Am aratat ca pentru modelele economice din Capitolul 2 avem intr-adevar stabilitate pe limitele inverse asociate.

Deasemenea fiind data o functie de referinta U si un factor de discount in $(0, 1)$, avem functii de utilitate W_g definite pe limita inversa $\hat{\Lambda}_g$, unde Λ_g este multimea bazica hiperbolica asociata unei perturbatii diferentiabile g a sistemului initial.

Asadar putem lucra cu functii de utilitate ale caror medii in raport cu masurile de entropie maximala, **nu variaza mult la perturbatii**.

Studiul functiilor de utilitate este deosebit de important pentru stabilirea unor politici guvernamentale **pe termen lung**, prin compararea valorilor medii ale utilitatilor in raport cu anumite distributii.

Astfel, am aratat ca se pot compara eficient:

---**valoarea medie** a unei functii de utilitate $U(x, y)$ in raport cu **masura de entropie maximala** a sistemului, si,

--**valoarea medie** a lui $U(x, y)$ in raport cu **masura de echilibru μ_U** a lui U .

Masura de echilibru maximizeaza valoarea medie a lui U pastrand in acelasi timp sistemul cat de mult sub control cu putinta, in sensul de a minimiza expresia $P(U) - \int U d\mu$, atunci cand μ este o masura invarianta si probabilistica.

In acest mod se pot **compara efectele unor distributii pe spatiul de echilibre intertemporale**, din punct de vedere al diverselor functii de utilitate si in conditii variate:

- pastrand sistemul cat mai controlat cu putinta (deci cu entropie minimala) sau,
- lasand sistemul intr-un grad maxim de dezordine (adica entropie maximala), etc.

Am aratat deasemenea ca valorile medii in raport cu **masurile de echilibru** sunt mai **mari** decat cele in raport cu masurile de entropie maximala.

Aceasta sugereaza ca, din punct de vedere al utilitatii W , este in general **mai convenabil** sa se mentina sistemul sub controlul dat strict de catre masura de echilibru $\hat{\mu}_W$.

Deasemenea in Capitolul 3 am studiat si unele **proprietati statistice**

ale probabilitatilor invariante definite pentru modelele economice de mai sus, si anume:

-- proprietatea de *mixing* de orice ordin,

-- *descresterea exponentiala a corelatiilor*,

-- si in unele cazuri, proprietatea de *shift Bernoulli unilateral*.

Pentru modelele economice din Capitolul 2 se pot introduce masurile de echilibru ale functiilor de utilitate sau masurile de entropie maximala, si din proprietatile statistice de mai sus rezulta descresterea exponentiala a corelatiilor, ceea ce este util in **simularile numerice**.

In cazul modelului cobweb cu ajustari adaptate de exemplu, se obtine o multime invarianta de tip horseshoe pe care masura de entropie maximala **nu este izomorfa** cu un shift Bernoulli unilateral, desi este **mixing** de orice ordin.

Pe de alta parte, in cazul modelului OLG dat de functii unimodale de tip C, avem multimi invariante pe care masurile respective de entropie maximala sunt de fapt izomorfe cu shift-uri Bernoulli unilaterale.

In cadrul proiectului am aratat si ca valorile medii ale functiilor de utilitate pe spatii de echilibre intertemporale se pot **aproxima** cu unele valori medii mai usor de calculat pe **proiectii** ale limitelor inverse.

In cazul unor **procese financiare** date de serii temporale se poate determina in unele cazuri un comportament puternic neliniar sau chiar haotic, folosind dimensiunea de corelare Grassberger-Procaccia, si apoi aproximand atractorul de sistem. Si in acest caz sunt utile din punct de vedere al predictiilor pe termen scurt sau mediu, proprietatile metrice si statistice.

Deasemenea atractorul Λ se poate studia din punct de vedere al **entropiei topologice**, al **exponentilor Liapunov** ai masurii SRB asociate, sau din punct de vedere al **dimensiunii Hausdorff** (sau cea superioara/inferioara) pe sectiuni prin Λ cu varietati stabile sau instabile.

In cazul neinversabil si hiperbolic aceasta este o problema deosebit de dificila care necesita tehnici si idei noi fata de cazul difeomorfismelor sau al aplicatiilor de dilatare.

Pentru o familie de functii care apar des in modelele economice si financiare, si anume **functiile logistice** definite de:

$$F_{\nu}(x) = \nu x (1-x), x \in [0, 1),$$

si pentru functii de utilitate pe spatiile de echilibre intertemporale atasate fractalilor invarianti Λ_{ν} ,

W_{β} , determinate de factorul de discount β in $(0, 1)$,

am comparat efectiv valorile medii in functie de parametrii reali:

β = **factorul de discount**, si

ν = **factorul de evolutie**.